

Übung 3: Log-Likelihood-Ratio

Rechenübung

Gegeben sei die folgende Kontingenztafel:

		München ¹	München ²	
1	Bayern	23 O_{11}	? O_{12}	211 O_{1-}
2	Bayern	? O_{21}	? O_{22}	? O_{2-}
		315 O_{-1}	? O_{-2}	15700 O_{--}

$$\begin{aligned}
 O_{11} &= 23 & O_{1-} &= 211 \\
 O_{12} &= O_{1-} - O_{11} = 188 & O_{--} &= 15700 \\
 O_{21} &= O_{-1} - O_{11} = 292 & O_{-1} &= 315 \\
 O_{22} &= O_{2-} - O_{21} = 15385 & & \\
 O_{2-} &= 15487 & & \\
 O_{22} &= O_{2-} - O_{21} = 15187 & &
 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die fehlenden beobachteten Werte (?) in der Tabelle.

Berechnen Sie dann die erwarteten Werte:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \frac{O_{1-} \cdot O_{-1}}{O_{--}} = \frac{211 \times 315}{15700} = 4.23 \\
 E_{12} &= \frac{O_{1-} \cdot O_{-2}}{O_{--}} = \frac{211 \times 1538}{15700} = 20.77 \\
 E_{21} &= \frac{O_{2-} \cdot O_{-1}}{O_{--}} = \frac{15487 \times 315}{15700} = 310.77 \\
 E_{22} &= \frac{O_{2-} \cdot O_{-2}}{O_{--}} = \frac{15487 \times 1538}{15700} = 15178.23
 \end{aligned}$$

Berechnen Sie schließlich den folgenden Wert:

$$LLR = 2 \sum_{ij} O_{ij} \log_2 \frac{O_{ij}}{E_{ij}}$$

$$LLR = 2 \times \left(O_{11} \log_2 \frac{O_{11}}{E_{11}} + O_{12} \log_2 \frac{O_{12}}{E_{12}} + O_{21} \log_2 \frac{O_{21}}{E_{21}} + O_{22} \log_2 \frac{O_{22}}{E_{22}} \right)$$

$$O_{11} \log_2 \frac{O_{11}}{E_{11}} = 23 \times \log_2 \frac{23}{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \times \left(23 \times \log_2 \frac{23}{4.23} + 188 \times \log_2 \frac{188}{20.77} + 292 \times \log_2 \frac{292}{310.77} \right. \\
 &\quad \left. + 15187 \times \log_2 \frac{15187}{15178.23} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \times (56.79 + (-25.81) + (-26.24) + 12.66) \\
 &= 33.6
 \end{aligned}$$