QED-Mathematikolympiade 3: Aufgaben und Lösungen

Algebra (Version 2)

Darij Grinberg

Aufgabe A1

Eine Folge (a_n) sei definiert durch den Startwert $a_1 = 1$ und die Rekursionsgleichung $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n^2 \cdot a_n$ für jedes natürliche n. Man berechne a_{2006}.

Lösung der Aufgabe A1

Die Crux der Lösung besteht in der Angabe einer expliziten Formel für alle Folgenglieder:

$$a_n = \frac{2}{n\left(n+1\right)} \tag{A1.1}$$

für jedes natürliche n.

Aus dieser Formel ergibt sich dann $a_{2006} = \dfrac{2}{2006 \cdot (2006+1)} = \dfrac{1}{2013021}$.

Um die Aufgabe zu lösen, reicht es also aus, die Formel (A1.1) zu beweisen. Dies werden wir im Folgenden auf drei verschiedene Arten tun.

Erster Beweis von (A1.1): Wir beweisen die Formel (A1.1) nach der vollständigen Induktion über n.

Induktionsanfang: Wegen $a_1 = 1 = \dfrac{2}{1 \cdot 2} = \dfrac{2}{1 \cdot (1+1)}$ ist die Formel (A1.1) für $n = 1$ gültig.

Induktionsschritt: Sei k eine natürliche Zahl. Angenommen, die Formel (A1.1) gelte für alle natürlichen Zahlen $n \leq k$. Wir müssen zeigen, dass die Formel (A1.1) auch für $n = k+1$ gilt, d. h. dass $a_{k+1} = \dfrac{2}{(k+1)(k+2)}$ ist.

Nach der Rekursionsgleichung ist $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{k+1} = (k+1)^2 \cdot a_{k+1}$; nach Subtraktion von a_{k+1} wird dies zu $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = (k+1)^2 \cdot a_{k+1} - a_{k+1}$, also zu

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = \left((k+1)^2 - 1\right) a_{k+1}. \tag{A1.2}$$

Nun gilt nach der Induktionsvoraussetzung die Formel (A1.1) für alle natürlichen $n \leq k$; das heißt, für jedes natürliche $n \leq k$ ist

$$a_n = \frac{2}{n\left(n+1\right)} = \frac{2\left(n+1\right) - 2n}{n\left(n+1\right)} = \frac{2\left(n+1\right)}{n\left(n+1\right)} - \frac{2n}{n\left(n+1\right)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Damit ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + ... + \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right).$$

In dieser Summe kommt für jedes natürliche i mit $2 \leq i \leq k$ der Bruch $\dfrac{2}{i}$ genau zweimal vor: einmal mit dem Vorzeichen $+$, ein anderes Mal mit dem Vorzeichen $-$. Natürlich addieren sich solche Brüche zu 0 und können deshalb weggelassen werden. Nur die Brüche $\dfrac{2}{1}$ und $\dfrac{2}{k+1}$ kommen nur einmal vor, und zwar der Bruch $\dfrac{2}{1}$ mit dem Vorzeichen $+$ und der Bruch $\dfrac{2}{k+1}$ mit dem Vorzeichen $-$. Somit vereinfacht sich die Summe zu $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = \dfrac{2}{1} - \dfrac{2}{k+1}$. Eingesetzt in (A1.2) ergibt dies $\dfrac{2}{1} - \dfrac{2}{k+1} = \left((k+1)^2 - 1\right) a_{k+1}$, also $2 - \dfrac{2}{k+1} = k\,(k+2)\,a_{k+1}$, und damit

$$a_{k+1} = \frac{2 - \dfrac{2}{k+1}}{k\,(k+2)} = \frac{\left(\dfrac{2\,(k+1) - 2}{k+1}\right)}{k\,(k+2)} = \frac{\left(\dfrac{2k}{k+1}\right)}{k\,(k+2)} = \frac{2}{(k+1)\,(k+2)}.$$

Damit ist der Induktionsschritt vollbracht, und die Formel (A1.1) ist bewiesen.

Zweiter Beweis von (A1.1): Wir bezeichnen $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ für jedes natürliche n. Dann gilt für jedes natürliche $n \geq 2$ trivialerweise

$$a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}.$$

Somit vereinfacht sich die Rekursionsgleichung $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n^2 \cdot a_n$ zu $s_n = n^2 \cdot (s_n - s_{n-1})$. Das heißt, $s_n = n^2 s_n - n^2 s_{n-1}$; folglich ist $n^2 s_{n-1} = n^2 s_n - s_n = (n^2 - 1)\,s_n = (n+1)\,(n-1)\,s_n$. Das heißt, $s_n = \dfrac{n^2}{(n+1)\,(n-1)} \cdot s_{n-1}$. Da diese Formel nun für jedes natürliche $n \geq 2$ gilt, können wir sie entsprechend für $n-1$ aufstellen und erhalten $s_{n-1} = \dfrac{(n-1)^2}{n\,(n-2)} \cdot s_{n-2}$, wir können sie entsprechend für $n-2$ aufstellen und erhalten $s_{n-2} = \dfrac{(n-2)^2}{(n-1)\,(n-3)} \cdot s_{n-3}$, und so weiter, bis wir schließlich $s_3 = \dfrac{3^2}{4 \cdot 2} \cdot s_2$ und $s_2 = \dfrac{2^2}{3 \cdot 1} \cdot s_1$ erhalten. Setzen wir diese Formeln eine nach der anderen ineinander ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n^2}{(n+1)\,(n-1)} \cdot s_{n-1} = \frac{n^2}{(n+1)\,(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^2}{n\,(n-2)} \cdot s_{n-2} \\ &= \frac{n^2}{(n+1)\,(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^2}{n\,(n-2)} \cdot \frac{(n-2)^2}{(n-1)\,(n-3)} \cdot s_{n-3} \\ &= ... = \frac{n^2}{(n+1)\,(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^2}{n\,(n-2)} \cdot \frac{(n-2)^2}{(n-1)\,(n-3)} \cdot ... \cdot \frac{3^2}{4 \cdot 2} \cdot \frac{2^2}{3 \cdot 1} \cdot s_1. \end{aligned}$$

Wegen $s_1 = a_1 = 1$ vereinfacht sich dies zu

$$s_n = \frac{n^2}{(n+1)\,(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^2}{n\,(n-2)} \cdot \frac{(n-2)^2}{(n-1)\,(n-3)} \cdot ... \cdot \frac{3^2}{4 \cdot 2} \cdot \frac{2^2}{3 \cdot 1}.$$

Damit haben wir s_n in Form eines monströsen Produktes dargestellt. Doch in diesem Produkt kürzen sich fast alle Faktoren weg: Für jedes natürliche i mit $3 \leq i \leq n-1$

kommt in einem der Brüche ein i^2 im Zähler und in den zwei benachbarten Brüchen jeweils ein i im Nenner vor; diese Faktoren kürzen sich weg. Erhalten bleiben nur die n^2 im Zähler des ersten Bruchs, die $n+1$ im Nenner des ersten, die n im Nenner des zweiten, die 2 im Nenner des vorletzten, die 2^2 im Zähler des letzten, und die 1 im Nenner des letzten. Unsere Darstellung von s_n vereinfacht sich damit zu

$$s_n = \frac{n^2 \cdot 2^2}{(n+1) \cdot n \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Diese Formel haben wir damit für jedes natürliche n hergeleitet.

Für jedes natürliche $n \geq 2$ haben wir also $s_n = \dfrac{2n}{n+1}$ und $s_{n-1} = \dfrac{2(n-1)}{(n-1)+1}$. Damit ist

$$\begin{aligned} a_n &= s_n - s_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{(n-1)+1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} \\ &= \frac{2n^2 - 2(n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n^2 - 2(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Hiermit haben wir die Formel (A1.1) für jedes natürliche $n \geq 2$ gezeigt; sie gilt auch für $n = 1$, wie man trivial nachprüfen kann (siehe den Induktionsanfang im ersten Beweis von (A1.1)). Damit ist die Formel (A1.1) für alle natürlichen n nachgewiesen.

Dritter Beweis von (A1.1) (von MSS auf `http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=54724` *vorgeschlagen):* Für jedes natürliche $n \geq 2$ gilt laut der Rekursionsgleichung $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = n^2 \cdot a_n$, also $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} = n^2 \cdot a_n - a_n = (n^2-1)\, a_n = (n-1)(n+1)\, a_n$. Andererseits gilt nach der Rekursionsgleichung für $n-1$ statt n offensichtlich $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} = (n-1)^2 \cdot a_{n-1}$. Wir haben also $(n-1)(n+1)\, a_n = (n-1)^2 \cdot a_{n-1}$, damit $(n+1)\, a_n = (n-1) \cdot a_{n-1}$, also $a_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cdot a_{n-1}$. Da nun diese Gleichung für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt, können wir sie also auch für $n-1$ statt n aufstellen, und erhalten $a_{n-1} = \dfrac{n-2}{n} \cdot a_{n-2}$, wir können sie genauso für $n-2$ aufstellen und erhalten $a_{n-2} = \dfrac{n-3}{n-1} \cdot a_{n-3}$, usw., bis wir schließlich bei $a_3 = \dfrac{2}{4} \cdot a_2$ und $a_2 = \dfrac{1}{3} \cdot a_1$ enden. Setzen wir diese Gleichungen nacheinander alle ineinander ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n+1} \cdot a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot a_{n-2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot a_{n-3} \\ &= ... = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot ... \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1. \end{aligned}$$

Wegen $a_1 = 1$ vereinfacht sich dies zu

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot ... \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Produkt von Brüchen, in dem sich fast alle Terme herauskürzen: Für jedes natürliche i mit $3 \leq i \leq n-1$ kommt in einem der

Brüche ein i im Zähler vor und zwei Brüche weiter rechts ein i im Nenner; diese beiden i kürzen sich weg. Erhalten bleiben nur die $n + 1$ im Nenner des ersten Bruchs, die n im Nenner des zweiten Bruchs, die 2 im Zähler des vorletzten Bruchs und die 1 im Zähler des letzten Bruchs. Somit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$a_n = \frac{2 \cdot 1}{(n+1) \cdot n} = \frac{2}{n\,(n+1)}.$$

Damit ist die Formel (A1.1) zum dritten Mal bewiesen.

Bemerkung: Diese Aufgabe entstammt dem Norwegischen Abel-Wettbewerb 1994-95 (Endrunde, Aufgabe 1**a)**).

Aufgabe A2

Seien a, b und c drei positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{a^2+2b^2}{b+c}+\frac{b^2+2c^2}{c+a}+\frac{c^2+2a^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}\left(a+b+c\right).$$

Lösung der Aufgabe A2

Erste Lösung: Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (in einer ihrer Formen) besagt, dass für $2n$ beliebige nichtnegative Zahlen p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_n gilt:

$$\left(p_1+p_2+...+p_n\right)\cdot\left(q_1+q_2+...+q_n\right)\geq\left(\sqrt{p_1q_1}+\sqrt{p_2q_2}+...+\sqrt{p_nq_n}\right)^2.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt somit

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\cdot\left(\left(b+c\right)+\left(c+a\right)+\left(a+b\right)\right)\\ \geq\ &\left(\sqrt{\frac{a^2}{b+c}\cdot\left(b+c\right)}+\sqrt{\frac{b^2}{c+a}\cdot\left(c+a\right)}+\sqrt{\frac{c^2}{a+b}\cdot\left(a+b\right)}\right)^2=\left(a+b+c\right)^2,\end{aligned}$$

also

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(b+c\right)+\left(c+a\right)+\left(a+b\right)}=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right),$$

und genauso

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right)\cdot\left(\left(b+c\right)+\left(c+a\right)+\left(a+b\right)\right)\\ \geq\ &\left(\sqrt{\frac{b^2}{b+c}\cdot\left(b+c\right)}+\sqrt{\frac{c^2}{c+a}\cdot\left(c+a\right)}+\sqrt{\frac{a^2}{a+b}\cdot\left(a+b\right)}\right)^2=\left(b+c+a\right)^2,\end{aligned}$$

also

$$\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{\left(b+c+a\right)^2}{\left(b+c\right)+\left(c+a\right)+\left(a+b\right)}=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}&\frac{a^2+2b^2}{b+c}+\frac{b^2+2c^2}{c+a}+\frac{c^2+2a^2}{a+b}\\ =\ &\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+2\cdot\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right)\\ \geq\ &\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)+2\cdot\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)=\frac{3}{2}\left(a+b+c\right),\end{aligned}$$

und die Aufgabe ist gelöst.

Zweite Lösung: Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\left(1+1+1\right)\cdot\left(a^2+b^2+b^2\right)\geq\left(\sqrt{1\cdot a^2}+\sqrt{1\cdot b^2}+\sqrt{1\cdot b^2}\right)^2=\left(a+b+b\right)^2,$$

also $3\left(a^2+2b^2\right) \geq (a+2b)^2$, daher $a^2+2b^2 \geq \frac{1}{3}(a+2b)^2$. Analog ist $b^2+2c^2 \geq \frac{1}{3}(b+2c)^2$ und $c^2+2a^2 \geq \frac{1}{3}(c+2a)^2$. Daher ist

$$\begin{aligned}\frac{a^2+2b^2}{b+c}+\frac{b^2+2c^2}{c+a}+\frac{c^2+2a^2}{a+b} &\geq \frac{\frac{1}{3}(a+2b)^2}{b+c}+\frac{\frac{1}{3}(b+2c)^2}{c+a}+\frac{\frac{1}{3}(c+2a)^2}{a+b}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{(a+2b)^2}{b+c}+\frac{(b+2c)^2}{c+a}+\frac{(c+2a)^2}{a+b}\right).\end{aligned}$$

Nun ist, wiederum nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(a+2b)^2}{b+c}+\frac{(b+2c)^2}{c+a}+\frac{(c+2a)^2}{a+b}\right)\cdot((b+c)+(c+a)+(a+b))\\ \geq\ &\left(\sqrt{\frac{(a+2b)^2}{b+c}\cdot(b+c)}+\sqrt{\frac{(b+2c)^2}{c+a}\cdot(c+a)}+\sqrt{\frac{(c+2a)^2}{a+b}\cdot(a+b)}\right)^2\\ =\ &((a+2b)+(b+2c)+(c+2a))^2,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\frac{(a+2b)^2}{b+c}+\frac{(b+2c)^2}{c+a}+\frac{(c+2a)^2}{a+b} &\geq \frac{((a+2b)+(b+2c)+(c+2a))^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}\\ &= \frac{(3(a+b+c))^2}{2(a+b+c)}=\frac{9}{2}(a+b+c),\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{a^2+2b^2}{b+c}+\frac{b^2+2c^2}{c+a}+\frac{c^2+2a^2}{a+b} &\geq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{(a+2b)^2}{b+c}+\frac{(b+2c)^2}{c+a}+\frac{(c+2a)^2}{a+b}\right)\\ &\geq \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}(a+b+c).\end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe erneut gelöst.

Dritte Lösung: Die Zahlentripel $(a^2;\ b^2;\ c^2)$ und $\left(\frac{1}{b+c};\ \frac{1}{c+a};\ \frac{1}{a+b}\right)$ sind gleichgeordnet, denn z. B. für $b \geq c$ ist $b^2 \geq c^2$ und $\frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$ (letzteres weil $c+a \leq a+b$, da $c \leq b$). Somit gilt nach der Umordnungsungleichung (auch Rearrangement-Ungleichung genannt)

$$\begin{aligned}a^2\cdot\frac{1}{b+c}+b^2\cdot\frac{1}{c+a}+c^2\cdot\frac{1}{a+b} &\geq b^2\cdot\frac{1}{b+c}+c^2\cdot\frac{1}{c+a}+a^2\cdot\frac{1}{a+b}, \qquad \text{also}\\ \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} &\geq \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2+2b^2}{b+c}+\frac{b^2+2c^2}{c+a}+\frac{c^2+2a^2}{a+b}\\
= &\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+2\cdot\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right)\\
\geq &\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right)+2\cdot\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right)\\
= &\ 3\cdot\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right).
\end{aligned}
$$

Nun ist nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel

$$
\begin{aligned}
\frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4} &\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{b+c}\cdot\frac{b+c}{4}}=2\cdot\frac{b}{2}=b, \qquad \text{also}\\
\frac{b^2}{b+c} &\geq b-\frac{b+c}{4}=\frac{3b-c}{4}.
\end{aligned}
$$

Analog ist $\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{3c-a}{4}$ und $\frac{a^2}{a+b}\geq\frac{3a-b}{4}$. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2+2b^2}{b+c}+\frac{b^2+2c^2}{c+a}+\frac{c^2+2a^2}{a+b}\geq 3\cdot\left(\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\right)\\
\geq &\ 3\cdot\left(\frac{3b-c}{4}+\frac{3c-a}{4}+\frac{3a-b}{4}\right)=3\cdot\frac{2\,(a+b+c)}{4}=\frac{3}{2}\,(a+b+c)\,.
\end{aligned}
$$

Somit ist die Aufgabe wieder gelöst.

Aufgabe A3

Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für beliebige reelle Zahlen x und y der Gleichung

$$xf(x) - yf(y) = (x-y) f(x+y)$$

genügen.

Lösung der Aufgabe A3

Antwort: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügt genau dann der Gleichung

$$xf(x) - yf(y) = (x-y) f(x+y) \tag{A3.1}$$

für beliebige reelle Zahlen x und y, wenn sie eine lineare Funktion ist, d. h. wenn sie die Form $f(t) = at + b$ hat für zwei konstante reelle Zahlen a und b.

Beweis: Betrachten wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der gewünschten Gleichung (A3.1) für alle reellen x und y genügt. Dann ist

$$\begin{aligned} x(f(x) - f(0)) - y(f(y) - f(0)) &= (xf(x) - yf(y)) - (x-y) f(0) \\ &= (x-y) f(x+y) - (x-y) f(0) \qquad \text{(nach (A3.1))} \\ &= (x-y)(f(x+y) - f(0)). \end{aligned}$$

Wenn wir eine zweite Funktion $g(t) = f(t) - f(0)$ definieren, dann läßt sich dies einfacher schreiben in der Form

$$xg(x) - yg(y) = (x-y) g(x+y) \tag{A3.2}$$

für alle reellen x und y. Ferner ist $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.

Einsetzen von $y = -x$ in (A3.2) ergibt

$$\begin{aligned} xg(x) - (-x) g(-x) &= (x - (-x)) g(x + (-x)), \qquad \text{also} \\ xg(x) + xg(-x) &= 2xg(0). \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ können wir diese Gleichung durch x dividieren, und erhalten $g(x) + g(-x) = 2g(0)$, also $g(x) + g(-x) = 0$ (da $2g(0) = 2 \cdot 0 = 0$) und damit $g(-x) = -g(x)$. Für $x = 0$ gilt auch $g(-x) = -g(x)$ (weil $g(-0) = -g(0) = 0$). Somit haben wir

$$g(-x) = -g(x) \text{ für jedes reelle } x. \tag{A3.3}$$

Seien u und v zwei reelle Zahlen. Einsetzen von $x = u$ und $y = v$ in (A3.2) ergibt

$$ug(u) - vg(v) = (u-v) g(u+v). \tag{A3.4}$$

Einsetzen von $x = u$ und $y = -v$ in (A3.2) ergibt

$$ug(u) - (-v) g(-v) = (u - (-v)) g(u + (-v)),$$

was wegen $g(-v) = -g(v)$ (nach (A3.3)) sich vereinfacht zu

$$\begin{aligned} ug(u) - (-v)(-g(v)) &= (u - (-v)) g(u + (-v)), \qquad \text{also zu} \\ ug(u) - vg(v) &= (u+v) g(u-v). \end{aligned}$$

Vergleich mit (A3.4) ergibt $(u-v)\,g\,(u+v) = (u+v)\,g\,(u-v)$. Ist nun x eine beliebige reelle Zahl, dann können wir $u = \dfrac{x+1}{2}$ und $v = \dfrac{x-1}{2}$ in diese Gleichung einsetzen, und wegen $u+v = \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x-1}{2} = x$ und $u-v = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-1}{2} = 1$ erhalten wir dann $1g\,(x) = xg\,(1)$, also $g\,(x) = g\,(1)\cdot x$.

Aus $g\,(x) = f\,(x) - f\,(0)$ folgt nun $f\,(x) = g\,(x) + f\,(0) = g\,(1)\cdot x + f\,(0)$. Das heißt, unsere Funktion f wird beschrieben durch die Funktionsgleichung $f\,(t) = g\,(1)\cdot t + f\,(0)$.

Da $f\,(0)$ und $g\,(1)$ Konstanten sind, haben wir damit gezeigt, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Gleichung (A3.1) für alle reellen Zahlen x und y genügt, die Form $f\,(t) = at + b$ mit reellen Konstanten a und b haben muß.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, dass jede Funktion f der Form $f\,(t) = at + b$ der Gleichung (A3.1) für alle reellen Zahlen x und y genügt, denn für eine solche Funktion f gilt

$$\begin{aligned} xf\,(x) - yf\,(y) &= x\,(ax+b) - y\,(ay+b) = ax^2 + bx - ay^2 - by = a\left(x^2 - y^2\right) + b\,(x-y) \\ &= a\,(x-y)\,(x+y) + b\,(x-y) = (x-y)\,(a\,(x+y) + b) = (x-y)\,f\,(x+y)\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen, und die Aufgabe gelöst.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist die Aufgabe 5 der 8. Irischen Mathematik-Olympiade 1995 (1. Tag).