Fulton-Harris Proposition 15.15

Darij Grinberg

Version 0.2 (12 August 2012)

Das Ziel dieser Notiz ist es, Proposition 15.15 aus dem Buch [1] von Fulton-Harris auf eine andere Weise zu beweisen. Dieser Beweis hat gegenüber dem in [1] gegebenen zwei Vorteile:

- Er ist elementar und straightforward (und verwendet keine Schurpolynome).
- Er ist korrekt. (Fairerweise muß hier dazugesagt werden, daß der Beweis in [1] nicht *so* falsch ist. Der Fehler ist sehr subtil und nicht schwer zu beheben.[1])

Erstmal kurz der Kontext, aus dem Proposition 15.15 stammt: Wenn wir eine der irreduziblen polynomiellen Darstellungen der Gruppe $\operatorname{GL} V$ zu einer Darstellung der Gruppe $\operatorname{SL} V$ einschränken, und aus dieser durch Ableiten eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}(V)$ erhalten, was ist dann das höchste Gewicht dieser Darstellung? Diese Frage beantwortet Proposition 15.15.

Dabei müssen wir die Cartan-Unteralgebra als die Unteralgebra der diagonalen Matrizen wählen und das lineare Funktional auf dem Gewichtsraum so, daß $L_1 > L_2 > ... > L_n$ ist. Dies ist mehr oder weniger die sinnvollste Wahl; die anderen Wahlen liefern keine grundsätzlich neuen Erkenntnisse[2].

Proposition 15.15: Sei λ eine Partition einer natürlichen Zahl m, also eine Folge $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ von natürlichen[3] Zahlen mit $\lambda_1 + \lambda_2 + ... = m$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ....$ Sei V der Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Sei c_λ der Young-Symmetrierer zur Partition λ. Bekanntlich ist dann $c_\lambda V^{\otimes m}$ eine polynomielle Darstellung der Gruppe $\operatorname{GL} V$. (Diese Darstellung $c_\lambda V^{\otimes m}$ ist isomorph zur Darstellung

---

[1] Der Fehler besteht im folgenden Schluss (in den ersten drei Zeilen von Seite 224 von [1]):
"Since the sum is over those partitions μ for which the first nonzero $\lambda_i - \mu_i$ is positive, the highest weight that appears is $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$, which concludes the proof."

Dies stimmt so nicht (zumindest nicht für jedes lineare Funktional l, das durch $l\left(\sum a_i L_i\right) = \sum c_i a_i$ mit $c_1 > c_2 > ... > c_n$ gegeben ist).

Um sicherzugehen, daß für zwei n-Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ und $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ ganzer Zahlen mit $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$ das Gewicht $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$ größer oder gleich dem Gewicht $\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n$ ist, reicht es *nicht* aus, zu zeigen, daß das erste von 0 verschiedene $\lambda_i - \mu_i$ positiv ist, sondern man muß stärker

$$\begin{gathered}\lambda_1 \geq \mu_1;\\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2;\\ ...\\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n-1};\\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n\end{gathered}$$

zeigen.

[2] Denn alle Cartan-Unteralgebren von $\mathfrak{sl}(V)$ gehen durch Konjugation ineinander über, und die Forderung $L_1 > L_2 > ... > L_n$ zwingt das lineare Funktional in eine Weylkammer, was keine große Einschränkung ist, da alle Weylkammern auseinander durch die Weylgruppenwirkung hervorgehen.

[3] Als *natürliche Zahlen* lasse ich hier alle ganzen Zahlen ≥ 0 gelten, also auch 0.

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[S_m]}\left(c_\lambda \mathbb{C}\left[S_m\right], V^{\otimes m}\right)$ (wobei S_m auf $V^{\otimes m}$ durch Permutation der Tensoranden wirkt) und wird in [1] als $\mathbb{S}_\lambda\left(V\right)$ bezeichnet.) Durch Restriktion wird $c_\lambda V^{\otimes m}$ zu einer Darstellung der Gruppe $\mathrm{SL}\, V$, und durch Ableiten erhält man daraus eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}\left(V\right)$.

Wir führen in der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}\left(V\right)$ die Cartan-Unteralgebra

$$\mathfrak{h} = \left\{\text{Diagonalmatrizen in } \mathfrak{sl}\left(V\right)\right\}$$

ein, und wir definieren n Elemente L_1, L_2, ..., L_n des Dualraums $\mathfrak{h}^*$ durch

$$L_i\left(x\right) = \left(\text{Eintrag der Matrix } x \text{ in Zelle } \left(i,i\right)\right) \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{h}.$$

[4] Auf dem $(n-1)$-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, der von L_1, L_2, ..., L_n erzeugt wird, sei ein lineares Funktional $\ell : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \to \mathbb{R}$ so gewählt, daß $\ell\left(L_1\right) > \ell\left(L_2\right) > ... > \ell\left(L_n\right)$ ist (so ein Funktional existiert, wie man sich leicht überlegt[5]). Dann ist $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ das höchste Gewicht der Darstellung $c_\lambda V^{\otimes m}$ von $\mathfrak{sl}\left(V\right)$ (bezüglich dem Funktional ℓ).

Beweis von Proposition 15.15: Schauen wir uns die Gewichtsräume der $\mathfrak{sl}\left(V\right)$-Darstellung $V^{\otimes m}$ an: Sei $\left(e_1, e_2, ..., e_n\right)$ die Standardbasis von $V = \mathbb{C}^n$. Dann ist $\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}\right)_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq n}$ eine Basis von $V^{\otimes m}$. Somit ist

$$V^{\otimes m} = \sum_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq n} \left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}\right) \mathbb{C}.$$

Für jede $1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq n$ ist aber $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ ein Gewichtsvektor von $\mathfrak{sl}\left(V\right)$, nämlich einer zum Gewicht $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m}$. Warum?

Um dies zu beweisen, müssen wir zeigen, daß

$$\left(\rho'\left(x\right)\right)\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}\right) = \left(L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m}\right)\left(x\right) \cdot \left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}\right)$$

für jedes $x \in \mathfrak{h}$ ist, wobei $\rho' : \mathfrak{sl}\left(V\right) \to \mathrm{End}\left(V^{\otimes m}\right)$ die Darstellung von $\mathfrak{sl}\left(V\right)$ auf $V^{\otimes m}$ ist.

Wegen $x \in \mathfrak{h} = \left\{\text{Diagonalmatrizen in } \mathfrak{sl}\left(V\right)\right\}$ gilt $x = \mathrm{diag}\left(t_1, t_2, ..., t_n\right)$ für gewisse $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{C}$ mit $t_1 + t_2 + ... + t_n = 0$. Nun haben wir eine Funktion

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\to \mathrm{SL}\left(V\right), \\ \tau &\mapsto \mathrm{diag}\left(e^{t_1\tau}, e^{t_2\tau}, ..., e^{t_n\tau}\right), \end{aligned}$$

und diese Funktion u erfüllt $u\left(0\right) = I_n$ und

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{d\tau} u\left(\tau\right)\right|_{\tau=0} &= \left.\frac{d}{d\tau} \mathrm{diag}\left(e^{t_1\tau}, e^{t_2\tau}, ..., e^{t_n\tau}\right)\right|_{\tau=0} = \mathrm{diag}\left(\left.\frac{d}{d\tau} e^{t_1\tau}\right|_{\tau=0}, \left.\frac{d}{d\tau} e^{t_2\tau}\right|_{\tau=0}, ..., \left.\frac{d}{d\tau} e^{t_n\tau}\right|_{\tau=0}\right) \\ &= \mathrm{diag}\left(t_1, t_2, ..., t_n\right) = x. \end{aligned}$$

---

[4] Diese n Elemente sind durch die Relation $L_1 + L_2 + ... + L_n = 0$ miteinander verbunden.

[5] Beispielsweise kann man ein solches Funktional ℓ definieren als die Einschränkung des Funktionals

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^* &\to \mathbb{C}, \\ f &\mapsto f\left(\mathrm{diag}\left(n-1, n-3, ..., -n+3, -n+1\right)\right) \end{aligned}$$

auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.

Folglich ist $\rho'(x) = \left.\frac{d}{d\tau}\rho(u(\tau))\right|_{\tau=0}$, wobei $\rho : \mathrm{SL}(V) \to \mathrm{End}(V^{\otimes m})$ die Darstellung von $\mathrm{SL}(V)$ auf $V^{\otimes m}$ ist. Nun ist

$$\begin{aligned}(\rho(u(\tau)))(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) &= \left(\rho\left(\mathrm{diag}\left(e^{t_1\tau}, e^{t_2\tau}, ..., e^{t_n\tau}\right)\right)\right)(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) \\ &= e^{t_{i_1}\tau}e_{i_1} \otimes e^{t_{i_2}\tau}e_{i_2} \otimes ... \otimes e^{t_{i_m}\tau}e_{i_m} \\ &= e^{\left(t_{i_1}+t_{i_2}+...+t_{i_m}\right)\tau}(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}),\end{aligned}$$

und somit

$$\underbrace{(\rho'(x))}_{=\left.\frac{d}{d\tau}\rho(u(\tau))\right|_{\tau=0}}(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) = \left.\frac{d}{d\tau}\rho(u(\tau))\right|_{\tau=0}(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})$$

$$= \left.\frac{d}{d\tau}\underbrace{(\rho(u(\tau)))(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})}_{=e^{\left(t_{i_1}+t_{i_2}+...+t_{i_m}\right)\tau}(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes ...\otimes e_{i_m})}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{d}{d\tau}e^{\left(t_{i_1}+t_{i_2}+...+t_{i_m}\right)\tau}(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})\right|_{\tau=0}$$

$$= (t_{i_1} + t_{i_2} + ... + t_{i_m})(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}).$$

Da $t_{i_1} + t_{i_2} + ... + t_{i_m} = (L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m})(x)$ ist (denn $x = \mathrm{diag}(t_1, t_2, ..., t_n)$), wird dies zu

$$(\rho'(x))(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) = (L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m})(x) \cdot (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}),$$

und damit wissen wir, daß $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ ein Gewichtsvektor zum Gewicht $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m}$ ist. Somit ist auch $c_\lambda(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})$ ein Gewichtsvektor zum Gewicht $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m}$ (denn die Wirkung von c_λ kommutiert mit der Wirkung von $\mathfrak{sl}(V)$, weil sie bereits mit der Wirkung von $\mathrm{GL}\,V$ kommutiert). Aus $V^{\otimes m} = \sum\limits_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq n} (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})\mathbb{C}$ folgt aber

$$c_\lambda V^{\otimes m} = \sum_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq n} c_\lambda(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})\mathbb{C}.$$

Nun ist diese Summe (im Allgemeinen) keine direkte Summe, und es kann passieren, daß für gewisse $1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq n$ der Vektor $c_\lambda(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})$ einfach 0 ist. Das wird sogar ziemlich oft passieren. Wir wollen herausfinden, wann es passiert. Dazu müssen wir ein wenig Notation einführen:

Zuerst erinnern wir uns daran, wie c_λ definiert wurde: Sei T das Youngtableau zur Partition λ, das mit den Zahlen 1, 2, ..., m aufgefüllt wurde (zeilenweise von links nach rechts, mit der oberen Zeile anfangend[6]). Wir identifizieren die Menge $\{1, 2, ..., m\}$ mit der Menge der Kästchen in diesem Tableau T, und deuten daher Permutationen in S_m als Permutationen der Kästchen. Wir können damit zwei Funktionen

$$\begin{aligned}&\mathrm{row} : \{1, 2, ..., m\} \to \mathbb{N}, \\ &\qquad i \mapsto (\text{die Nummer der Zeile des Tableaus } T\text{, in der das Kästchen mit der Zahl } i \text{ steht})\end{aligned}$$

[6]Hierbei stellen wir uns das Youngtableau T in der englischen Notation gezeichnet vor; die obere Zeile ist also die längste, usw.

und

$$\mathrm{col}:\{1,2,...,m\}\to\mathbb{N},$$
$$i\mapsto(\text{die Nummer der Spalte des Tableaus } T\text{, in der das Kästchen mit der Zahl } i \text{ steht})$$

definieren. Sei R die Untergruppe $\{r\in S_m \mid \mathrm{row}\circ r=\mathrm{row}\}$ von S_m, und sei C die Untergruppe $\{c\in S_m \mid \mathrm{col}\circ c=\mathrm{col}\}$ von S_m. Sei $a_\lambda=\frac{1}{|R|}\sum_{r\in R}r\in\mathbb{C}[S_m]$ und sei $b_\lambda=\frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}(-1)^c c\in\mathbb{C}[S_m]$. Dann wurde c_λ als Produkt $a_\lambda b_\lambda$ definiert. Es sei angemerkt, daß $R\cap C=\{\mathrm{id}\}\subseteq S_m$ ist.

Jetzt behaupten wir:

Aussage 1: Ist $(i_1,i_2,...,i_m)$ das m-Tupel $(\mathrm{row}\,1,\mathrm{row}\,2,...,\mathrm{row}\,m)$, dann ist $c_\lambda(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes...\otimes e_{i_m})\neq 0$, und somit ist $L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m}$ tatsächlich ein Gewicht der Darstellung $c_\lambda V^{\otimes m}$. Dieses Gewicht $L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m}$ ist in diesem Falle gleich $\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+...+\lambda_nL_n$.

Aussage 2: Ist $(i_1,i_2,...,i_m)$ ein m-Tupel von Zahlen mit $1\leq i_1,i_2,...,i_m\leq n$, so daß das Gewicht $L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m}$ größer als das Gewicht $\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+...+\lambda_nL_n$ ist (bezüglich des Funktionals ℓ), dann ist $c_\lambda(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes...\otimes e_{i_m})=0$.

Der Sinn dieser beiden Aussagen ist folgender: Wenn wir sie erst einmal bewiesen haben, folgt aus Aussage 2, daß man in der Summe

$$c_\lambda V^{\otimes m}=\sum_{1\leq i_1,i_2,...,i_m\leq n}c_\lambda(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes...\otimes e_{i_m})\,\mathbb{C}$$

alle Summanden, für die das Gewicht $L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m}$ größer als das Gewicht $\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+...+\lambda_nL_n$ ist, wegstreichen kann (weil diese Summanden Null sind). Man erhält somit

$$\begin{aligned}c_\lambda V^{\otimes m}&=\sum_{\substack{1\leq i_1,i_2,...,i_m\leq n;\\ \text{das Gewicht } L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m} \text{ ist nicht}\\ \text{größer als das Gewicht } \lambda_1L_1+\lambda_2L_2+...+\lambda_nL_n}}\underbrace{c_\lambda(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes...\otimes e_{i_m})\,\mathbb{C}}_{\substack{\subseteq\text{Gewichtsraum zum Gewicht } L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m}\\ (\text{denn } c_\lambda\left(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes...\otimes e_{i_m}\right) \text{ ist ein Gewichtsvektor}\\ \text{zum Gewicht } L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m})}}\\
&\subseteq\sum_{\substack{1\leq i_1,i_2,...,i_m\leq n;\\ \text{das Gewicht } L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m} \text{ ist nicht}\\ \text{größer als das Gewicht } \lambda_1L_1+\lambda_2L_2+...+\lambda_nL_n}}(\text{Gewichtsraum zum Gewicht } L_{i_1}+L_{i_2}+...+L_{i_m})\\
&\subseteq\sum_{\substack{\text{Gewichte }\Lambda;\\ \Lambda\leq\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+...+\lambda_nL_n}}(\text{Gewichtsraum zum Gewicht }\Lambda),\end{aligned}$$

wobei wir hier unter "Gewichtsräumen" immer nur Gewichtsräume der Darstellung $c_\lambda V^{\otimes m}$ (und nicht Gewichtsräume der gesamten Darstellung $V^{\otimes m}$) verstehen. Wir können dies als

$$c_\lambda V^{\otimes m}=\sum_{\substack{\text{Gewichte }\Lambda;\\ \Lambda\leq\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+...+\lambda_nL_n}}(\text{Gewichtsraum zum Gewicht }\Lambda)$$

umschreiben (denn die Gewichtsräume der Darstellung $c_\lambda V^{\otimes m}$ liegen innerhalb von $c_\lambda V^{\otimes m}$). Eine Summe von Gewichtsräumen zu verschiedenen Gewichten ist immer eine direkte Summe, und somit wird dies zu

$$c_\lambda V^{\otimes m} = \bigoplus_{\substack{\text{Gewichte } \Lambda; \\ \Lambda \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n}} (\text{Gewichtsraum zum Gewicht } \Lambda) .$$

Damit haben wir die Darstellung $c_\lambda V^{\otimes m}$ in eine direkte Summe von Gewichtsräumen zerlegt, und jeder dieser Gewichtsräume gehört zu einem Gewicht Λ mit $\Lambda \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n$. Andere (von 0 verschiedene) Gewichtsräume kann $c_\lambda V^{\otimes m}$ nicht haben[7]. Daraus folgt: Jedes Gewicht Λ von $c_\lambda V^{\otimes m}$ erfüllt $\Lambda \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n$. Und $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n$ kommt auch wirklich als Gewicht in $c_\lambda V^{\otimes m}$ vor (hierfür sorgt Aussage 1). Das heißt, $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n$ ist das höchste Gewicht von $c_\lambda V^{\otimes m}$, und Proposition 15.15 ist bewiesen.

Es bleibt also nur noch, Aussagen 1 und 2 zu zeigen.

Beweis von Aussage 1: Sei $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ das m-Tupel $(\operatorname{row} 1, \operatorname{row} 2, \ldots, \operatorname{row} m)$. Es gelte also $i_k = \operatorname{row} k$ für alle $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Wir wollen erst einmal zeigen, daß $c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}) \neq 0$ ist. In der Tat wirkt die symmetrische Gruppe S_m auf $V^{\otimes m}$ durch Permutation der Tensoranden, und zwar folgendermaßen:

$$\sigma (v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$
$$\text{für alle } \sigma \in S_m \text{ und } v_1, v_2, \ldots, v_m \in V .$$

[8] Hieraus folgt

$$c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}) = \frac{1}{|R|} \frac{1}{|C|} \sum_{(c,r) \in C \times R} (-1)^c \underbrace{rc (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_m})}_{= e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes \ldots \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}}}$$
$$\left(\text{denn } c_\lambda = a_\lambda b_\lambda = \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} r \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} (-1)^c c = \frac{1}{|R|} \frac{1}{|C|} \sum_{(c,r) \in C \times R} (-1)^c rc \right)$$
$$= \frac{1}{|R|} \frac{1}{|C|} \sum_{(c,r) \in C \times R} (-1)^c e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes \ldots \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}}.$$

Um $c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}) \neq 0$ zu beweisen, müssen wir also zeigen, daß die Summe $\sum\limits_{(c,r) \in C \times R} (-1)^c e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes \ldots \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}}$ nicht 0 ist. Dies ist eine Summe, deren Summanden Basisvektoren des Vektorraums $V^{\otimes m}$ mit Vorzeichen ± 1 sind[9]. Folglich

[7] Denn jeder andere Gewichtsraum müsste von der direkten Summe $\bigoplus\limits_{\substack{\text{Gewichte } \Lambda; \\ \Lambda \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n}}$ (Gewichtsraum zum Gewicht Λ) linear unabhängig sein (weil Gewichtsräume zu verschiedenen Gewichten stets linear unabhängig sind), aber dafür ist in $c_\lambda V^{\otimes m}$ kein Platz mehr (weil die direkte Summe $\bigoplus\limits_{\substack{\text{Gewichte } \Lambda; \\ \Lambda \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_n L_n}}$ (Gewichtsraum zum Gewicht Λ) bereits ganz $c_\lambda V^{\otimes m}$ ist).

[8] Man beachte die σ^{-1} in den Indizes!

[9] Mit "Basisvektoren" meinen wir dabei Elemente der Basis $(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_m})_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq n}$ von $V^{\otimes m}$.

kann sich jeder Summand in dieser Summe *nur* gegen einen identischen Summanden mit entgegensetztem Vorzeichen kürzen, *nicht aber* gegen sonstige Summanden (weil verschiedene Basisvektoren linear unabhängig sind). Um zu beweisen, daß diese Summe nicht 0 ist, reicht es also aus, zu zeigen, daß der Summand $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ in dieser Summe mindestens einmal auftritt, und jedesmal mit dem Vorzeichen $+1$. (Denn dadurch ist ausgeschlossen, daß er sich gegen identische Summanden mit entgegensetztem Vorzeichen kürzt.)

Wir wollen also zeigen, daß der Summand $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ in der Summe $\sum\limits_{(c,r) \in C \times R} (-1)^c e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes ... \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}}$ mindestens einmal auftritt, und jedesmal mit dem Vorzeichen $+1$. Dazu müssen wir beweisen:

- Es gibt ein $(c, r) \in C \times R$ mit $(-1)^c e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes ... \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$.
- Für jedes $(c, r) \in C \times R$ mit $e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes ... \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ gilt $(-1)^c = 1$.

Diese beiden Punkte sind aber leicht zu sehen: Der erste Punkt ist klar (man nehme $(c, r) = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$), und der zweite Punkt ist einfach (wenn ein $(c, r) \in C \times R$ die Relation $e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes ... \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ erfüllt, dann muß $i_{(rc)^{-1}(k)} = i_k$ für jedes $k \in \{1, 2, ..., m\}$ gelten[10], und somit ist $(rc)^{-1} \in R$ [11], also $c^{-1} = \underbrace{(rc)^{-1}}_{\in R} \underbrace{r}_{\in R} \in R$, was wegen $c^{-1} \in C$ auf $c^{-1} \in R \cap C = \{\mathrm{id}\}$ führt, also auf $c = \mathrm{id}$ und damit auf $(-1)^c = 1$).

Wir haben damit gezeigt, daß der Summand $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ in der Summe $\sum\limits_{(c,r) \in C \times R} (-1)^c e_{i_{(rc)^{-1}(1)}} \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(2)}} \otimes ... \otimes e_{i_{(rc)^{-1}(m)}}$ mindestens einmal auftritt, und jedesmal mit dem Vorzeichen $+1$. Diese Summe ist damit nicht 0, und hieraus folgt $c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) \neq 0$.

Daß das Gewicht $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m}$ gleich $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$ ist, ist klar (denn da $(i_1, i_2, ..., i_m) = (\mathrm{row}\, 1, \mathrm{row}\, 2, ..., \mathrm{row}\, m)$ ist, kommt unter den Zahlen i_1, i_2, ..., i_m die Zahl 1 genau λ_1 mal vor, die Zahl 2 genau λ_2 mal, die Zahl 3 genau λ_3 mal, usw.). Damit ist Aussage 1 bewiesen.

Beweis von Aussage 2: Wir müssen zeigen: Wenn $c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) \neq 0$ ist, dann ist $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m} \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$.

Dazu nehmen wir an, daß $c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) \neq 0$ ist.

Für jedes positive $u \in \mathbb{N}$ sei μ_u die Anzahl der $k \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $i_k = u$. Unter den Zahlen i_1, i_2, ..., i_m kommt also die Zahl 1 genau μ_1 mal vor, die Zahl 2 genau μ_2 mal, die Zahl 3 genau μ_3 mal, usw.. Folglich ist $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m} = \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n$. Um $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m} \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$ zu

[10] Denn wenn zwei Tensoren $e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes ... \otimes e_{j_m}$ und $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ gleich sind, muß $j_k = i_k$ für jedes $k \in \{1, 2, ..., m\}$ gelten.

[11] Denn wegen $i_k = \mathrm{row}\, k$ und $i_{(rc)^{-1}(k)} = \mathrm{row}\left((rc)^{-1}(k)\right)$ wird $i_{(rc)^{-1}(k)} = i_k$ zu $\mathrm{row}\left((rc)^{-1}(k)\right) = \mathrm{row}\, k$. Da dies für alle $k \in \{1, 2, ..., m\}$ gilt, ist also $\mathrm{row} \circ (rc)^{-1} = \mathrm{row}$. Das heißt, $(rc)^{-1} \in R$.

zeigen, müssen wir also nur noch $\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$ nachweisen.

Dafür verwenden wir ein unschuldiges Lemma:

Lemma 1: Seien $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ reelle Zahlen, die

$$\begin{gathered} \lambda_1 \geq \mu_1; \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2; \\ ... \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n-1}; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n \end{gathered}$$

erfüllen. Dann ist $\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$.

Beweis von Lemma 1: Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\left(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k\right) - \left(\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k\right)\right)}_{= \sum\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i)} \left(L_k - L_{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \mu_i\right) \right) \left(L_k - L_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i - \mu_i\right) \underbrace{\sum_{k=i}^{n-1} \left(L_k - L_{k+1}\right)}_{= L_i - L_n \text{ (Teleskopsumme)}} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i - \mu_i\right) \left(L_i - L_n\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i - \mu_i\right) L_i - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i - \mu_i\right) L_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i - \mu_i\right) L_i - \left(-\left(\lambda_n - \mu_n\right)\right) L_n \\
&\qquad \left(\text{denn aus } \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n \text{ folgt } \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i - \mu_i\right) = -\left(\lambda_n - \mu_n\right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_i - \mu_i\right) L_i + \left(\lambda_n - \mu_n\right) L_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \mu_i\right) L_i \\
&= \left(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n\right) - \left(\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n\right),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n\right) - \left(\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\left(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k\right) - \left(\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k\right)\right)}_{\substack{\geq 0 \\ (\text{denn } \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k)}} \left(L_k - L_{k+1}\right).
\end{aligned}$$

Da $\ell\left(L_k - L_{k+1}\right) \geq 0$ für alle $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ ist (denn $\ell\left(L_k\right) \geq \ell\left(L_{k+1}\right)$), ist also das Gewicht $\left(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n\right) - \left(\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n\right)$ nichtnegativ, und somit ist Lemma 1 gezeigt.

Ein weiteres Lemma (diesmal ein rein kombinatorisches):

Lemma 2: Sei T ein Youngtableau zur Partition λ. Sei ferner S irgendein Youngtableau, dessen Zeilen die Längen μ_1, μ_2, ..., μ_n haben (in dieser Reihenfolge). Angenommen, beide Tableaus T und S seien irgendwie mit den Zahlen 1, 2, ..., m ausgefüllt (egal wie, solange jede dieser Zahlen in jedem Tableau in genau einem Kästchen vorkommt). Angenommen, $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$, und angenommen,

es gibt keine zwei verschiedenen Elemente u und v, die in der gleichen Spalte des Tableaus T liegen und in der gleichen Zeile des Tableaus S liegen. (1)

Dann ist

$$\begin{gathered}\lambda_1 \geq \mu_1; \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2; \\ ... \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n-1}; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n.\end{gathered}$$

Wir wollen dieses Lemma nicht beweisen, aber es ist ein fundamentales Resultat über Youngtableaux und wird in vielen Darstellungstheorie-Texten auch bewiesen. Hier ein paar Webquellen:

`http://mathoverflow.net/questions/31338/#31615` [12]

`http://ejenk.com/notes/symmetric.pdf` [13] Lemma 4.4.

Um jetzt den Beweis von Aussage 2 abzuschließen, reicht es (gemäß Lemma 1) aus,

$$\begin{gathered}\lambda_1 \geq \mu_1; \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2; \\ ... \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n-1}; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n\end{gathered}$$

zu zeigen.

Sei $s \in S_n$ eine Permutation, die $\mu_{s(1)} \geq \mu_{s(2)} \geq ... \geq \mu_{s(n)}$ erfüllt[14]. Sei S ein Youngtableau, dessen Zeilen die Längen $\mu_{s(1)}$, $\mu_{s(2)}$, ..., $\mu_{s(n)}$ haben, und zwar in dieser Reihenfolge von der obersten bis zur untersten. Wir füllen dieses Youngtableau S mit den Zahlen 1, 2, ..., m aus, indem wir für jedes k die k-te Zeile von S mit denjenigen Zahlen $u \in \{1, 2, ..., m\}$ ausfüllen, die $i_u = s(k)$ erfüllen (in welcher Reihenfolge diese Zahlen stehen sollen, ist egal).[15] Eine Konsequenz dieser Definition ist: Für je zwei Zahlen u und v, die in der gleichen Zeile des Tableaus S liegen, gilt $i_u = i_v$.

Wir wollen jetzt beweisen, daß unsere Tableaus T und S die Eigenschaft (1) haben. Dazu nehmen wir das Gegenteil an: Sei also (1) falsch. Dann gibt es zwei verschiedene

[12] Hierbei handelt es sich um Antwortposting #31615 auf MathOverflow.

[13] Hierbei handelt es sich um die Notiz "Representation theory of S_n" von Evan Jenkins.

[14] So eine Permutation s existiert offensichtlich.

[15] Dies ist tatsächlich möglich, denn für jedes k gibt es genau $\mu_{s(k)}$ Zahlen $u \in \{1, 2, ..., m\}$, die $i_u = s(k)$ erfüllen, und das passt genau auf die k-te Zeile von S (deren Länge ja $\mu_{s(k)}$ ist).

Elemente u und v, die in der gleichen Spalte des Tableaus T liegen und in der gleichen Zeile des Tableaus S liegen. Folglich gilt $i_u = i_v$ (da u und v in der gleichen Zeile des Tableaus S liegen). Sei nun $d \in S_m$ die Transposition, die u und v vertauscht. Dann ist $d \in C$ (denn u und v liegen in einer Spalte von T) und somit $-b_\lambda = b_\lambda d$ (dies rechnet man ausgehend von $b_\lambda = \dfrac{1}{|C|} \sum\limits_{c \in C} (-1)^c c$ und $(-1)^d = -1$ leicht nach). Da andererseits $d(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ ist (denn die Transposition d vertauscht in dem Produkt $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}$ die Tensoranden e_{i_u} und e_{i_v}, was aber nichts ändert, da diese Tensoranden gleich sind[16]), muß also

$$\underbrace{-b_\lambda}_{=b_\lambda d} (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) = b_\lambda \underbrace{d(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})}_{=e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}} = b_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})$$

gelten, und damit $b_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) = 0$, also $c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) = a_\lambda \underbrace{b_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m})}_{=0} = 0$ im Widerspruch zu $c_\lambda (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_m}) \neq 0$.

Dieser Widerspruch zeigt, daß (1) doch gültig ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = m &= (\text{Anzahl der } k \in \{1, 2, ..., m\}) \\
&= \sum_{u=1}^{n} \underbrace{(\text{Anzahl der } k \in \{1, 2, ..., m\} \text{ mit } i_k = u)}_{=\mu_u} \\
&= \sum_{u=1}^{n} \mu_u = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = \mu_{s(1)} + \mu_{s(2)} + ... + \mu_{s(n)}.
\end{aligned}$$

Daher können wir Lemma 2 anwenden (auf $\mu_{s(1)}$, $\mu_{s(2)}$, ..., $\mu_{s(n)}$ statt μ_1, μ_2, ..., μ_n), und erhalten, daß

$$\begin{gathered}
\lambda_1 \geq \mu_{s(1)}; \\
\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_{s(1)} + \mu_{s(2)}; \\
... \\
\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} \geq \mu_{s(1)} + \mu_{s(2)} + ... + \mu_{s(n-1)}; \\
\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_{s(1)} + \mu_{s(2)} + ... + \mu_{s(n)}
\end{gathered}$$

gilt. Da aber

$$\begin{gathered}
\mu_{s(1)} \geq \mu_1; \\
\mu_{s(1)} + \mu_{s(2)} \geq \mu_1 + \mu_2; \\
... \\
\mu_{s(1)} + \mu_{s(2)} + ... + \mu_{s(n-1)} \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n-1}; \\
\mu_{s(1)} + \mu_{s(2)} + ... + \mu_{s(n)} = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n
\end{gathered}$$

gilt (denn $s \in S_n$ ist eine Permutation, die $\mu_{s(1)} \geq \mu_{s(2)} \geq ... \geq \mu_{s(n)}$ erfüllt), erhalten

[16] weil $i_u = i_v$

wir also

$$\begin{gathered}\lambda_1 \geq \mu_1;\\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2;\\ ...\\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} \geq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_{n-1};\\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n,\end{gathered}$$

und mithilfe von Lemma 1 führt dies auf $\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$, was wegen $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m} = \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + ... + \mu_n L_n$ zu $L_{i_1} + L_{i_2} + ... + L_{i_m} \leq \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n$ wird. Aussage 2 ist damit bewiesen.

Zusätzliche Anmerkung: Ein weiterer (allerdings viel kleinerer) Fehler in Lecture 15 von [1] tritt in Exercise 15.19 auf: Dort ist $(a+b+1)(a+1)(b+1)/2$ durch $(a+b+2)(a+1)(b+1)/2$ zu ersetzen. Ich danke Jim Humphreys für den Hinweis auf diesen Fehler.

Literaturverweise

[1] William Fulton, Joe Harris: *Representation Theory - A First Course*, Springer 1991.