QED-Mathematikolympiade 2: Aufgaben und Lösungen

Geometrie

Darij Grinberg

Vorbemerkung: Im Folgenden wird bei allen Beweisen auf Anordnungsüberlegungen und Fallunterscheidungen hinsichtlich der verschiedenen möglichen Anordnungen verzichtet. Es wird nur der Anordnungsfall betrachtet, der auf den zur Aufgabe gehörenden Zeichnungen abgebildet ist. Die anderen Fälle lassen sich analog behandeln.

Es werden, bis auf die Lösung der Aufgabe G4, *nicht-orientierte* Strecken, Winkel und Flächeninhalte verwendet. In der Lösung der Aufgabe G4 werden orientierte Winkel modulo $180°$ verwendet, jedoch sind die Strecken weiterhin nicht-orientiert.

Aufgabe G1

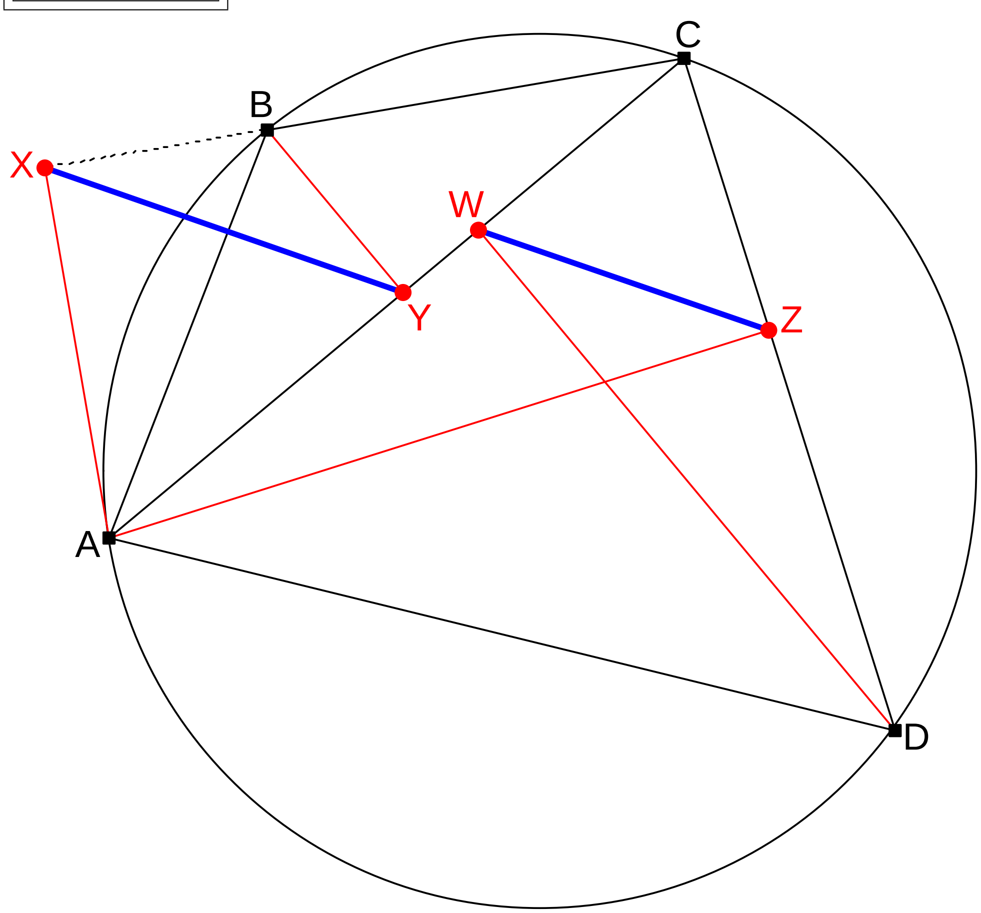

Fig. G1.1

Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Sei X der Fußpunkt des Lotes von der Ecke A auf die Gerade BC, sei Y der Fußpunkt des Lotes von der Ecke B auf die Gerade AC, sei Z

der Fußpunkt des Lotes von der Ecke A auf die Gerade CD, und sei W der Fußpunkt des Lotes von der Ecke D auf die Gerade AC.

Man beweise: $XY \parallel ZW$.

Lösung der Aufgabe G1

Erste Lösung: (Siehe Fig. G1.2.) Wegen $\measuredangle AXB = 90^\circ$ und $\measuredangle AYB = 90^\circ$ liegen die Punkte X und Y auf dem Thaleskreis über der Strecke AB. Das heißt, die Punkte A, B, X und Y liegen auf einem Kreis. Daraus folgt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle AYX = \measuredangle ABX$, also $\measuredangle AYX = 180^\circ - \measuredangle ABC$. Doch da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle ABC$. Also ist $\measuredangle ADC = \measuredangle AYX$. Nun ist $\measuredangle AZD = 90^\circ$ und $\measuredangle AWD = 90^\circ$; daher liegen die Punkte Z und W auf dem Thaleskreis über der Strecke AD. Daher ist das Viereck $AWZD$ ein Sehnenviereck, und somit haben wir $\measuredangle AWZ = 180^\circ - \measuredangle ADZ$. Das heißt, $\measuredangle AWZ = 180^\circ - \measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle AYX$. Somit ist $XY \parallel ZW$, was zu beweisen war.

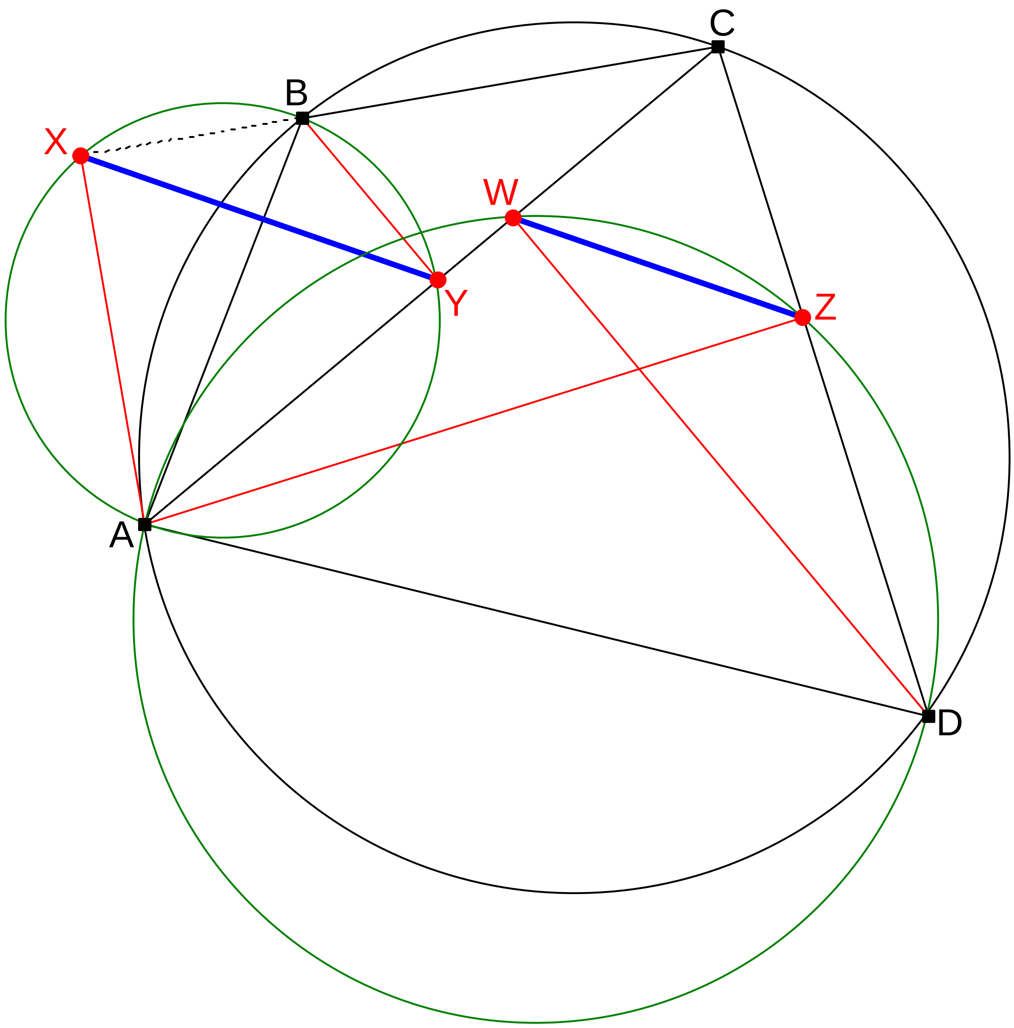

Fig. G1.2

Zweite Lösung: Wir zeigen zunächst einen Hilfssatz aus der Dreiecksgeometrie (Fig. G1.3):

Hilfssatz 1: Sei ABC ein Dreieck, und seien Y und Z die Fußpunkte seiner von den Ecken B bzw. C ausgehenden Höhen. Dann ist die Gerade YZ parallel zu der Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A.

Beweis von Hilfssatz 1: Wir nehmen an, daß das Dreieck ABC spitzwinklig ist; für stumpf- oder rechtwinklige Dreiecke gestaltet sich der Beweis ähnlich.

Wir betrachten die Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A. Sei T ein Punkt auf dieser Tangente, der in der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden CA liegt wie der Punkt B. Dann gilt nach dem Sehnentangentenwinkelsatz $\measuredangle BAT = \measuredangle BCA$. Doch wegen $\measuredangle BYC = 90°$ und $\measuredangle BZC = 90°$ liegen die Punkte Y und Z auf dem Thaleskreis über der Strecke BC; daher ist das Viereck $BZYC$ ein Sehnenviereck, und daraus folgt $\measuredangle BCY = 180° - \measuredangle BZY$. Also ist $\measuredangle BAT = \measuredangle BCA = \measuredangle BCY = 180° - \measuredangle BZY = \measuredangle AZY$. Folglich ist die Gerade YZ parallel zu der Geraden AT, also zu der Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

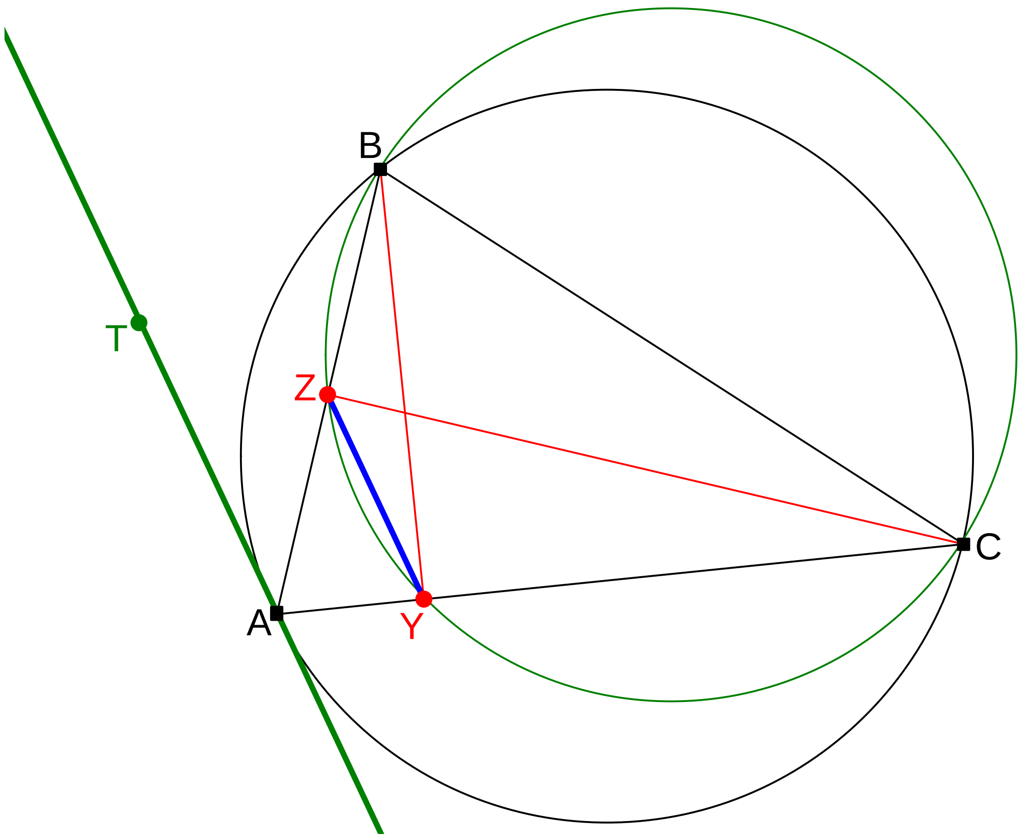

Fig. G1.3

Nun lösen wir die eigentliche Aufgabe:

Sei t die Tangente an den Umkreis des Sehnenvierecks $ABCD$ im Punkt C. Wenden wir Hilfssatz 1 auf das Dreieck ABC und die Fußpunkte X und Y seiner von den Ecken A bzw. B ausgehenden Höhen an, erhalten wir $XY \parallel t$. Wenden wir Hilfssatz 1 auf das Dreieck ADC und die Fußpunkte Z und W seiner von den Ecken A bzw. D ausgehenden Höhen an, erhalten wir $ZW \parallel t$. Daher ist $XY \parallel ZW$, und die Aufgabe ist gelöst.

Aufgabe G2

Seien X_1, Z_2, Y_1, X_2, Z_1 und Y_2 sechs Punkte auf einem Kreis, in dieser Reihenfolge auf der Kreisperipherie angeordnet. Die Kreissehnen Y_1Y_2 und Z_1Z_2 schneiden sich in einem Punkt A; die Kreissehnen Z_1Z_2 und X_1X_2 schneiden sich in einem Punkt B; die Kreissehnen X_1X_2 und Y_1Y_2 schneiden sich in einem Punkt C. Man beweise:

$$(BX_2 - CX_1) \cdot BC + (CY_2 - AY_1) \cdot CA + (AZ_2 - BZ_1) \cdot AB = 0.$$

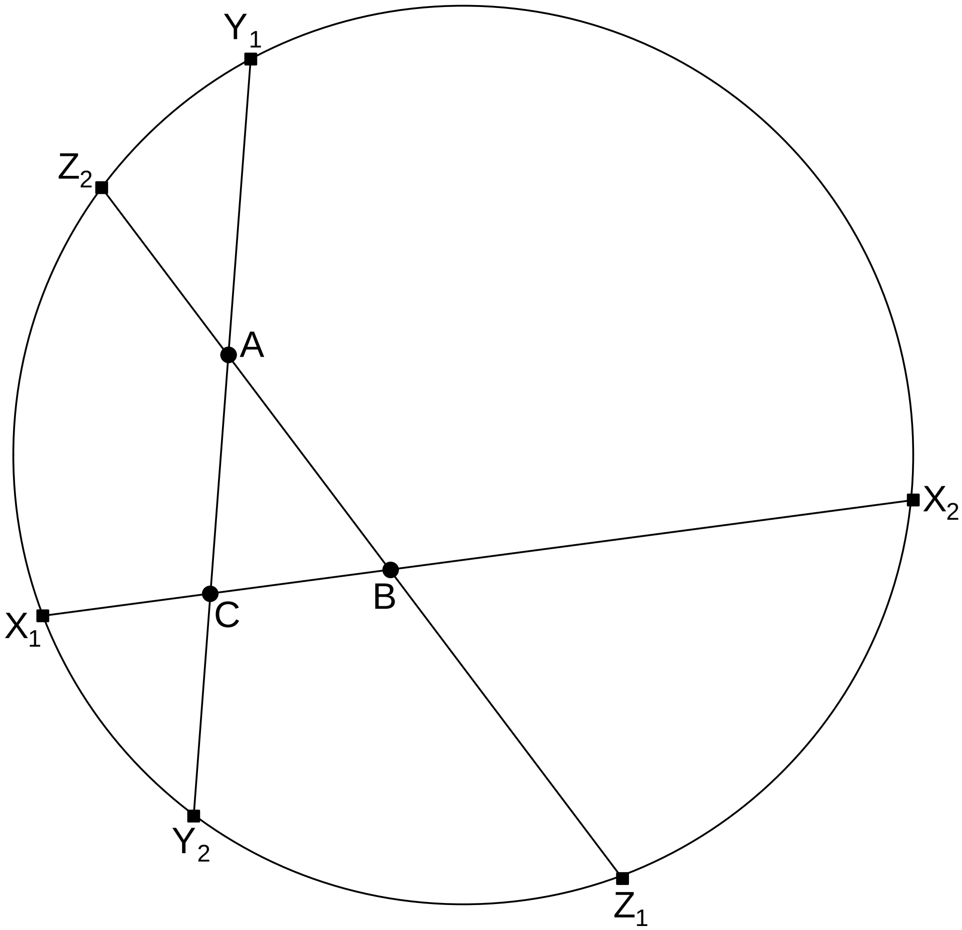

Fig. G2.1

Lösung der Aufgabe G2

Erste Lösung: Nach dem Sehnensatz gilt $BX_1 \cdot BX_2 = BZ_1 \cdot BZ_2$, also $(BC + CX_1) \cdot BX_2 = BZ_1 \cdot (AB + AZ_2)$, also $BX_2 \cdot BC + BX_2 \cdot CX_1 = BZ_1 \cdot AB + AZ_2 \cdot BZ_1$. Damit ist

$$\begin{aligned} BX_2 \cdot BC - BZ_1 \cdot AB &= AZ_2 \cdot BZ_1 - BX_2 \cdot CX_1. && \text{Analog ist} \\ CY_2 \cdot CA - CX_1 \cdot BC &= BX_2 \cdot CX_1 - CY_2 \cdot AY_1; \\ AZ_2 \cdot AB - AY_1 \cdot CA &= CY_2 \cdot AY_1 - AZ_2 \cdot BZ_1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & (BX_2 - CX_1) \cdot BC + (CY_2 - AY_1) \cdot CA + (AZ_2 - BZ_1) \cdot AB \\ = \; & BX_2 \cdot BC - CX_1 \cdot BC + CY_2 \cdot CA - AY_1 \cdot CA + AZ_2 \cdot AB - BZ_1 \cdot AB \\ = \; & (BX_2 \cdot BC - BZ_1 \cdot AB) + (CY_2 \cdot CA - CX_1 \cdot BC) + (AZ_2 \cdot AB - AY_1 \cdot CA) \\ = \; & (AZ_2 \cdot BZ_1 - BX_2 \cdot CX_1) + (BX_2 \cdot CX_1 - CY_2 \cdot AY_1) + (CY_2 \cdot AY_1 - AZ_2 \cdot BZ_1) = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Zweite Lösung: Seien X, Y und Z die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB des Dreiecks ABC, und sei T der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Da der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks auf den Mittelsenkrechten seiner Seiten liegt, muß dieser Umkreismittelpunkt T auf den Mittelsenkrechten der Strecken BC, CA und AB liegen; dies bedeutet $TX \perp BC$, $TY \perp CA$ und $TZ \perp AB$. Mit anderen Worten: $TX \perp X_1X_2$, $TY \perp Y_1Y_2$ und $TZ \perp Z_1Z_2$.

Seien andererseits X', Y' und Z' die Mittelpunkte der Strecken X_1X_2, Y_1Y_2 bzw. Z_1Z_2, und sei O der Mittelpunkt des Kreises, auf dem die Punkte X_1, Z_2, Y_1, X_2, Z_1 und Y_2 liegen. Die Strecken X_1X_2, Y_1Y_2 und Z_1Z_2 sind Sehnen in diesem Kreis; da der Mittelpunkt einer Kreissehne gleichzeitig der Fußpunkt des Lotes von dem Kreismittelpunkt auf diese Sehne ist, gilt für ihre Mittelpunkte X', Y' und Z' dann $OX' \perp X_1X_2$, $OY' \perp Y_1Y_2$ und $OZ' \perp Z_1Z_2$.

Nun nehmen wir o. B. d. A. an, daß die folgenden Anordnungsbeziehungen gelten: Die Punkte X_1, C, X, X', B und X_2 liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden; die Punkte Y_1, A, Y, Y', C und Y_2 liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden; die Punkte Z_1, B, Z', Z, A und Z_2 liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. (Dies sind genau die Anordnungsbeziehungen von Fig. G2.2.) Bei anderer Anordnung der Punkte müssen die folgenden Überlegungen geringfügig modifiziert werden; man kann auch mithilfe orientierter Strecken unabhängig von der Anordnung der Punkte argumentieren, aber dies wollen wir hier nicht tun.

Da X der Mittelpunkt der Strecke BC ist, gilt $BX = CX$. Da X' der Mittelpunkt der Strecke X_1X_2 ist, gilt $X_1X' = X_2X'$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} BX_2 - CX_1 &= (X_2X' - BX') - (X_1X' - CX') = (X_2X' - BX') - (X_2X' - CX') \\ &= CX' - BX' = (CX + XX') - (BX - XX') = (CX + XX') - (CX - XX') \\ &= 2 \cdot XX'. \end{aligned}$$

Analog ist

$$CY_2 - AY_1 = 2 \cdot YY'.$$

Da Z der Mittelpunkt der Strecke AB ist, gilt $AZ = BZ$. Da Z' der Mittelpunkt der Strecke Z_1Z_2 ist, haben wir $Z_1Z' = Z_2Z'$. Damit ist

$$\begin{aligned} AZ_2 - BZ_1 &= (Z_2Z' - AZ') - (Z_1Z' - BZ') = (Z_2Z' - AZ') - (Z_2Z' - BZ') \\ &= BZ' - AZ' = (BZ - ZZ') - (AZ + ZZ') = (BZ - ZZ') - (BZ + ZZ') \\ &= -2 \cdot ZZ'. \end{aligned}$$

Die zu beweisende Gleichung

$$(BX_2 - CX_1) \cdot BC + (CY_2 - AY_1) \cdot CA + (AZ_2 - BZ_1) \cdot AB = 0.$$

ist daher äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2 \cdot XX' \cdot BC + 2 \cdot YY' \cdot CA + (-2 \cdot ZZ') \cdot AB &= 0, && \text{also zu} \\ 2 \cdot (XX' \cdot BC + YY' \cdot CA - ZZ' \cdot AB) &= 0, && \text{also zu} \\ XX' \cdot BC + YY' \cdot CA - ZZ' \cdot AB &= 0, && \text{also zu} \\ XX' \cdot BC + YY' \cdot CA &= ZZ' \cdot AB. \end{aligned}$$

Diese Gleichung beweisen wir nun mithilfe von Vektoren:

Wegen $TX \perp X_1X_2$ und $OX' \perp X_1X_2$ ist der Vektor $\overrightarrow{XX'}$ die Projektion des Vektors $\overrightarrow{TO}$ auf die Gerade X_1X_2, also die Projektion des Vektors $\overrightarrow{TO}$ auf die Trägergerade des Vektors $\overrightarrow{CB}$. Nun ist das Skalarprodukt $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ gleich dem Produkt der Länge der Projektion des Vektors $\overrightarrow{v_1}$ auf die Trägergerade des Vektors $\overrightarrow{v_2}$ mit der Länge des Vektors $\overrightarrow{v_2}$ (wobei beide Längen gerichtet sind). Angewandt auf die beiden Vektoren $\overrightarrow{TO}$ und $\overrightarrow{CB}$ ergibt dies also $\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{CB} = XX' \cdot BC$. Analog ist $\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{AC} = YY' \cdot CA$ und $\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{AB} = ZZ' \cdot AB$. Damit ist

$$XX' \cdot BC + YY' \cdot CA = \overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{TO} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \right) = \overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{AB} = ZZ' \cdot AB.$$

Damit ist die geforderte Gleichung bewiesen, und die Aufgabe gelöst.

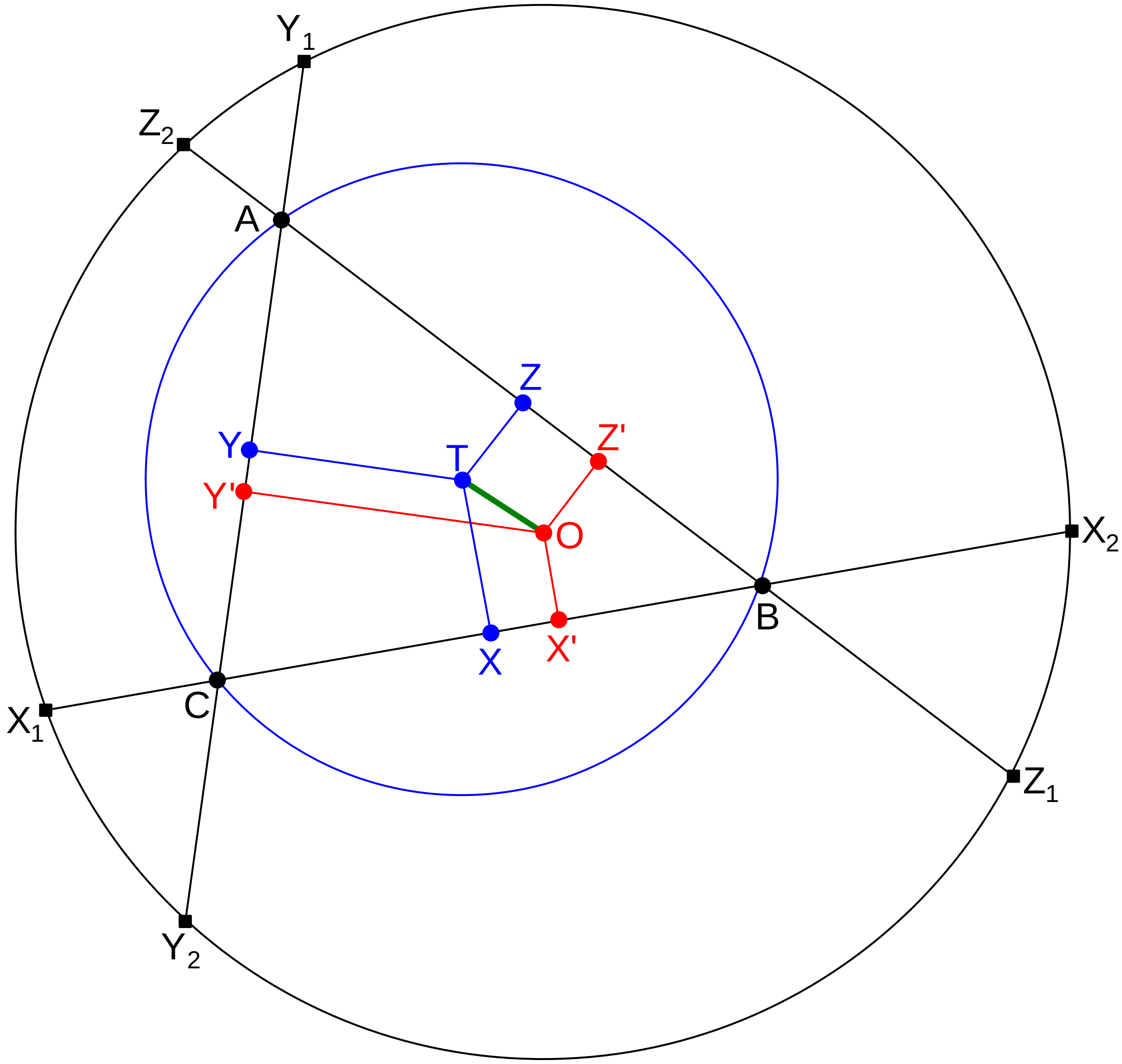

Fig. G2.2

Dritte Lösung: Wir beginnen, genauso wie in der Zweiten Lösung, mit der Definition und den wesentlichen Eigenschaften der Punkte T, X, Y, Z, O, X', Y' und Z' und nehmen auch die gleichen Anordnungsbeziehungen der Punkte an wie in der Zweiten Lösung.

Nun bezeichnen wir mit $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$ die Winkel des Dreiecks ABC. Nach dem Sinussatz im Dreieck ABC ist dann $BC : CA : AB =$

$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$; das heißt, es gibt eine reelle Zahl k, für die gilt: $BC = k\sin\alpha$, $CA = k\sin\beta$ und $AB = k\sin\gamma$. Damit ist die zu beweisende Gleichung

$$(BX_2 - CX_1) \cdot BC + (CY_2 - AY_1) \cdot CA + (AZ_2 - BZ_1) \cdot AB = 0$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} (BX_2 - CX_1) \cdot k\sin\alpha + (CY_2 - AY_1) \cdot k\sin\beta + (AZ_2 - BZ_1) \cdot k\sin\gamma &= 0, \qquad \text{also zu} \\ k \cdot ((BX_2 - CX_1) \cdot \sin\alpha + (CY_2 - AY_1) \cdot \sin\beta + (AZ_2 - BZ_1) \cdot \sin\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Um diese Gleichung nachzuweisen, reicht es aus, folgende Gleichung zu zeigen:

$$(BX_2 - CX_1) \cdot \sin\alpha + (CY_2 - AY_1) \cdot \sin\beta + (AZ_2 - BZ_1) \cdot \sin\gamma = 0. \tag{1}$$

Nun zeigen wir, wie in der Zweiten Lösung, daß $BX_2 - CX_1 = 2 \cdot XX'$, $CY_2 - AY_1 = 2 \cdot YY'$ und $AZ_2 - BZ_1 = -2 \cdot ZZ'$ ist. Damit wird die Gleichung (1) zu

$$\begin{aligned} 2 \cdot XX' \cdot \sin\alpha + 2 \cdot YY' \cdot \sin\beta + (-2 \cdot ZZ') \cdot \sin\gamma &= 0, \qquad \text{also zu} \\ 2 \cdot (XX' \cdot \sin\alpha + YY' \cdot \sin\beta - ZZ' \cdot \sin\gamma) &= 0, \qquad \text{also zu} \\ XX' \cdot \sin\alpha + YY' \cdot \sin\beta - ZZ' \cdot \sin\gamma &= 0, \qquad \text{also zu} \\ XX' \cdot \sin\alpha + YY' \cdot \sin\beta &= ZZ' \cdot \sin\gamma. \qquad (2) \end{aligned}$$

(Siehe Fig. G2.3.) Nun seien U, V und W die Fußpunkte der Lote von dem Punkt O auf die Geraden TX, TY bzw. TZ.

Wegen $\measuredangle OUX = 90°$, $\measuredangle UXX' = 90°$ (denn $TX \perp X_1X_2$) und $\measuredangle XX'O = 90°$ (denn $OX' \perp X_1X_2$) hat das Viereck $OUXX'$ drei rechte Winkel; es ist also ein Rechteck, und daraus folgt $XX' = OU$. Analog ist $YY' = OV$ und $ZZ' = OW$.

Ferner folgt aus $\measuredangle OUT = 90°$, $\measuredangle OVT = 90°$ und $\measuredangle OWT = 90°$, daß die Punkte U, V und W auf dem Thaleskreis über der Strecke OT liegen. Nun ist nach dem Umfangswinkelsatz in diesem Thaleskreis $\measuredangle WUV = \measuredangle WTV$; andererseits ist nach der Winkelsumme im Viereck $AYTZ$ offensichtlich $\measuredangle YAZ = 360° - \measuredangle AZT - \measuredangle YTZ - \measuredangle AYT = 360° - 90° - \measuredangle YTZ - 90° = 180° - \measuredangle YTZ$. Damit ist $\measuredangle WUV = \measuredangle WTV = 180° - \measuredangle YTZ = \measuredangle YAZ = \measuredangle CAB = \alpha$. Analog ist $\measuredangle UVW = \beta$ und $\measuredangle VWU = \gamma$. Doch nach dem Sinussatz im Dreieck UVW ist $VW : WU : UV = \sin\measuredangle WUV : \sin\measuredangle UVW : \sin\measuredangle VWU$. Mit anderen Worten: $VW : WU : UV = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. Das heißt, es gibt eine reelle Zahl k', für die gilt: $\sin\alpha = k' \cdot VW$, $\sin\beta = k' \cdot WU$ und $\sin\gamma = k' \cdot UV$. [1]

Wegen $XX' = OU$, $YY' = OV$, $ZZ' = OW$, $\sin\alpha = k' \cdot VW$, $\sin\beta = k' \cdot WU$ und $\sin\gamma = k' \cdot UV$ wird die zu beweisende Gleichung (2) zu

$$OU \cdot k' \cdot VW + OV \cdot k' \cdot WU = OW \cdot k' \cdot UV,$$

also nach Division durch k' zu $OU \cdot VW + OV \cdot WU = OW \cdot UV$. Doch dies folgt aus dem Satz von Ptolemäus, angewandt auf das Sehnenviereck $OUWV$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

[1] Dies gilt mit Ausnahme des Falles, wenn $VW = WU = UV = 0$ ist, d. h. wenn das Dreieck UVW zu einem Punkt entartet. Doch dieser Fall ist trivial, da dann auch $O = T = U = V = W$ und $XX' = YY' = ZZ' = 0$ ist.

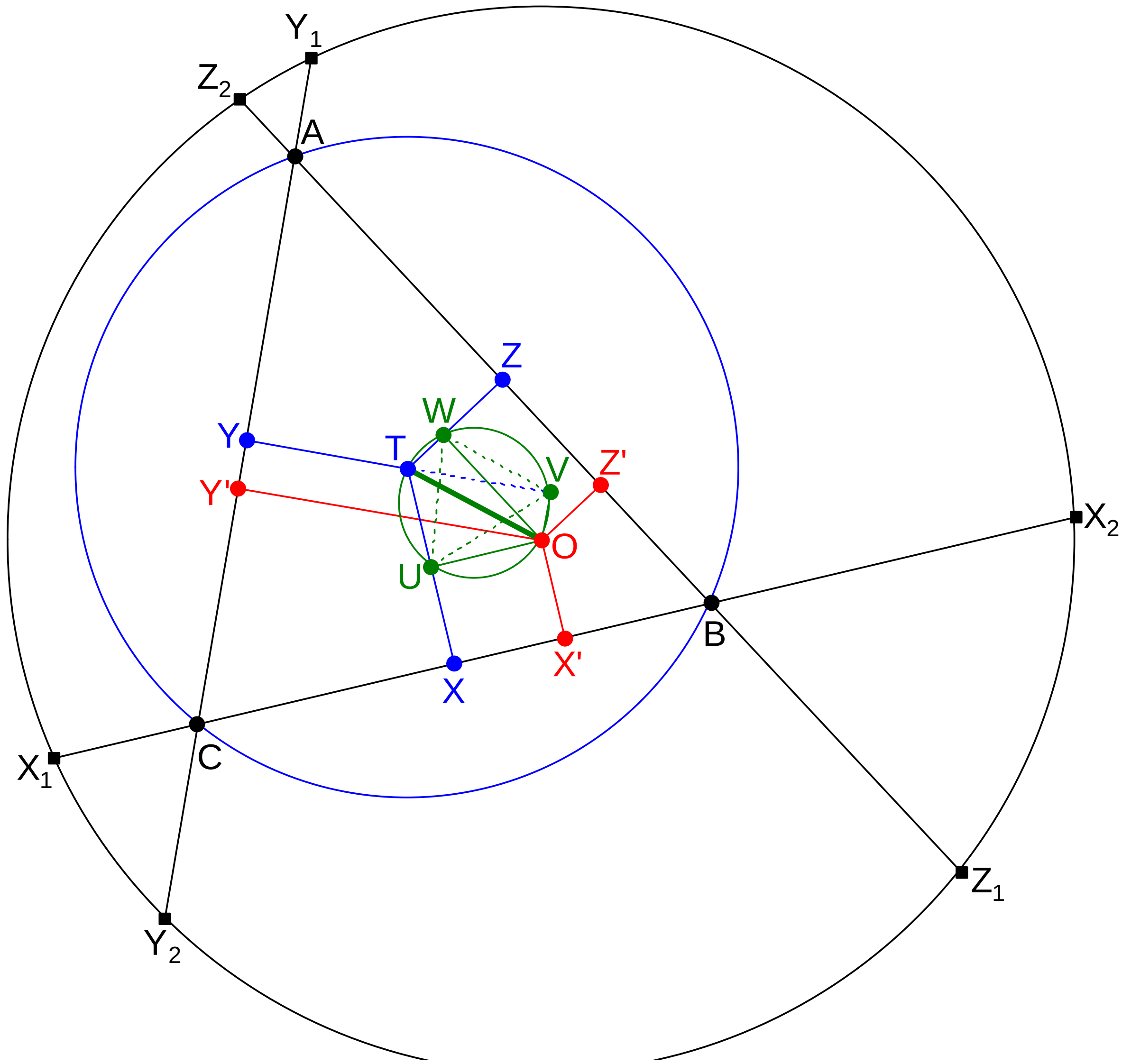

Fig. G2.3

Bemerkung: Ein interessanter Sonderfall der Aufgabe tritt ein, wenn die Geraden X_1X_2, Y_1Y_2 und Z_1Z_2 sich in einem Punkt schneiden. Dann fallen ihre paarweisen Schnittpunkte A, B und C zusammen, und die Gleichung $(BX_2 - CX_1) \cdot BC + (CY_2 - AY_1) \cdot CA + (AZ_2 - BZ_1) \cdot AB = 0$ wird zu der trivialen Aussage $0 = 0$ (da $BC = CA = AB = 0$ ist). Jedoch behält die in der Dritten Lösung nachgewiesene Gleichung (1) weiterhin ihre Substanz, wenn die Winkel α, β und γ als die (paarweisen) Winkel zwischen den Geraden X_1X_2, Y_1Y_2 und Z_1Z_2 gedeutet werden. Wir erhalten damit folgenden Satz:

Satz 1: Seien X_1, Z_2, Y_1, X_2, Z_1 und Y_2 sechs Punkte auf einem Kreis, in dieser Reihenfolge auf der Kreisperipherie angeordnet. Angenommen, die Geraden X_1X_2, Y_1Y_2 und Z_1Z_2 schneiden sich in einem Punkt A. Sei α der Winkel zwischen den Geraden Y_1Y_2 und Z_1Z_2, sei β der Winkel zwischen den Geraden Z_1Z_2 und X_1X_2, und sei γ der Winkel zwischen den Geraden X_1X_2 und Y_1Y_2. [2] Dann gilt

$$(AX_2 - AX_1) \cdot \sin\alpha + (AY_2 - AY_1) \cdot \sin\beta + (AZ_2 - AZ_1) \cdot \sin\gamma = 0.$$

(Siehe Fig. G2.4.)

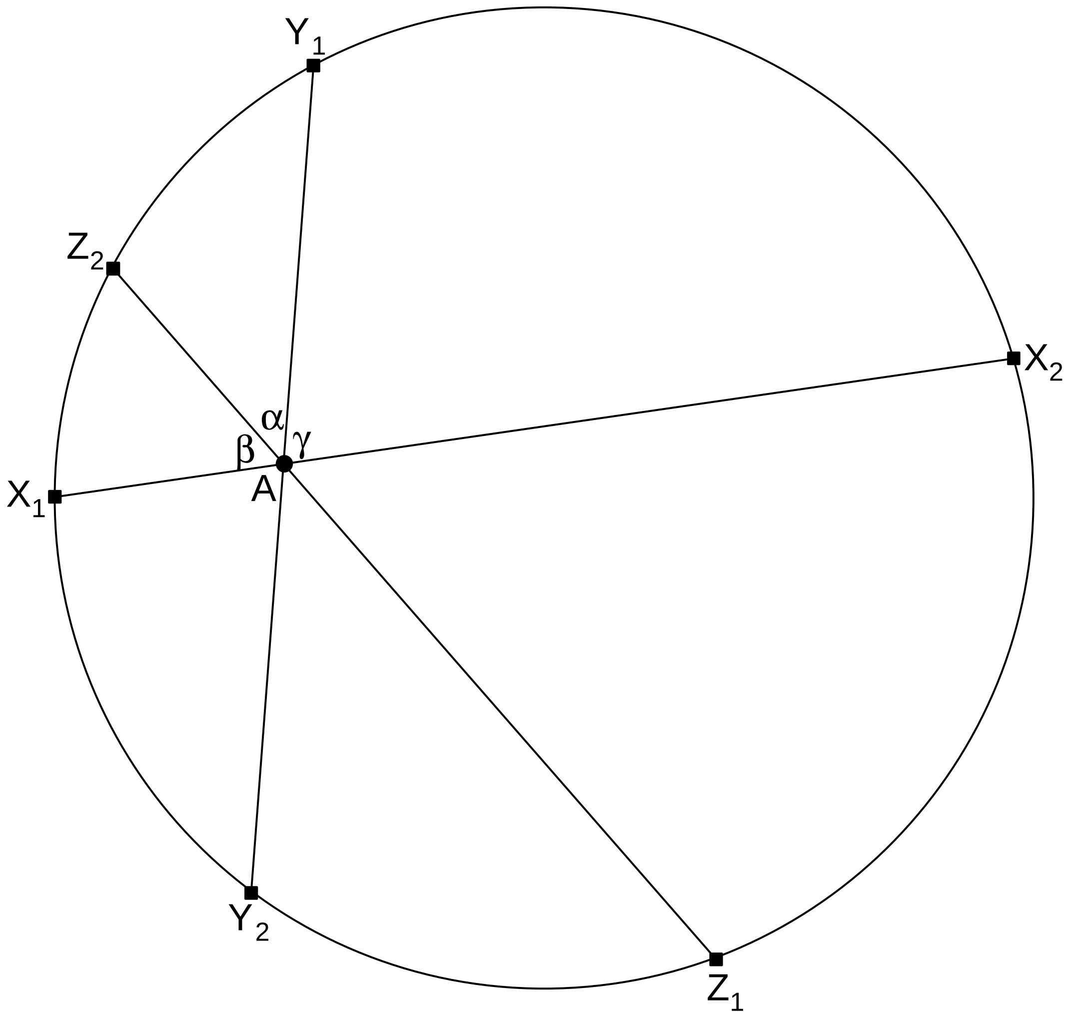

Fig. G2.4

Einen besonders bekannten Spezialfall dieses Satzes erhält man, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ ist, also wenn die Geraden X_1X_2, Y_1Y_2 und Z_1Z_2 paarweise in Winkeln von $60°$ zueinander stehen. Dann ergibt Satz 1 nämlich

$$\begin{aligned}
(AX_2 - AX_1) \cdot \sin 60° + (AY_2 - AY_1) \cdot \sin 60° + (AZ_2 - AZ_1) \cdot \sin 60° &= 0, \qquad \text{d. h.}\\
(AX_2 - AX_1) + (AY_2 - AY_1) + (AZ_2 - AZ_1) &= 0, \qquad \text{d. h.}\\
(AX_2 + AY_2 + AZ_2) - (AX_1 + AY_1 + AZ_1) &= 0,
\end{aligned}$$

also $AX_1 + AY_1 + AZ_1 = AX_2 + AY_2 + AZ_2$. Wir halten dieses Ergebnis fest:

Satz 2: Seien X_1, Z_2, Y_1, X_2, Z_1 und Y_2 sechs Punkte auf einem Kreis, in dieser Reihenfolge auf der Kreisperipherie angeordnet. Angenommen, die Geraden X_1X_2,

[2] Dabei ist es unwesentlich, ob man jeweils den spitzen oder den stumpfen Winkel zwischen zwei Geraden nimmt, denn gebraucht wird nur der Sinus dieses Winkels, und Nebenwinkel haben stets den gleichen Sinus.

Y_1Y_2 und Z_1Z_2 schneiden sich in einem Punkt A und stehen paarweise in Winkeln von $60°$ zueinander. Dann gilt $AX_1 + AY_1 + AZ_1 = AX_2 + AY_2 + AZ_2$. (Siehe Fig. G2.5.)

Dieses Ergebnis wurde beispielsweise in
`http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=50262`
besprochen.

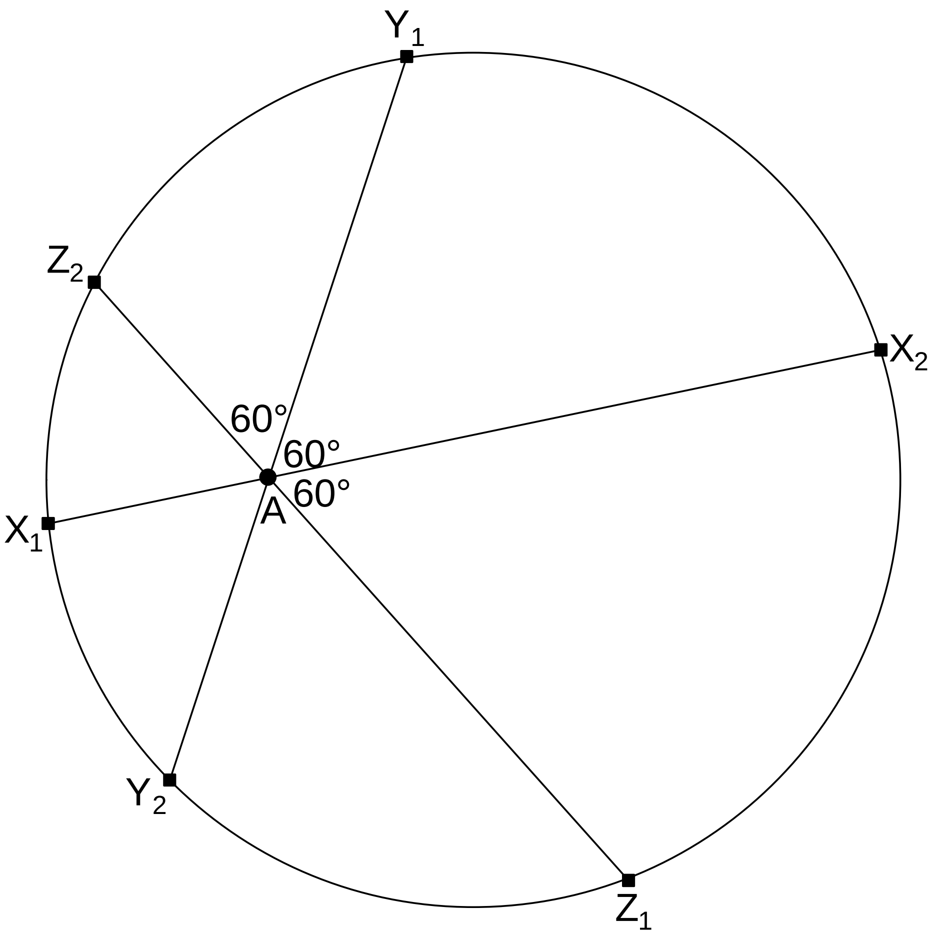

Fig. G2.5

Aufgabe G3

Auf den Seiten BC, CA und AB eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen hin Quadrate BB_aC_aC, CC_bA_bA bzw. AA_cB_cB aufgerichtet. Auf den Seiten B_cB_a und C_aC_b der Dreiecke B_cBB_a bzw. C_aCC_b werden, ebenfalls nach außen hin, Quadrate $B_cB_vB_uB_a$ bzw. $C_aC_uC_vC_b$ aufgerichtet. Man beweise: $B_uC_u \parallel BC$.

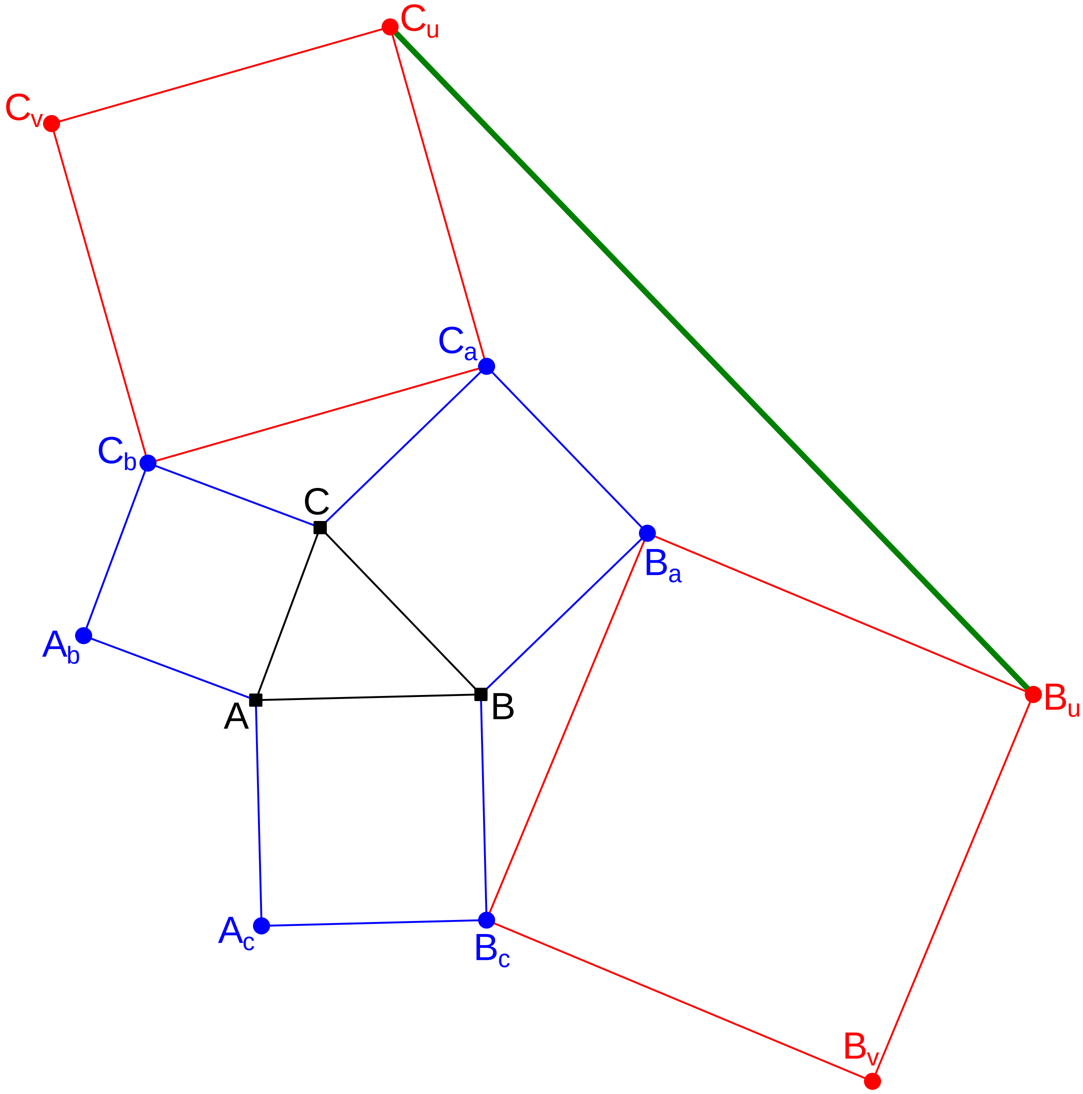

Fig. G3.1

Lösung der Aufgabe G3

Erste Lösung: Im folgenden verwenden wir die Bezeichnung $|P_1P_2P_3|$ für den (nichtgerichteten) Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks $P_1P_2P_3$.

(Siehe Fig. G3.2.) Da das Viereck CC_bA_bA ein Quadrat ist, gilt $CC_b = CA$ und $\measuredangle ACC_b = 90°$. Da das Viereck BB_aC_aC ein Quadrat ist, gilt $CC_a = CB$ und $\measuredangle BCC_a = 90°$. Damit ist $\measuredangle C_aCC_b = 360° - \measuredangle ACC_b - \measuredangle BCA - \measuredangle BCC_a = 360° - 90° - \measuredangle BCA - 90° = 180° - \measuredangle BCA$, also $\sin \measuredangle C_aCC_b = \sin \measuredangle BCA$.

Nun ist der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich dem halben Produkt zweier seiner Seiten mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; damit ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu $|ABC| = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin \measuredangle BCA$, und der Flächeninhalt des

Dreiecks C_aCC_b zu $|C_aCC_b| = \frac{1}{2} \cdot CC_b \cdot CC_a \cdot \sin \measuredangle C_aCC_b$. Wegen $CC_b = CA$, $CC_a = CB$ und $\sin \measuredangle C_aCC_b = \sin \measuredangle BCA$ ergibt sich also

$$|C_aCC_b| = \frac{1}{2} \cdot CC_b \cdot CC_a \cdot \sin \measuredangle C_aCC_b = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin \measuredangle BCA = |ABC| .$$

Damit haben wir gezeigt:

Hilfssatz 1: Sei ABC ein Dreieck, und seien BB_aC_aC und CC_bA_bA die auf seinen Seiten BC bzw. CA nach außen hin aufgerichteten Quadrate. Dann gilt $|C_aCC_b| = |ABC|$.

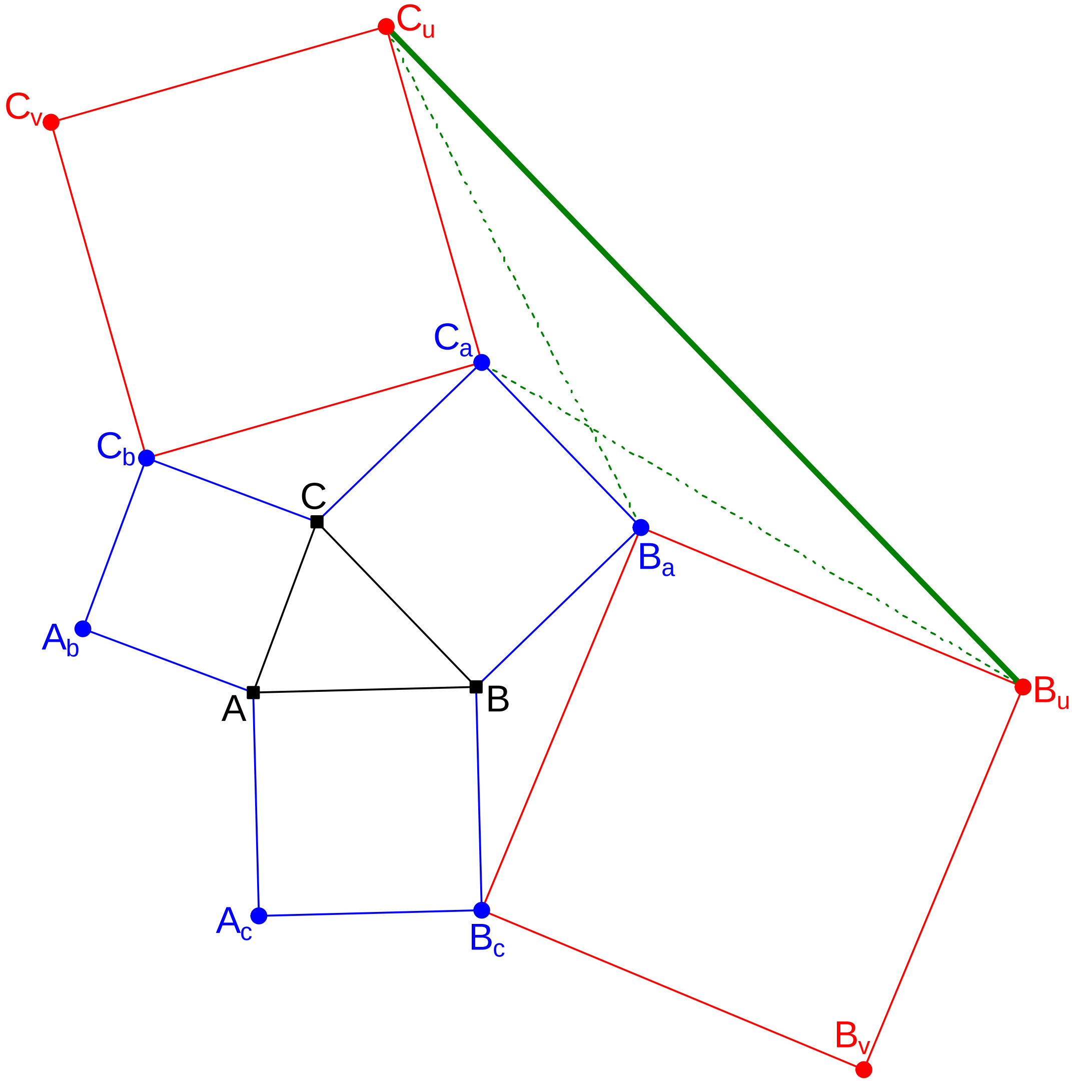

Fig. G3.2

Nun können wir Hilfssatz 1 auch auf das Dreieck C_aCC_b mit den auf seinen Seiten CC_a und C_aC_b nach außen hin aufgerichteten Quadraten CBB_aC_a bzw. $C_aC_uC_vC_b$ anwenden; dabei erhalten wir $|B_aC_aC_u| = |C_aCC_b|$. Zusammen mit $|C_aCC_b| = |ABC|$ ergibt dies $|B_aC_aC_u| = |ABC|$.

Analog zeigen wir $|C_aB_aB_u| = |ABC|$. Daher ist $|B_aC_aC_u| = |C_aB_aB_u|$. Das heißt, die Dreiecke $B_aC_aC_u$ und $C_aB_aB_u$ haben den gleichen Flächeninhalt; da sie dabei eine gemeinsame Grundseite B_aC_a haben, und ihre Spitzen C_u und B_u in der gleichen Halbebene bezüglich dieser Grundseite B_aC_a liegen, folgt daraus (man denke an die

Scherung), daß $B_uC_u \parallel B_aC_a$ ist. Doch da das Viereck BB_aC_aC ein Quadrat ist, gilt $B_aC_a \parallel BC$. Damit ist $B_uC_u \parallel BC$, und die Aufgabe ist gelöst.

Zweite Lösung: In dieser Zweiten Lösung werden wir nicht nur die Behauptung der Aufgabe zeigen, also die Beziehung $B_uC_u \parallel BC$, sondern auch zusätzlich die Längenbeziehung $B_uC_u = 4 \cdot BC$.

(Siehe Fig. G3.3.) Die Spiegelung an dem Zentrum des Quadrates BB_aC_aC überführt seine Ecke B in die gegenüberliegende Ecke C_a und seine Ecke C in die gegenüberliegende Ecke B_a. Sei R das Bild des Punktes A bei dieser Spiegelung. Da Punktspiegelungen Kongruenzabbildungen sind, gilt dann $\Delta RC_aB_a \cong \Delta ABC$. Da Punktspiegelungen Geraden in parallele Geraden überführen, gilt ferner $B_aR \parallel CA$ und $C_aB_a \parallel BC$.

Sei nun T der Schnittpunkt der Parallelen zu der Geraden BC durch den Punkt R mit der Parallelen zu der Geraden CA durch den Punkt C_a. Wegen $C_aT \parallel B_aR$ (denn $C_aT \parallel CA$ und $B_aR \parallel CA$) und $RT \parallel C_aB_a$ (denn $RT \parallel BC$ und $C_aB_a \parallel BC$) ist das Viereck B_aRTC_a ein Parallelogramm. Daher ist $C_aT = B_aR$. Aus $\Delta RC_aB_a \cong \Delta ABC$ folgt $B_aR = CA$, und da das Viereck CC_bA_bA ein Quadrat ist, gilt $CA = C_bC$. Damit ist $C_aT = B_aR = CA = C_bC$.

Da das Viereck $C_aC_uC_vC_b$ ein Quadrat ist, gilt $C_aC_u = C_bC_a$.

Ferner ist $\measuredangle C_bCA = 90°$, da das Viereck CC_bA_bA ein Quadrat ist, und $\measuredangle C_uC_aC_b = 90°$, da das Viereck $C_aC_uC_vC_b$ ein Quadrat ist. Wegen $C_aT \parallel CA$ ist aber $\measuredangle CC_aT = \measuredangle C_aCA$. Daher ist

$$\begin{aligned}\measuredangle C_uC_aT &= \measuredangle CC_aT - \measuredangle C_uC_aC_b - \measuredangle C_bC_aC = \measuredangle C_aCA - \measuredangle C_uC_aC_b - \measuredangle C_bC_aC \\ &= (360° - \measuredangle C_aCC_b - \measuredangle C_bCA) - \measuredangle C_uC_aC_b - \measuredangle C_bC_aC \\ &= (360° - \measuredangle C_aCC_b - 90°) - 90° - \measuredangle C_bC_aC = 180° - \measuredangle C_aCC_b - \measuredangle C_bC_aC \\ &= \measuredangle C_aC_bC\end{aligned}$$

nach der Winkelsumme im Dreieck C_aCC_b.

Aus $C_aT = C_bC$, $C_aC_u = C_bC_a$ und $\measuredangle C_uC_aT = \measuredangle C_aC_bC$ folgt, daß die Dreiecke C_aTC_u und C_bCC_a kongruent sind (sws). Daher ist $C_uT = C_aC$ und $\measuredangle C_uTC_a = \measuredangle C_aCC_b$.

Nun gilt $\measuredangle C_aCC_b = 360° - \measuredangle C_aCB - \measuredangle BCA - \measuredangle ACC_b$, und wegen $\measuredangle C_aCB = 90°$ (denn das Viereck BB_aC_aC ist ein Quadrat) und $\measuredangle ACC_b = 90°$ (denn das Viereck CC_bA_bA ist ein Quadrat) vereinfacht sich dies zu $\measuredangle C_aCC_b = 360° - 90° - \measuredangle BCA - 90° = 180° - \measuredangle BCA$. Andererseits ist $\measuredangle BCA = \measuredangle C_aB_aR$ wegen der Kongruenz $\Delta RC_aB_a \cong \Delta ABC$, und im Parallelogramm B_aRTC_a ist $\measuredangle C_aB_aR = \measuredangle C_aTR$. Daher ist

$$\measuredangle C_uTC_a = \measuredangle C_aCC_b = 180° - \measuredangle BCA = 180° - \measuredangle C_aB_aR = 180° - \measuredangle C_aTR.$$

Folglich liegen die Punkte C_u, T und R auf einer Geraden. Aufgrund von $TR \parallel BC$ muss diese Gerade parallel zu der Geraden BC sein; sie ist also die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt R. Wir können also feststellen: Der Punkt C_u liegt auf der Parallelen zu der Geraden BC durch den Punkt R. Analog läßt sich zeigen, daß der Punkt B_u auf der Parallelen zu der Geraden BC durch den Punkt R liegt. Somit ist $B_uC_u \parallel BC$, und die Aufgabe ist gelöst.

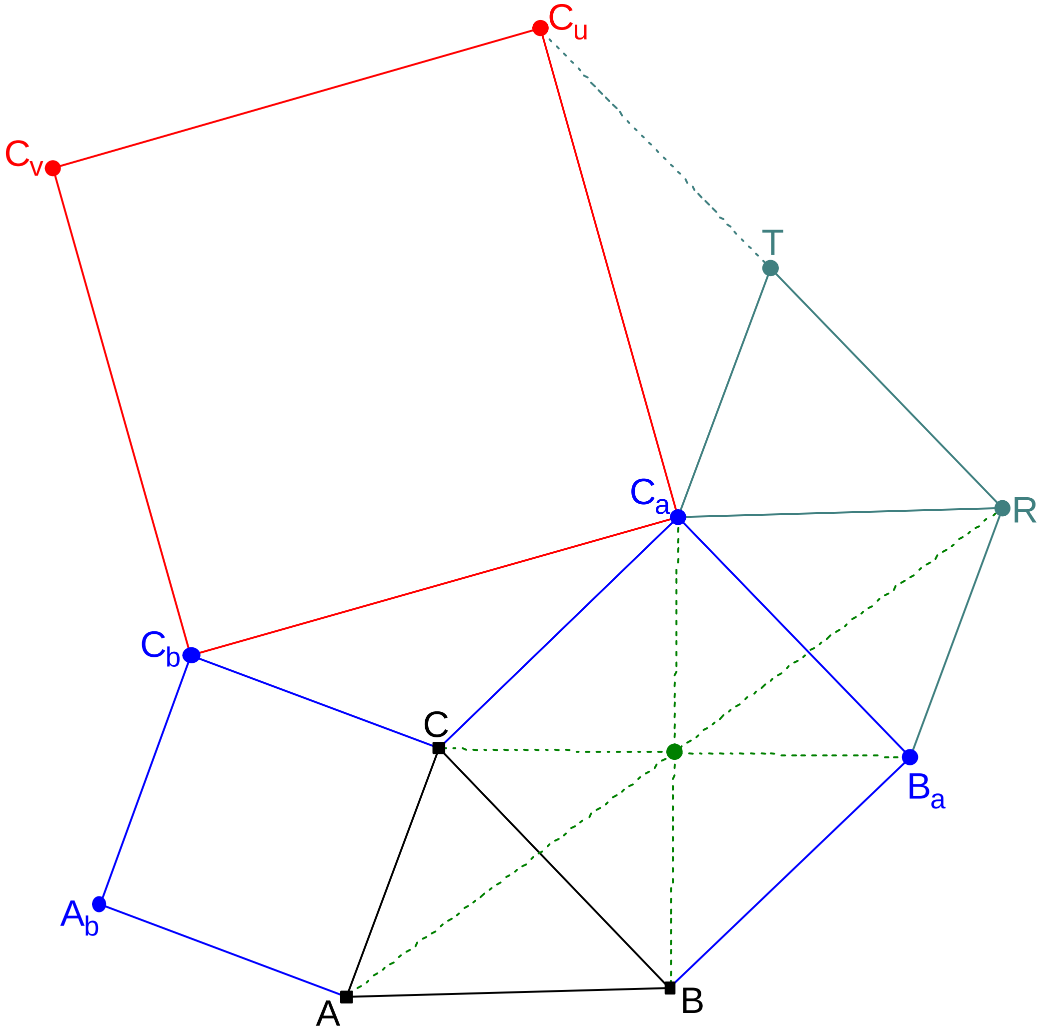

Fig. G3.3

(Siehe Fig. G3.4.) Um die zusätzliche Gleichung $B_uC_u = 4 \cdot BC$ zu zeigen, bedarf es nur noch eines kurzen Argumentes: Da das Viereck BB_aC_aC ein Quadrat ist, gilt $C_aC = BC$. Damit wird $C_uT = C_aC$ zu $C_uT = BC$. Da das Viereck B_aRTC_a ein Parallelogramm ist, gilt $RT = B_aC_a$, und da das Viereck BB_aC_aC ein Quadrat ist, gilt $B_aC_a = BC$. Daher ist $RT = BC$. Da die Punkte C_u, T und R auf einer Geraden liegen, ist also $C_uR = C_uT + RT = BC + BC = 2 \cdot BC$. Analog ist $B_uR = 2 \cdot BC$. Da die Punkte B_u, C_u und R auf einer Geraden liegen (nämlich auf der Parallelen zu der Geraden BC durch den Punkt R), impliziert dies $B_uC_u = B_uR + C_uR = 2 \cdot BC + 2 \cdot BC = 4 \cdot BC$, was zu beweisen war.

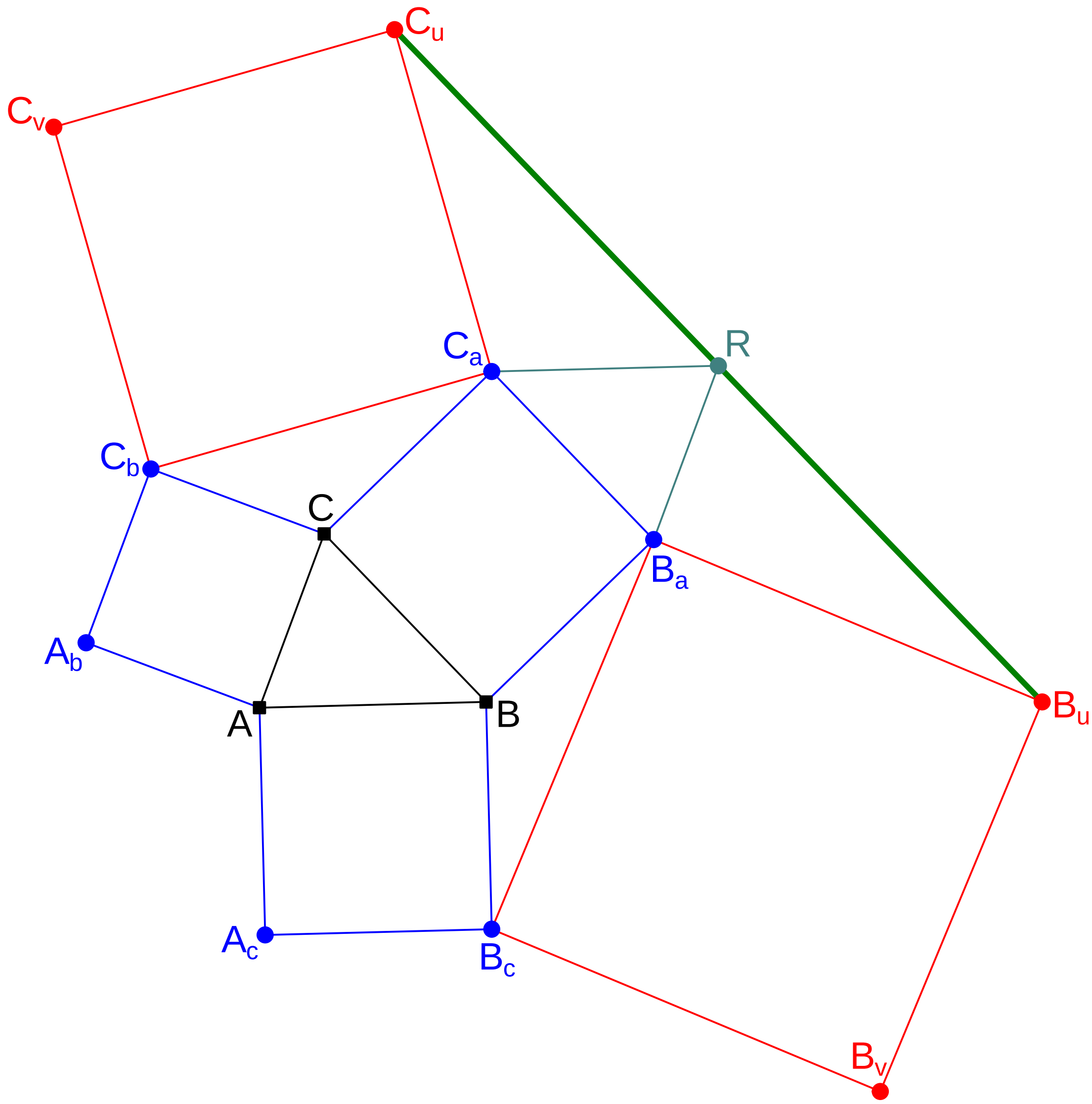

Fig. G3.4

Bemerkung: Die Aufgabe stammt aus der 68. Moskauer Mathematikolympiade 2005 für die 10. Klasse.

Aufgabe G4

Sei H der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC.

Sei D der Mittelpunkt der Strecke AH.

Die Höhe BH des Dreiecks ABC schneide die Senkrechte zu der Geraden AB durch den Punkt A in einem Punkt M.

Die Höhe CH des Dreiecks ABC schneide die Senkrechte zu der Geraden CA durch den Punkt A in einem Punkt N.

Die Mittelsenkrechte der Strecke AB schneide die Senkrechte zu der Geraden BC durch den Punkt B in einem Punkt U.

Die Mittelsenkrechte der Strecke CA schneide die Senkrechte zu der Geraden BC durch den Punkt C in einem Punkt V.

Schließlich sei E der Mittelpunkt der Seite BC des Dreiecks ABC.

Man beweise: Die Punkte D, M, N, U und V liegen alle auf einer und derselben Senkrechten zu der Geraden AE.

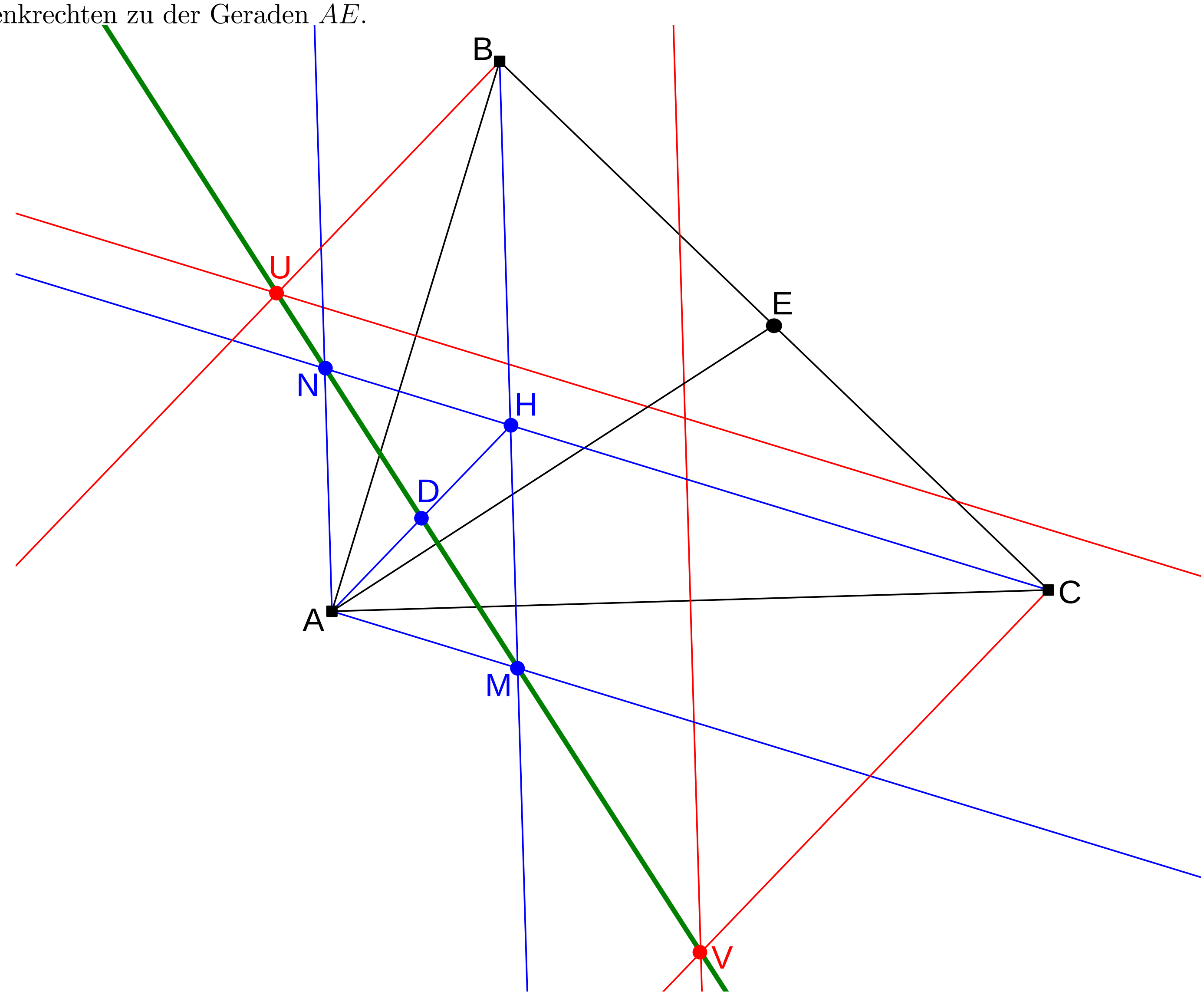

Fig. G4.1

Lösung der Aufgabe G4

Wir verwenden in den folgenden beiden Lösungen orientierte Winkel modulo 180°. Genaueres über diese Winkelart findet sich in meiner Notiz

> Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo* 180° *und eine Lösung der* $\sqrt{\text{WURZEL}}$-*Aufgabe* κ *22 von Wilfried Haag*,

die unter `http://de.geocities.com/darij_grinberg/Dreigeom/Inhalt.html#orwinkel` herunterzuladen und in den $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Ausgaben 8/2004 (S. 170-176) und 9+10/2004 (S. 226-229) gekürzt erschienen ist.

Erste Lösung: (Siehe Fig. G4.2.) Die Senkrechte zu der Geraden AB durch den Punkt A schneide die Senkrechte zu der Geraden BC durch den Punkt B in einem Punkt U'.

Da der Punkt U auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt, ist $AU = BU$. Das heißt, das Dreieck AUB ist gleichschenklig; daraus folgt $\measuredangle UAB = \measuredangle ABU$. Das heißt, $\measuredangle(AU;\ AB) = \measuredangle(AB;\ BU)$. Wegen $AU' \perp AB$ ist $\measuredangle(AB;\ AU') = 90°$; da wir aber mit orientierten Winkeln modulo 180° rechnen, ist $90° = -90°$, und damit $\measuredangle(AB;\ AU') = -\measuredangle(AB;\ AU')$. Wir haben also

$$\begin{aligned}\measuredangle(AU;\ AU') &= \measuredangle(AU;\ AB) + \measuredangle(AB;\ AU') = \measuredangle(AU;\ AB) - \measuredangle(AB;\ AU')\\ &= \measuredangle(AB;\ BU) - \measuredangle(AB;\ AU') = \measuredangle(AU';\ BU).\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: $\measuredangle UAU' = \measuredangle AU'U$. Folglich ist das Dreieck AUU' gleichschenklig, d. h. wir haben $AU = U'U$. Zusammen mit $AU = BU$ ergibt dies $U'U = BU$, und folglich ist der Punkt U der Mittelpunkt der Strecke $U'B$.

Nun ist der Punkt H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC; daher sind die Geraden AH und BH Höhen des Dreiecks ABC, und somit gilt $AH \perp BC$ und $BH \perp CA$. Aus $AH \perp BC$ und $U'B \perp BC$ folgt $AH \parallel U'B$. Nach dem Strahlensatz gilt also $\frac{MU'}{MA} = \frac{MB}{MH}$. Betrachten wir nun die zentrische Streckung mit dem Zentrum M und dem Faktor $\frac{MU'}{MA} = \frac{MB}{MH}$. Diese zentrische Streckung bildet die Punkte A und H auf die Punkte U' bzw. B ab; also bildet sie auch den Mittelpunkt D der Strecke AH auf den Mittelpunkt U der Strecke $U'B$ ab. Da nun bei einer zentrischen Streckung ein beliebiger Punkt, sein Bildpunkt und das Streckungszentrum stets auf einer Geraden liegen, folgt daraus, daß die Punkte D, U und M auf einer Geraden liegen (denn unsere zentrische Streckung hat das Streckungszentrum M und führt den Punkt D in den Punkt U über). Mit anderen Worten: Die Gerade MU geht durch den Punkt D.

Aus $U'B \perp BC$ und $BH \perp CA$ folgt $\measuredangle(U'B;\ BC) = 90°$ und $\measuredangle(BH;\ CA) = 90°$, also

$$\begin{aligned}\measuredangle U'BM &= \measuredangle(U'B;\ BH) = \measuredangle(U'B;\ BC) + \measuredangle(BC;\ BH) = 90° + \measuredangle(BC;\ BH)\\ &= \measuredangle(BH;\ CA) + \measuredangle(BC;\ BH) = \measuredangle(BC;\ CA) = \measuredangle BCA.\end{aligned}$$

Aus $BH \perp CA$ und $AU' \perp AB$ folgt $\measuredangle(BH;\ CA) = 90°$ und $\measuredangle(AU';\ AB) = 90°$, also

$$\begin{aligned}\measuredangle BMU' &= \measuredangle(BH;\ AU') = \measuredangle(BH;\ CA) + \measuredangle(CA;\ AU') = 90° + \measuredangle(CA;\ AU')\\ &= \measuredangle(AU';\ AB) + \measuredangle(CA;\ AU') = \measuredangle(CA;\ AB) = \measuredangle CAB.\end{aligned}$$

Wegen $\measuredangle U'BM = \measuredangle BCA$ und $\measuredangle BMU' = \measuredangle CAB$ sind die Dreiecke $MU'B$ und ABC gleichsinnig ähnlich. Nun bilden bekanntlich entsprechende Punkte in gleichsinnig ähnlichen Dreiecken gleiche Winkel. In den gleichsinnig ähnlichen Dreiecken $MU'B$ und ABC sind die Punkte U bzw. E entsprechende Punkte, da sie die Mittelpunkte ihrer (entsprechenden) Seiten $U'B$ bzw. BC sind. Also gilt $\measuredangle UMU' = \measuredangle EAB$; mit anderen Worten: $\measuredangle(MU;\ AU') = \measuredangle(AE;\ AB)$. Daher ist

$$\begin{aligned}\measuredangle(MU;\ AE) &= \measuredangle(MU;\ AU') + \measuredangle(AU';\ AE) = \measuredangle(AE;\ AB) + \measuredangle(AU';\ AE) \\ &= \measuredangle(AU';\ AB) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Somit ist die Gerade MU orthogonal zu der Geraden AE. Wir wissen ferner, daß die Gerade MU durch den Punkt D geht. Somit ist die Gerade MU die Senkrechte zu der Geraden AE durch den Punkt D. Wir haben also bewiesen, daß die Punkte M und U auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D liegen. Analog können wir zeigen, daß auch die Punkte N und V auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D liegen. Insgesamt liegen also die Punkte D, M, N, U und V alle auf einer Senkrechten zu der Geraden AE (nämlich auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D). Damit ist die Aufgabe gelöst.

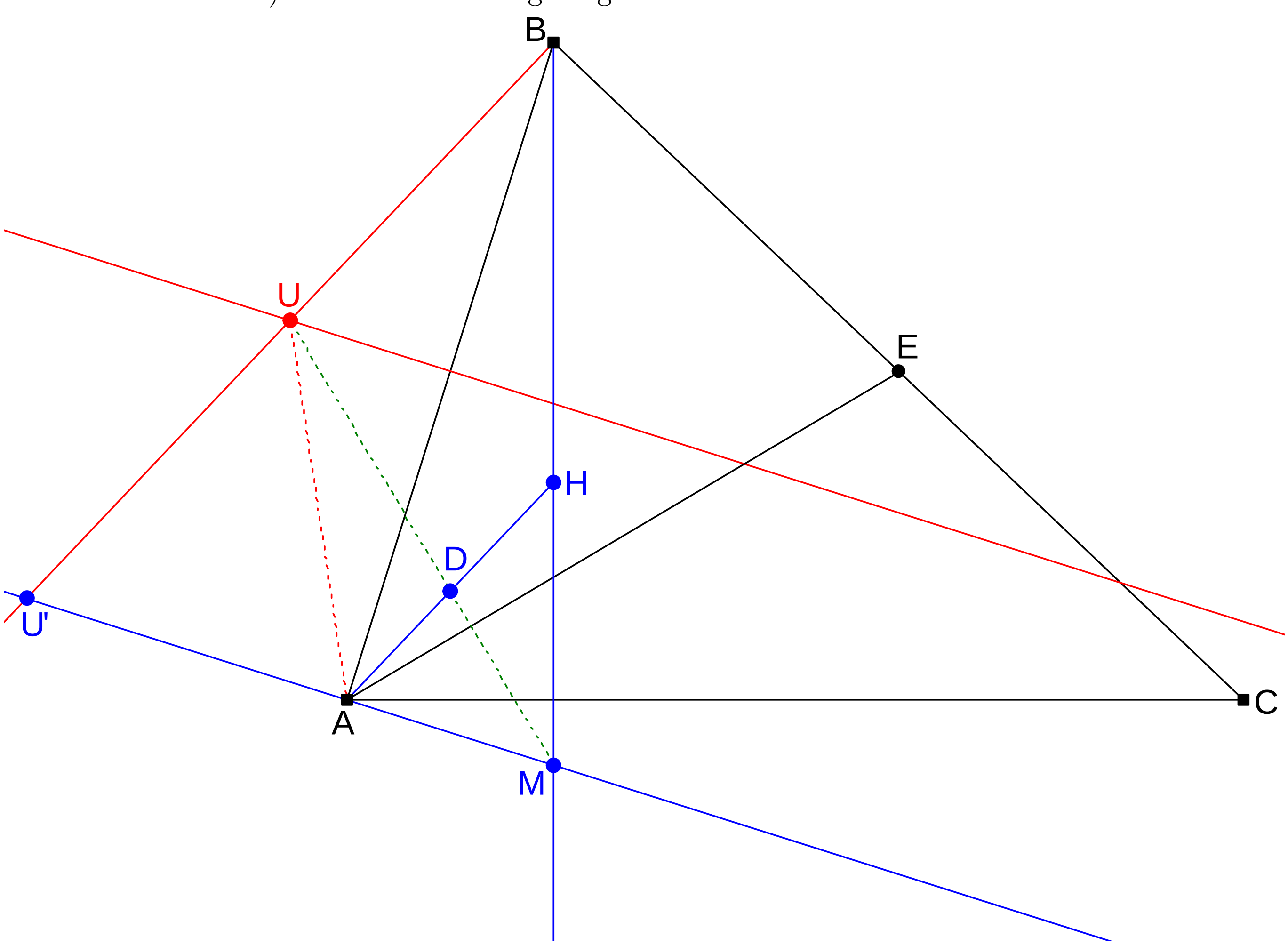

Fig. G4.2

Zweite Lösung (nach Liubomir Chiriac): Die folgende Lösung setzt Vertrautheit mit dem Begriff der Potenzgeraden zweier Kreise voraus. Dieser Begriff wird dabei auch auf entartete "Kreise" mit Radius 0 angewandt: Ist P ein beliebiger Punkt, dann ist der Kreis um den Punkt P mit Radius 0 schlichtweg die Punktmenge, die aus einem einzigen Punkt besteht, nämlich dem Punkt P. Wie für gewöhnliche Kreise kann man auch für solche Kreise mit Radius 0 von Potenzen sprechen: Die Potenz eines Punktes Q in bezug auf den Kreis um einen Punkt P mit Radius 0 ist gleich $QP^2 - 0^2 = QP^2$. Entsprechend kann man auch dann von der Potenzgeraden zweier Kreise sprechen, wenn einer (oder beide) von diesen Kreisen den Radius 0 hat.

Nun kommen wir zur Lösung der Aufgabe: Sei k_0 der Kreis um den Punkt A mit Radius 0, und sei k_a der Thaleskreis über der Strecke BC. Der Mittelpunkt des Thaleskreises k_a über der Strecke BC ist offensichtlich der Mittelpunkt E dieser Strecke BC. Die Kreise k_0 und k_a haben die Mittelpunkte A bzw. E; da die Potenzgerade zweier Kreise orthogonal zu ihrer Zentralen ist, muss also die Potenzgerade der Kreise k_0 und k_a orthogonal zu der Geraden AE sein.

(Siehe Fig. G4.2a.) Sei Z der Fußpunkt der Höhe CH des Dreiecks ABC. Dann ist $\measuredangle AZN = 90°$ und $\measuredangle NAC = 90°$, also $\measuredangle AZN = \measuredangle NAC$; mit anderen Worten: $\measuredangle AZN = -\measuredangle CAN$. Ferner ist offensichtlich $\measuredangle ANZ = -\measuredangle CNA$. Daraus folgt, daß die Dreiecke AZN und CAN gegensinnig ähnlich sind, und somit ist $\frac{NC}{NA} = \frac{NA}{NZ}$, also $NC \cdot NZ = NA^2$.

Wegen $\measuredangle BZC = 90°$ aber liegt der Punkt Z auf dem Thaleskreis über der Strecke BC, also auf dem Kreis k_a. Daher ist die Potenz des Punktes N in bezug auf den Kreis k_a gleich $NC \cdot NZ$. Andererseits ist die Potenz des Punktes N in bezug auf den Kreis k_0 (mit Zentrum A und Radius 0) gleich NA^2. Wegen $NC \cdot NZ = NA^2$ hat also der Punkt N gleiche Potenzen in bezug auf die Kreise k_0 und k_a, und liegt daher auf der Potenzgeraden der Kreise k_0 und k_a.

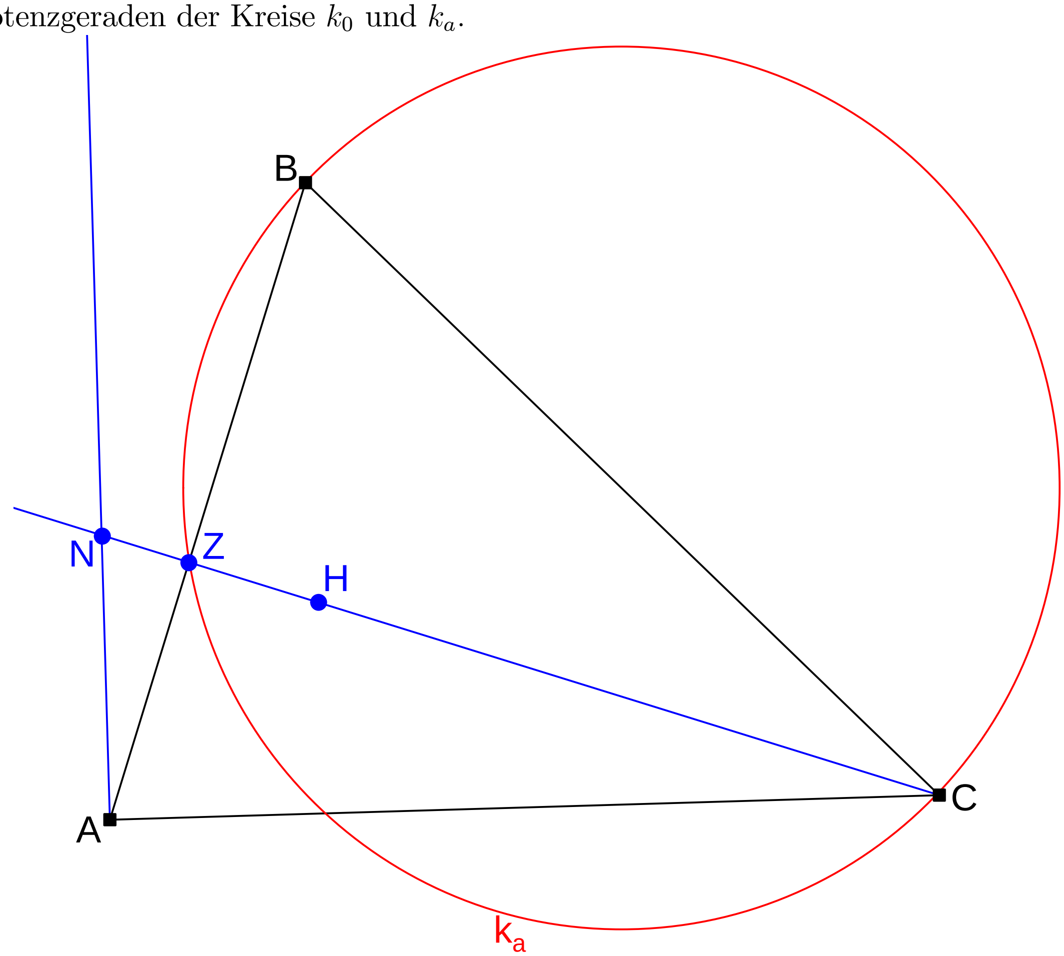

Fig. G4.2a

Analog zeigt man, daß auch der Punkt M auf der Potenzgeraden der Kreise k_0 und

k_a liegt.

(Siehe Fig. G4.1.) Die Gerade BH ist, als Höhe im Dreieck ABC, orthogonal zu dessen Seite CA. Aber auch die Gerade AN ist orthogonal zu der Geraden CA. Daher ist $BH \parallel AN$, also $HM \parallel AN$. Analog ist $HN \parallel AM$. Daher ist das Viereck $AMHN$ ein Parallelogramm. Da sich in einem Parallelogramm die Diagonalen halbieren, müssen sich also die Diagonalen AH und MN des Parallelogramms $AMHN$ halbieren; das heißt, der Mittelpunkt D der Strecke AH ist gleichzeitig Mittelpunkt der Strecke MN. Da nun die Punkte M und N beide auf der Potenzgeraden der Kreise k_0 und k_a liegen, folgt hieraus, daß auch der Punkt D auf dieser Potenzgeraden liegt.

(Siehe Fig. G4.2b.) Wir haben $BU \perp BC$, also $BU \perp BE$. Da der Thaleskreis k_a über der Strecke BC den Mittelpunkt E hat und durch den Punkt B geht, muß also die Gerade BU die Tangente an diesen Thaleskreis k_a in dem Punkt B sein. Daher ist die Potenz des Punktes U in bezug auf den Kreis k_a gleich UB^2. Andererseits ist die Potenz des Punktes U in bezug auf den Kreis k_0 (mit Zentrum A und Radius 0) gleich UA^2. Da jedoch der Punkt U auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt, ist $UA = UB$, also $UA^2 = UB^2$. Daher hat der Punkt U gleiche Potenzen in bezug auf die Kreise k_0 und k_a, und liegt somit auf der Potenzgeraden der Kreise k_0 und k_a.

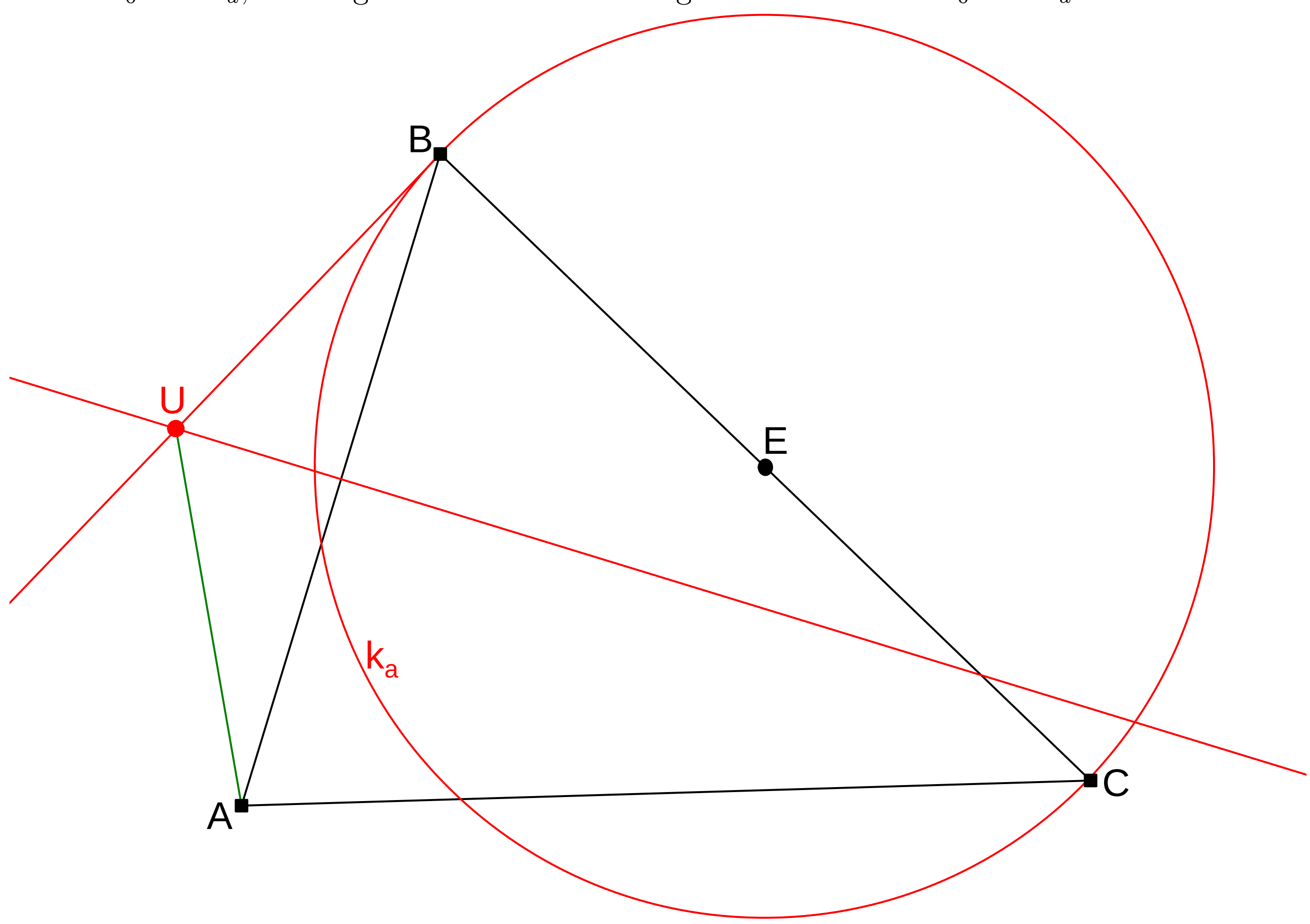

Fig. G4.2b

Analog zeigt man, daß der Punkt V auf der Potenzgeraden der Kreise k_0 und k_a liegt.

Insgesamt haben wir also gezeigt, daß die Punkte D, M, N, U und V alle auf der Potenzgeraden der Kreise k_0 und k_a liegen, und daß diese Potenzgerade orthogonal zu der Geraden AE ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Bemerkungen: 1. Die Aufgabe sagt aus, daß die Punkte M, N, U und V auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D liegen. Man kann auch zwei weitere merkwürdige Punkte auf dieser Senkrechten angeben:

Satz 1: Bekanntlich geht der Feuerbachkreis des Dreiecks ABC durch den Mittelpunkt E seiner Seite BC. Sei nun D' der von E verschiedene Schnittpunkt dieses Feuerbachkreises mit der Geraden AE. Dann liegt der Punkt D' auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D. (Siehe Fig. G4.3.)

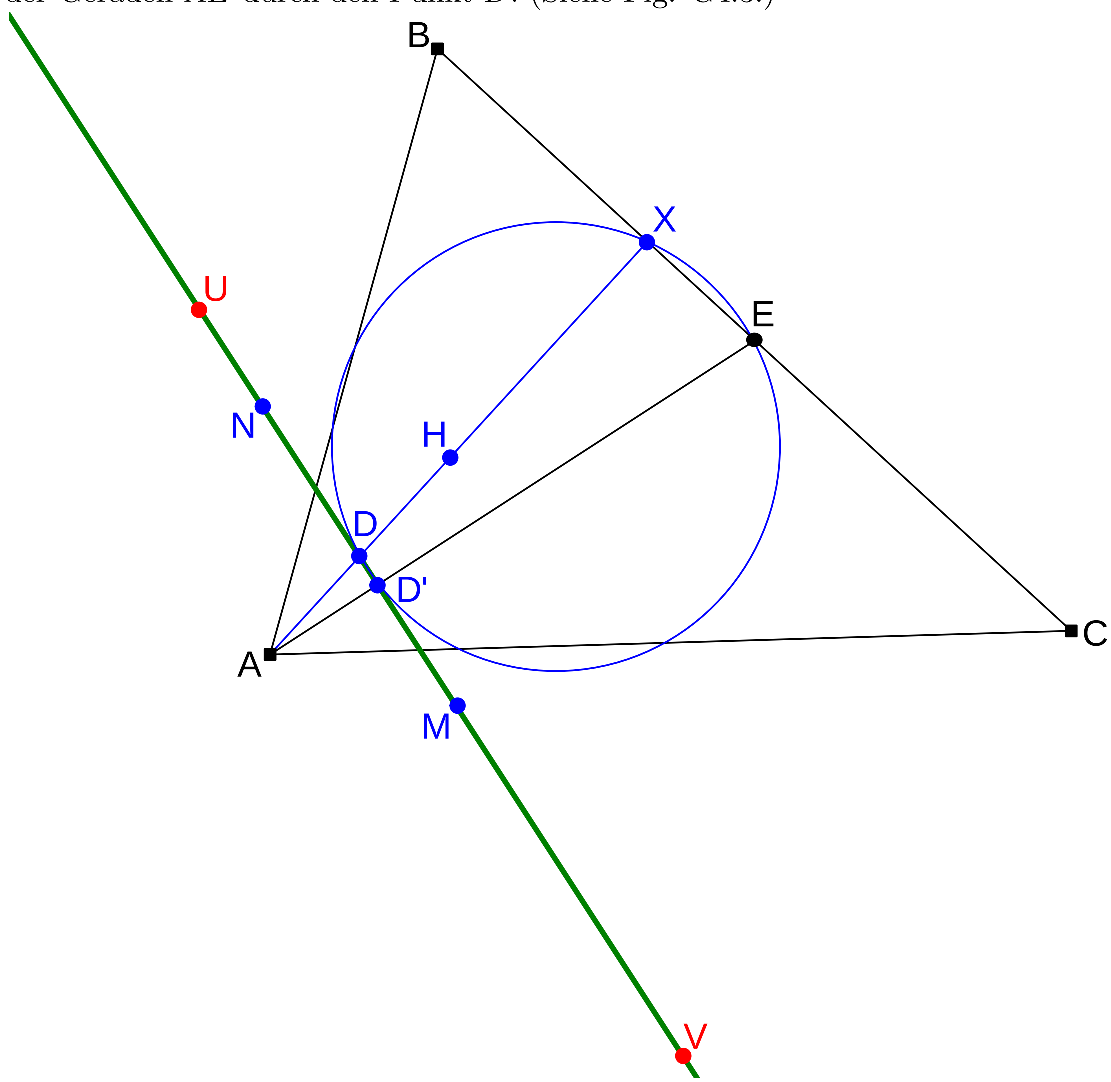

Fig. G4.3

Beweis von Satz 1: (Siehe Fig. G4.4.) Sei X der Fußpunkt der von der Ecke A ausgehenden Höhe AH des Dreiecks ABC. Dann gilt $\measuredangle DXE = 90^\circ$. Nun liegen bekanntlich der Mittelpunkt E der Seite BC, der Fußpunkt X der von A ausgehenden Höhe und der Mittelpunkt D der Strecke AH auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks ABC; wegen $\measuredangle DXE = 90^\circ$ ist die Strecke DE ein Durchmesser dieses Feuerbachkreises. Da der Punkt D' auf dem Feuerbachkreis liegt, gilt also $\measuredangle DD'E = 90^\circ$; das heißt, $DD' \perp AE$. Folglich liegt der Punkt D' auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D, und Satz 1 ist bewiesen.

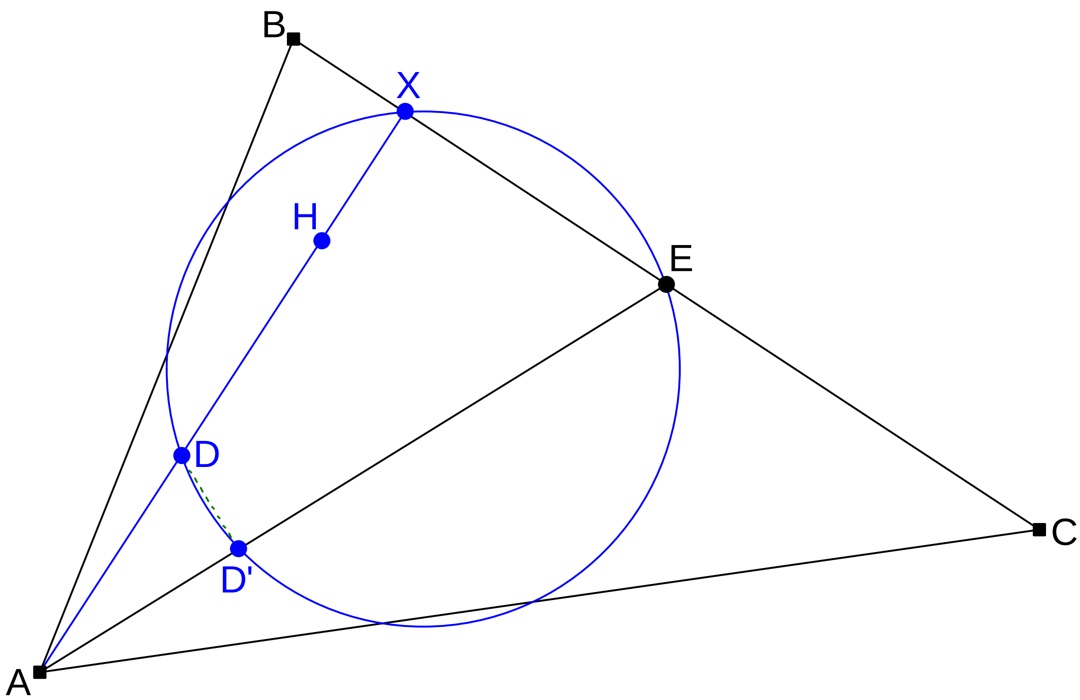

Fig. G4.4

Satz 2: Die Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A schneide die Gerade BC in einem Punkt X. Dann liegt der Punkt X auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D. (Siehe Fig. G4.5.)

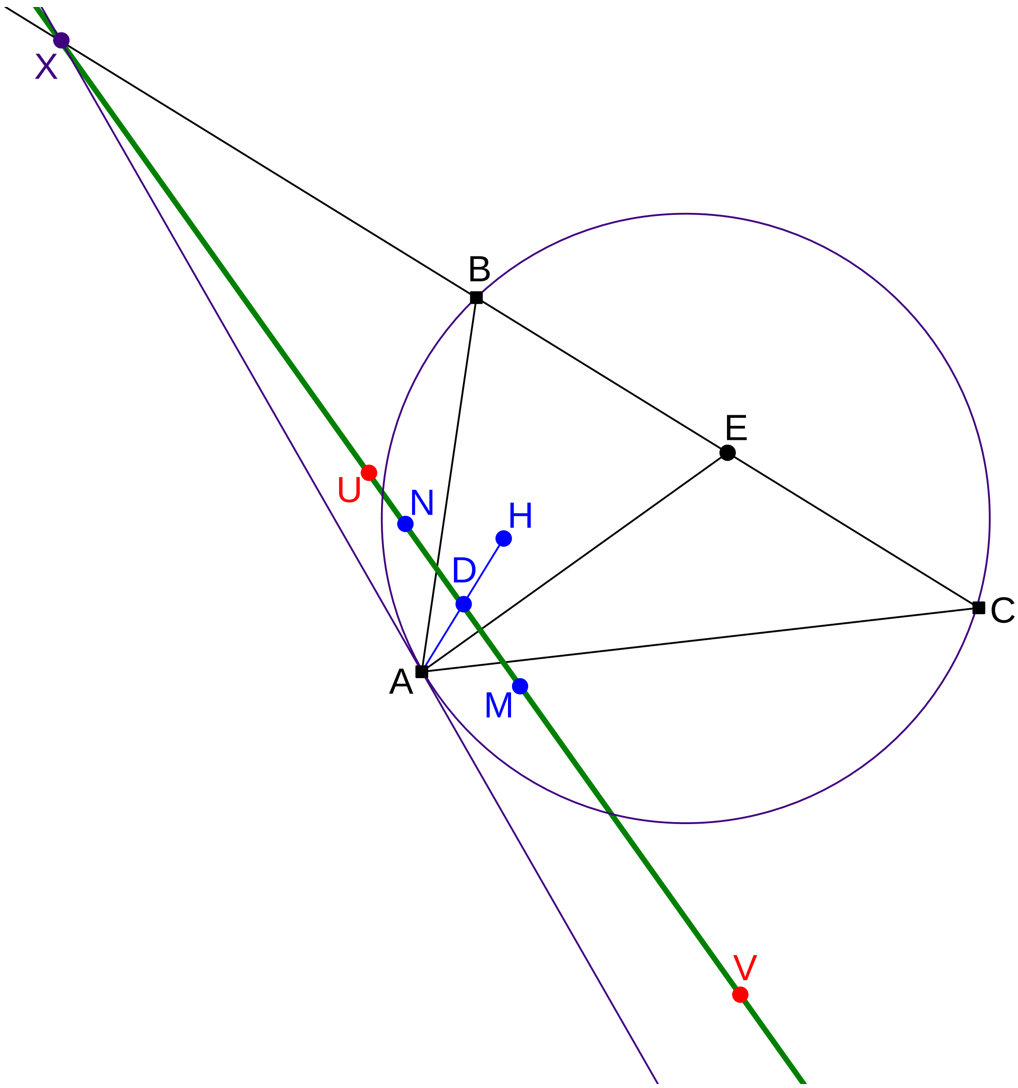

Fig. G4.5

Erster Beweis von Satz 2: (Siehe Fig. G4.6.) Zuerst berechnen wir das Verhältnis $\frac{BX}{CX}$, in dem die Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A die Strecke BC (äußerlich) teilt.

Da die Gerade AX die Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A ist, gilt nach dem Sehnentangentenwinkelsatz $\measuredangle(AX;\ AB) = \measuredangle ACB$. Mit anderen Worten: $\measuredangle XAB = -\measuredangle XCA$. Ferner ist offensichtlich $\measuredangle AXB = -\measuredangle CXA$. Daher sind die Dreiecke XAB und XCA gegensinnig ähnlich, und daraus folgt $\frac{BX}{AX} = \frac{AX}{CX} = \frac{AB}{CA}$. Damit ist $\frac{BX}{CX} = \frac{BX}{AX} \cdot \frac{AX}{CX} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{AB}{CA} = \frac{AB^2}{CA^2}$. Wir haben damit folgendes nützliche Resultat gezeigt:

Hilfssatz 3: Sei ABC ein Dreieck. Die Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A schneide die Gerade BC in einem Punkt X. Dann liegt der Punkt X außerhalb der Strecke BC und erfüllt $\frac{BX}{CX} = \frac{AB^2}{CA^2}$.

In Worten: Die Tangente an den Umkreis eines Dreiecks in einer seiner Ecken teilt die gegenüberliegende Seite äußerlich im Verhältnis der Quadrate der zwei anliegenden Seiten.

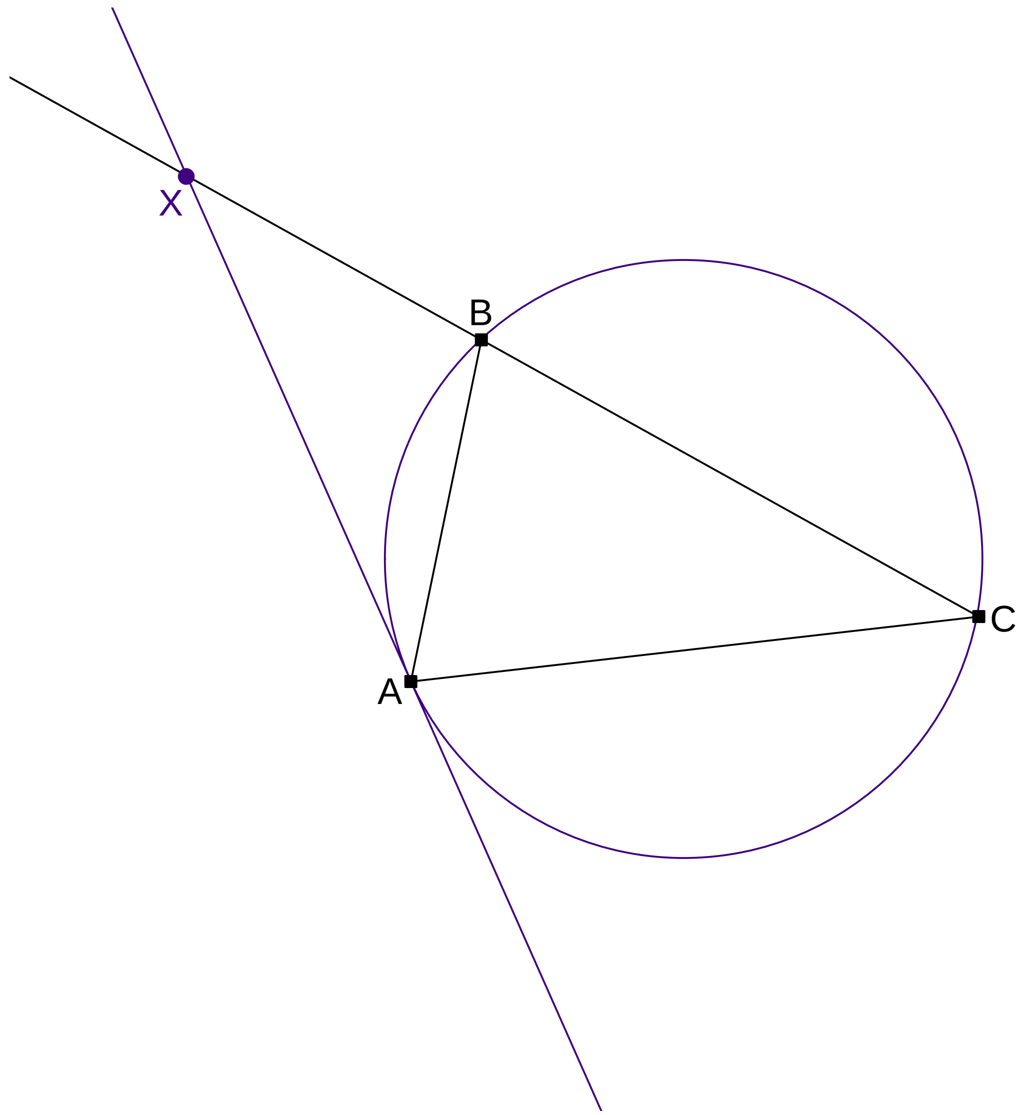

Fig. G4.6

(Siehe Fig. G4.7.) Nun schneide die Gerade UV die Gerade BC in einem Punkt X'. Wir werden zeigen, daß $X' = X$ ist.

Da der Punkt U auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt, ist $AU = BU$; das heißt, das Dreieck AUB ist gleichschenklig, und es folgt $\measuredangle UAB = \measuredangle ABU$. Wegen $BU \perp BC$ ist $\measuredangle CBU = 90^\circ$, und damit $\measuredangle ABU = \measuredangle CBU - \measuredangle CBA = 90^\circ - \measuredangle CBA$.

Sei andererseits O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Dann ist $AO = CO$; das Dreieck AOC ist also auch gleichschenklig, und es ergibt sich $\measuredangle OAC = \measuredangle ACO$. Nun ist der Punkt O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, also der Mittelpunkt eines Kreises durch die Punkte A, B und C; nach dem Mittelpunktswinkelsatz für orientierte Winkel modulo 180° ist also $\measuredangle ACO = 90^\circ - \measuredangle CBA$.

Aus $\measuredangle ABU = 90^\circ - \measuredangle CBA$ und $\measuredangle ACO = 90^\circ - \measuredangle CBA$ folgt $\measuredangle ABU = \measuredangle ACO$. Wegen $\measuredangle UAB = \measuredangle ABU$ und $\measuredangle OAC = \measuredangle ACO$ ergibt dies $\measuredangle UAB = \measuredangle OAC$.

Aus $\measuredangle ABU = \measuredangle ACO$ und $\measuredangle UAB = \measuredangle OAC$ folgt, daß die Dreiecke ABU und ACO gleichsinnig ähnlich sind. Daher ist $\frac{BU}{AB} = \frac{CO}{CA}$, also $BU = AB \cdot \frac{CO}{CA}$. Nun ist O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC; daher ist $CO = r$, wobei r der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist. Wir haben also $BU = AB \cdot \frac{CO}{CA} = AB \cdot \frac{r}{CA}$. Analog ist

$CV = CA \cdot \dfrac{r}{AB}$. Nun folgt aus $BU \perp BC$ und $CV \perp BC$, daß die Geraden BU und CV zueinander parallel sind; damit gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{BX'}{CX'} = \frac{BU}{CV} = \frac{AB \cdot \dfrac{r}{CA}}{CA \cdot \dfrac{r}{AB}} = \frac{AB^2}{CA^2}.$$

Vergleich mit der Formel $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{AB^2}{CA^2}$ aus dem Hilfssatz 3 ergibt $\dfrac{BX'}{CX'} = \dfrac{BX}{CX}$. Das heißt, die Punkte X und X' teilen die Strecke BC äußerlich im gleichen Verhältnis. Folglich müssen diese Punkte X und X' übereinstimmen. Da nun der Punkt X', nach seiner Konstruktion, auf der Geraden UV liegt, folgt hieraus, daß der Punkt X auf der Geraden UV liegt. Nun ist die Gerade UV nichts anderes als die Senkrechte zu der Geraden AE durch den Punkt D (denn laut der Aufgabe liegen die Punkte U und V auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D); somit liegt der Punkt X auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D, und Satz 2 ist bewiesen.

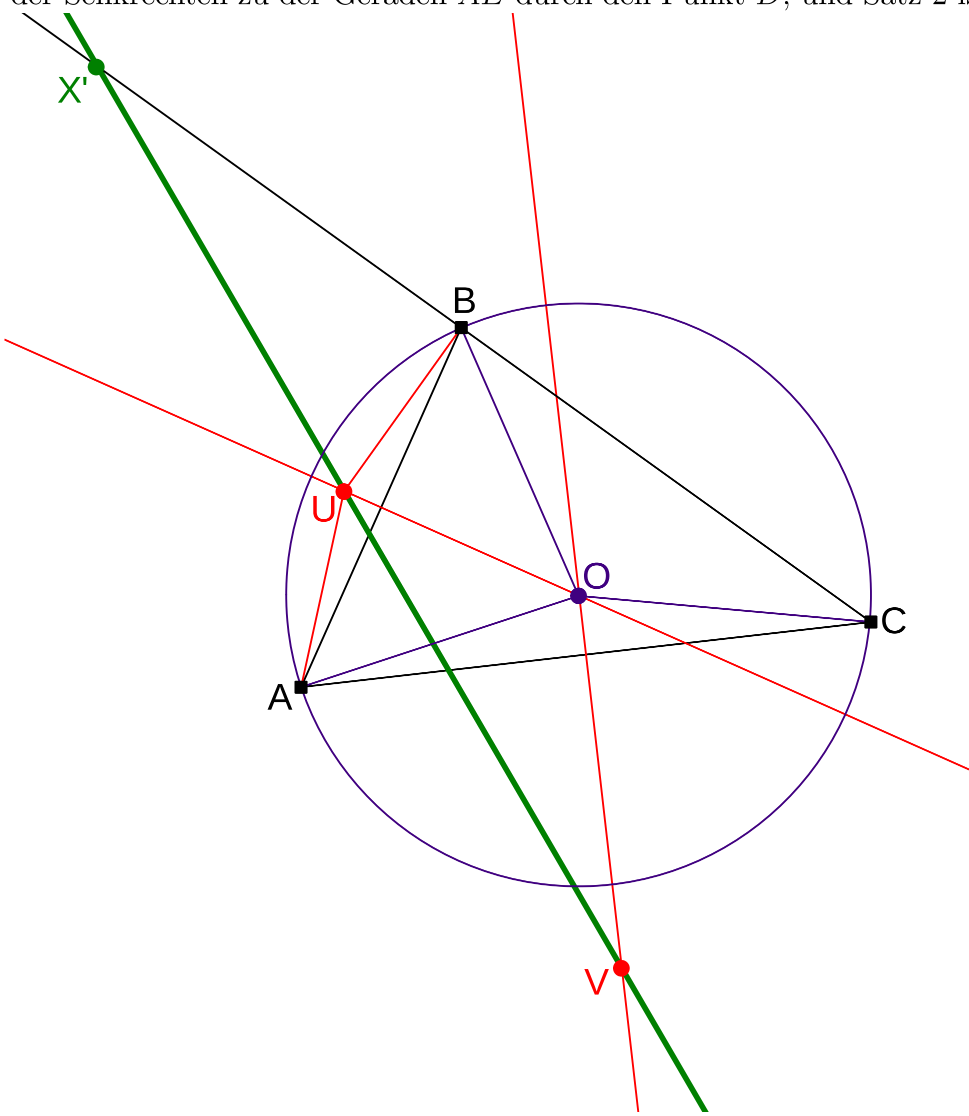

Fig. G4.7

Zweiter Beweis von Satz 2: (Siehe Fig. G4.7a.) Dieser Beweis von Satz 2 schließt an die Zweite Lösung der Aufgabe an.

Da der Punkt X auf der Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt A liegt, gilt nach dem Sekantentangentensatz $XA^2 = XB \cdot XC$. Doch XA^2 ist die Potenz des Punktes X in bezug auf den Kreis k_0 (mit Zentrum A und Radius 0), und $XB \cdot XC$ ist die Potenz des Punktes X in bezug auf den Thaleskreis k_a über der Strecke BC. Somit hat der Punkt X gleiche Potenzen in bezug auf die Kreise k_0 und k_a, und liegt daher auf der Potenzgeraden dieser Kreise k_0 und k_a. In der Zweiten Lösung der Aufgabe hatten wir gezeigt, daß diese Potenzgerade orthogonal zu der Geraden AE ist, und daß der Punkt D auf dieser Potenzgeraden liegt; somit ist diese Potenzgerade die Senkrechte zu der Geraden AE durch den Punkt D. Damit ist gezeigt, daß der Punkt X auf der Senkrechten zu der Geraden AE durch den Punkt D liegt; Satz 2 ist bewiesen.

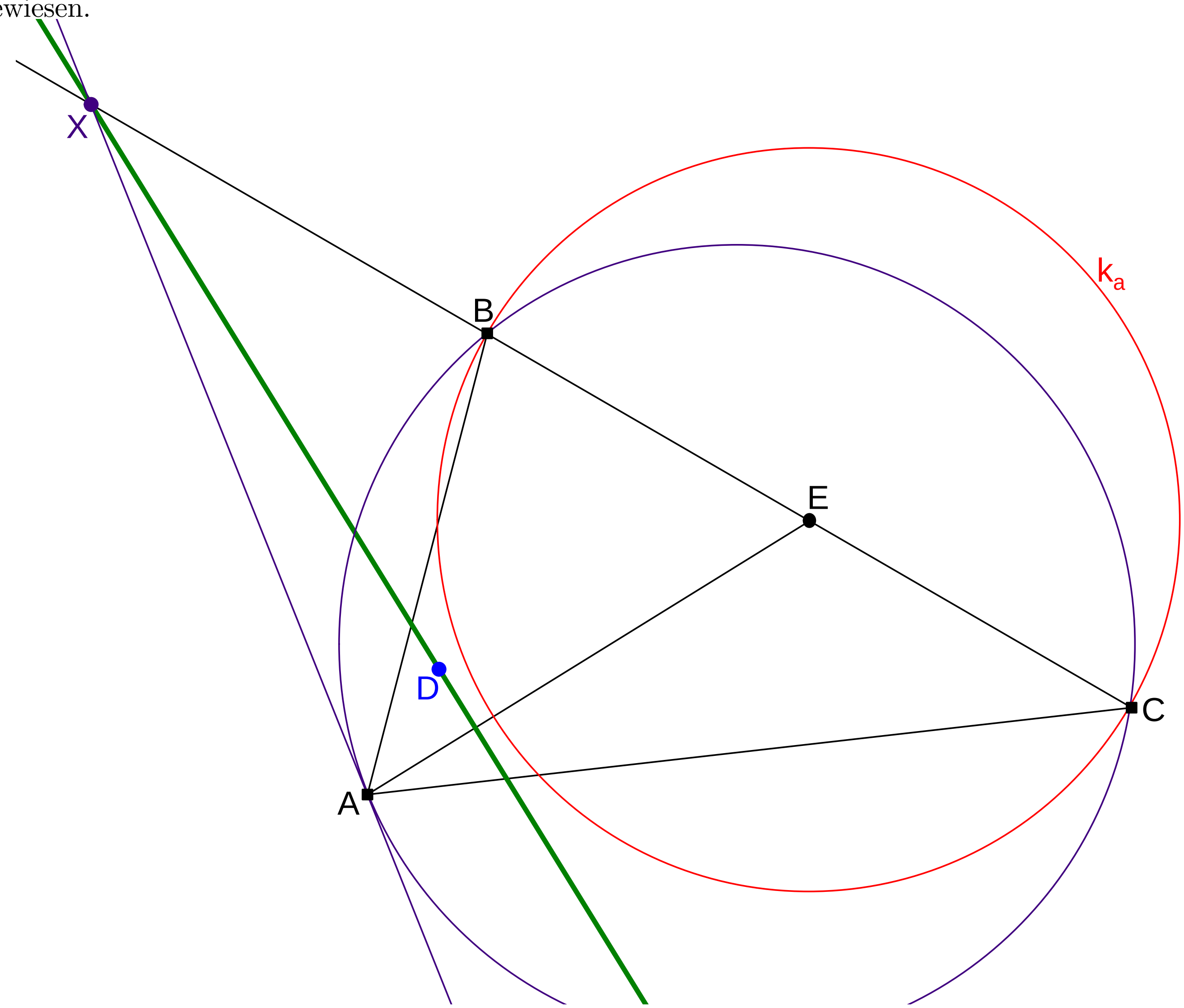

Fig. G4.7a

Als eine weitere nennenswerte Eigenschaft dieser Punkte sei hinzugefügt (Fig. G4.8):

Satz 4: Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Dann geht die Tangente an den Umkreis des Dreiecks OUV im Punkt O durch den Punkt X.

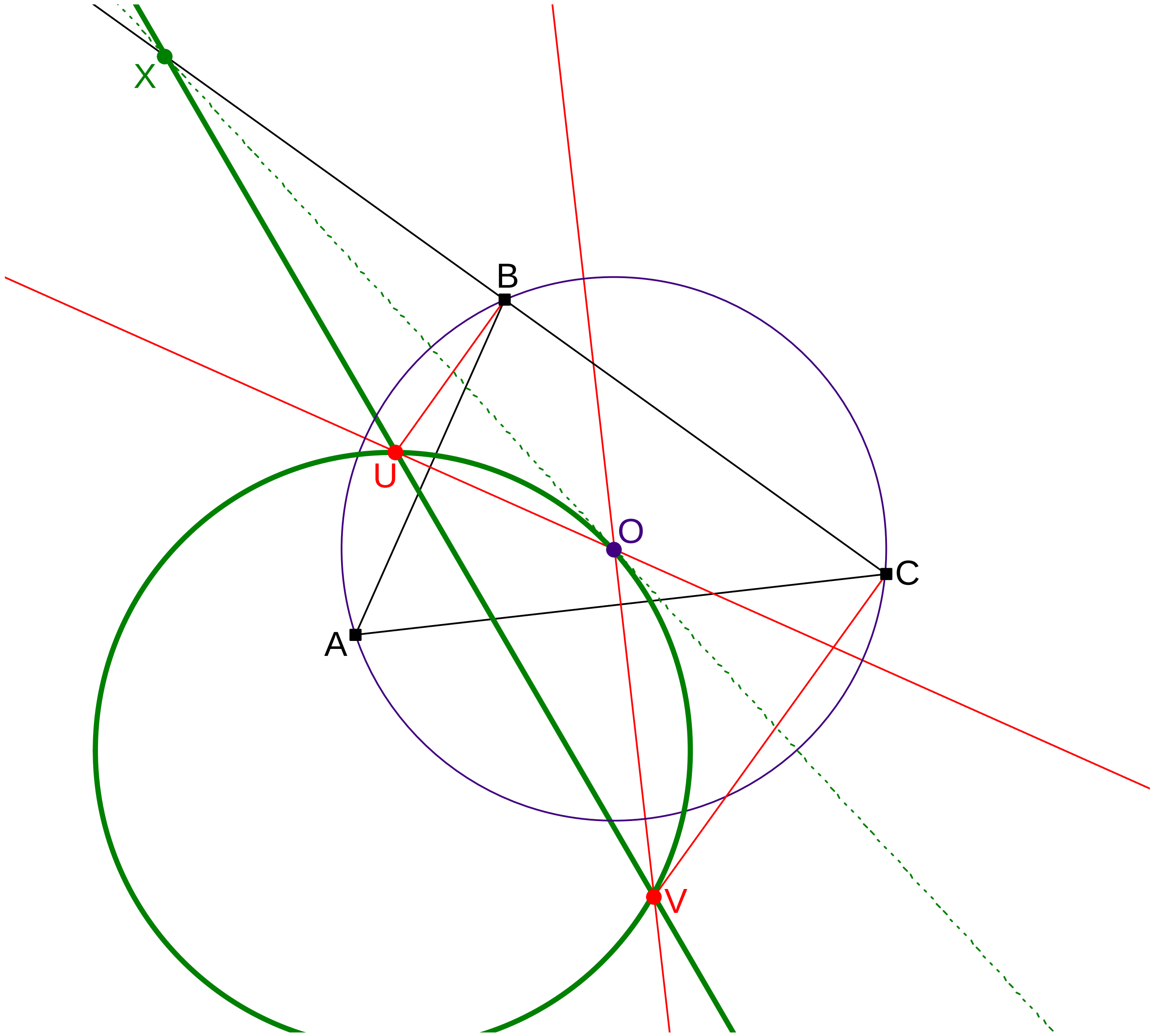

Fig. G4.8

Beweis von Satz 4: Wir werden in diesem Beweis mehrfach auf den Beweis von Satz 2 (sowie auf die Aussage des Satzes 2 selber, daß der Punkt X auf der Geraden UV liegt) zurückgreifen.

Wie im Beweis von Satz 2 festgestellt wurde, sind die Dreiecke ABU und ACO gleichsinnig ähnlich. Analog zeigt man, daß die Dreiecke ACV und ABO gleichsinnig ähnlich sind.

Nun sind also die Dreiecke ABU und ABO gleichsinnig ähnlich zu den Dreiecken ACO bzw. ACV. Daher ist auch das aus den Dreiecken ABU und ABO zusammengesetzte Viereck $AUBO$ ähnlich zu dem aus den Dreiecken ACO und ACV zusammengesetzten Viereck $AOCV$. Daher ist $\frac{BU}{CO} = \frac{BO}{CV} = \frac{OU}{VO}$. Mit anderen Worten: $\frac{BU}{r} = \frac{r}{CV} = \frac{OU}{VO}$ (denn $BO = CO = r$, weil O der Umkreismittelpunkt und r der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist). Daher ist $\frac{BU}{CV} = \frac{BU}{r} \cdot \frac{r}{CV} = \frac{OU}{VO} \cdot \frac{OU}{VO} = \frac{OU^2}{VO^2}$. Wegen

$BU \parallel CV$ ist nach dem Strahlensatz $\frac{BU}{CV} = \frac{UX}{VX}$. Damit haben wir $\frac{UX}{VX} = \frac{OU^2}{VO^2}$.

(Siehe Fig. G4.9.) Die Tangente an den Umkreis des Dreiecks OUV im Punkt O schneide die Gerade UV in einem Punkt X''. Nach Hilfssatz 3, angewandt auf das Dreieck OUV, muß dann dieser Punkt X'' außerhalb der Strecke UV liegen und die Gleichung $\frac{UX''}{VX''} = \frac{OU^2}{VO^2}$ erfüllen. Im Vergleich mit $\frac{UX}{VX} = \frac{OU^2}{VO^2}$ ergibt diese Gleichung $\frac{UX''}{VX''} = \frac{UX}{VX}$. Das heißt, die Punkte X und X'' teilen die Strecke UV äußerlich im gleichen Verhältnis; daher müssen die Punkte X und X'' zusammenfallen. Da wir aber wissen, daß die Tangente an den Umkreis des Dreiecks OUV im Punkt O durch den Punkt X'' geht, sehen wir jetzt, daß diese Tangente durch den Punkt X geht, und hiermit ist Satz 4 bewiesen.

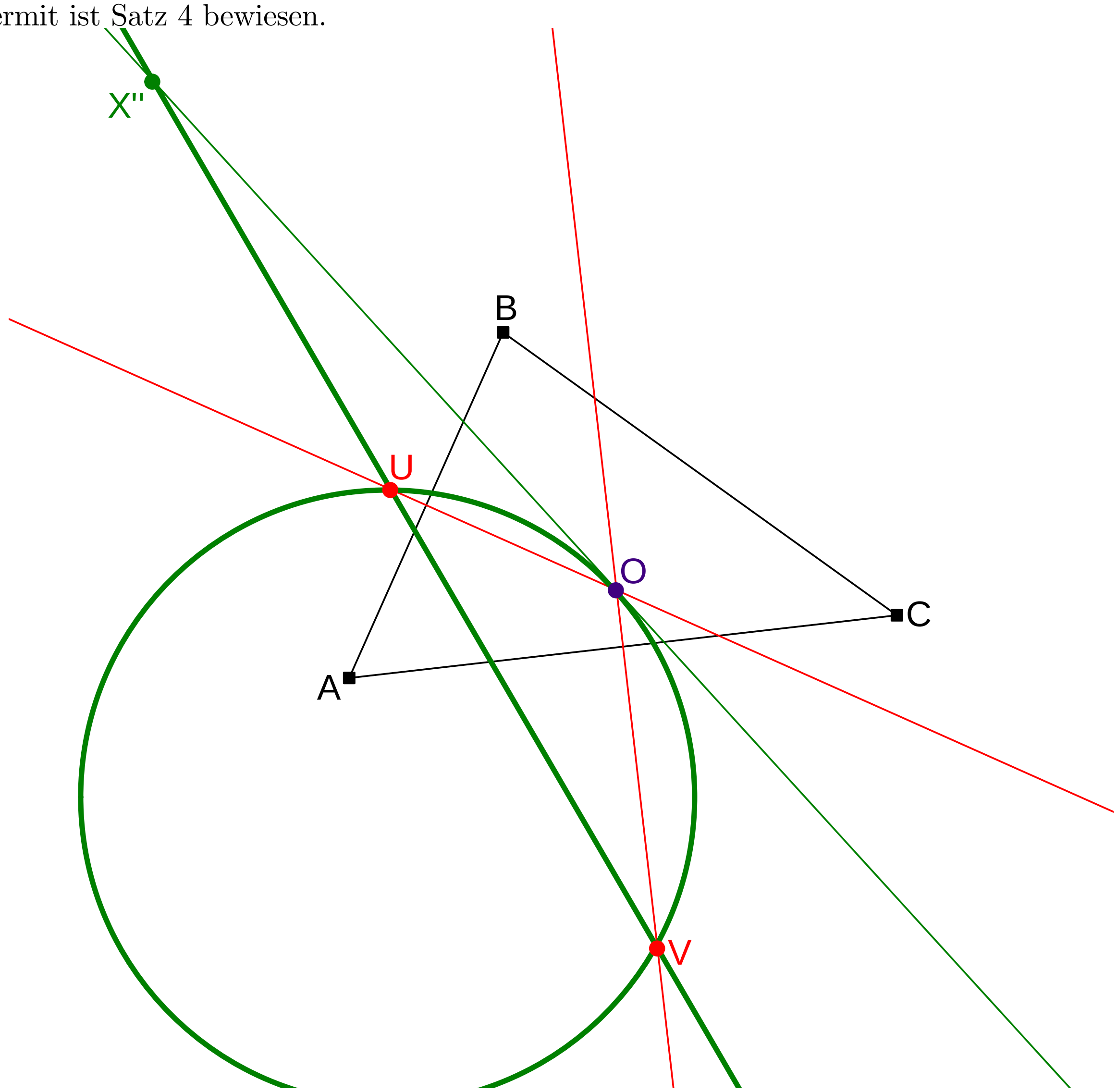

Fig. G4.9

2. Die Aufgabe wurde im Wesentlichen von Victor Thébault um 1950 entwickelt (vgl. Hyacinthos-Beiträge #1102 und #1551). Satz 2 aus der Bemerkung **1.** scheint neueren Datums zu sein; in der Form "man beweise, daß der Punkt X auf der Geraden UV liegt" wurde er von Valentin Vornicu für die Balkanische Mathematikolympiade 2003 vorgeschlagen und auch verwendet (vgl.

http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=3659
), zirkulierte jedoch schon davor in der Hyacinthos-Gruppe (Hyacinthos-Beiträge #7240 und #7242), wo auch andere Lösungen der Aufgabe gegeben wurden. Satz 4 aus der Bemerkung **1.** wurde von Virgil Nicula gefunden (siehe
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=67235
). Die überraschend kurze Zweite Lösung der Aufgabe, mit dem entsprechenden Zweiten Beweis von Satz 2 stammt von Liubomir Chiriac ("Sailor" auf MathLinks) und wurde in
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=68864
veröffentlicht.

"Hyacinthos" bezieht sich hierbei stets auf die Dreiecksgeometrie-Newsgroup "Hyacinthos", zu finden unter
http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos .