

QED-Mathematikolympiade 3: Aufgaben und Lösungen

Geometrie

Darij Grinberg

Vorbemerkung: Im Folgenden wird bei allen Beweisen auf Anordnungsüberlegungen und Fallunterscheidungen hinsichtlich der verschiedenen möglichen Anordnungen verzichtet. Es wird nur der Anordnungsfall betrachtet, der auf den zur Aufgabe gehörenden Zeichnungen abgebildet ist. Die anderen Fälle lassen sich analog behandeln.

Es werden durchgehend *nicht-orientierte Strecken und Flächeninhalte* verwendet, bis auf die letzte Bemerkung zur Lösung von Aufgabe G3, wo dies gesondert erwähnt wird. In den Lösungen der Aufgaben G1 und G3 werden *orientierte Winkel modulo 180°* benutzt; genaueres über diese Winkelart findet sich in meiner Notiz

Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo 180° und eine Lösung der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag,*

die unter http://de.geocities.com/darij_grinberg/Dreigeom/Inhalt.html#orwinkel herunterzuladen und in den $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Ausgaben 8/2004 (S. 170-176) und 9+10/2004 (S. 226-229) gekürzt erschienen ist.

Aufgabe G1

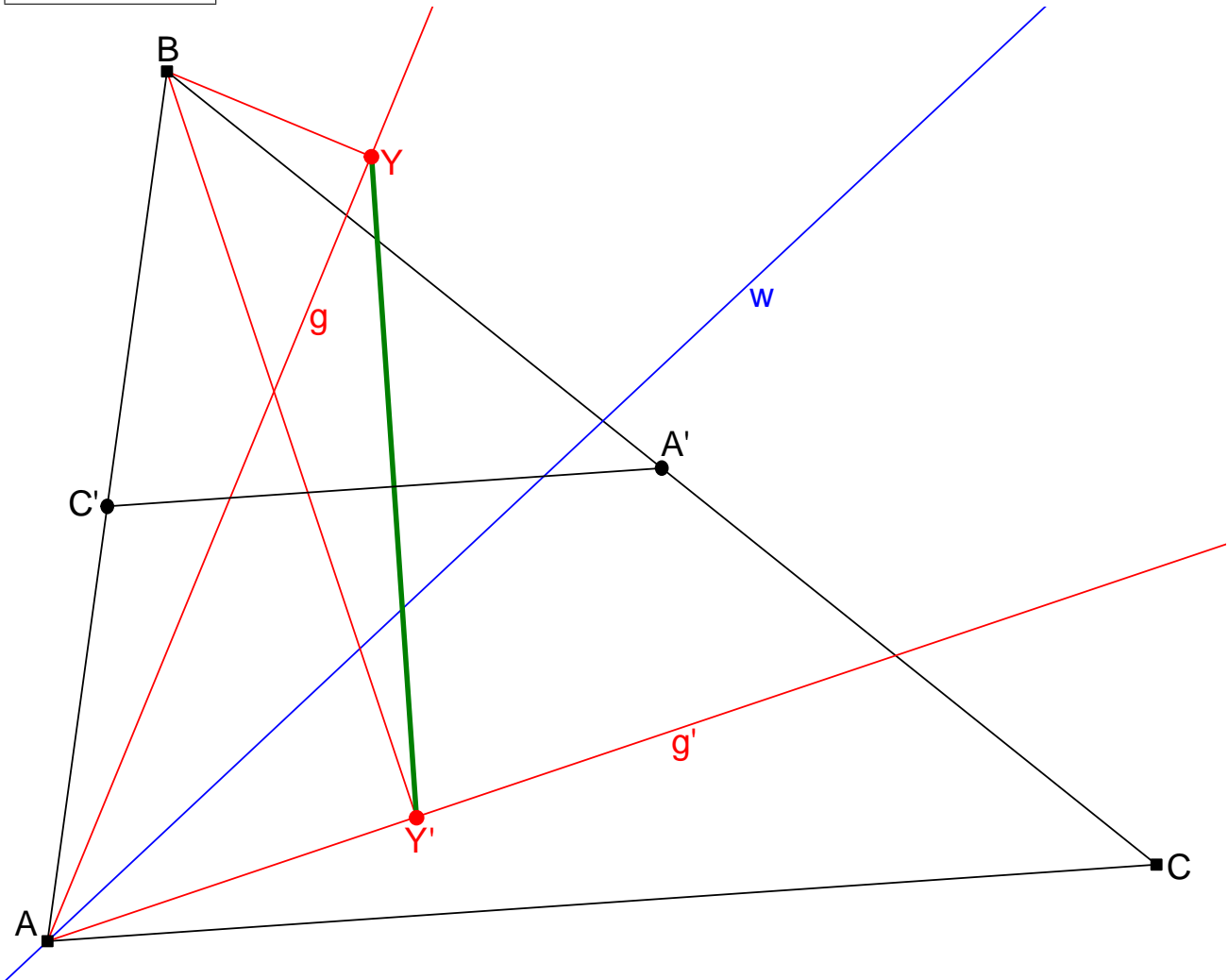


Fig. G1.1

Sei ABC ein Dreieck, und seien C' und A' die Mittelpunkte seiner Seiten AB bzw. BC . Wir betrachten zwei Geraden g und g' , die beide durch die Ecke A gehen und zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels CAB sind. Seien Y und Y' die Fußpunkte der Lote von dem Punkt B auf diese Geraden g bzw. g' . Man beweise: Die Punkte Y und Y' liegen zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden $C'A'$. (Siehe Fig. G1.1.)

Lösung der Aufgabe G1

Wir rechnen mit orientierten Winkeln modulo 180° .

Da die Punkte C' und A' die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. BC des Dreiecks ABC sind, ist nach dem Satz von der Mittelparallelen $C'A' \parallel CA$.

Sei w die Winkelhalbierende des Winkels CAB . Dann gilt einerseits trivialerweise $\angle(AB; w) = \angle(w; CA)$; andererseits wissen wir, daß die Geraden g und g' zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden w des Winkels CAB sind, und damit

ist $\angle(g; w) = \angle(w; g')$. Daraus folgt

$$\angle(AB; g) = \angle(AB; w) - \angle(g; w) = \angle(w; CA) - \angle(w; g') = \angle(g'; CA).$$

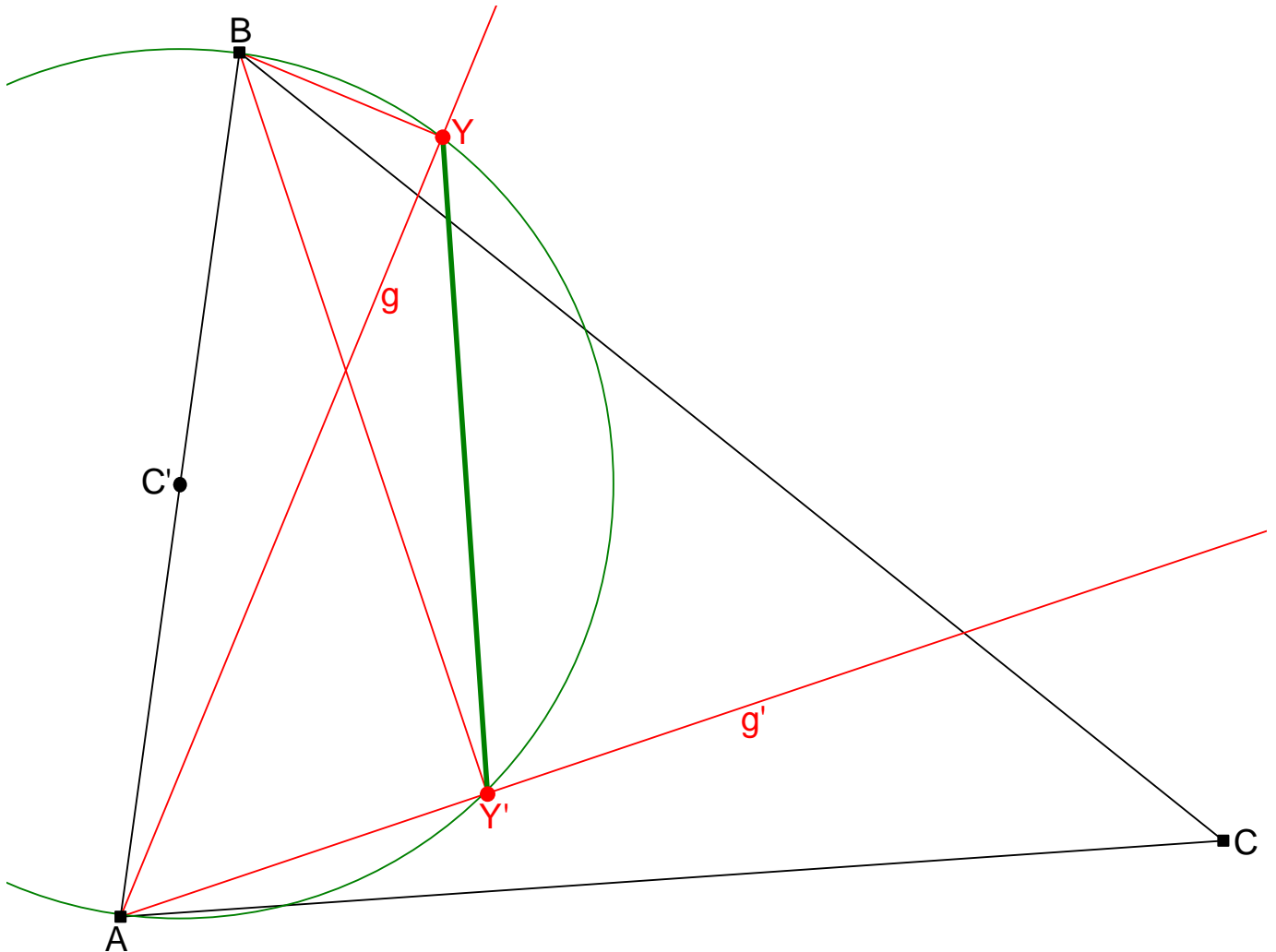


Fig. G1.2

(Siehe Fig. G1.2.) Wegen $\angle AYB = 90^\circ$ und $\angle AY'B = 90^\circ$ liegen die Punkte Y und Y' auf dem Thaleskreis über der Strecke AB . Der Mittelpunkt dieses Thaleskreises ist der Mittelpunkt C' dieser Strecke AB . Somit ist $C'Y = C'Y'$; das heißt, die Mittelsenkrechte der Strecke YY' geht durch den Punkt C' .

Andererseits gilt, da die Punkte Y und Y' auf dem Thaleskreis über der Strecke AB liegen, nach dem Umfangswinkelsatz $\angle AY'Y = \angle ABY$, also $\angle(g'; YY') = \angle(AB; BY)$. Doch wegen $BY \perp g$ ist $\angle(g; BY) = 90^\circ$, also

$$\angle(g'; YY') = \angle(AB; BY) = \angle(AB; g) + \angle(g; BY) = \angle(AB; g) + 90^\circ = \angle(g'; CA) + 90^\circ,$$

also $\angle(g'; YY') - \angle(g'; CA) = 90^\circ$. Doch $\angle(g'; YY') - \angle(g'; CA) = \angle(CA; YY')$. Somit haben wir $\angle(CA; YY') = 90^\circ$, also $YY' \perp CA$. Wegen $C'A' \parallel CA$ folgt daraus $YY' \perp C'A'$. Folglich ist die Mittelsenkrechte der Strecke YY' parallel zur Geraden $C'A'$ (denn diese Mittelsenkrechte ist orthogonal zur Geraden YY' , und die Gerade YY' ist ihrerseits orthogonal zur Geraden $C'A'$).

Laut dem, was wir gezeigt haben, ist also die Mittelsenkrechte der Strecke YY' parallel zur Geraden $C'A'$ und geht durch den Punkt C' ; das heißt, die Mittelsenkrechte

der Strecke YY' ist die Gerade $C'A'$. Folglich liegen die Punkte Y und Y' zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden $C'A'$, und die Aufgabe ist gelöst.

Bemerkung: Diese simple Aufgabe impliziert eine merkwürdige Eigenschaft von *Orthopolen*. Bevor wir diese Eigenschaft formulieren, definieren wir den Begriff des Orthopols; dieser Begriff basiert auf folgendem Satz (Fig. G1.3):

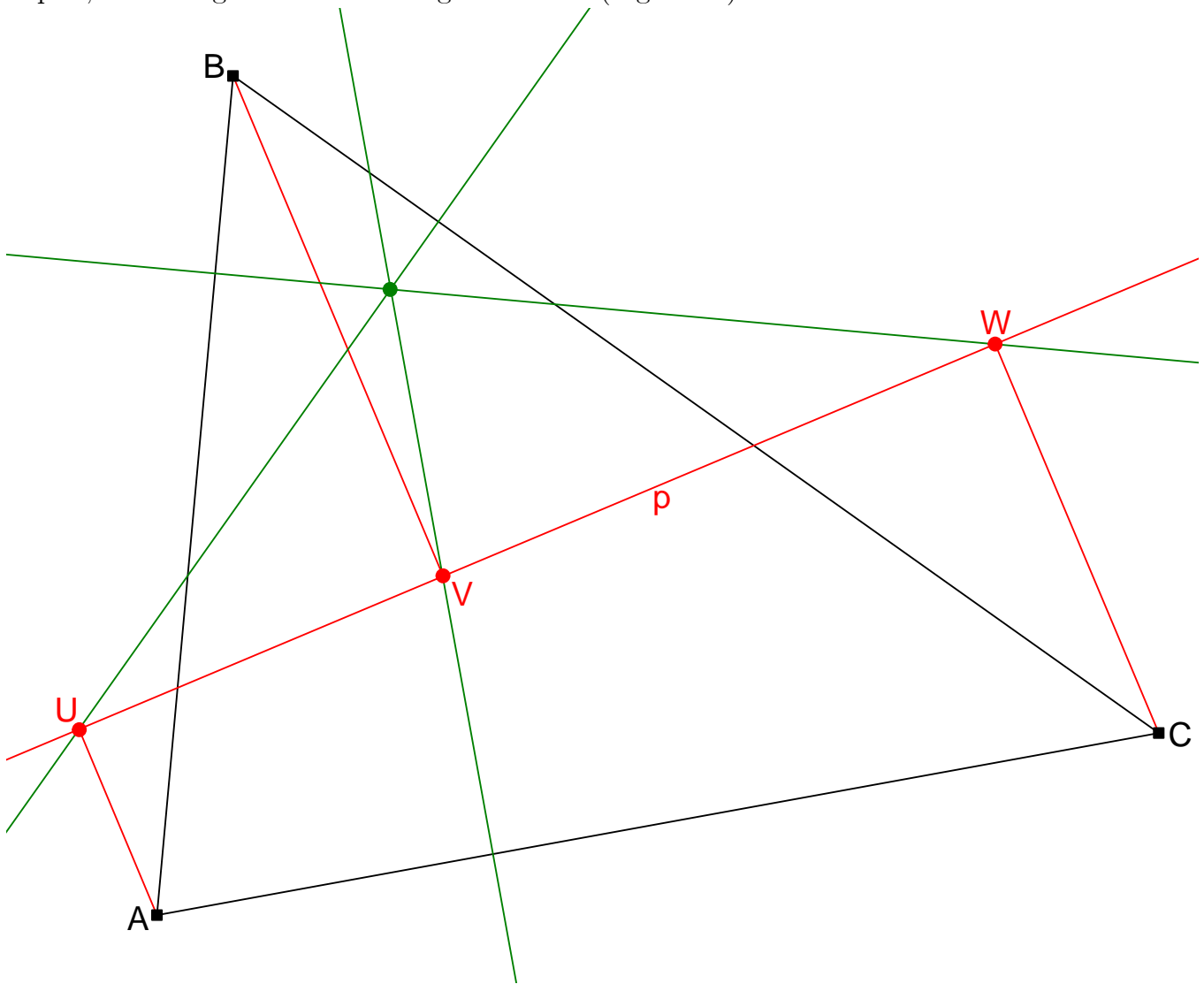


Fig. G1.3

Satz 1: Sei ABC ein Dreieck und p eine Gerade. Wir bezeichnen mit U , V und W die Fußpunkte der Lote von den Ecken A , B bzw. C des Dreiecks ABC auf die Gerade p . Dann schneiden sich die Senkrechten zu den Geraden BC , CA und AB durch diese Punkte U , V bzw. W in einem Punkt.

Dieser Punkt heißt **Orthopol** der Geraden p in bezug auf das Dreieck ABC . Nun zeigen wir unsere Eigenschaft (Fig. G1.4):

Satz 2: Sei ABC ein Dreieck, und g und g' zwei Geraden, die beide durch die Ecke A gehen und zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels CAB sind. Dann fallen die Orthopole dieser zwei Geraden g und g' in bezug auf das Dreieck ABC zusammen.

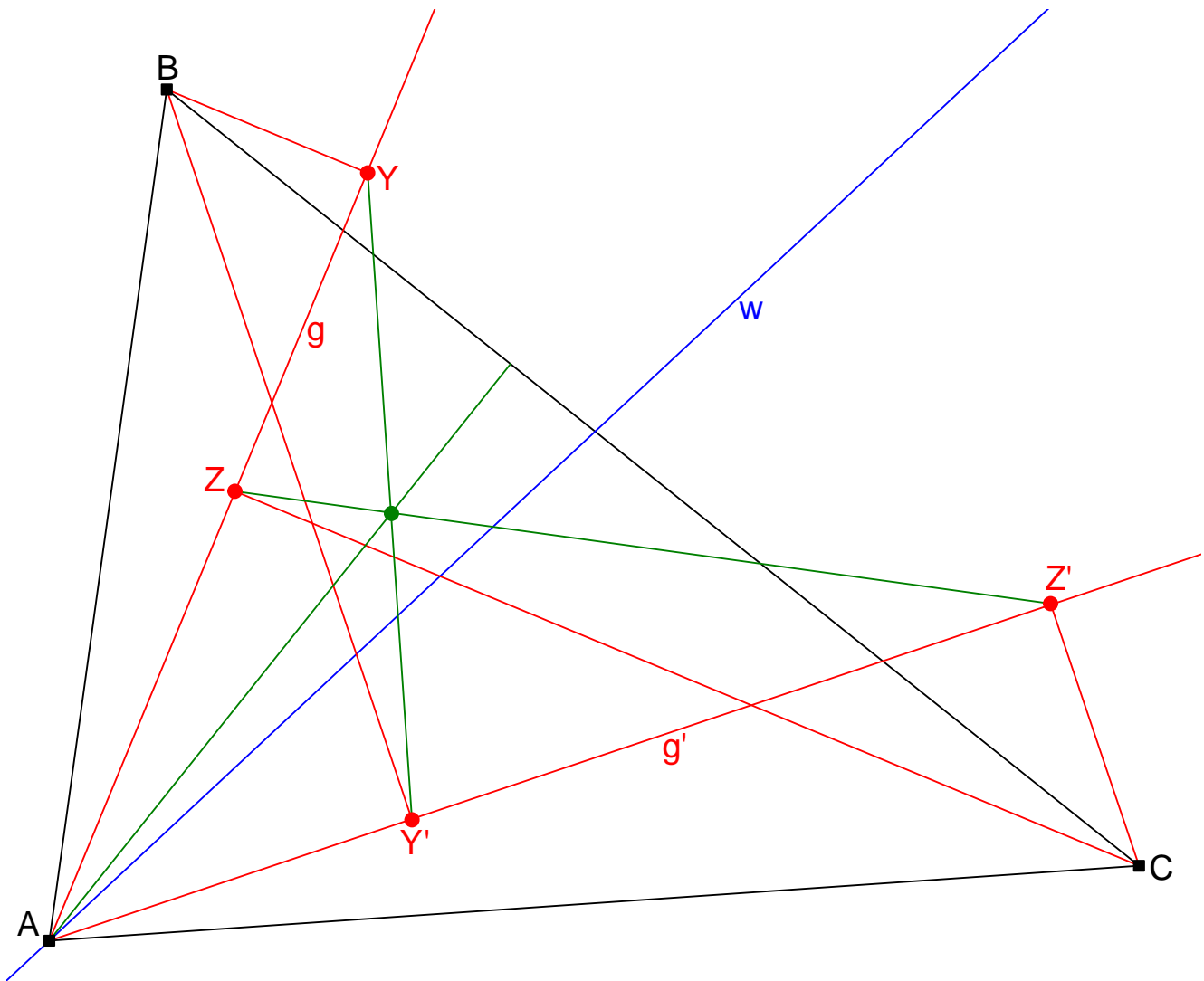


Fig. G1.4

Beweis von Satz 2: Seien X , Y und Z die Fußpunkte der Lote von den Ecken A , B bzw. C auf die Gerade g ; dann ist der Orthopol der Geraden g in bezug auf das Dreiecks ABC der Schnittpunkt der Senkrechten zu den Geraden BC , CA und AB durch diese Punkte X , Y bzw. Z . Entsprechend seien X' , Y' und Z' die Fußpunkte der Lote von den Ecken A , B bzw. C auf die Gerade g' ; dann ist der Orthopol der Geraden g' in bezug auf das Dreiecks ABC der Schnittpunkt der Senkrechten zu den Geraden BC , CA und AB durch diese Punkte X' , Y' bzw. Z' . (Dabei ist natürlich $X = X' = A$, aber dies ist für uns nicht von Bedeutung.)

Nun wurde in der Lösung unserer Aufgabe gezeigt, daß $YY' \perp CA$ ist; das heißt, die Senkrechte zu CA durch Y stimmt überein mit der Senkrechten zu CA durch Y' . Analog stimmt die Senkrechte zu AB durch Z überein mit der Senkrechten zu AB durch Z' . Daher muß der Orthopol der Geraden g in bezug auf das Dreieck ABC (als Schnittpunkt der Senkrechten zu CA durch Y mit der Senkrechten zu AB durch Z) übereinstimmen mit dem Orthopol der Geraden g' in bezug auf das Dreieck ABC (als Schnittpunkt der Senkrechten zu CA durch Y' mit der Senkrechten zu AB durch Z'). Damit ist Satz 2 bewiesen.

Aufgabe G2

Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck. Man beweise:

$$|EAC| \cdot |EBD| = |EAB| \cdot |ECD| + |EBC| \cdot |EDA|,$$

wobei die Abkürzung $|P_1P_2P_3|$ den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks $P_1P_2P_3$ bezeichnet. (Siehe Fig. G2.1.)

Lösung der Aufgabe G2

Erste Lösung: Wir führen die Lösung der Aufgabe in zwei Schritten.

Schritt 1: Wir lösen die Aufgabe erstmal für den Fall, wenn das Fünfeck $ABCDE$ einen Umkreis hat. Das heißt, wir zeigen:

Satz 1: Für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$, das einen Umkreis hat, gilt

$$|EAC| \cdot |EBD| = |EAB| \cdot |ECD| + |EBC| \cdot |EDA|.$$

Beweis von Satz 1: Wir verwenden im Folgenden die Abkürzung $d(P; g)$ für den (ungerichteten) Abstand von einem Punkt P zu einer Geraden g . Dann zeigen wir den sogenannten **Satz von den vier Sehnen**:

Satz 2, der Satz von den vier Sehnen: Seien A, B, C, D und E fünf Punkte auf einem Kreis. Dann gilt

$$d(E; AB) \cdot d(E; CD) = d(E; BC) \cdot d(E; DA) = d(E; AC) \cdot d(E; BD).$$

(Siehe Fig. G2.2.)

Beweis von Satz 2: (Siehe Fig. G2.3.) Seien X, Y, Z und W die Fußpunkte der Lote von dem Punkt E auf die Geraden AB, BC, CD bzw. DA . Dann ist $d(E; AB) = EX$, $d(E; BC) = EY$, $d(E; CD) = EZ$ und $d(E; DA) = EW$. Nun gilt $\angle AWE = 90^\circ$ und $\angle AXE = 90^\circ$; also liegen die Punkte W und X auf dem Thaleskreis über der Strecke AE , und folglich gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\angle EWX = \angle EAX$. Wegen $\angle EAX = \angle EAB$ wird dies zu $\angle EWX = \angle EAB$. Analog gilt $\angle EYZ = \angle ECB$. Aber da die Punkte A, B, C und E auf einem Kreis liegen, ist $\angle EAB = \angle ECB$. Also haben wir $\angle EWX = \angle EYZ$. Analog zeigen wir $\angle EXW = \angle EYZ$. Somit sind die Dreiecke EWX und EYZ gleichsinnig ähnlich. Daraus folgt $EX : EW = EY : EZ$, also $EX \cdot EZ = EY \cdot EW$. Aufgrund von $d(E; AB) = EX$, $d(E; BC) = EY$, $d(E; CD) = EZ$ und $d(E; DA) = EW$ wird dies zu $d(E; AB) \cdot d(E; CD) = d(E; BC) \cdot d(E; DA)$.

Wir haben also gezeigt, daß für beliebige fünf auf einem Kreis liegende Punkte A, B, C, D und E gilt: $d(E; AB) \cdot d(E; CD) = d(E; BC) \cdot d(E; DA)$. Wenden wir diese Erkenntnis nun auf die fünf auf einem Kreis liegenden Punkte B, A, C, D und E an, so erhalten wir $d(E; BA) \cdot d(E; CD) = d(E; AC) \cdot d(E; DB)$, also $d(E; AB) \cdot d(E; CD) = d(E; AC) \cdot d(E; BD)$. Diese Gleichung können wir mit $d(E; AB) \cdot d(E; CD) = d(E; BC) \cdot d(E; DA)$ kombinieren und erhalten

$$d(E; AB) \cdot d(E; CD) = d(E; BC) \cdot d(E; DA) = d(E; AC) \cdot d(E; BD).$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Nun ist die Fläche eines Dreiecks bekanntlich gleich $\frac{1}{2}$ mal der Länge einer Seite mal der zugehörigen Höhe. Für das Dreieck EAB mit seiner Seite AB und der zugehörigen Höhe $d(E; AB)$ ergibt dies $|EAB| = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(E; AB)$. Analog wird $|EBC| = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(E; BC)$, $|ECD| = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot d(E; CD)$, $|EDA| = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot d(E; DA)$, $|EAC| = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot d(E; AC)$ und $|EBD| = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot d(E; BD)$. Damit können wir die Aussage von Satz 1, also die Gleichung

$$|EAC| \cdot |EBD| = |EAB| \cdot |ECD| + |EBC| \cdot |EDA|,$$

umformen zu

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot AC \cdot d(E; AC) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot BD \cdot d(E; BD) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(E; AB) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot CD \cdot d(E; CD) \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(E; BC) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot DA \cdot d(E; DA) \right). \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \cdot AC \cdot BD \cdot d(E; AC) \cdot d(E; BD) \\ &= \frac{1}{4} \cdot AB \cdot CD \cdot d(E; AB) \cdot d(E; CD) + \frac{1}{4} \cdot BC \cdot DA \cdot d(E; BC) \cdot d(E; DA), \end{aligned}$$

also nach Multiplikation mit 4 zu

$$AC \cdot BD \cdot d(E; AC) \cdot d(E; BD) = AB \cdot CD \cdot d(E; AB) \cdot d(E; CD) + BC \cdot DA \cdot d(E; BC) \cdot d(E; DA).$$

Da nach Satz 2 nun $d(E; AB) \cdot d(E; CD) = d(E; BC) \cdot d(E; DA) = d(E; AC) \cdot d(E; BD)$ gilt, läßt sich dies umformen zu

$$AC \cdot BD \cdot d(E; AC) \cdot d(E; BD) = AB \cdot CD \cdot d(E; AC) \cdot d(E; BD) + BC \cdot DA \cdot d(E; AC) \cdot d(E; BD),$$

und dies ist offensichtlich äquivalent zu $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Doch die Gleichung $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ folgt aus dem Satz von Ptolemäus für das Sehnenviereck $ABCD$. Somit ist Satz 1 bewiesen.

Schritt 2: Nun lösen wir die Aufgabe im allgemeinen Fall, also für jedes beliebige konvexe Fünfeck $ABCDE$.

(Siehe Fig. G2.4.) Ein beliebiger Kreis durch den Punkt E schneide die Geraden EA , EB , EC und ED in den Punkten A' , B' , C' bzw. D' . Dann hat das konvexe Fünfeck $A'B'C'D'E$ einen Umkreis, und nach Satz 1 ist somit

$$|EA'C'| \cdot |EB'D'| = |EA'B'| \cdot |EC'D'| + |EB'C'| \cdot |ED'A'|. \quad (\text{G2.1})$$

Nun ist der Flächeninhalt eines Dreiecks bekanntlich gleich $\frac{1}{2}$ mal dem Produkt zweier Seiten mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Somit ist $|EA'B'| = \frac{1}{2} \cdot$

$EA' \cdot EB' \cdot \sin \angle A'EB'$ und $|EAB| = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot EB \cdot \sin \angle AEB$. Daraus folgt

$$\frac{|EA'B'|}{|EAB|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot EA' \cdot EB' \cdot \sin \angle A'EB'}{\frac{1}{2} \cdot EA \cdot EB \cdot \sin \angle AEB} = \frac{EA' \cdot EB'}{EA \cdot EB} \cdot \frac{\sin \angle A'EB'}{\sin \angle AEB} = \frac{EA' \cdot EB'}{EA \cdot EB}$$

(denn $\angle A'EB' = \angle AEB$ ergibt $\frac{\sin \angle A'EB'}{\sin \angle AEB} = 1$). Somit ist $|EA'B'| = \frac{EA' \cdot EB'}{EA \cdot EB} \cdot |EAB|$. Analog ergibt sich $|EB'C'| = \frac{EB' \cdot EC'}{EB \cdot EC} \cdot |EBC|$, $|EC'D'| = \frac{EC' \cdot ED'}{EC \cdot ED} \cdot |ECD|$, $|ED'A'| = \frac{ED' \cdot EA'}{ED \cdot EA} \cdot |EDA|$, $|EA'C'| = \frac{EA' \cdot EC'}{EA \cdot EC} \cdot |EAC|$ und $|EB'D'| = \frac{EB' \cdot ED'}{EB \cdot ED} \cdot |EBD|$. Somit wird die Gleichung (G2.1) zu

$$\begin{aligned} & \left(\frac{EA' \cdot EC'}{EA \cdot EC} \cdot |EAC| \right) \cdot \left(\frac{EB' \cdot ED'}{EB \cdot ED} \cdot |EBD| \right) \\ &= \left(\frac{EA' \cdot EB'}{EA \cdot EB} \cdot |EAB| \right) \cdot \left(\frac{EC' \cdot ED'}{EC \cdot ED} \cdot |ECD| \right) + \left(\frac{EB' \cdot EC'}{EB \cdot EC} \cdot |EBC| \right) \cdot \left(\frac{ED' \cdot EA'}{ED \cdot EA} \cdot |EDA| \right). \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} & \frac{EA' \cdot EB' \cdot EC' \cdot ED'}{EA \cdot EB \cdot EC \cdot ED} \cdot |EAC| \cdot |EBD| \\ &= \frac{EA' \cdot EB' \cdot EC' \cdot ED'}{EA \cdot EB \cdot EC \cdot ED} \cdot |EAB| \cdot |ECD| + \frac{EA' \cdot EB' \cdot EC' \cdot ED'}{EA \cdot EB \cdot EC \cdot ED} \cdot |EBC| \cdot |EDA|, \end{aligned}$$

also zu

$$|EAC| \cdot |EBD| = |EAB| \cdot |ECD| + |EBC| \cdot |EDA|.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Zweite Lösung: Sei $\angle AEB = x$, $\angle BEC = y$ und $\angle CED = z$. Dann ist $\angle DEA = \angle AEB + \angle BEC + \angle CED = x + y + z$, $\angle AEC = \angle AEB + \angle BEC = x + y$ und $\angle BED = \angle BEC + \angle CED = y + z$. Da der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich $\frac{1}{2}$ mal dem Produkt zweier seiner Seiten mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels ist, gilt

$$\begin{aligned} |EAB| &= \frac{1}{2} \cdot EA \cdot EB \cdot \sin \angle AEB = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot EB \cdot \sin x; \\ |EBC| &= \frac{1}{2} \cdot EB \cdot EC \cdot \sin \angle BEC = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot EC \cdot \sin y; \\ |ECD| &= \frac{1}{2} \cdot EC \cdot ED \cdot \sin \angle CED = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot ED \cdot \sin z; \\ |EDA| &= \frac{1}{2} \cdot ED \cdot EA \cdot \sin \angle DEA = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot EA \cdot \sin (x + y + z); \\ |EAC| &= \frac{1}{2} \cdot EA \cdot EC \cdot \sin \angle AEC = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot EC \cdot \sin (x + y); \\ |EBD| &= \frac{1}{2} \cdot EB \cdot ED \cdot \sin \angle BED = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot ED \cdot \sin (y + z). \end{aligned}$$

Somit wird die zu beweisende Gleichung

$$|EAC| \cdot |EBD| = |EAB| \cdot |ECD| + |EBC| \cdot |EDA|$$

zu

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot EA \cdot EC \cdot \sin(x+y) \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot EB \cdot ED \cdot \sin(y+z) \right) \\ = & \left(\frac{1}{2} \cdot EA \cdot EB \cdot \sin x \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot EC \cdot ED \cdot \sin z \right) \\ & + \left(\frac{1}{2} \cdot EB \cdot EC \cdot \sin y \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot ED \cdot EA \cdot \sin(x+y+z) \right), \end{aligned}$$

also zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \cdot EA \cdot EB \cdot EC \cdot ED \cdot \sin(x+y) \cdot \sin(y+z) \\ = & \frac{1}{4} \cdot EA \cdot EB \cdot EC \cdot ED \cdot \sin x \cdot \sin z + \frac{1}{4} \cdot EA \cdot EB \cdot EC \cdot ED \cdot \sin y \cdot \sin(x+y+z), \end{aligned}$$

und dies vereinfacht sich zu

$$\sin(x+y) \cdot \sin(y+z) = \sin x \cdot \sin z + \sin y \cdot \sin(x+y+z).$$

Doch diese Gleichung lässt sich durch direktes Nachrechnen überprüfen:

$$\begin{aligned} & \sin(x+y) \cdot \sin(y+z) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \cdot (\sin y \cos z + \cos y \sin z) \\ = & \sin x \cos y \sin y \cos z + \sin x \cos y \cos y \sin z + \cos x \sin y \sin y \cos z + \cos x \sin y \cos y \sin z \\ = & \sin x \cos z \cos y \sin y + \sin x \sin z \cos^2 y + \cos x \cos z \sin^2 y + \cos x \sin z \cos y \sin y \\ = & (\sin x \cos z + \cos x \sin z) \cos y \sin y + \sin x \sin z \cos^2 y + \cos x \cos z \sin^2 y \\ = & \sin(x+z) \cos y \sin y + \sin x \sin z (1 - \sin^2 y) + \cos x \cos z \sin^2 y \\ = & \sin(x+z) \cos y \sin y + \sin x \sin z - \sin x \sin z \sin^2 y + \cos x \cos z \sin^2 y \\ = & \sin(x+z) \cos y \sin y + \sin x \sin z + (\cos x \cos z - \sin x \sin z) \sin^2 y \\ = & \sin(x+z) \cos y \sin y + \sin x \sin z + \cos(x+z) \sin^2 y \\ = & \sin x \sin z + \sin y \cdot (\sin(x+z) \cos y + \cos(x+z) \sin y) \\ = & \sin x \sin z + \sin y \cdot \sin((x+z)+y) = \sin x \cdot \sin z + \sin y \cdot \sin(x+y+z). \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Dritte Lösung (skizziert): Die Aufgabe ist äquivalent zur Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{d} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

für vier komplanare Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und \vec{d} im Raum, wobei das Zeichen \cdot für das Skalarprodukt und das Zeichen \times für das Kreuzprodukt stehen. (In unserem Fall ist $\vec{a} = \vec{EA}$, $\vec{b} = \vec{EB}$, $\vec{c} = \vec{EC}$ und $\vec{d} = \vec{ED}$.) Diese Identität gilt in Wirklichkeit für beliebige (nicht unbedingt komplanare) vier Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und \vec{d} im Raum, und lässt sich auf die bekannte Jacobi-Identität $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{0}$ zurückführen:

$$\begin{aligned} & (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{d} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ = & \vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times (\vec{d} \times \vec{b})) + \vec{a} \cdot (\vec{d} \times (\vec{b} \times \vec{c})) \\ = & \vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{c} \times (\vec{d} \times \vec{b}) + \vec{d} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Aufgabe entstammt der Zeitschrift Praxis der Mathematik (PM), wo sie als Aufgabe P151 von Engel (offenbar Arthur Engel) aus Stuttgart-Rohr vorgeschlagen wurde. Obgleich sie auf den ersten Blick in den Ecken A, B, C, D und E des Fünfecks $ABCDE$ unsymmetrisch ist (die Ecke E hat eine "Sonderrolle"), ist sie äquivalent zu einer symmetrischen Flächeneigenschaft des Fünfecks, der **Möbiusidentität**. Um diese Eigenschaft zu formulieren, einigen wir uns auf die Abkürzung $|P_1P_2\dots P_n|$ für den Flächeninhalt eines beliebigen Vielecks $P_1P_2\dots P_n$ (für Dreiecke haben wir diese Abkürzung bereits in der Aufgabenstellung eingeführt). Die Möbiusidentität besagt dann:

Satz 3, die Möbiusidentität: Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck, und sei $t = |ABCDE|$ sein Flächeninhalt.

a) Sei $a = |EAB|$, $b = |ABC|$, $c = |BCD|$, $d = |CDE|$ und $e = |DEA|$. Dann gilt

$$t^2 - (a + b + c + d + e)t + (ab + bc + cd + de + ea) = 0.$$

b) Sei $a' = |ACD|$, $b' = |BDE|$, $c' = |CEA|$, $d' = |DAB|$ und $e' = |EBC|$. Dann gilt

$$t^2 = (a' + b' + c' + d' + e')^2 - 4(e'b' + a'c' + b'd' + c'e' + d'a').$$

c) Sei $a'' = |BCDE|$, $b'' = |CDEA|$, $c'' = |DEAB|$, $d'' = |EABC|$ und $e'' = |ABCD|$. Dann gilt

$$t^2 - (a'' + b'' + c'' + d'' + e'')t + (a''b'' + b''c'' + c''d'' + d''e'' + e''a'') = 0.$$

Beweis von Satz 3: Wir haben

$$\begin{aligned} |EAB| &= a; \\ |EBC| &= |ABCDE| - |EAB| - |CDE| = t - a - d; \\ |ECD| &= |CDE| = d; \\ |EDA| &= |DEA| = e; \\ |EAC| &= |ABCDE| - |CDE| - |ABC| = t - d - b; \\ |EBD| &= |ABCDE| - |BCD| - |EAB| = t - c - a. \end{aligned}$$

Damit wird die Aussage der Aufgabe, also die Gleichung

$$|EAC| \cdot |EBD| = |EAB| \cdot |ECD| + |EBC| \cdot |EDA|,$$

zu

$$\begin{aligned} (t - d - b) \cdot (t - c - a) &= a \cdot d + (t - a - d) \cdot e, & \text{also zu} \\ t^2 - tc - ta - dt + dc + da - bt + bc + ba &= ad + te - ae - de, & \text{also zu} \\ t^2 - tc - ta - dt + dc + da - bt + bc + ba - ad - te + ae + de &= 0, & \text{also zu} \\ t^2 - (ta + bt + tc + dt + te) + (ba + bc + dc + de + ae) &= 0, & \text{also zu} \\ t^2 - (a + b + c + d + e)t + (ab + bc + cd + de + ea) &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 3 a) bewiesen.

Um Satz 3 b) zu beweisen, bemerken wir, daß $|ACD| = |ABCDE| - |ABC| - |DEA|$, also $a' = t - b - e$ und analog $b' = t - c - a$, $c' = t - d - b$, $d' = t - e - c$ und $e' = t - a - d$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned} e'b' &= (t - a - d)(t - c - a) = t^2 - tc - ta - at + ac + a^2 - dt + dc + da \\ &= t^2 - (ta + at + tc + dt) + a^2 + dc + da + ac \\ &= t^2 - (2a + c + d)t + a^2 + cd + da + ac, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} a'c' &= t^2 - (2b + d + e)t + b^2 + de + eb + bd; \\ b'd' &= t^2 - (2c + e + a)t + c^2 + ea + ac + ce; \\ c'e' &= t^2 - (2d + a + b)t + d^2 + ab + bd + da; \\ d'a' &= t^2 - (2e + b + c)t + e^2 + bc + ce + eb. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} &(a' + b' + c' + d' + e')^2 - 4(e'b' + a'c' + b'd' + c'e' + d'a') \\ &= ((t - b - e) + (t - c - a) + (t - d - b) + (t - e - c) + (t - a - d))^2 \\ &\quad - 4((t^2 - (2a + c + d)t + a^2 + cd + da + ac) + (t^2 - (2b + d + e)t + b^2 + de + eb + bd) \\ &\quad + (t^2 - (2c + e + a)t + c^2 + ea + ac + ce) + (t^2 - (2d + a + b)t + d^2 + ab + bd + da) \\ &\quad + (t^2 - (2e + b + c)t + e^2 + bc + ce + eb)) \\ &= (5t - 2(a + b + c + d + e))^2 \\ &\quad - 4(5t^2 - 4(a + b + c + d + e)t + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ &\quad + (ab + bc + cd + de + ea) + 2(eb + ac + bd + ce + da)) \\ &= 25t^2 - 20(a + b + c + d + e)t + 4(a + b + c + d + e)^2 \\ &\quad - 20t^2 + 16(a + b + c + d + e)t - 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ &\quad - 4(ab + bc + cd + de + ea) - 8(eb + ac + bd + ce + da) \\ &= 5t^2 - 4(a + b + c + d + e)t + 4(a + b + c + d + e)^2 \\ &\quad - 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - 4(ab + bc + cd + de + ea) - 8(eb + ac + bd + ce + da) \\ &= 5t^2 - 4(a + b + c + d + e)t \\ &\quad + 4((a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + 2(ab + bc + cd + de + ea) + 2(eb + ac + bd + ce + da)) \\ &\quad - 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - 4(ab + bc + cd + de + ea) - 8(eb + ac + bd + ce + da) \\ &= 5t^2 - 4(a + b + c + d + e)t + 4(ab + bc + cd + de + ea) \\ &= t^2 + 4 \cdot (t^2 - (a + b + c + d + e)t + (ab + bc + cd + de + ea)). \end{aligned}$$

Doch laut Satz 3 a) ist $t^2 - (a + b + c + d + e)t + (ab + bc + cd + de + ea) = 0$. Somit wird dies zu

$$(a' + b' + c' + d' + e')^2 - 4(e'b' + a'c' + b'd' + c'e' + d'a') = t^2 + 4 \cdot 0 = t^2,$$

und Satz 3 b) ist bewiesen.

Schließlich zeigen wir Satz 3 **c**): Wir haben $|BCDE| = |ABCDE| - |EAB|$, also $a'' = t - a$, und analog $b'' = t - b$, $c'' = t - c$, $d'' = t - d$ und $e'' = t - e$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
& t^2 - (a'' + b'' + c'' + d'' + e'')t + (a''b'' + b''c'' + c''d'' + d''e'' + e''a'') \\
= & t^2 - ((t - a) + (t - b) + (t - c) + (t - d) + (t - e))t \\
& + ((t - a)(t - b) + (t - b)(t - c) + (t - c)(t - d) + (t - d)(t - e) + (t - e)(t - a)) \\
= & t^2 - (5t - (a + b + c + d + e))t \\
& + ((t^2 - at - bt + ab) + (t^2 - bt - ct + bc) + (t^2 - ct - dt + cd) + (t^2 - dt - et + de) \\
& \quad + (t^2 - et - at + ea)) \\
= & t^2 - 5t^2 + (a + b + c + d + e)t \\
& + (5t^2 - 2(at + bt + ct + dt + et) + (ab + bc + cd + de + ea)) \\
= & t^2 + (a + b + c + d + e)t - 2(at + bt + ct + dt + et) + (ab + bc + cd + de + ea) \\
= & t^2 + (a + b + c + d + e)t - 2(a + b + c + d + e)t + (ab + bc + cd + de + ea) \\
= & t^2 - (a + b + c + d + e)t + (ab + bc + cd + de + ea) = 0
\end{aligned}$$

nach Satz 3 **a**). Damit ist Satz 3 **c**) bewiesen.

Aufgabe G3

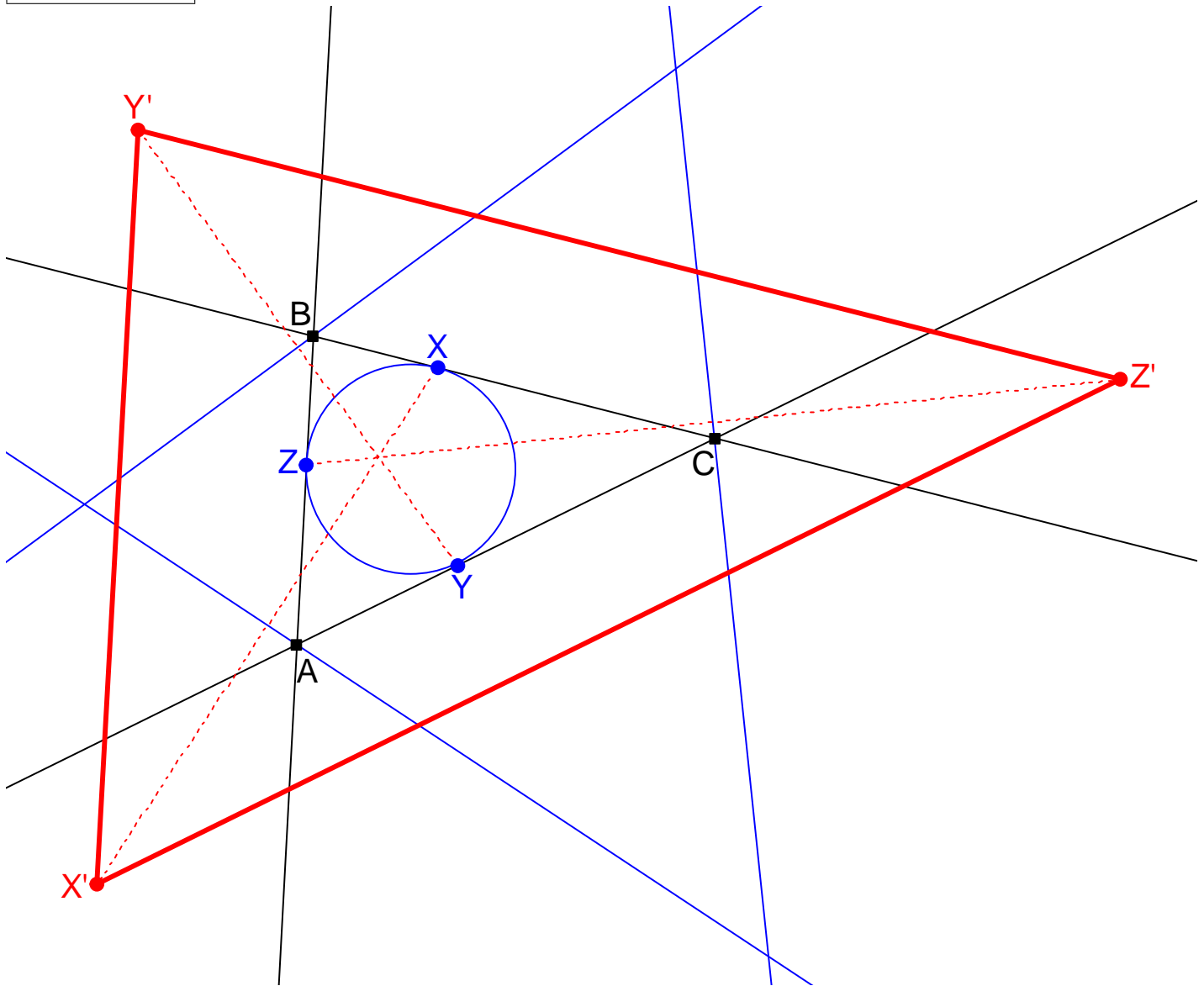


Fig. G3.1

Der Inkreis eines Dreiecks ABC berühre seine Seiten BC , CA und AB in den Punkten X , Y bzw. Z . Seien X' , Y' und Z' die Spiegelbilder dieser Punkte X , Y bzw. Z an den Außenwinkelhalbierenden der Winkel CAB , ABC bzw. BCA . Man zeige: $Y'Z' \parallel BC$, $Z'X' \parallel CA$ und $X'Y' \parallel AB$.

Lösung der Aufgabe G3

Vorbemerkungen: **1.** Wir werden in allen vier nachfolgenden Lösungen der Aufgabe G3 und in den Bemerkungen stets mit orientierten Winkeln modulo 180° arbeiten.

2. Wir verwenden die abkürzende Bezeichnung: Der Ankreis des Dreiecks ABC , der die Seite BC in ihrem Inneren und die Verlängerungen der Seiten CA und AB berührt, heiße der *A-Ankreis* des Dreiecks ABC , und sein Mittelpunkt heiße der *A-Ankreismittelpunkt* des Dreiecks ABC .

Erste Lösung: (Siehe Fig. G3.2.) Sei O_a der A-Ankreismittelpunkt des Dreiecks ABC .

Die Punkte Y und Z sind die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit seinen Seiten CA bzw. AB . Folglich sind diese Punkte Y und Z zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels CAB . Da der Punkt O_a auf dieser Winkelhalbierenden liegt (denn er ist A-Ankreismittelpunkt des Dreiecks ABC), gilt also $O_aY = O_aZ$.

Der Punkt Y' ist das Spiegelbild des Punktes Y an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC . Da der Punkt O_a auf dieser Außenwinkelhalbierenden liegt (denn er ist der A-Ankreismittelpunkt des Dreiecks ABC), gilt daher $O_aY' = O_aY$. Analog ist $O_aZ' = O_aZ$. Zusammen mit $O_aY = O_aZ$ ergibt dies $O_aY' = O_aY = O_aZ = O_aZ'$. Daher liegen die Punkte Y' , Y , Z und Z' auf einem Kreis um den Punkt O_a . Nach dem Umfangswinkelsatz ist folglich $\angle Y'Z'Z = \angle Y'YZ$. Das heißt, $\angle(Y'Z'; ZZ') = \angle(YY'; YZ)$.

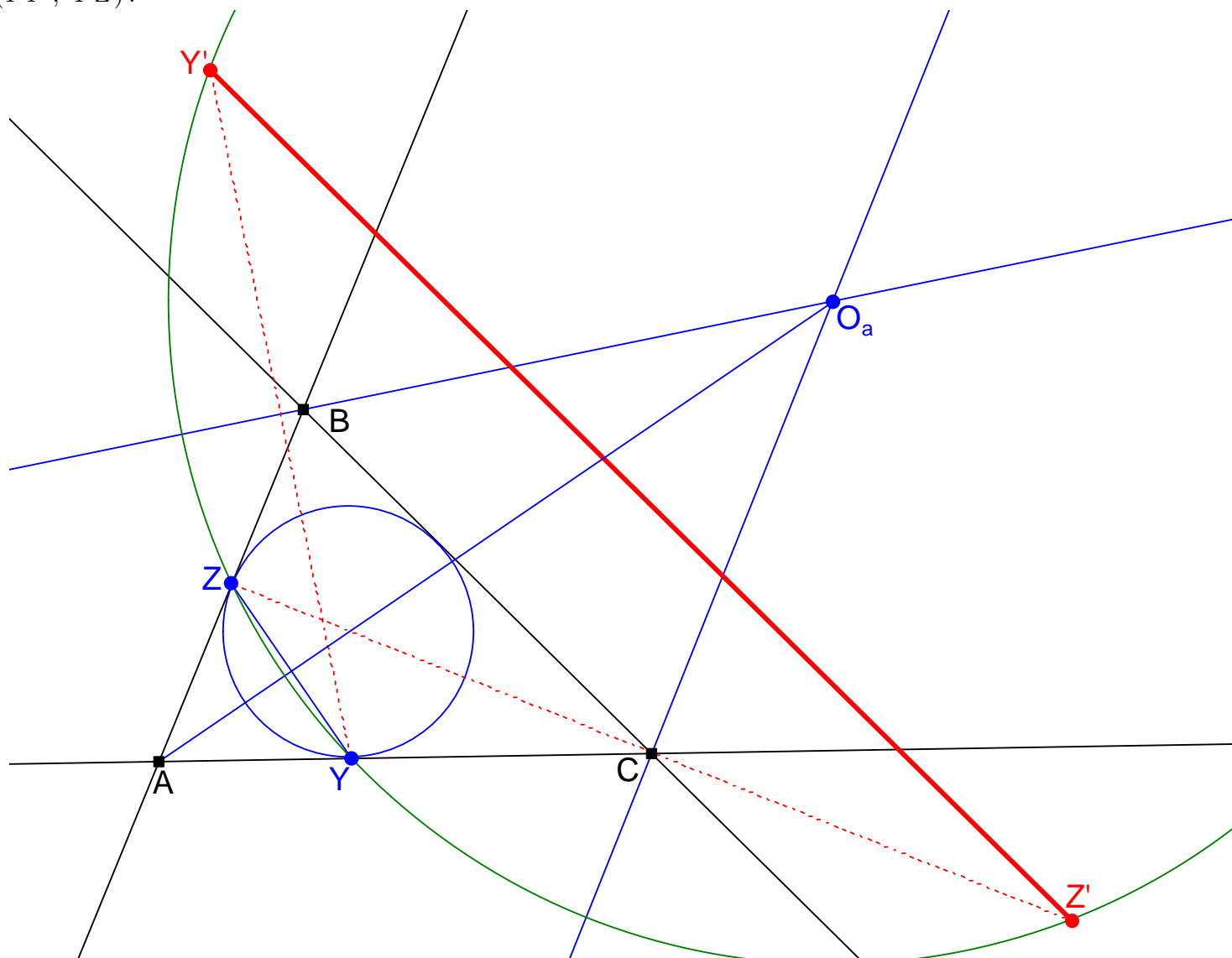


Fig. G3.2

(Siehe Fig. G3.3.) Da der Punkt Y' das Spiegelbild des Punktes Y an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC ist, ist die Gerade YY' orthogonal zur Außen-

winkelhalbierenden des Winkels ABC . Die Außenwinkelhalbierende des Winkels ABC ist aber ihrerseits orthogonal zur Winkelhalbierenden des Winkels ABC (denn die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende eines Winkels sind stets zueinander orthogonal). Somit ist die Gerade YY' parallel zur Winkelhalbierenden des Winkels ABC .

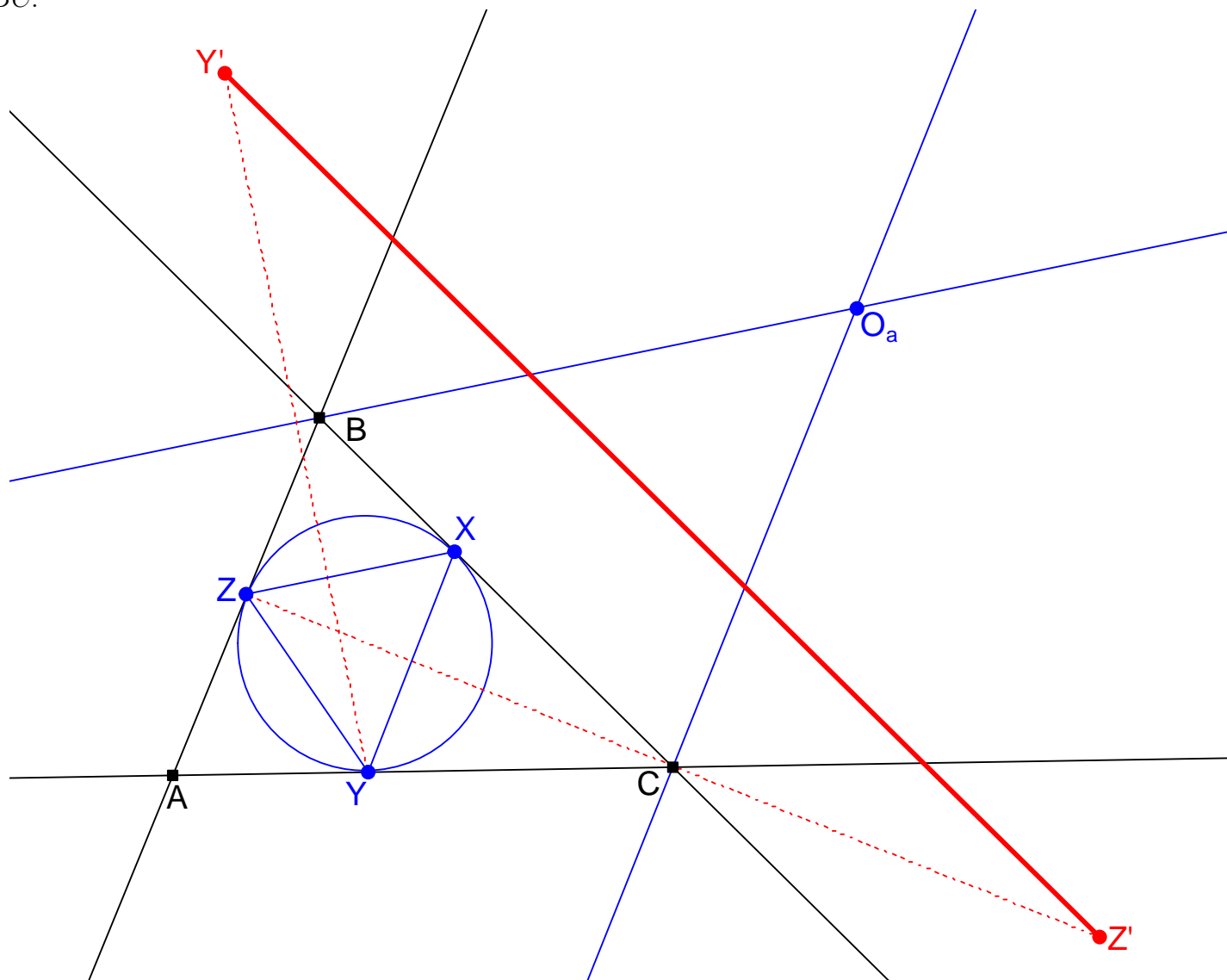


Fig. G3.3

Da die Punkte Z und X die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit den Seiten AB bzw. BC sind, sind sie zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels ABC . Somit ist die Gerade ZX orthogonal zur Winkelhalbierenden des Winkels ABC . Da die Gerade YY' parallel zur Winkelhalbierenden des Winkels ABC ist, ist somit die Gerade YY' orthogonal zur Geraden ZX . Das heißt,

$\angle(YY'; ZX) = 90^\circ$. Analog ist $\angle(ZZ'; XY) = 90^\circ$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\angle(Y'Z'; BC) &= \angle(Y'Z'; ZZ') + \angle(ZZ'; BC) = \angle(YY'; YZ) + \angle(ZZ'; BC) \\
&= (\angle(YY'; ZX) + \angle(ZX; YZ)) + (\angle(ZZ'; XY) + \angle(XY; BC)) \\
&= (90^\circ + \angle XZY) + (90^\circ + \angle(XY; BC)) \\
&= 180^\circ + \angle XZY + \angle(XY; BC) \\
&= \angle XZY + \angle(XY; BC)
\end{aligned}$$

(denn für orientierte Winkel modulo 180° gilt $180^\circ = 0^\circ$). Nun ist die Gerade BC die Tangente an den Inkreis des Dreiecks ABC im Punkt X , und $\angle YZX$ ist der Umfangswinkel über der Sehne YX in diesem Inkreis. Nach dem Sehnentangentenwinkelsatz ist somit $\angle(XY; BC) = \angle YZX$. Also wird

$$\angle(Y'Z'; BC) = \angle XZY + \angle(XY; BC) = \angle XZY + \angle YZX = \angle XZX = 0^\circ,$$

also $Y'Z' \parallel BC$. Analog ergibt sich $Z'X' \parallel CA$ und $X'Y' \parallel AB$, und die Aufgabe ist gelöst.

Zweite Lösung: Im Folgenden bezeichnen wir für jeden Punkt P und jede Gerade g mit $d(P; g)$ den (ungerichteten) Abstand von dem Punkt P zu der Geraden g .

(Siehe Fig. G3.4.) Die Punkte Y und Z sind die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit seinen Seiten CA bzw. AB . Somit sind diese Punkte Y und Z zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels CAB . Das heißt, die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Winkels CAB überführt den Punkt Y in den Punkt Z . Diese Spiegelung überführt aber die Gerade AB in die Gerade CA (denn die Spiegelung an der Winkelhalbierenden eines Winkels überführt die Schenkel des Winkels ineinander). Da bei einer Geradenspiegelung Abstände von Punkten zu Geraden gleich bleiben, gilt somit $d(Z; CA) = d(Y; AB)$.

Der Punkt Y' ist das Spiegelbild des Punktes Y an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC . Mit anderen Worten: Die Spiegelung an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC überführt den Punkt Y in den Punkt Y' . Diese Spiegelung überführt aber die Gerade AB in die Gerade BC (denn die Spiegelung an der Außenwinkelhalbierenden eines Winkels überführt die verlängerten Schenkel des Winkels ineinander). Da bei einer Geradenspiegelung Abstände von Punkten zu Geraden unverändert bleiben, gilt somit $d(Y'; BC) = d(Y; AB)$. Analog ist $d(Z'; BC) = d(Z; CA)$. Somit wird die Gleichung $d(Z; CA) = d(Y; AB)$ zu $d(Z'; BC) = d(Y'; BC)$. Das heißt, die Punkte Y' und Z' haben den gleichen Abstand von der Geraden BC . Da diese Punkte Y' und Z' ferner in einer und derselben Halbebene bezüglich der Geraden BC liegen (nämlich in der Halbebene, die den Punkt A nicht enthält), folgt daraus $Y'Z' \parallel BC$. Analog gilt $Z'X' \parallel CA$ und $X'Y' \parallel AB$, und die Aufgabe ist gelöst.

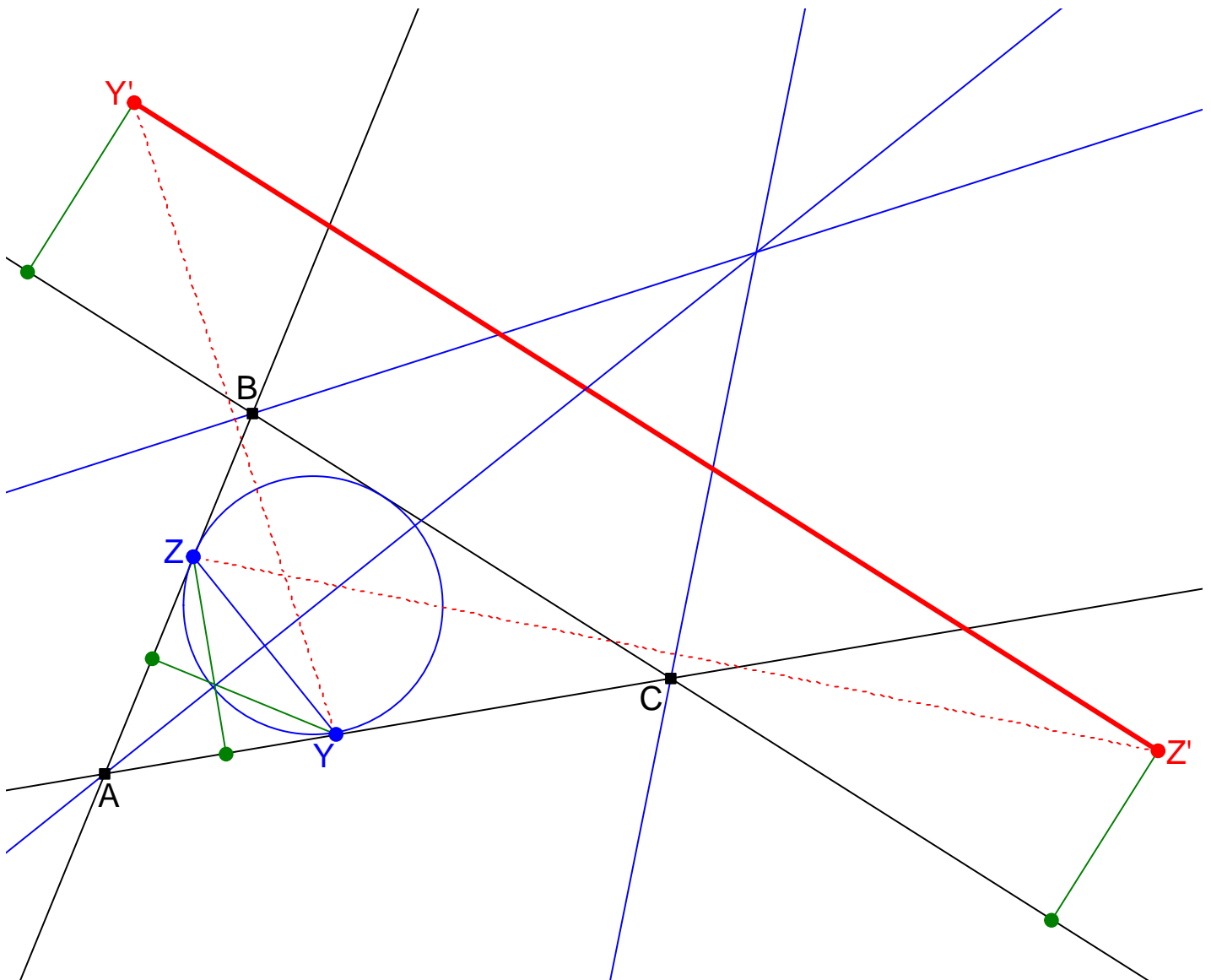


Fig. G3.4

Dritte Lösung: (Siehe Fig. G3.5.) Seien C_b und A_b die Spiegelbilder der Punkte C bzw. A an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC , und seien A_c und B_c die Spiegelbilder der Punkte A bzw. B an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels BCA . Sei A' der Schnittpunkt der Geraden C_bA_b und A_cB_c .

Der Punkt C_b ist das Spiegelbild des Punktes C an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC . Andererseits ist die Gerade AB das Spiegelbild der Geraden BC an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC (denn bei der Spiegelung an der Außenwinkelhalbierenden eines Winkels gehen die verlängerten Schenkel des Winkels ineinander über). Da der Punkt C auf der Geraden BC liegt, liegt also der Punkt C_b auf der Geraden AB . Analog liegt der Punkt A_b auf der Geraden BC , der Punkt A_c auf der Geraden BC , und der Punkt B_c auf der Geraden CA .

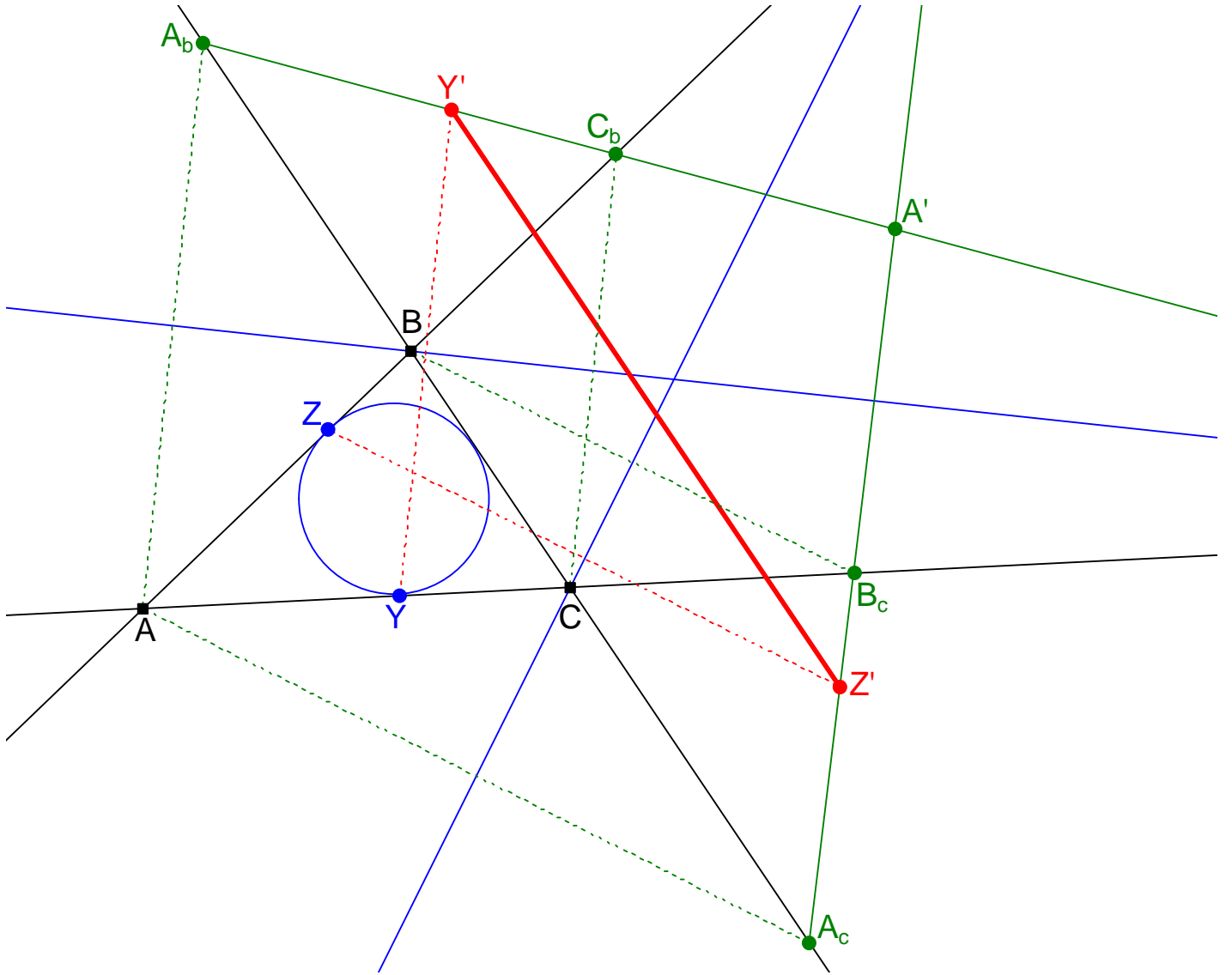


Fig. G3.5

Die Punkte Y' , C_b und A_b sind die Spiegelbilder der Punkte Y , C bzw. A an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC . Da der Punkt Y auf der Strecke CA liegt, liegt also der Punkt Y' auf der Strecke C_bA_b , und da bei Geradenspiegelungen Abstände erhalten bleiben, gilt $A_bY' = AY$. Analog liegt der Punkt Z' auf der Strecke A_cB_c , und es gilt $A_cZ' = AZ$.

Da die zwei Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis gleich lang sind, gilt aber $AY = AZ$. Wegen $A_bY' = AY$ und $A_cZ' = AZ$ wird dies zu $A_bY' = A_cZ'$.

Die Punkte C_b und A_b sind die Spiegelbilder der Punkte C bzw. A an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC . Indes ist der Punkt B sein eigenes Spiegelbild an dieser Außenwinkelhalbierenden (denn der Punkt B liegt auf dieser Außenwinkelhalbierenden). Da bei einer Geradenspiegelung Winkel ihr Vorzeichen ändern, gilt also $\angle BA_bC_b = -\angle BAC$. Analog gilt $\angle CA_cB_c = -\angle CAB$. Daher ist

$$\angle A_cA_bA' = \angle BA_bC_b = -\angle BAC = -(-\angle CAB) = -\angle CA_cB_c = \angle A'A_cA_b.$$

Folglich ist das Dreieck $A_bA'A_c$ gleichschenkelig (wegen zwei gleichen Winkeln), und zwar mit $A_bA' = A_cA'$.

Aus $A_bA' = A_cA'$ und $A_bY' = A_cZ'$ folgt $\frac{A_bY'}{A_bA'} = \frac{A_cZ'}{A_cA'}$. Nach dem Strahlensatz gilt somit $Y'Z' \parallel A_bA_c$, also $Y'Z' \parallel BC$. Analog finden wir $Z'X' \parallel CA$ und $X'Y' \parallel AB$. Dadurch ist die Aufgabe gelöst.

Bemerkung zur Dritten Lösung: Die Dritte Lösung der Aufgabe G3 ist dadurch interessant, daß aus ihr eine Reihe interessanter Fakten folgt.

Um diese Fakten erst einmal formulieren zu können, ergänzen wir unsere Konfiguration symmetrisch (Fig. G3.6):

In der Dritten Lösung haben wir die Spiegelbilder C_b und A_b der Punkte C bzw. A an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC , und die Spiegelbilder A_c und B_c der Punkte A bzw. B an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels BCA eingeführt. Seien nun B_a und C_a die Spiegelbilder der Punkte B bzw. C an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels CAB .

Wir haben gezeigt, daß die Punkte C_b , A_b , A_c und B_c auf den Geraden AB , BC , BC bzw. CA liegen. Analog können wir zeigen, daß die Punkte B_a und C_a auf den Geraden CA bzw. AB liegen.

Wir haben gezeigt, daß der Punkt Y' auf der Strecke C_bA_b liegt, und daß der Punkt Z' auf der Strecke A_cB_c liegt. Analog können wir beweisen, daß der Punkt X' auf der Strecke B_aC_a liegt.

Wir haben den Schnittpunkt der Geraden C_bA_b und A_cB_c mit A' bezeichnet. Sei jetzt B' der Schnittpunkt der Geraden A_cB_c und B_aC_a , und sei C' der Schnittpunkt der Geraden B_aC_a und C_bA_b .

Da die Punkte B_a und C_a die Spiegelbilder der Punkte B bzw. C an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels CAB sind, ist die Gerade B_aC_a das Spiegelbild der Geraden BC an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels CAB . Nun ist die Gerade BC eine äußere gemeinsame Tangente des B -Ankreises und des C -Ankreises des Dreiecks ABC , und die Außenwinkelhalbierende des Winkels CAB ist die Zentrale dieser beiden Ankreise (denn die Außenwinkelhalbierende des Winkels CAB geht durch die Mittelpunkte des B -Ankreises und des C -Ankreises des Dreiecks ABC). Das Spiegelbild einer äußeren gemeinsamen Tangente zweier Kreise an ihrer Zentralen ist bekanntlich die andere äußere gemeinsame Tangente dieser beiden Kreise. Somit ist die Gerade B_aC_a , weil sie ja das Spiegelbild der Geraden BC (einer äußeren gemeinsamen Tangente des B -Ankreises und des C -Ankreises des Dreiecks ABC) an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels CAB (der Zentralen dieser beiden Ankreise) ist, die von der Geraden BC verschiedene äußere gemeinsame Tangente des B -Ankreises und des C -Ankreises des Dreiecks ABC . Analog ist die Gerade C_bA_b die von der Geraden CA verschiedene äußere gemeinsame Tangente des C -Ankreises und des A -Ankreises des Dreiecks ABC . Der Punkt C' ist also, da er ja der Schnittpunkt der Geraden B_aC_a und C_bA_b ist, der Schnittpunkt der von der Geraden BC verschiedenen äußeren gemeinsamen Tangente des B -Ankreises und des C -Ankreises des Dreiecks ABC mit der von der Geraden CA verschiedenen äußeren gemeinsamen Tangente des C -Ankreises und des A -Ankreises des Dreiecks ABC . Analog lassen sich die Punkte A' und B' neu charakterisieren.

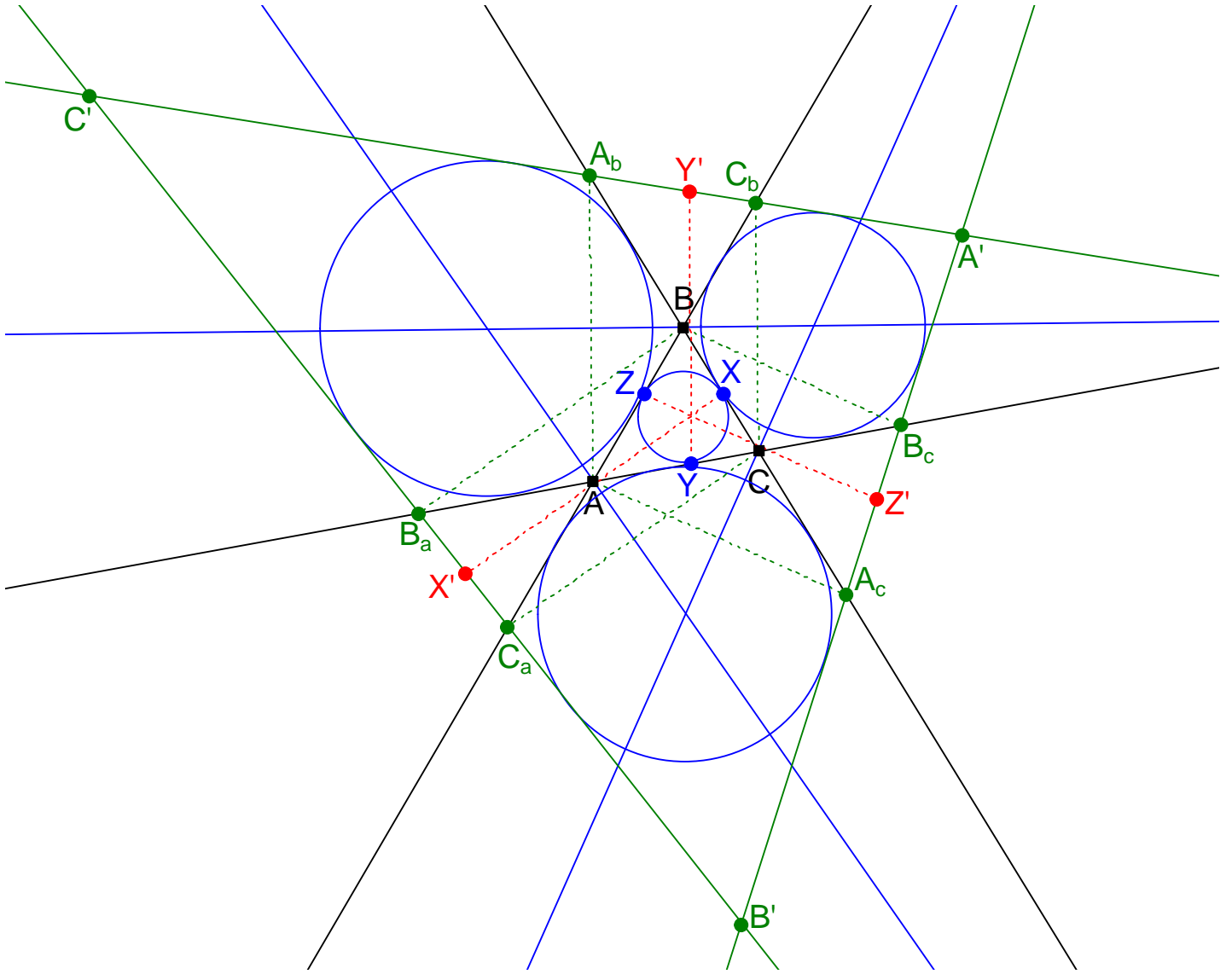


Fig. G3.6

Wir betrachten im Folgenden nur den Fall, wenn das Dreieck ABC spitzwinklig ist (sonst kann sich einiges an der Anordnung der Punkte ändern).

Aus $A_bA' = A_cA'$ und $A_bY' = A_cZ'$ folgt $A_bA' - A_bY' = A_cA' - A_cZ'$, also $A'Y' = A'Z'$. Analog ergibt sich $B'Z' = B'X'$ und $C'X' = C'Y'$. Damit ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot A'Y' &= A'Y' + A'Y' = A'Y' + A'Z' = (C'A' - C'Y') + (A'B' - B'Z') \\ &= (C'A' - C'X') + (A'B' - B'X') = C'A' + A'B' - (C'X' + B'X') = C'A' + A'B' - B'C', \end{aligned}$$

also

$$A'Y' = \frac{C'A' + A'B' - B'C'}{2} = \frac{B'C' + C'A' + A'B'}{2} - B'C'.$$

Wenn wir mit $s' = \frac{B'C' + C'A' + A'B'}{2}$ den halben Umfang des Dreiecks $A'B'C'$ bezeichnen, dann gilt also $A'Y' = s' - B'C'$. Ist andererseits Y'_1 der Punkt, in dem der Inkreis des Dreiecks $A'B'C'$ seine Seite $C'A'$ berührt, dann gilt (nach den bekannten Abstandsformeln für die Inkreisberührpunkte in einem Dreieck) für diesen Punkt Y'_1 die Gleichung $A'Y'_1 = s' - B'C'$. Somit ist $A'Y'_1 = A'Y'$, und da die Punkte Y' und Y'_1

beide auf der Strecke $C'A'$ liegen, bedeutet dies, daß die Punkte Y' und Y'_1 zusammenfallen. Da der Punkt Y'_1 als der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $A'B'C'$ mit seiner Seite $C'A'$ definiert wurde, ergibt sich also: Der Punkt Y' ist der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $A'B'C'$ mit seiner Seite $C'A'$. Analog sind die Punkte Z' und X' die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks $A'B'C'$ mit seinen Seiten $A'B'$ bzw. $B'C'$.

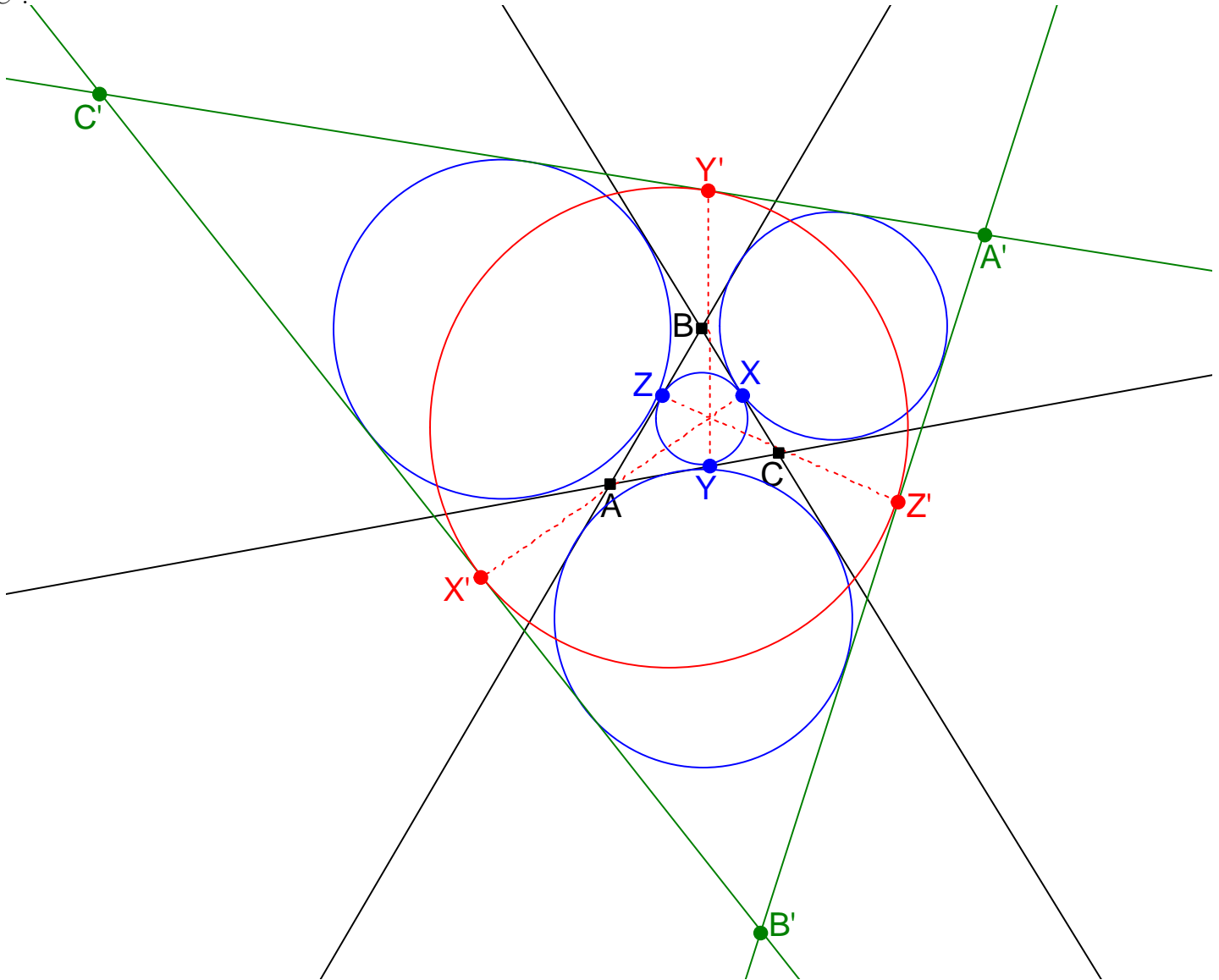


Fig. G3.7

Wir können also feststellen:

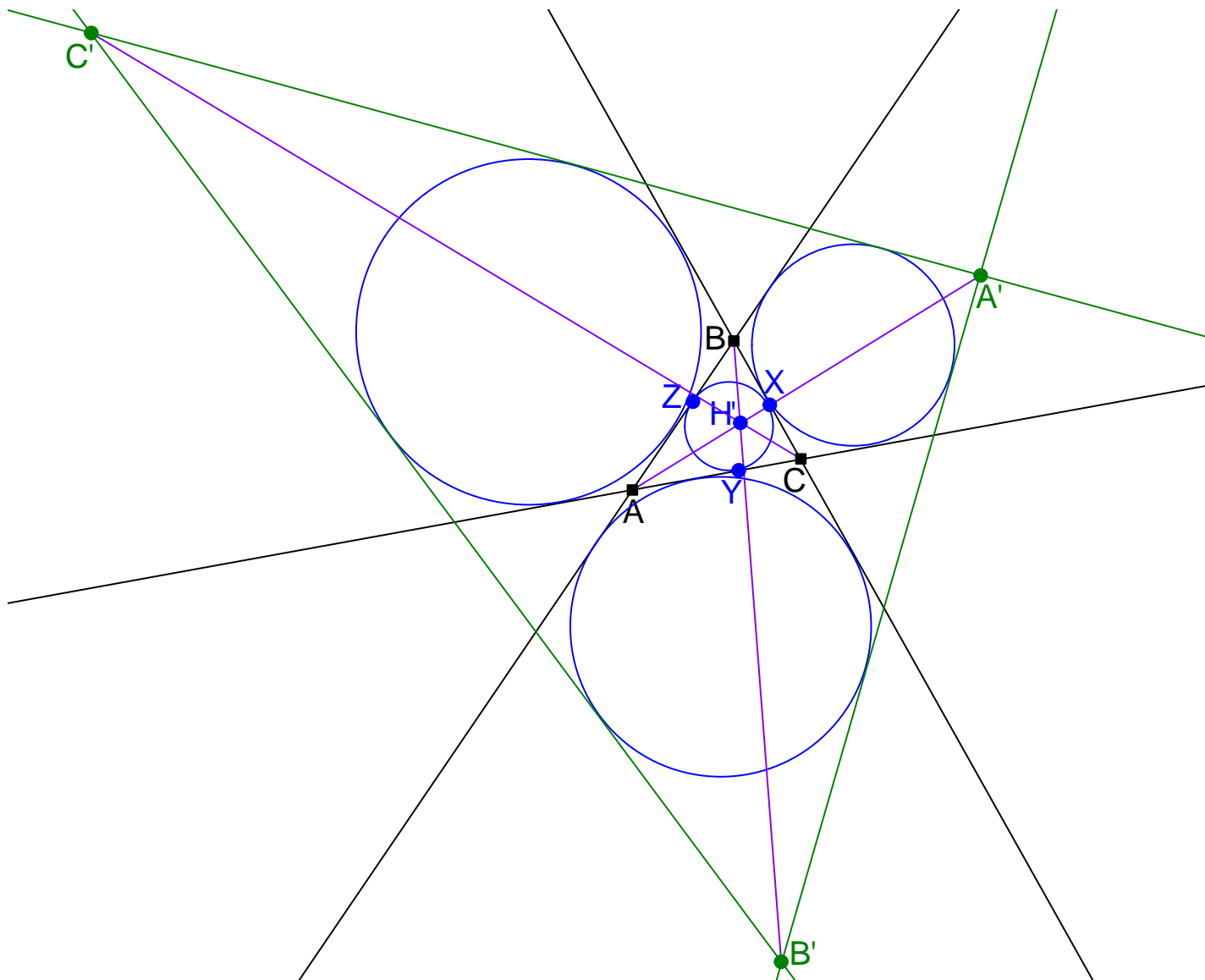
Satz 1: Der Inkreis eines spitzwinkligen Dreiecks ABC berühre seine Seiten BC , CA und AB in den Punkten X , Y bzw. Z . Seien X' , Y' und Z' die Spiegelbilder dieser Punkte X , Y bzw. Z an den Außenwinkelhalbierenden der Winkel CAB , ABC bzw. BCA .

Sei C' der Schnittpunkt der von der Geraden BC verschiedenen äußeren gemeinsamen Tangente des B -Ankreises und des C -Ankreises des Dreiecks ABC mit der von der Geraden CA verschiedenen äußeren gemeinsamen Tangente des C -Ankreises und des A -Ankreises des Dreiecks ABC . Analog

definieren wir die Punkte A' und B' . Dann sind die Punkte X' , Y' und Z' die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks $A'B'C'$ mit seinen Seiten $B'C'$, $C'A'$ bzw. $A'B'$. (Siehe Fig. G3.7.)

Eine weitere Eigenschaft der Konfiguration, die wir jetzt auch recht schnell beweisen können, ist folgende¹:

Satz 2: Der Inkreis eines Dreiecks ABC berühre seine Seiten BC , CA und AB in den Punkten X , Y bzw. Z . Sei C' der Schnittpunkt der von der Geraden BC verschiedenen äußeren gemeinsamen Tangente des B -Ankreises und des C -Ankreises des Dreiecks ABC mit der von der Geraden CA verschiedenen äußeren gemeinsamen Tangente des C -Ankreises und des A -Ankreises des Dreiecks ABC . Analog definieren wir die Punkte A' und B' . Dann schneiden sich die Geraden AA' , BB' und CC' in einem Punkt, nämlich im Höhenschnittpunkt des Dreiecks XYZ . (Siehe Fig. G3.8.)



¹Ab hier braucht das Dreieck ABC nicht mehr spitzwinklig sein.

Fig. G3.8

Beweis von Satz 2: Sei H' der Höhenschnittpunkt des Dreiecks XYZ . Wir müssen beweisen, daß die Geraden AA' , BB' und CC' durch diesen Punkt H' gehen.

Wie in der Ersten Lösung können wir leicht feststellen, daß die Gerade YY' orthogonal zu der Geraden ZX ist. Das heißt, die Gerade YY' ist die Senkrechte zur Geraden ZX durch den Punkt Y , also die von Y ausgehende Höhe des Dreiecks XYZ . Folglich geht diese Gerade YY' durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks XYZ , also durch den Punkt H' . Analog gehen die Geraden ZZ' und XX' durch den Punkt H' .

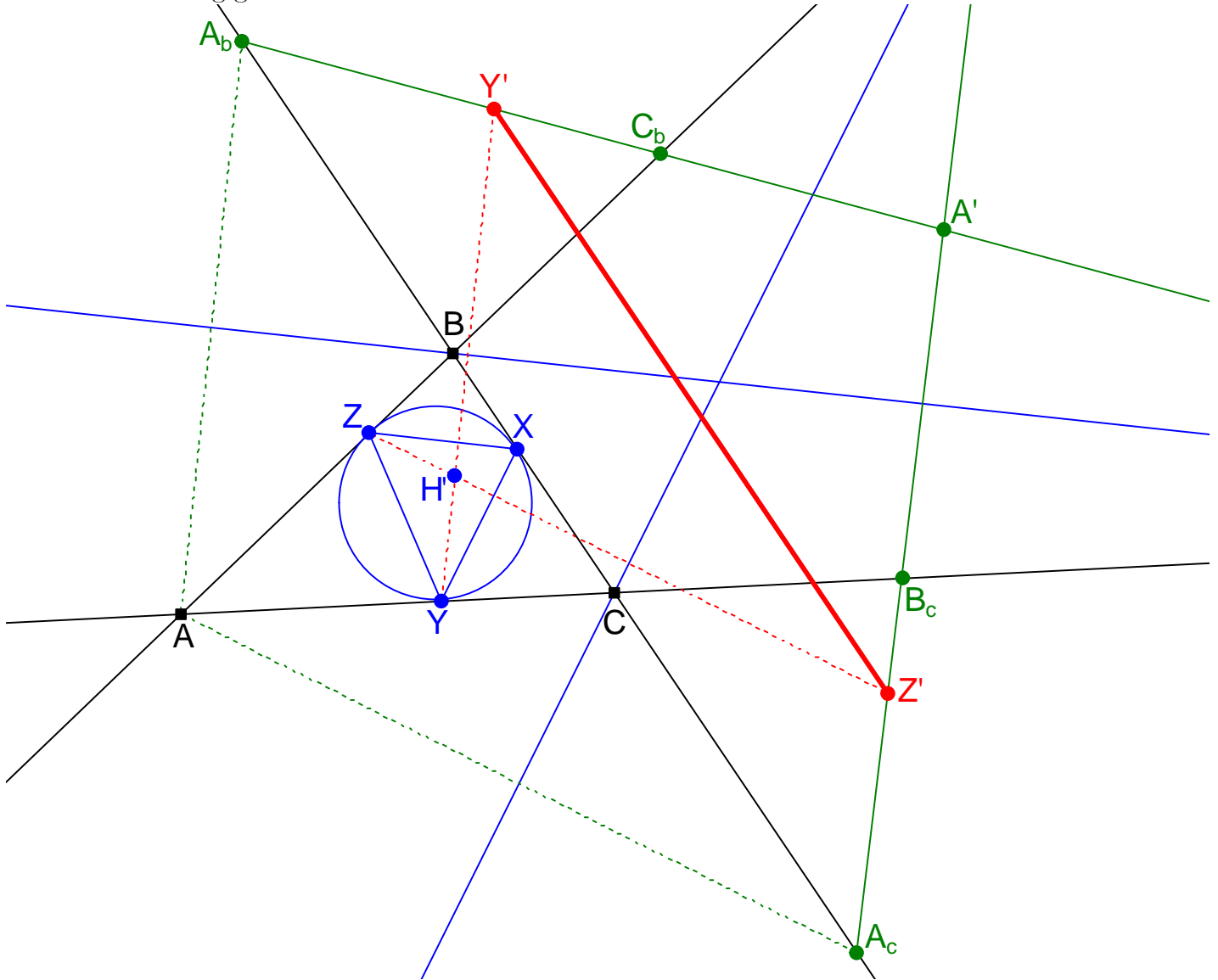


Fig. G3.9

(Siehe Fig. G3.9.) Da der Punkt A_b das Spiegelbild des Punktes A an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC ist, ist die Gerade AA_b orthogonal zur Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC . Aber da der Punkt Y' das Spiegelbild des Punktes Y an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC ist, ist die Gerade YY' ebenfalls orthogonal zur Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC . Somit gilt $YY' \parallel AA_b$. Mit anderen Worten: $H'Y' \parallel AA_b$. Analog ist $H'Z' \parallel AA_c$. Schließlich ist $Y'Z' \parallel A_bA_c$ (dies ist nur eine Umschreibung der Aussage $Y'Z' \parallel BC$). Somit sind entsprechende Seiten der zwei Dreiecke $H'Y'Z'$ und AA_bA_c zueinander parallel; folglich sind diese zwei

Dreiecke zueinander zentrisch ähnlich, und daher schneiden sich die Geraden $H'A$, $Y'A_b$ und $Z'A_c$ in einem Punkt (nämlich im Ähnlichkeitszentrum dieser beiden Dreiecke). Mit anderen Worten: Der Schnittpunkt der Geraden $Y'A_b$ und $Z'A_c$ liegt auf der Geraden $H'A$. Doch der Schnittpunkt der Geraden $Y'A_b$ und $Z'A_c$ ist der Punkt A' . Daher liegt der Punkt A' auf der Geraden $H'A$. Mit anderen Worten: Die Punkte A , A' und H' liegen auf einer Geraden, d. h. die Gerade AA' geht durch den Punkt H' . Analog gehen die Geraden BB' und CC' durch den Punkt H' . Somit ist Satz 2 bewiesen.

Vierte Lösung: Wir fangen an mit einem banalen Hilfssatz (Fig. G3.10):

Satz 3: Seien u und v zwei zueinander orthogonale Geraden durch einen Punkt M . Sei P ein Punkt, und seien Q und R die Spiegelbilder des Punktes P an den Geraden u bzw. v . Dann ist der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke QR .

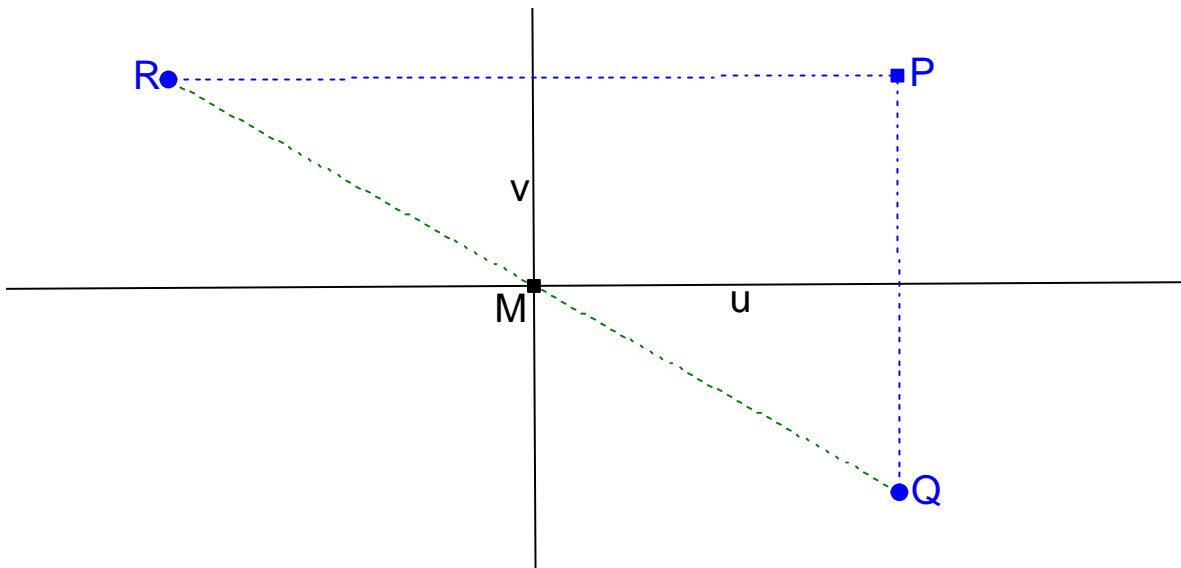


Fig. G3.10

Beweis von Satz 3: Sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke QR .

Sei Q_1 der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt P auf die Gerade u . Da der Punkt Q das Spiegelbild des Punktes P an der Geraden u ist, ist somit der Punkt Q_1 der Mittelpunkt der Strecke PQ . Andererseits ist M_1 der Mittelpunkt der Strecke QR . Also ist die Strecke M_1Q_1 Mittelparallele im Dreieck PQR . Folglich ist $M_1Q_1 \parallel PR$. Da aber R das Spiegelbild des Punktes P an der Geraden v ist, gilt $PR \perp v$, und wegen $v \perp u$ ist also $PR \parallel u$. Zusammen mit $M_1Q_1 \parallel PR$ ergibt dies $M_1Q_1 \parallel u$. Doch die Geraden M_1Q_1 und u haben einen gemeinsamen Punkt (nämlich den Punkt Q_1), und können deshalb nur dann parallel sein, wenn sie zusammenfallen. Aus $M_1Q_1 \parallel u$ folgt also, daß die Geraden M_1Q_1 und u zusammenfallen. Folglich liegt der Punkt M_1 auf der Geraden u . Analog liegt der Punkt M_1 auf der Geraden v . Somit ist der Punkt M_1 der Schnittpunkt der Geraden u und v , also der Punkt M . Da wir den Punkt M_1 als Mittelpunkt der Strecke QR definiert haben, ist also der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke QR . Satz 3 ist damit bewiesen.

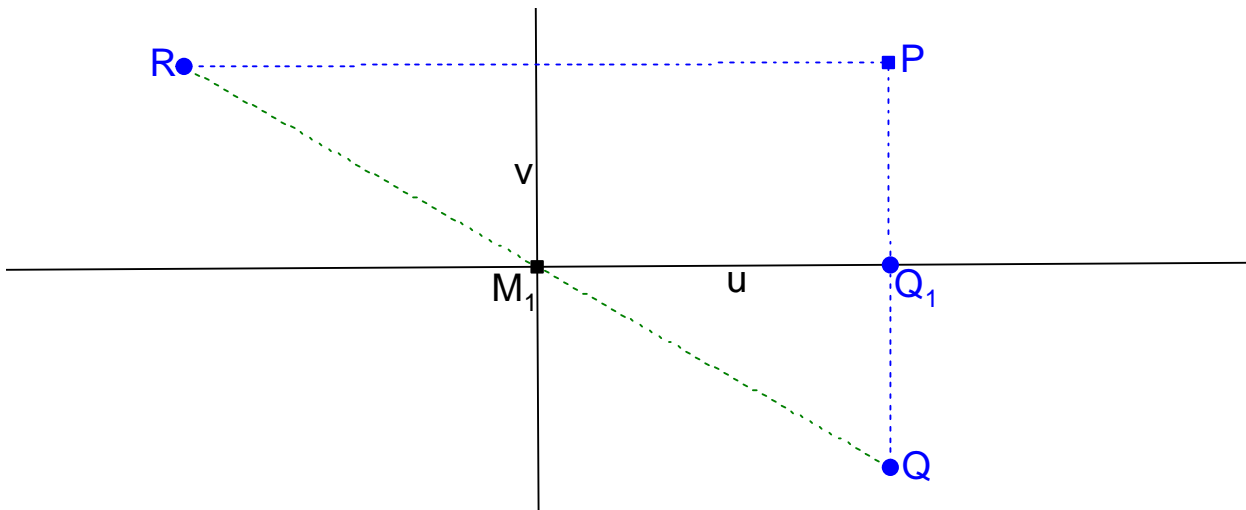


Fig. G3.11

Nun beweisen wir eine Art Analogon zu der Aufgabe G3 (Fig. G3.12):

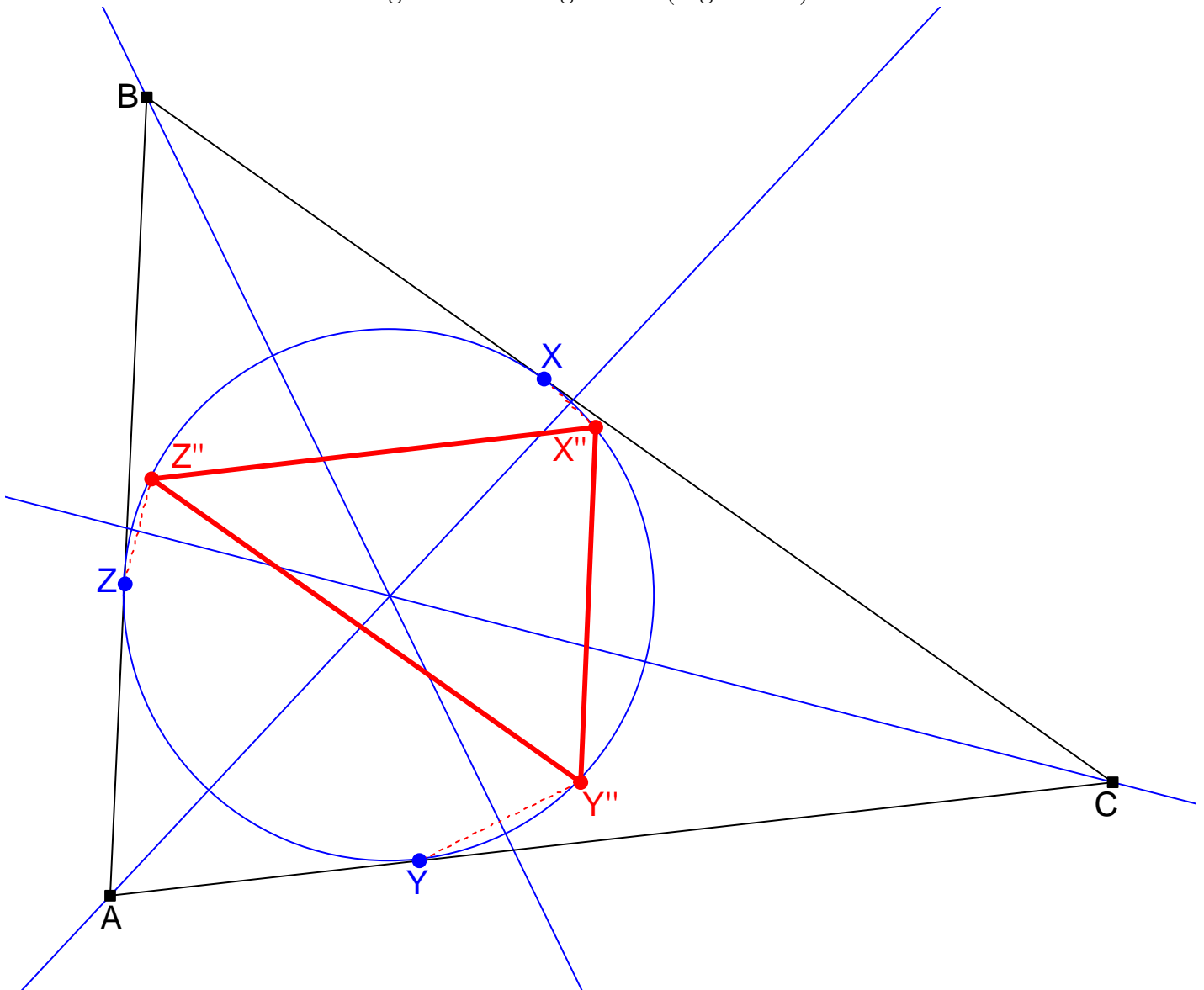


Fig. G3.12

Satz 4: Der Inkreis eines Dreiecks ABC berühre seine Seiten BC , CA und AB in den Punkten X , Y bzw. Z . Seien X'' , Y'' und Z'' die Spiegelbilder dieser Punkte X , Y bzw. Z an den Winkelhalbierenden der Winkel CAB , ABC bzw. BCA . Dann ist $Y''Z'' \parallel BC$, $Z''X'' \parallel CA$ und $X''Y'' \parallel AB$.

Beweis von Satz 4: Die Winkelhalbierende des Winkels CAB geht durch den Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC (denn die Winkelhalbierenden der Winkel eines Dreiecks gehen durch seinen Inkreismittelpunkt). Folglich geht bei der Spiegelung an dieser Winkelhalbierenden der Inkreis des Dreiecks ABC in sich selbst über (denn ein Kreis geht bei der Spiegelung an einer Geraden durch seinen Mittelpunkt in sich selbst über). Da der Punkt X auf dem Inkreis des Dreiecks ABC liegt, liegt somit auch sein Spiegelbild an der Winkelhalbierenden des Winkels CAB auf dem Inkreis des Dreiecks ABC . Doch das Spiegelbild des Punktes X an der Winkelhalbierenden des Winkels CAB ist der Punkt X'' . Das heißt: Der Punkt X'' liegt auf dem Inkreis des Dreiecks ABC . Analog liegen auch die Punkte Y'' und Z'' auf dem Inkreis des Dreiecks ABC .

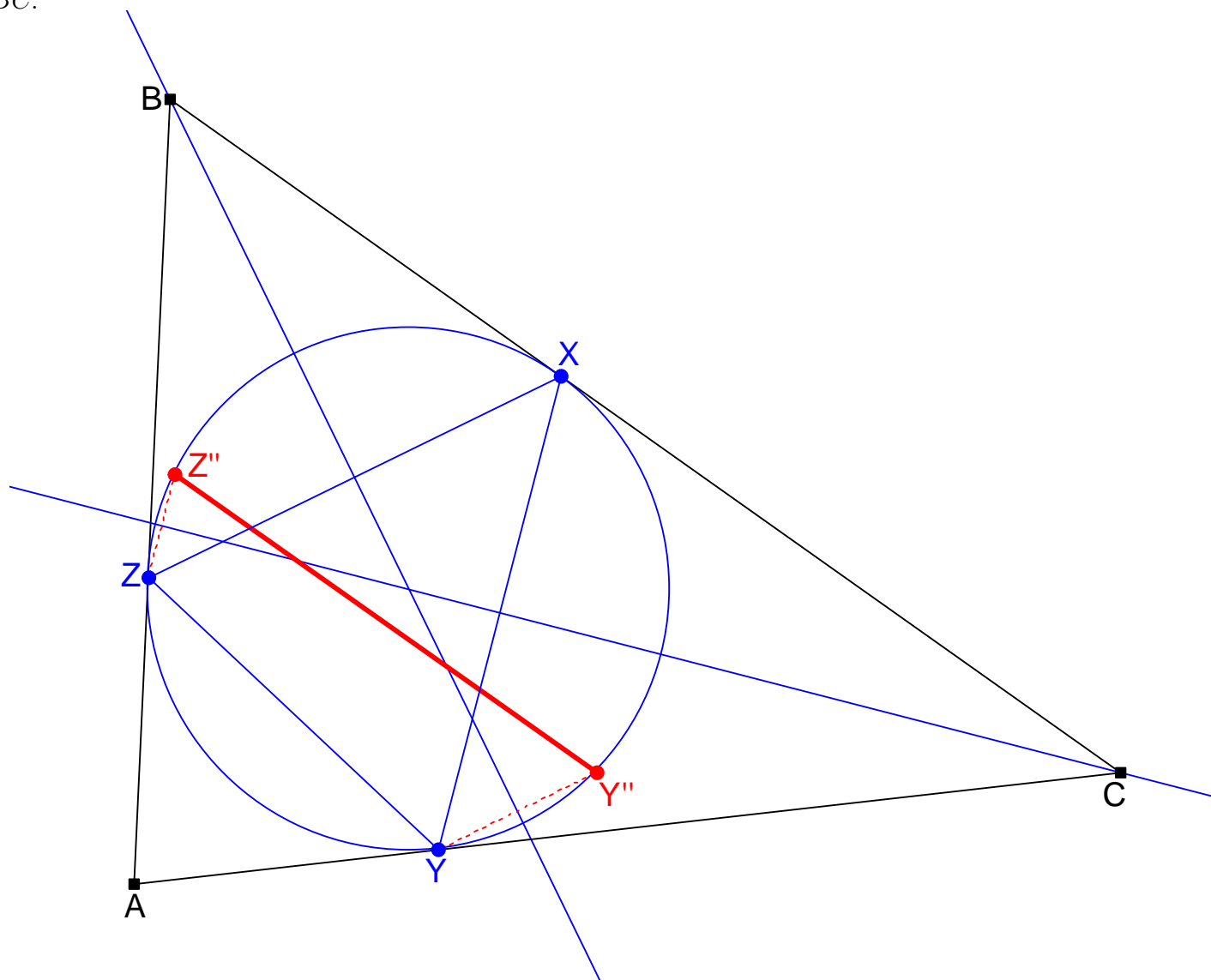


Fig. G3.13

(Siehe Fig. G3.13.) Da die Punkte Y , Z , Y'' und Z'' auf einem Kreis liegen (nämlich

auf dem Inkreis des Dreiecks ABC), ist nach dem Umfangswinkelsatz $\angle Y''Z''Z = \angle Y''YZ$, also, mit anderen Worten, $\angle (Y''Z''; ZZ'') = \angle (YY''; YZ)$.

Die Punkte Z und X sind die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit seinen Seiten AB bzw. BC . Folglich liegen diese Punkte Z und X zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels ABC . Daher ist die Gerade ZX orthogonal zur Winkelhalbierenden des Winkels ABC . Andererseits ist der Punkt Y'' das Spiegelbild des Punktes Y an der Winkelhalbierenden des Winkels ABC , und deshalb ist die Gerade YY'' orthogonal zur Winkelhalbierenden des Winkels ABC . Daher ist $YY'' \parallel ZX$, und daraus folgt $\angle (YY''; YZ) = \angle (ZX; YZ)$. Analog ist $ZZ'' \parallel XY$, und daraus folgt $\angle (Y''Z''; ZZ'') = \angle (Y''Z''; XY)$. Aus der Gleichung $\angle (Y''Z''; ZZ'') = \angle (YY''; YZ)$ wird somit $\angle (Y''Z''; XY) = \angle (ZX; YZ)$.

Andererseits ist die Gerade BC die Tangente an den Inkreis des Dreiecks ABC im Punkt X . Somit ist der Winkel $\angle (BC; XY)$ nach dem Sehnentangentenwinkelsatz gleich dem Umfangswinkel über der Sehne XY im Inkreis des Dreiecks ABC , also gleich dem Winkel $\angle XZY$. Wir haben also $\angle (BC; XY) = \angle XZY = \angle (ZX; YZ)$. Vergleich mit $\angle (Y''Z''; XY) = \angle (ZX; YZ)$ liefert $\angle (Y''Z''; XY) = \angle (BC; XY)$, also $Y''Z'' \parallel BC$. Analog ist $Z''X'' \parallel CA$ und $X''Y'' \parallel AB$, und Satz 4 ist bewiesen.

Ein alternativer Beweis von Satz 4 ergibt sich analog zur Zweiten Lösung der Aufgabe G3 mithilfe von Abstandsbetrachtungen.

(Siehe Fig. G3.14.) Nun verwenden wir Vektoren. Aus $Y''Z'' \parallel BC$ folgt, daß es eine reelle Zahl k gibt mit $\overrightarrow{Y''Z''} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

Die Winkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende des Winkels ABC sind zwei zueinander orthogonale Geraden durch den Punkt B (orthogonal, da die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende eines Winkels immer zueinander orthogonal sind). Die Punkte Y'' bzw. Y' sind die Spiegelbilder des Punktes Y an diesen zwei Geraden. Laut Satz 3 ist also der Punkt B der Mittelpunkt der Strecke $Y''Y'$. Somit gilt $\overrightarrow{BY''} = \overrightarrow{Y'B}$. Analog ist $\overrightarrow{CZ''} = \overrightarrow{Z'C}$. Damit ist

$$\begin{aligned} k \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{Y''Z''} = \overrightarrow{Y''B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CZ''} = -\overrightarrow{BY''} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CZ''} = -\overrightarrow{Y'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{Z'C} \\ &= \overrightarrow{BY'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{Z'C} = (\overrightarrow{Z'C} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BY'}) + 2 \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{Z'C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BY'}) + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{Z'Y'} + 2 \cdot \overrightarrow{BC}, \end{aligned}$$

also $\overrightarrow{Z'Y'} = k \cdot \overrightarrow{BC} - 2 \cdot \overrightarrow{BC} = (k - 2) \cdot \overrightarrow{BC}$. Daraus folgt $Y'Z' \parallel BC$. Analog ist $Z'X' \parallel CA$ und $X'Y' \parallel AB$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

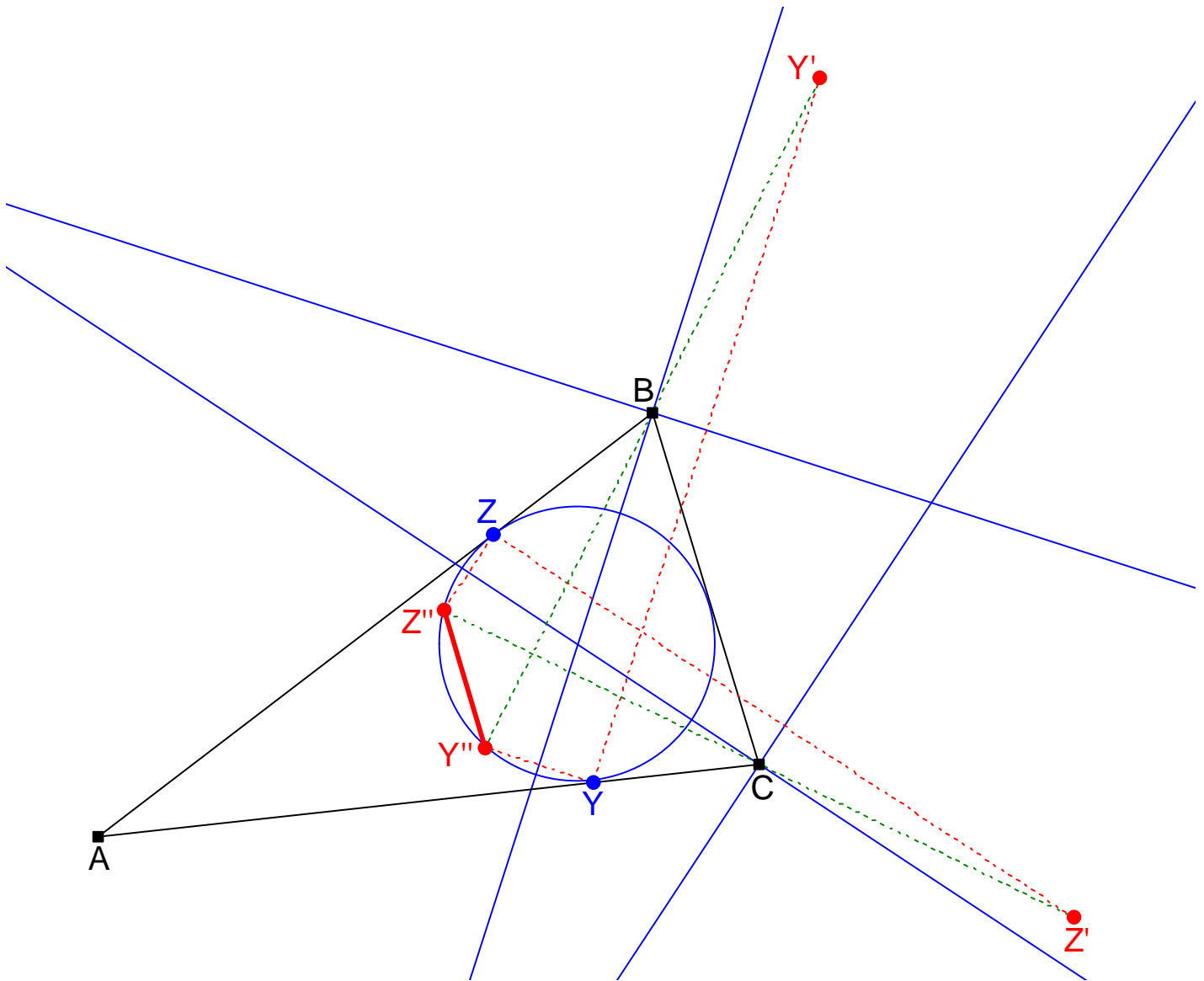


Fig. G3.14

Bemerkung zur Vierten Lösung: Aus dieser Vierten Lösung der Aufgabe G3 folgt leicht die Aussage der Aufgabe 2 der Internationalen Mathematik-Olympiade 1982:

Satz 5: Der Inkreis eines nicht-gleichseitigen Dreiecks ABC berühre seine Seiten BC , CA und AB in den Punkten X , Y bzw. Z . Seien X'' , Y'' und Z'' die Spiegelbilder dieser Punkte X , Y bzw. Z an den Winkelhalbierenden der Winkel CAB , ABC bzw. BCA . Seien M_a , M_b und M_c die Mittelpunkte der Strecken BC , CA bzw. AB . Dann schneiden sich die Geraden M_aX'' , M_bY'' und M_cZ'' in einem Punkt. (Siehe Fig. G3.15.)

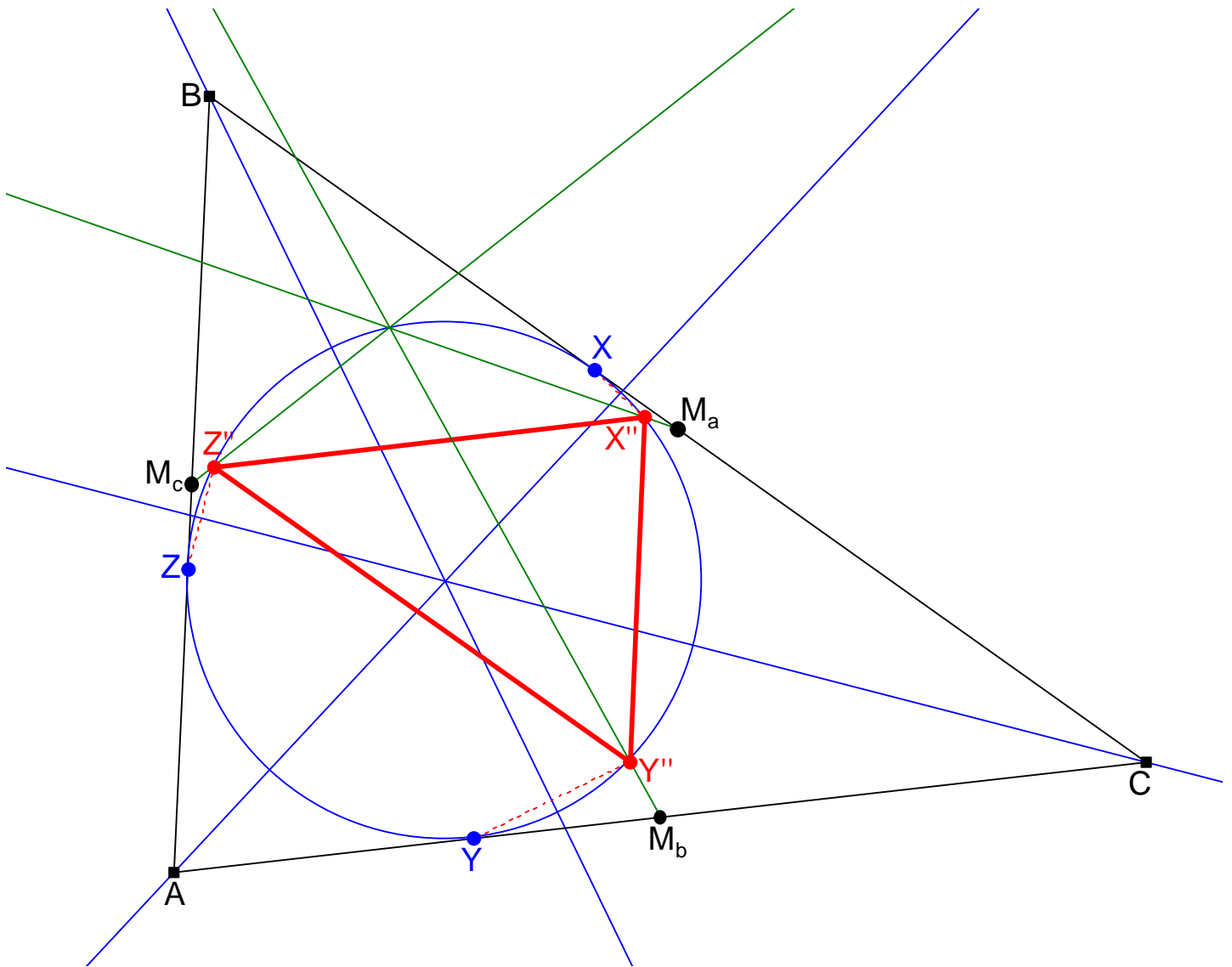


Fig. G3.15

Beweis von Satz 5: Da die Punkte M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten CA bzw. AB des Dreiecks ABC sind, gilt nach dem Satz von der Mittelparallelen $M_b M_c \parallel BC$. Nach Satz 4 ist aber $Y'' Z'' \parallel BC$. Somit ist $M_b M_c \parallel Y'' Z''$. Analog ist $M_c M_a \parallel Z'' X''$ und $M_a M_b \parallel X'' Y''$. Daher sind die Dreiecke $M_a M_b M_c$ und $X'' Y'' Z''$ zentrisch ähnlich; folglich schneiden sich die Geraden $M_a X''$, $M_b Y''$ und $M_c Z''$ in einem Punkt, nämlich in dem Ähnlichkeitszentrum dieser zwei Dreiecke. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Bemerkung: Eine interessante Konsequenz der Aufgabe ist folgendes Resultat von Hauke Reddmann (Fig. G3.16):

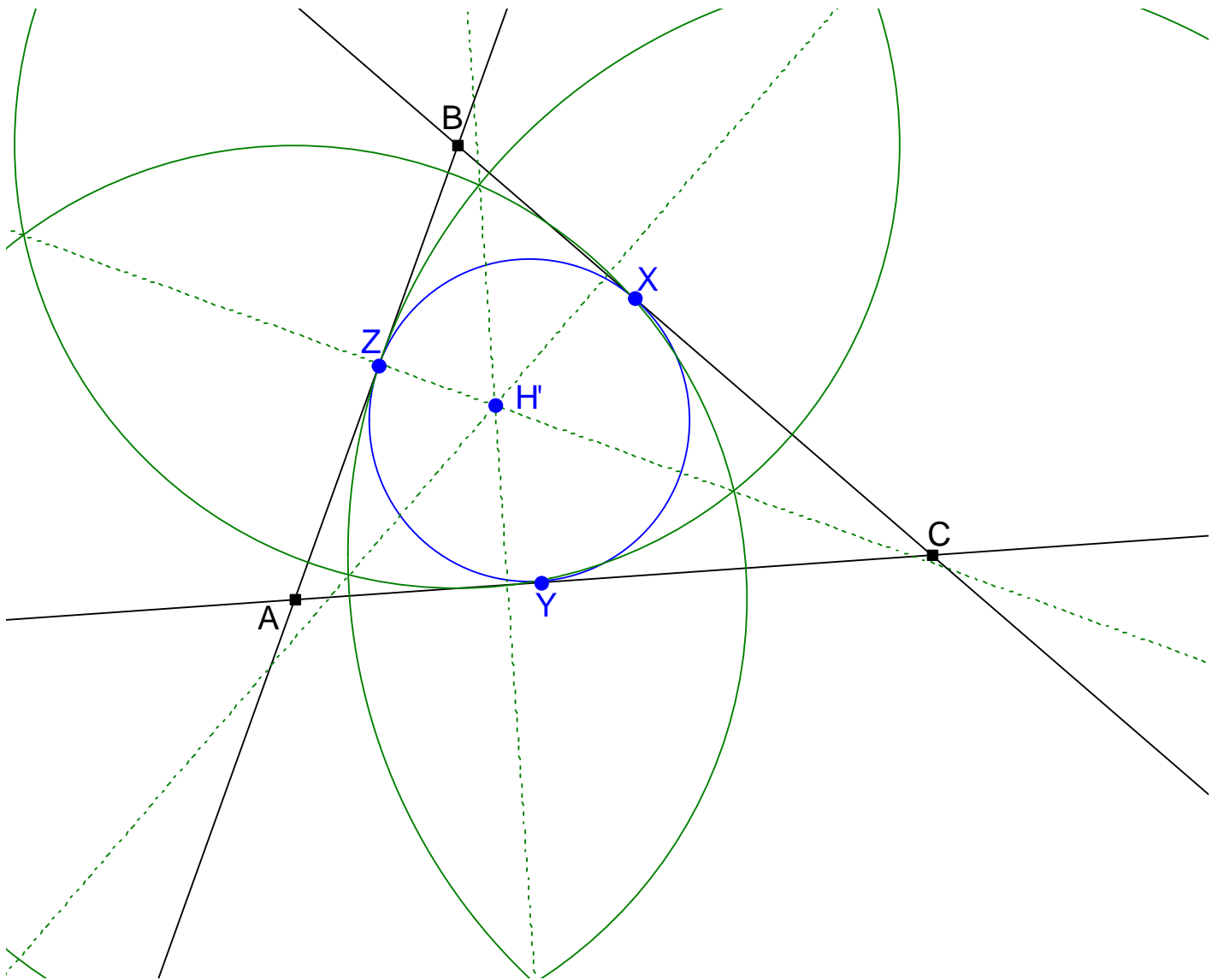


Fig. G3.16

Satz 6: Der Inkreis eines Dreiecks ABC berühre seine Seiten BC , CA und AB in den Punkten X , Y bzw. Z . Sei H' der Höhenschnittpunkt des Dreiecks XYZ . Dann ist dieser Punkt H' das Potenzzentrum der Kreise $A(AZ)$, $B(BY)$ und $C(CX)$.

Hierbei verwenden wir die Abkürzung " $\text{Kreis } M(r)$ " für den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r .

Beweis von Satz 6: Man kann Satz 6 aus der Aufgabe G3 herleiten; leichter ist es jedoch, Satz 6 aus der Ersten Lösung dieser Aufgabe herzuleiten, was wir im Folgenden auch machen (Fig. G3.17):

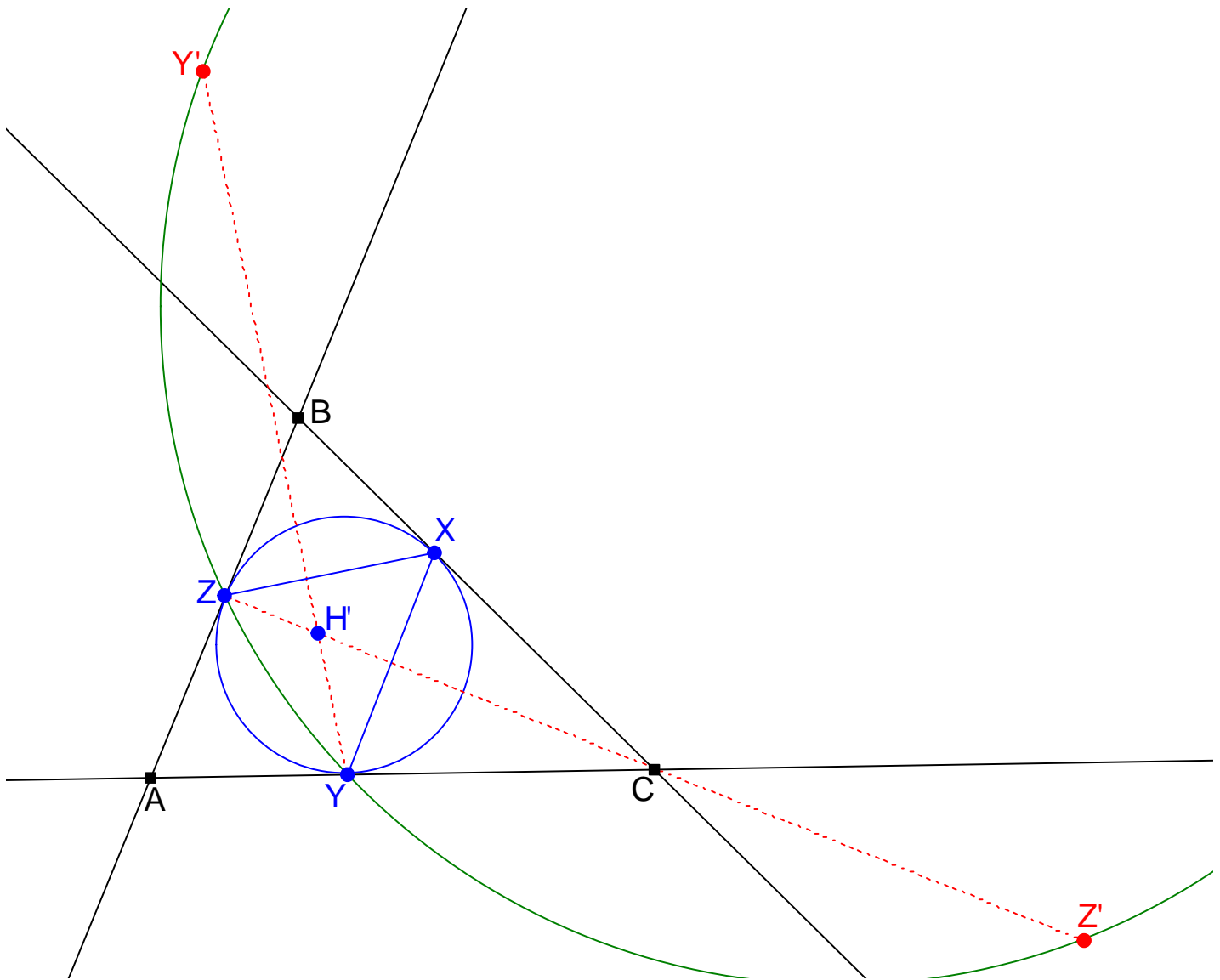


Fig. G3.17

Wie in der Ersten Lösung der Aufgabe G3 gezeigt wurde, ist die Gerade YY' orthogonal zur Geraden ZX . Somit ist die Gerade YY' die Senkrechte zur Geraden ZX durch den Punkt Y , also die von Y ausgehende Höhe des Dreiecks XYZ . Folglich geht diese Gerade YY' durch den Höhenschnittpunkt H' des Dreiecks XYZ . Analog geht die Gerade ZZ' durch den Punkt H' .

In der Ersten Lösung wurde auch gezeigt, daß die Punkte Y' , Y , Z und Z' auf einem Kreis liegen. Nach dem Sehnensatz ist somit $H'Y \cdot H'Y' = H'Z \cdot H'Z'$, wobei wir orientierte Strecken verwenden.

(Siehe Fig. G3.18.) Da der Punkt Y' das Spiegelbild des Punktes Y an der Außenwinkelhalbierenden des Winkels ABC ist, während der Punkt B auf dieser Außenwinkelhalbierenden liegt, gilt $BY' = BY$. Somit liegt der Punkt Y' auf dem Kreis $B(BY)$. Natürlich liegt auch der Punkt Y auf dem Kreis $B(BY)$. Somit ist $H'Y \cdot H'Y'$ die Potenz des Punktes H' in bezug auf den Kreis $B(BY)$. Analog ist $H'Z \cdot H'Z'$ die Potenz des Punktes H' in bezug auf den Kreis $C(CZ)$. Aus $H'Y \cdot H'Y' = H'Z \cdot H'Z'$ folgt also, daß der Punkt H' gleiche Potenzen in bezug auf die Kreise $B(BY)$ und $C(CZ)$ hat; somit liegt der Punkt H' auf der Potenzgeraden dieser Kreise $B(BY)$

und $C(CZ)$. Analog liegt der Punkt H' auf der Potenzgeraden der Kreise $C(CZ)$ und $A(AX)$, und auf der Potenzgeraden der Kreise $A(AX)$ und $B(BY)$. Somit ist der Punkt H' der Schnittpunkt der paarweisen Potenzgeraden der drei Kreise $A(AX)$, $B(BY)$ und $C(CZ)$, also das Potenzzentrum dieser drei Kreise. Damit ist Satz 6 bewiesen.

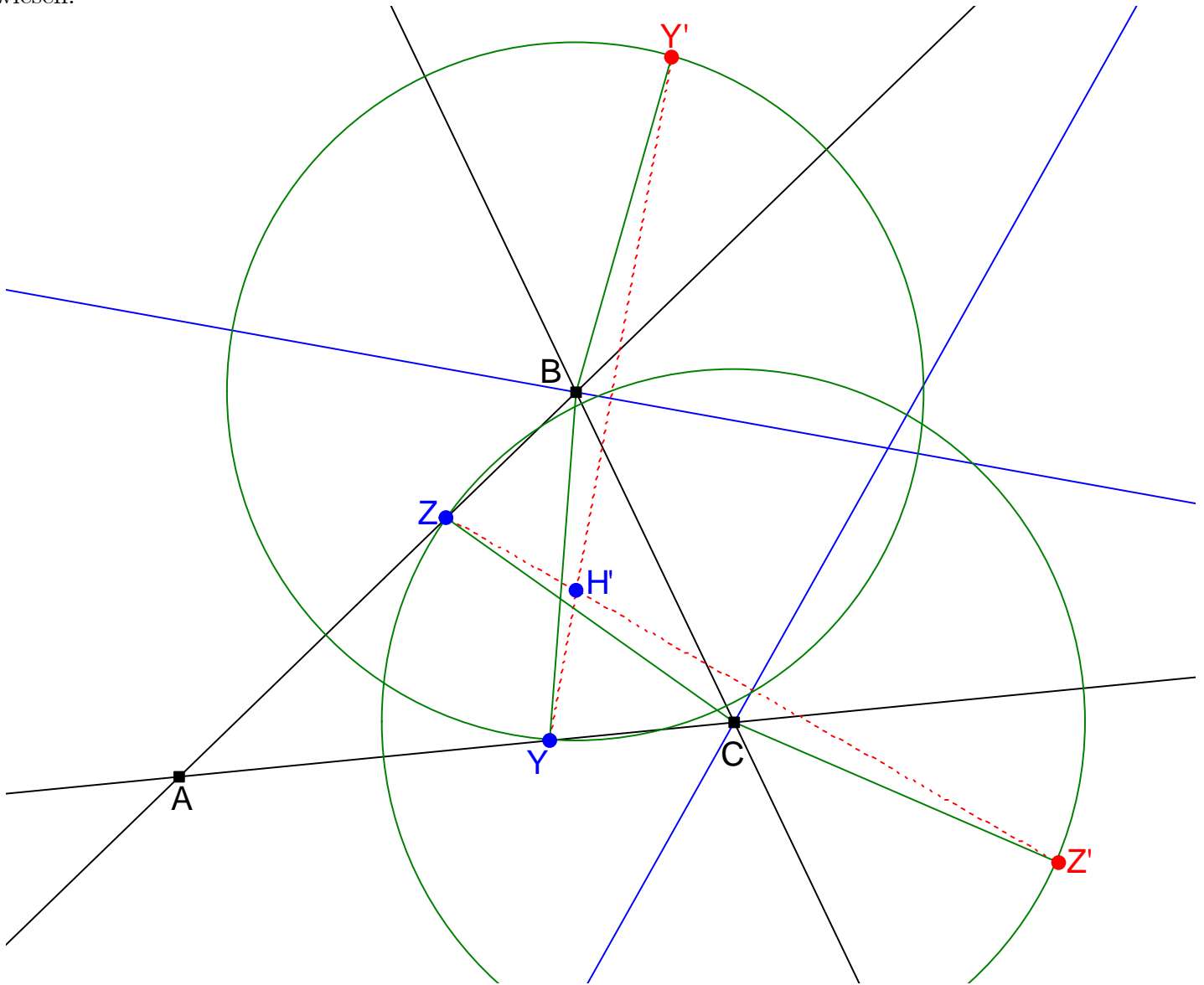


Fig. G3.18