QED-Mathematikolympiade 2: Aufgaben und Lösungen

Ungleichungen und Algebra

Darij Grinberg

Aufgabe U1

Man beweise die Ungleichung

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b\left(c+a\right)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c\left(a+b\right)}\geq\frac{3}{2}$$

für drei beliebige positive Zahlen a, b und c.

Lösung der Aufgabe U1

Erste Lösung: Wir haben $2\left(b^2+c^2\right)-\left(b+c\right)^2=2\left(b^2+c^2\right)-\left(b^2+2bc+c^2\right)=b^2-2bc+c^2=\left(b-c\right)^2\geq 0$, also $2\left(b^2+c^2\right)\geq\left(b+c\right)^2$, und damit $b^2+c^2\geq\frac{1}{2}\left(b+c\right)^2$. Dies ergibt

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a\left(b+c\right)}\geq\frac{\frac{1}{2}\left(b+c\right)^2-a^2}{a\left(b+c\right)}=\frac{\left(b+c\right)^2-2a^2}{2a\left(b+c\right)}=\frac{b+c}{2a}-\frac{a}{b+c}=\frac{b}{2a}+\frac{c}{2a}-\frac{a}{b+c}.$$

Ferner gilt nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel für die Zahlen b und c offensichtlich $\frac{b+c}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, also $b+c\geq\frac{4}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Daraus folgt $a:\left(b+c\right)\leq a:\frac{4}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, also

$$\frac{a}{b+c}\leq\frac{a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{4}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}{4}=\frac{a}{4b}+\frac{a}{4c}.$$

Daher ist

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a\left(b+c\right)}\geq\frac{b}{2a}+\frac{c}{2a}-\frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{2a}+\frac{c}{2a}-\left(\frac{a}{4b}+\frac{a}{4c}\right).$$

Analog ist

$$\begin{aligned}\frac{c^2+a^2-b^2}{b\left(c+a\right)}&\geq\frac{c}{2b}+\frac{a}{2b}-\left(\frac{b}{4c}+\frac{b}{4a}\right);\\ \frac{a^2+b^2-c^2}{c\left(a+b\right)}&\geq\frac{a}{2c}+\frac{b}{2c}-\left(\frac{c}{4a}+\frac{c}{4b}\right).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2+c^2-a^2}{a\,(b+c)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b\,(c+a)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c\,(a+b)}\\
\geq\ &\left(\frac{b}{2a}+\frac{c}{2a}-\left(\frac{a}{4b}+\frac{a}{4c}\right)\right)+\left(\frac{c}{2b}+\frac{a}{2b}-\left(\frac{b}{4c}+\frac{b}{4a}\right)\right)+\left(\frac{a}{2c}+\frac{b}{2c}-\left(\frac{c}{4a}+\frac{c}{4b}\right)\right)\\
=\ &\left(\frac{b}{4c}+\frac{c}{4b}\right)+\left(\frac{c}{4a}+\frac{a}{4c}\right)+\left(\frac{a}{4b}+\frac{b}{4a}\right).
\end{aligned}$$

Nun wenden wir die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel auf die Zahlen $\frac{b}{4c}$ und $\frac{c}{4b}$ an, und erhalten $\frac{b}{4c}+\frac{c}{4b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{4c}\cdot\frac{c}{4b}}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Analog ist $\frac{c}{4a}+\frac{a}{4c}\geq\frac{1}{2}$ und $\frac{a}{4b}+\frac{b}{4a}\geq\frac{1}{2}$. Daher ist

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2+c^2-a^2}{a\,(b+c)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b\,(c+a)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c\,(a+b)}\\
\geq\ &\left(\frac{b}{4c}+\frac{c}{4b}\right)+\left(\frac{c}{4a}+\frac{a}{4c}\right)+\left(\frac{a}{4b}+\frac{b}{4a}\right)\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},
\end{aligned}$$

und die Aufgabe ist gelöst.

Zweite Lösung: Die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a\,(b+c)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b\,(c+a)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c\,(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

schreibt sich nach Subtraktion von $\frac{3}{2}$ auf beiden Seiten als

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{a\,(b+c)}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{b\,(c+a)}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{c\,(a+b)}-\frac{1}{2}\right)\geq 0. \qquad (1)$$

Genauso wie in der Ersten Lösung zeigen wir $b^2+c^2\geq\frac{1}{2}(b+c)^2$. Damit wird

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a\,(b+c)}\geq\frac{\frac{1}{2}(b+c)^2-a^2}{a\,(b+c)}=\frac{(b+c)^2-2a^2}{2a\,(b+c)},$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{b^2+c^2-a^2}{a\,(b+c)}-\frac{1}{2}\ &\geq\ \frac{(b+c)^2-2a^2}{2a\,(b+c)}-\frac{1}{2}=\frac{\left((b+c)^2-2a^2\right)-a\,(b+c)}{2a\,(b+c)}\\
&=\ \frac{(a+b+c)\,(b+c-2a)}{2a\,(b+c)}.
\end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned}
\frac{c^2+a^2-b^2}{b\,(c+a)}-\frac{1}{2}\ &\geq\ \frac{(a+b+c)\,(c+a-2b)}{2b\,(c+a)};\\
\frac{a^2+b^2-c^2}{c\,(a+b)}-\frac{1}{2}\ &\geq\ \frac{(a+b+c)\,(a+b-2c)}{2c\,(a+b)}.
\end{aligned}$$

Daher reicht es zum Beweis der Ungleichung (1) aus, die Ungleichung

$$\frac{(a+b+c)(b+c-2a)}{2a(b+c)} + \frac{(a+b+c)(c+a-2b)}{2b(c+a)} + \frac{(a+b+c)(a+b-2c)}{2c(a+b)} \geq 0$$

zu zeigen. Nach Division durch $\dfrac{a+b+c}{2}$ vereinfacht sich diese Ungleichung zu

$$\frac{b+c-2a}{a(b+c)} + \frac{c+a-2b}{b(c+a)} + \frac{a+b-2c}{c(a+b)} \geq 0.$$

Diese Ungleichung ist jedoch leicht nachzuweisen: Wir haben

$$\begin{aligned}
&\frac{b+c-2a}{a(b+c)} + \frac{c+a-2b}{b(c+a)} + \frac{a+b-2c}{c(a+b)} \\
=\;& \frac{(c-a)-(a-b)}{a(b+c)} + \frac{(a-b)-(b-c)}{b(c+a)} + \frac{(b-c)-(c-a)}{c(a+b)} \\
=\;& \left(\frac{c-a}{a(b+c)} - \frac{a-b}{a(b+c)}\right) + \left(\frac{a-b}{b(c+a)} - \frac{b-c}{b(c+a)}\right) + \left(\frac{b-c}{c(a+b)} - \frac{c-a}{c(a+b)}\right) \\
=\;& \left(\frac{b-c}{c(a+b)} - \frac{b-c}{b(c+a)}\right) + \left(\frac{c-a}{a(b+c)} - \frac{c-a}{c(a+b)}\right) + \left(\frac{a-b}{b(c+a)} - \frac{a-b}{a(b+c)}\right).
\end{aligned}$$

Wenn $b \geq c$ ist, dann gilt $ba \geq ca$, also $b(c+a) = bc + ba \geq bc + ca = c(a+b)$, und damit $\dfrac{1}{b(c+a)} \leq \dfrac{1}{c(a+b)}$, also $\dfrac{1}{c(a+b)} - \dfrac{1}{b(c+a)} \geq 0$, was nach Multiplikation mit $b - c \geq 0$ (denn $b \geq c$) auf $(b-c)\left(\dfrac{1}{c(a+b)} - \dfrac{1}{b(c+a)}\right) \geq 0$, also auf $\dfrac{b-c}{c(a+b)} - \dfrac{b-c}{b(c+a)} \geq 0$ führt. Wenn $b \leq c$ ist, erhalten wir analog $\dfrac{1}{c(a+b)} - \dfrac{1}{b(c+a)} \leq 0$ und $b - c \leq 0$, was wiederum nach Multiplikation $\dfrac{b-c}{c(a+b)} - \dfrac{b-c}{b(c+a)} \geq 0$ ergibt. Somit gilt in jedem Fall $\dfrac{b-c}{c(a+b)} - \dfrac{b-c}{b(c+a)} \geq 0$. Analog gilt stets $\dfrac{c-a}{a(b+c)} - \dfrac{c-a}{c(a+b)} \geq 0$ und $\dfrac{a-b}{b(c+a)} - \dfrac{a-b}{a(b+c)} \geq 0$, und damit

$$\begin{aligned}
&\frac{b+c-2a}{a(b+c)} + \frac{c+a-2b}{b(c+a)} + \frac{a+b-2c}{c(a+b)} \\
=\;& \left(\frac{b-c}{c(a+b)} - \frac{b-c}{b(c+a)}\right) + \left(\frac{c-a}{a(b+c)} - \frac{c-a}{c(a+b)}\right) + \left(\frac{a-b}{b(c+a)} - \frac{a-b}{a(b+c)}\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Somit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe U2

Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$f(f(x+y)) + xy = f(x+y) + f(x)f(y).$$

Lösung der Aufgabe U2

Antwort: Die einzige solche Funktion ist $f(x) = x$.

Beweis: Betrachten wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die gewünschte Gleichung

$$f(f(x+y)) + xy = f(x+y) + f(x)f(y) \tag{2}$$

für alle reellen x und y erfüllt.

Setzen wir $y = 0$ in die Gleichung (2) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(f(x+0)) + x \cdot 0 &= f(x+0) + f(x)f(0) && \Longleftrightarrow \\ f(f(x)) &= f(x) + f(x)f(0) && \Longleftrightarrow \\ f(f(x)) &= (1+f(0))f(x). && (3) \end{aligned}$$

Damit gilt also auch $f(f(x+y)) = (1+f(0))f(x+y)$; setzen wir dies in die Gleichung (2) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} (1+f(0))f(x+y) + xy &= f(x+y) + f(x)f(y) && \Longleftrightarrow \\ f(x+y) + f(0)f(x+y) + xy &= f(x+y) + f(x)f(y) && \Longleftrightarrow \\ f(0)f(x+y) + xy &= f(x)f(y). && (4) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir $f(0) = u$, dann wird dies zu $uf(x+y) + xy = f(x)f(y)$. Wenn wir nun in dieser Gleichung $x = u$ und $y = -u$ einsetzen, erhalten wir $uf(u+(-u)) + u(-u) = f(u)f(-u)$. Wegen $f(u+(-u)) = f(0) = u$ wird dies zu $uu + u(-u) = f(u)f(-u)$, also zu $0 = f(u)f(-u)$. Nun ist ein Produkt genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist; daher muss mindestens eine der Zahlen $f(u)$ und $f(-u)$ gleich 0 sein.

Das heißt, es existiert eine reelle Zahl r, für die $f(r) = 0$ ist. Nach (3) ist dann $f(f(r)) = (1+f(0))f(r)$, also $f(0) = (1+f(0)) \cdot 0$. Mit anderen Worten, $f(0) = 0$. Somit wird die Gleichung (4) zu $0 \cdot f(x+y) + xy = f(x)f(y)$, also zu

$$xy = f(x)f(y), \tag{5}$$

und die Gleichung (3) zu $f(f(x)) = (1+0)f(x)$, also zu

$$f(f(x)) = f(x). \tag{6}$$

Setzen wir $y = 1$ in (5) ein, so erhalten wir $x \cdot 1 = f(x)f(1)$, also $x = f(x)f(1)$. Damit ist $f(1) \neq 0$ (denn sonst würde aus dieser Gleichung für alle reellen x folgen, dass $x = f(x)f(1) = 0$ ist, was offensichtlich falsch ist); daher können wir diese Gleichung durch $f(1)$ dividieren und erhalten $f(x) = \dfrac{x}{f(1)}$. Diese Gleichung ist bereits eine Funktionsvorschrift für die Funktion f, nur kennen wir den Wert $f(1)$ noch nicht, um damit die Funktion eindeutig zu charakterisieren. Setzen wir jedoch diese Funktionsvorschrift $f(x) = \dfrac{x}{f(1)}$ in die Gleichung (6) ein, dann erhalten wir

$$\frac{\left(\dfrac{x}{f(1)}\right)}{f(1)} = \frac{x}{f(1)},$$

was notwendig $f(1) = 1$ zur Folge hat. Damit wird die Funktionsvorschrift $f(x) = \dfrac{x}{f(1)}$ zu $f(x) = x$.

Damit ist klar, dass nur die Funktion $f(x) = x$ der Gleichung (2) für alle reellen x und y genügen kann. Sie genügt auch tatsächlich dieser Gleichung, weil für $f(x) = x$ die Gleichung (2) zur trivialen Identität $(x + y) + xy = (x + y) + xy$ wird. Damit ist die Antwort bewiesen.