QED-Mathematikolympiade 1: Aufgaben und Lösungen

Geometrie

Darij Grinberg

Vorbemerkung: Im Folgenden wird bei allen Beweisen auf Anordnungsüberlegungen und Fallunterscheidungen hinsichtlich der verschiedenen möglichen Anordnungen verzichtet. Es wird nur der Anordnungsfall betrachtet, der auf den zur Aufgabe gehörenden Zeichnungen abgebildet ist. Die anderen Fälle lassen sich analog behandeln.

Es werden durchgehend *nicht-orientierte* Strecken und Winkel verwendet.

Aufgabe G1

Sei ABC ein Dreieck, und seien C' und A' die Fußpunkte seiner von den Ecken C bzw. A ausgehenden Höhen. Sei P der Mittelpunkt der Strecke $C'A'$. Die Umkreise der Dreiecke $AC'P$ und $CA'P$ haben außer P einen weiteren gemeinsamen Punkt; wir bezeichnen diesen Punkt mit Q. Man beweise:

a) Der Punkt Q liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

b) Die Gerade PQ geht durch den Punkt B.

c) Es gilt $\dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{AB}{CB}$.

(Siehe Fig. G1.1.)

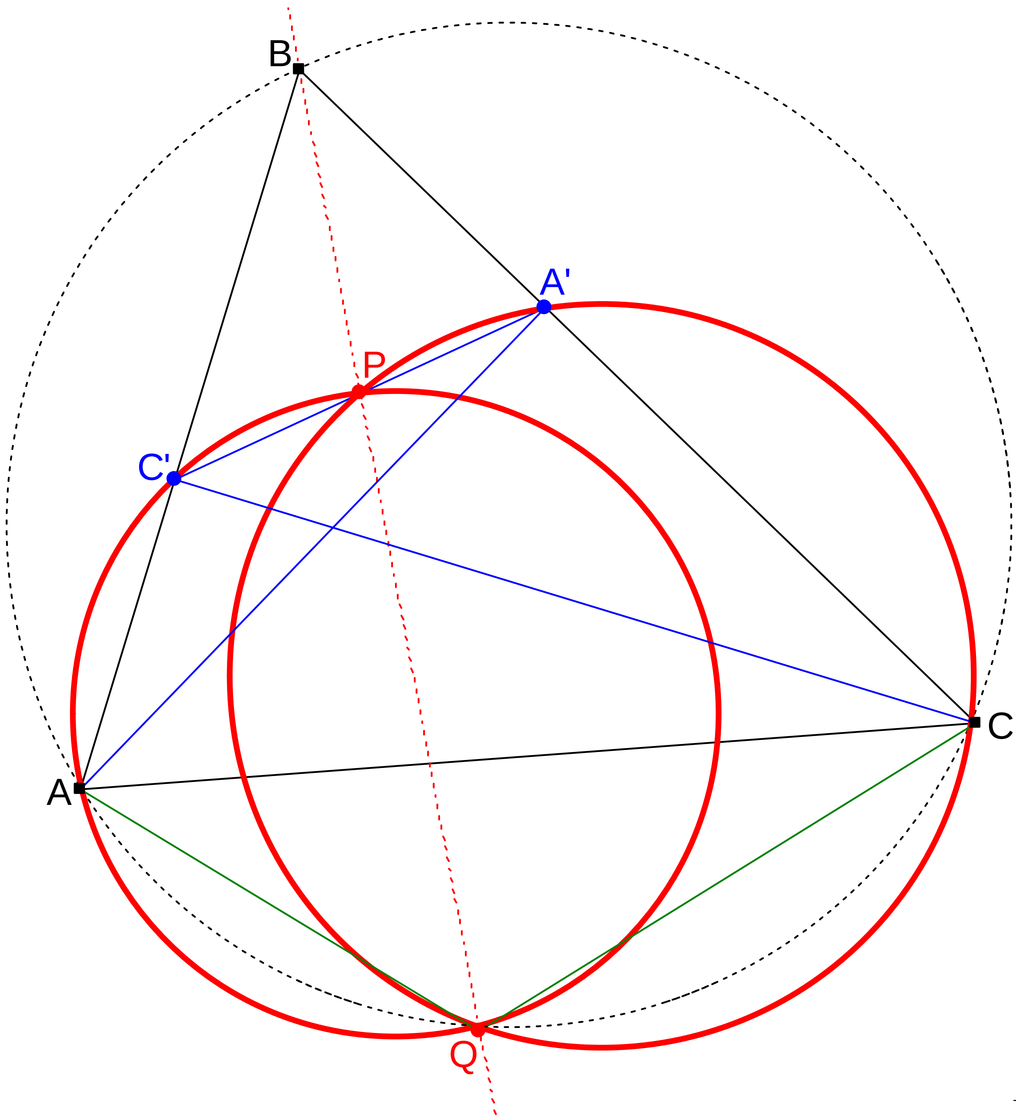

Fig. G1.1

Lösung der Aufgabe G1

(Siehe Fig. G1.2 und G1.3.) Da die Punkte A, C', P und Q auf einem Kreis liegen, ist das Viereck $AC'PQ$ ein Sehnenviereck; daher ist $\measuredangle AQP = 180° - \measuredangle AC'P$, also $\measuredangle AQP = \measuredangle BC'A'$. Analog ist $\measuredangle CQP = \measuredangle BA'C'$. Damit ist

$$\begin{aligned}\measuredangle AQC &= \measuredangle AQP + \measuredangle CQP = \measuredangle BC'A' + \measuredangle BA'C' \\ &= 180° - \measuredangle C'BA' \qquad \text{(Winkelsumme im Dreieck } BC'A'\text{)} \\ &= 180° - \measuredangle ABC.\end{aligned}$$

Daher ist das Viereck $ABCQ$ ein Sehnenviereck, d. h. der Punkt Q liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. Somit ist Aufgabe **a)** gelöst.

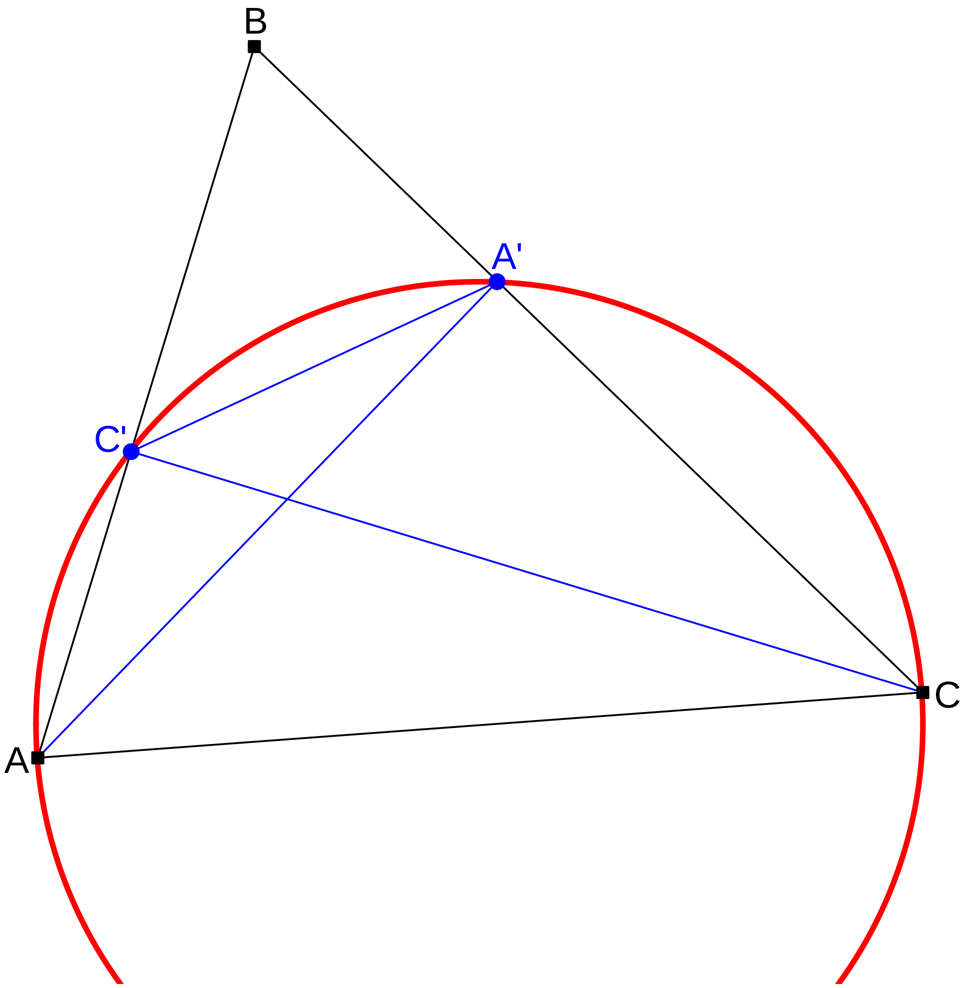

Fig. G1.2

Da die Strecken CC' und AA' Höhen im Dreieck ABC sind, gilt $\measuredangle CC'A = 90°$ und $\measuredangle CA'A = 90°$. Also liegen die Punkte C' und A' auf dem Thaleskreis über der Strecke CA; insbesondere ist also das Viereck $AC'A'C$ ein Sehnenviereck.

Daraus folgt $\measuredangle ACA' = 180° - \measuredangle AC'A'$. Andererseits haben wir laut dem Obigen $\measuredangle AQP = \measuredangle BC'A'$. Damit ist

$$\measuredangle AQP = \measuredangle BC'A' = 180° - \measuredangle AC'A' = \measuredangle ACA' = \measuredangle ACB.$$

Da der Punkt Q auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt, ist nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle ACB = \measuredangle AQB$. Damit erhalten wir $\measuredangle AQP = \measuredangle AQB$; folglich geht die Gerade PQ durch den Punkt B, und die Aufgabe **b)** ist gelöst.

Wir haben $\measuredangle AQP = \measuredangle BC'A'$, also mit anderen Worten $\measuredangle AQB = \measuredangle PC'B$. Ferner ist trivialerweise $\measuredangle ABQ = \measuredangle PBC'$. Somit sind die Dreiecke AQB und $PC'B$ zueinander ähnlich; daraus folgt $\frac{AQ}{PC'} = \frac{AB}{PB}$, also $AQ = PC' \cdot \frac{AB}{PB}$. Analog ergibt sich $CQ = PA' \cdot \frac{CB}{PB}$. Damit ist

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{PC' \cdot \frac{AB}{PB}}{PA' \cdot \frac{CB}{PB}} = \frac{PC'}{PA'} \cdot \frac{AB}{CB}.$$

Nun ist P der Mittelpunkt der Strecke $C'A'$; also ist $PC' = PA'$ und damit $\frac{PC'}{PA'} = 1$, und somit wird dies zu $\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{CB}$. Damit ist auch Aufgabe **c)** gelöst.

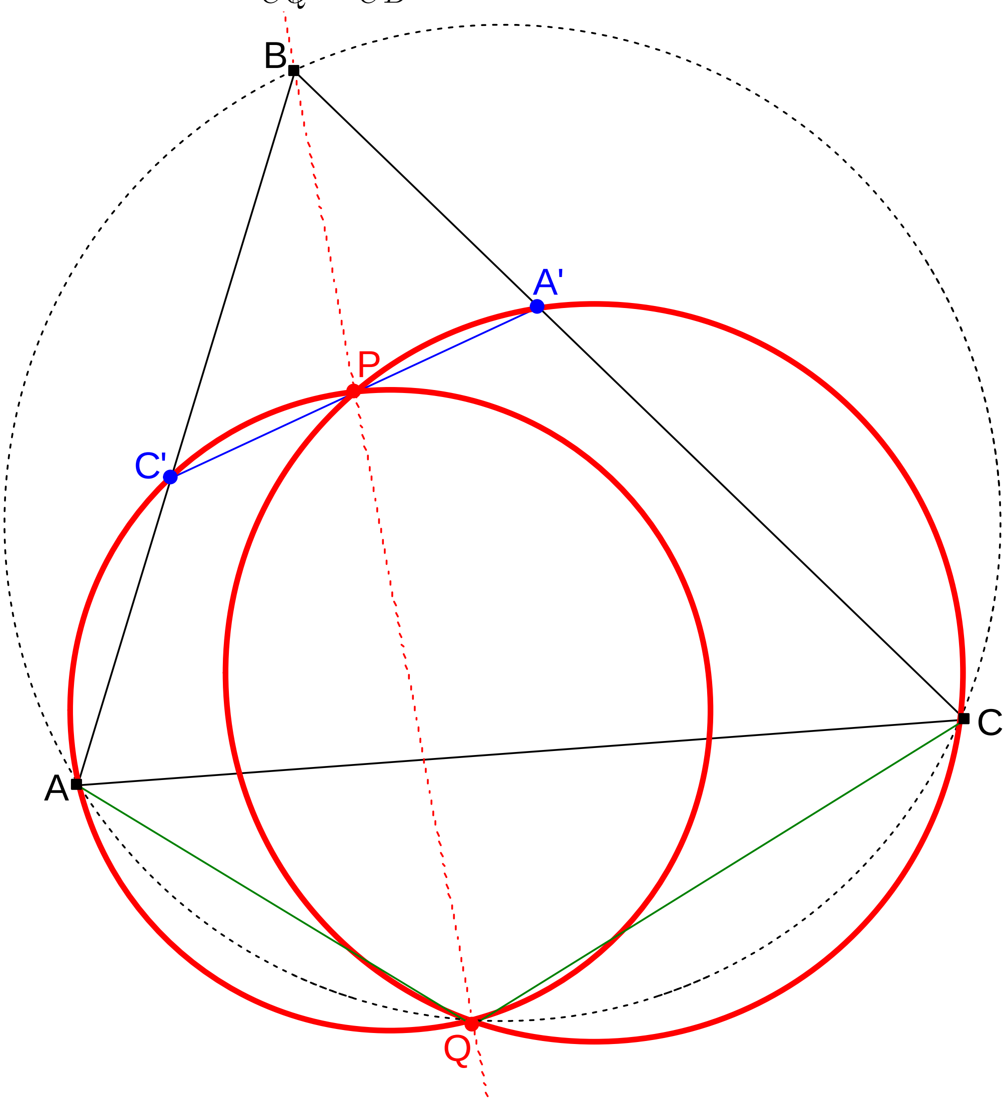

Fig. G1.3

Bemerkungen: 1. Wie die obige Lösung zeigt, gilt die Aufgabe in einer etwas allgemeineren Form: Die Punkte C' und A' müssen nicht unbedingt Fußpunkte der Höhen des Dreiecks ABC sein; für die Aufgabe **a)** ist es völlig ausreichend, wenn die Punkte C' und A' einfach zwei willkürliche Punkte auf den Geraden AB bzw. BC sind, und für die Aufgaben **b)** und **c)** reicht es aus, wenn die Punkte C' und A' auf den Geraden AB bzw. BC liegen und das Viereck $AC'A'C$ ein Sehnenviereck ist. Ferner braucht für die Aufgaben **a)** und **b)** der Punkt P nicht unbedingt der Mittelpunkt der Strecke $C'A'$ zu sein, sondern er kann ein beliebiger Punkt auf der Geraden $C'A'$ sein; nur für die Aufgabe **c)** ist es maßgeblich, daß P der Mittelpunkt der Strecke $C'A'$ ist.

2. Die Aufgabe entstammt der dreiecksgeometrischen Folklore und die Lösung verwendet typische Schlußweisen aus der Dreiecksgeometrie. An einigen Stellen kann auch Trigonometrie angewandt werden.

Aufgabe G2

Sei ABC ein Dreieck. Seien C' und A' die Spiegelbilder der Punkte C bzw. A an der von B ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC. Die Senkrechte zu der Geraden BA' durch den Punkt C' schneide die Gerade BC in U; die Senkrechte zu der Geraden BC' durch den Punkt A' schneide die Gerade BA in V. Beweise: $UV \parallel CA$.

(Siehe Fig. G2.1.)

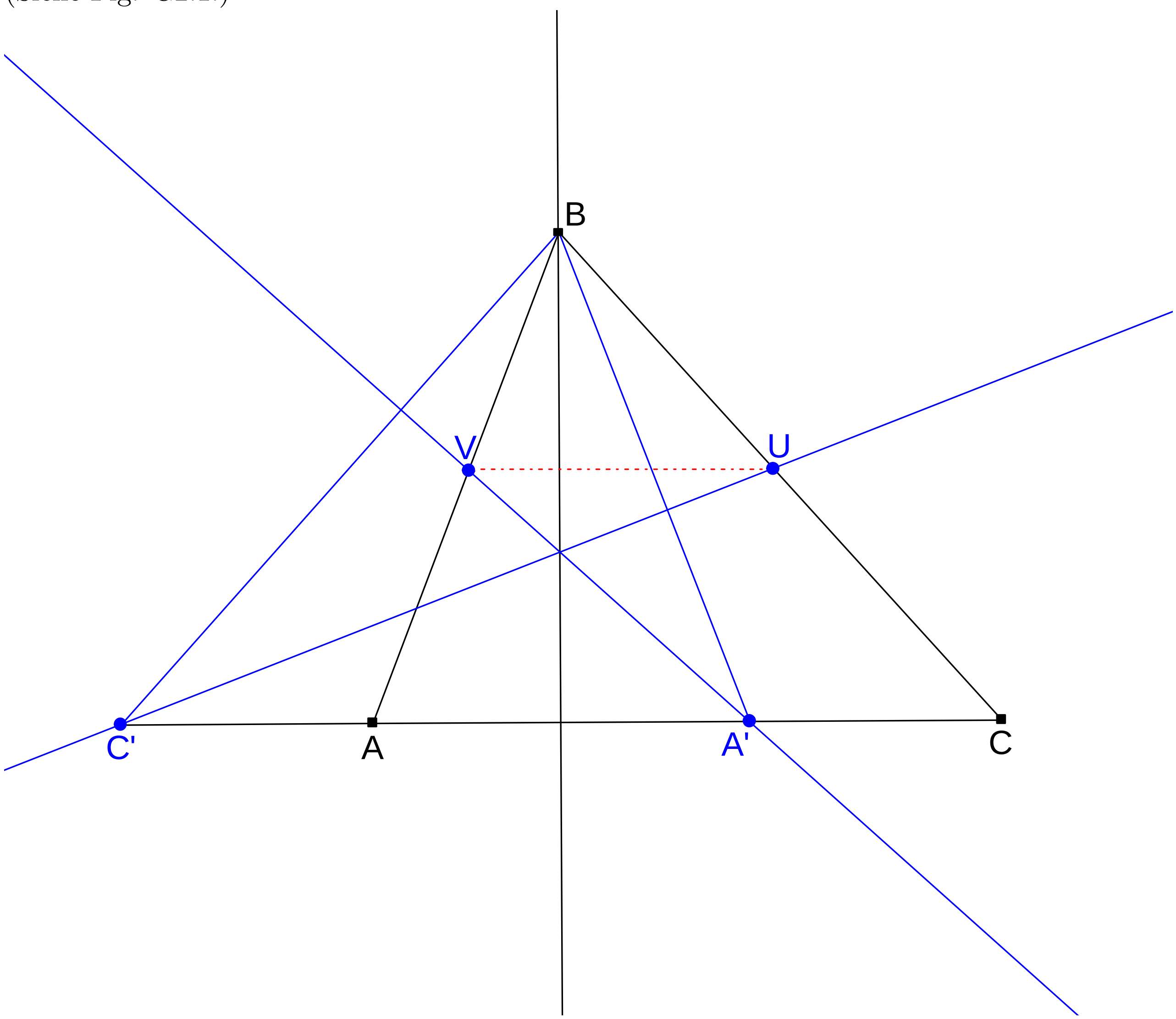

Fig. G2.1

Lösung der Aufgabe G2

Wir werden drei verschiedene Lösungen dieser Aufgabe vorstellen; sie alle haben einen ersten Schritt gemeinsam (Fig. G2.2):

Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Dann gilt $AH \perp BC$.

Bei der Spiegelung an der von B ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC gehen die Punkte C und A in die Punkte C' bzw. A' über, und die Punkte B und H gehen in sich selber über (denn sie liegen ja auf dieser Höhe). Da Geradenspiegelungen orthogonale Geraden auf orthogonale Geraden abbilden, folgt aus $AH \perp BC$ also $A'H \perp BC'$. Das heißt, die Senkrechte zu der Geraden BC' durch den Punkt A' geht durch den Punkt H. Analog geht auch die Senkrechte zu der Geraden BA' durch den Punkt C' durch den Punkt H.

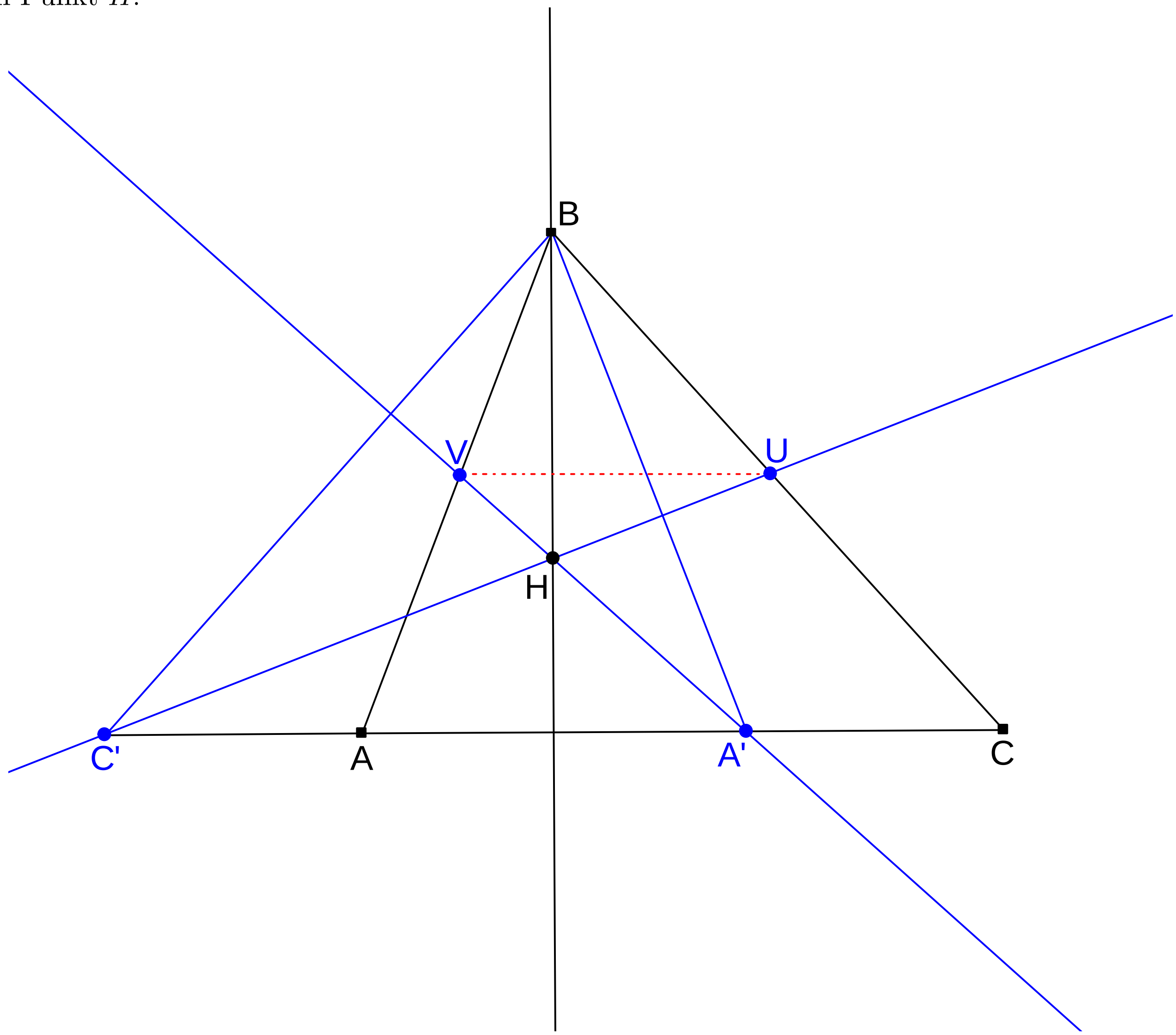

Fig. G2.2

Nun trennen sich die Lösungswege:

Erste Lösung: (Siehe Fig. G2.3.) Sei Y der Fußpunkt der von B ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC. Da diese Höhe senkrecht auf der Geraden CA steht, ist dann der Punkt Y der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt C auf diese Höhe. Andererseits ist der Punkt C' das Spiegelbild des Punktes C an dieser Höhe; somit ist der Punkt C' das Spiegelbild des Punktes C an dem Punkt Y.

Sei andererseits Y' das Spiegelbild des Punktes H an dem Punkt Y. Dann ist der Punkt H das Spiegelbild des Punktes Y' an dem Punkt Y; da ferner der Punkt C' das Spiegelbild des Punktes C an dem Punkt Y ist, und da eine Punktspiegelung Geraden in parallele Geraden überführt, gilt somit $C'H \parallel CY'$. Nach dem Strahlensatz gilt somit $\frac{BU}{UC} = \frac{BH}{HY'}$. Analog ist $\frac{BV}{VA} = \frac{BH}{HY'}$. Daher gilt $\frac{BU}{UC} = \frac{BV}{VA}$, und nach dem Strahlensatz folgt daraus $UV \parallel CA$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

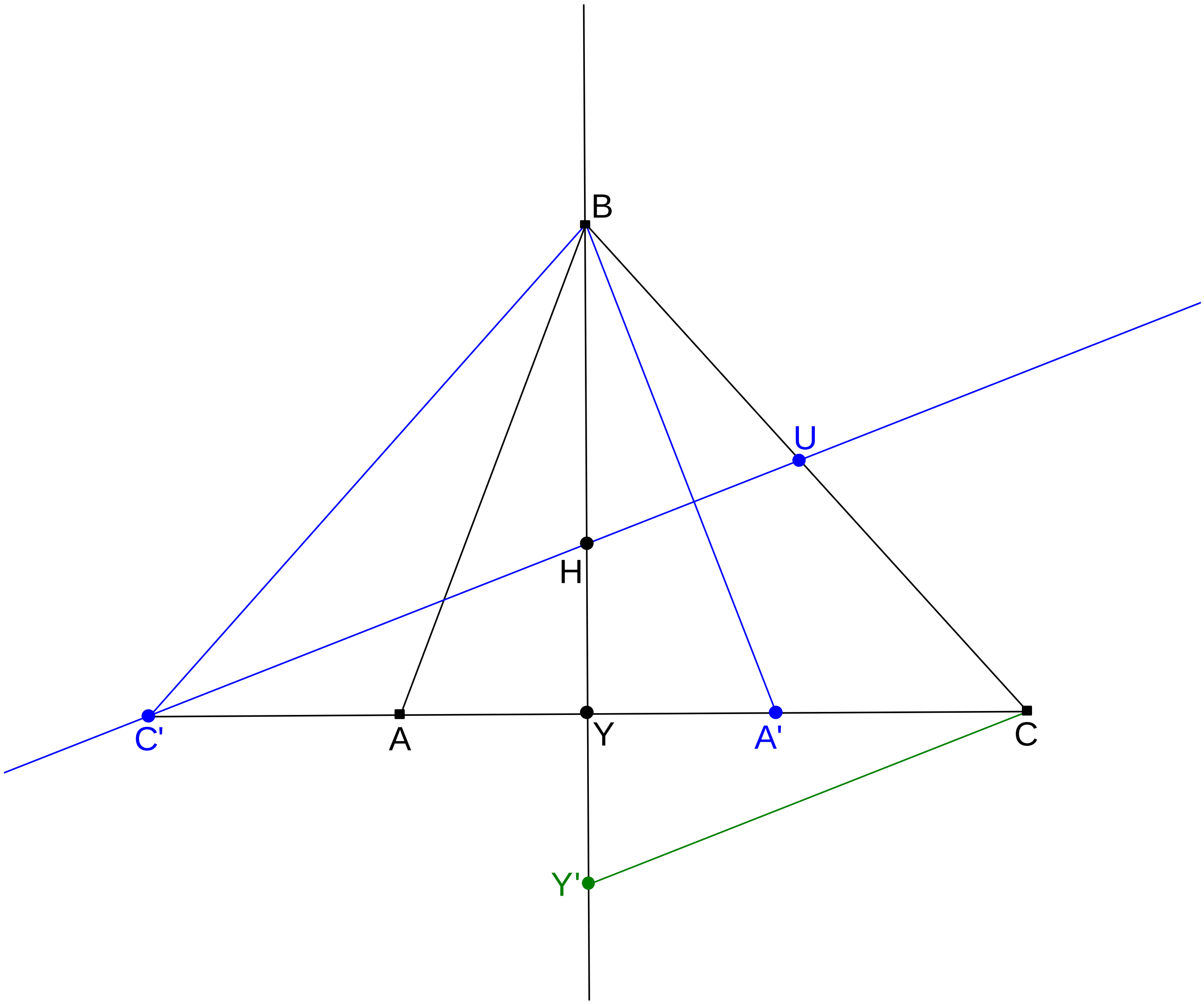

Fig. G2.3

Zweite Lösung: Dies ist nur eine Variante der Ersten Lösung, die den Satz von Menelaos anstelle des Hilfspunktes Y' verwendet.

(Siehe Fig. G2.3.) Wie in der Ersten Lösung betrachten wir den Fußpunkt Y der von B ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC und zeigen, daß der Punkt C' das Spiegelbild des Punktes C an dem Punkt Y ist. Damit ist $CC' = 2 \cdot C'Y$ (wir verwenden ja keine orientierten Strecken), also $\dfrac{CC'}{C'Y} = 2$. Da die Punkte U, C' und H auf den Seiten BC, CY bzw. YB des Dreiecks BCY auf einer Geraden liegen, gilt nach dem Satz von Menelaos

$$\frac{BU}{UC} \cdot \frac{CC'}{C'Y} \cdot \frac{YH}{HB} = 1, \qquad \text{also} \qquad \frac{BU}{UC} \cdot 2 \cdot \frac{YH}{HB} = 1.$$

Analog ist

$$\frac{BV}{VA} \cdot 2 \cdot \frac{YH}{HB} = 1.$$

Somit ist $\dfrac{BU}{UC} = \dfrac{BV}{VA}$; daraus folgt nach dem Strahlensatz $UV \parallel CA$. Somit ist die Aufgabe gelöst.

Dritte Lösung (von Katharina Jochemko): (Siehe Fig. G2.4.) Seien X, Y und Z die Fußpunkte der von den Ecken A, B bzw. C ausgehenden Höhen des Dreiecks ABC. Wie wir wissen, schneiden sich diese Höhen in dem Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC.

Da die Strecke BY eine Höhe im Dreieck ABC ist, ist das Dreieck BYC rechtwinklig; damit ist $\measuredangle YBC = 90° - \measuredangle YCB$. Analog ist $\measuredangle ZCB = 90° - \measuredangle ZBC$.

Andererseits ist $\measuredangle BHC' = \measuredangle BHC$, denn der Punkt C' ist das Spiegelbild des Punktes C an der von B ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC, und die Punkte B und H liegen auf dieser Höhe.

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\measuredangle BHU &= 180° - \measuredangle BHC' = 180° - \measuredangle BHC \\
&= \measuredangle HBC + \measuredangle HCB \qquad \text{(Winkelsumme im Dreieck } BHC\text{)} \\
&= \measuredangle YBC + \measuredangle ZCB = (90° - \measuredangle YCB) + (90° - \measuredangle ZBC) \\
&= 180° - \measuredangle YCB - \measuredangle ZBC = 180° - \measuredangle ACB - \measuredangle ABC \\
&= \measuredangle CAB \qquad \text{(Winkelsumme im Dreieck } ABC\text{)}.
\end{aligned}$$

Analog ist $\measuredangle BHV = \measuredangle ACB$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle UHV &= \measuredangle BHU + \measuredangle BHV = \measuredangle CAB + \measuredangle ACB \\
&= 180° - \measuredangle ABC \qquad \text{(Winkelsumme im Dreieck } ABC\text{)} \\
&= 180° - \measuredangle UBV.
\end{aligned}$$

Daher ist das Viereck $UBVH$ ein Sehnenviereck, d. h. die Punkte U, B, V und H liegen auf einem Kreis. Nach dem Umfangswinkelsatz gilt damit $\measuredangle BVU = \measuredangle BHU$, also $\measuredangle BVU = \measuredangle CAB$, und daraus folgt $UV \parallel CA$. Damit ist die Aufgabe erneut gelöst.

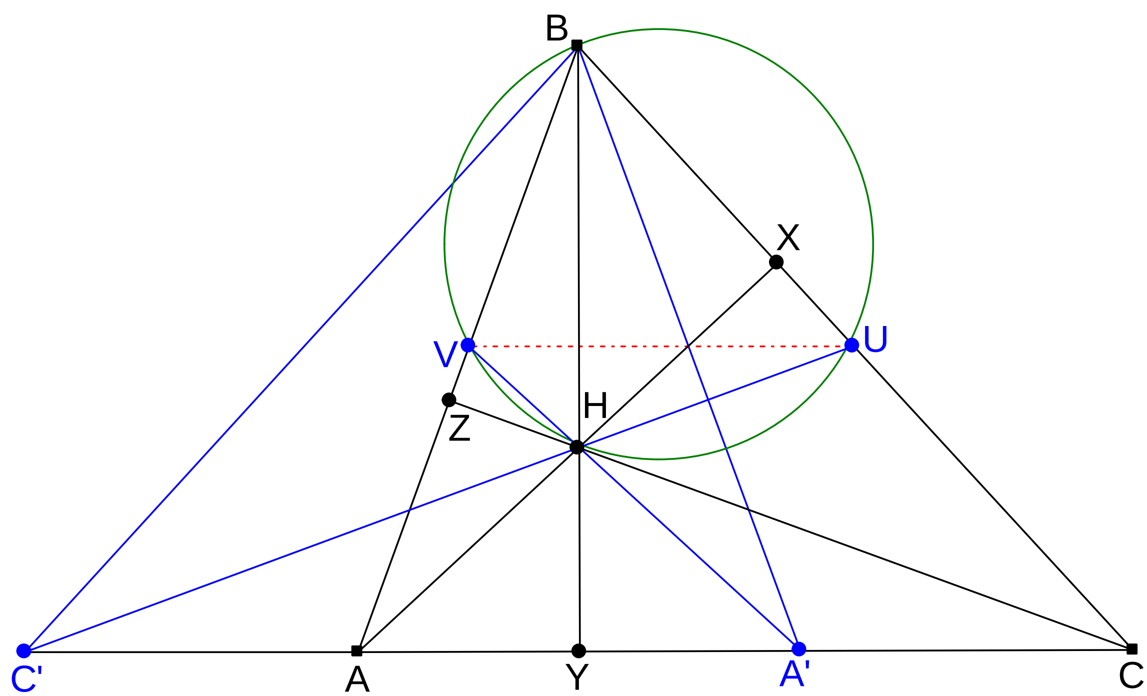

Fig. G2.4

Bemerkung: Eine einfache Aufgabe, auch (und vor allem!) gegen den Sinussatz hilflos.

Aufgabe G3

Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq CB$. Sei C' ein Punkt auf dem Strahl AB, für den $AC' = CB$ gilt. Sei A' ein Punkt auf dem Strahl CB, für den $CA' = AB$ gilt. Die Umkreise der Dreiecke ABA' und CBC' haben außer dem Punkt B noch einen gemeinsamen Punkt Q. Beweise: Die Gerade BQ halbiert die Strecke CA.

(Siehe Fig. G3.1.)

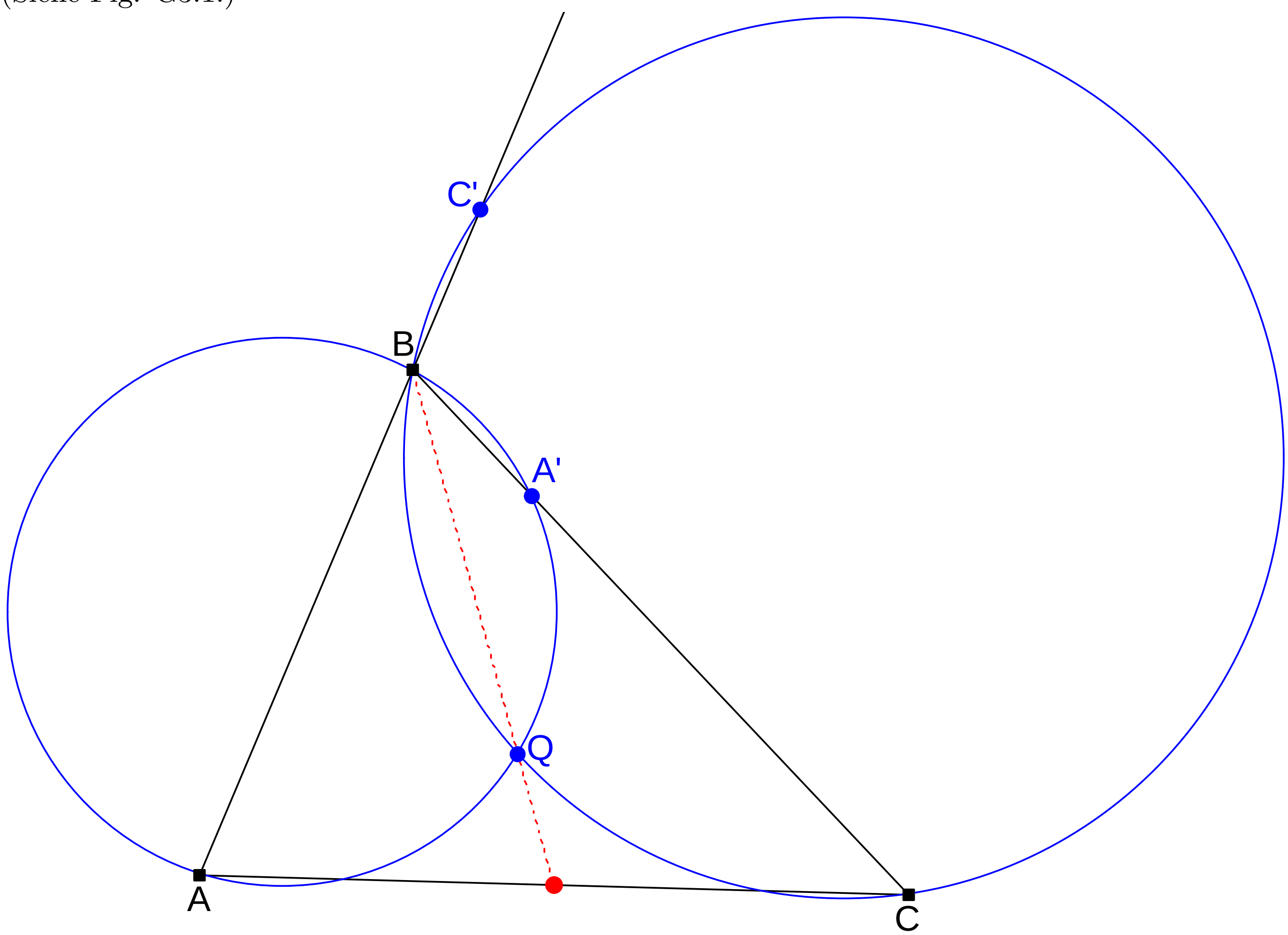

Fig. G3.1

Lösung der Aufgabe G3

Vorbemerkung: Die Strecken in der folgenden Lösung können sowohl als gerichtet, als auch als ungerichtet interpretiert werden; die Rechnungen sind in jedem Fall richtig.

(Siehe Fig. G3.2.) Sei U der von A verschiedene Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks ABA' mit der Geraden CA (falls dieser Umkreis die Gerade CA im Punkt A berührt, setze man einfach $U = A$). Entsprechend sei V der von C verschiedene Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks CBC' mit der Geraden CA.

Nach dem Sekantensatz gilt $CU \cdot CA = CB \cdot CA'$. Wegen $CA' = AB$ ist also $CU \cdot CA = CB \cdot AB$. Analog ist $AV \cdot AC = CB \cdot AB$. Damit ist $CU \cdot CA = AV \cdot AC$, also $CU \cdot CA = VA \cdot CA$. Daraus folgt $CU = VA$.

Sei nun M der Mittelpunkt der Strecke CA. Dann ist $CM = MA$. Daraus folgt $VM = VA - MA = CU - CM = MU$. Also haben wir $CM \cdot VM = MA \cdot MU$. Mit anderen Worten: $MC \cdot MV = MA \cdot MU$.

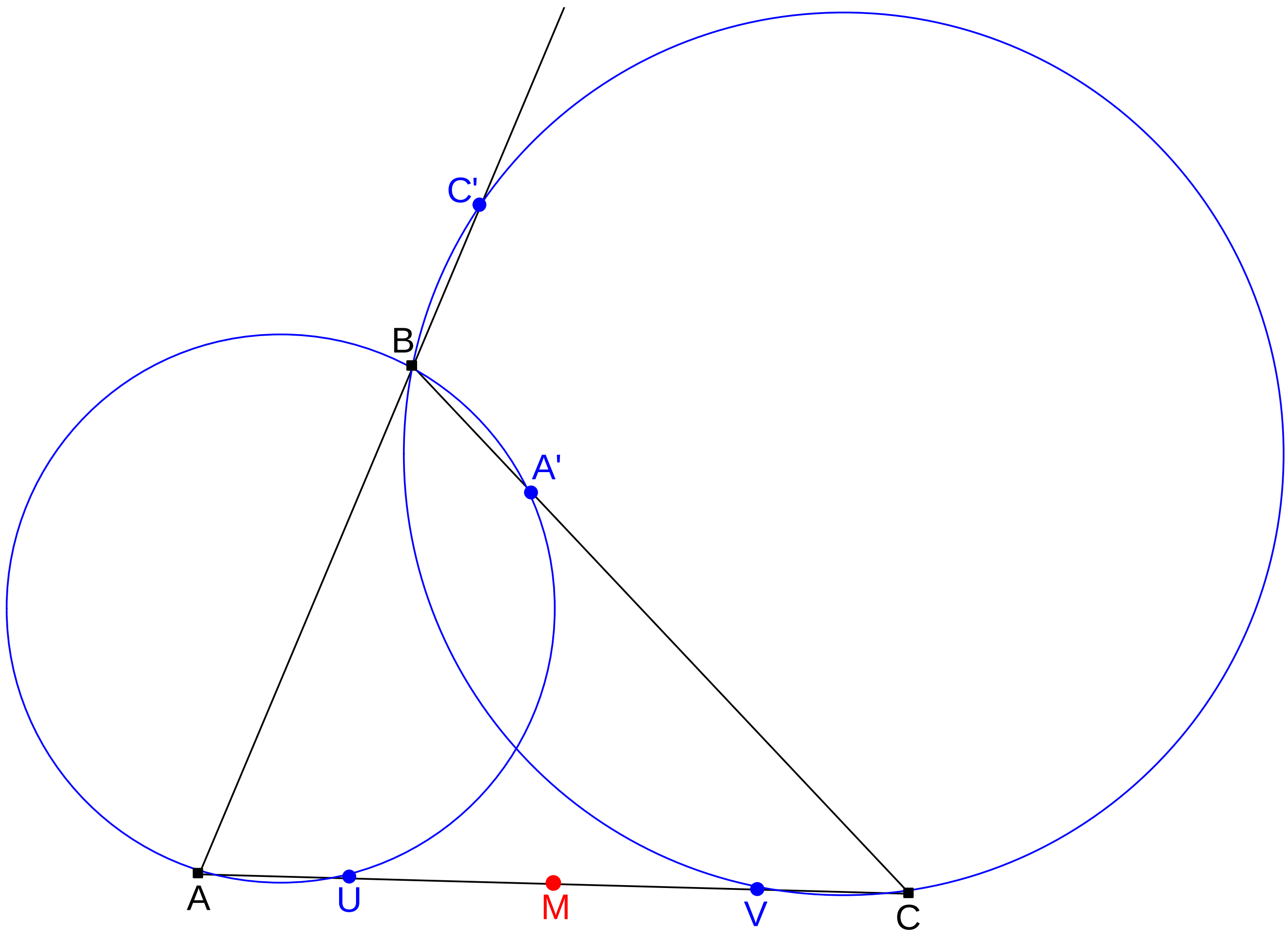

Fig. G3.2

(Nun betrachte man Fig. G3.3; diese Figur ist absichtlich falsch gezeichnet, damit man nicht sofort erkennt, daß die Punkte U' und V' übereinstimmen.)

Sei nun U' der von B verschiedene Schnittpunkt der Geraden BM mit dem Umkreis des Dreiecks ABA' (wenn dieser Umkreis die Gerade BM im Punkt B berührt, setze man $U' = B$). Analog sei V' der von B verschiedene Schnittpunkt der Geraden BM mit dem Umkreis des Dreiecks CBC'. Dann gilt nach dem Sekantensatz $MU' \cdot MB = MA \cdot MU$ und $MV' \cdot MB = MC \cdot MV$. Aus $MC \cdot MV = MA \cdot MU$ wird also $MV' \cdot MB = MU' \cdot MB$, und damit $MV' = MU'$. Da die Punkte U' und V' beide auf der Geraden BM liegen, folgt hieraus, daß diese Punkte übereinstimmen, d. h. wir haben $U' = V'$. Da nun der Punkt U' auf dem Umkreis des Dreiecks ABA' und der Punkt V' auf dem Umkreis des Dreiecks CBC' liegt, ist somit der Punkt $U' = V'$ der von B verschiedene gemeinsame Punkt der Umkreise der Dreiecke ABA' und CBC'. Das heißt, $U' = V' = Q$. Da wir aber wissen, daß der Punkt U' auf der Geraden BM liegt, schlußfolgern wir also, daß der Punkt Q auf der Geraden BM liegt. Mit anderen Worten: Die Gerade BQ geht durch den Punkt M, also durch den Mittelpunkt der Strecke CA; das heißt, die Gerade BQ halbiert die Strecke CA. Damit ist die Aufgabe gelöst.

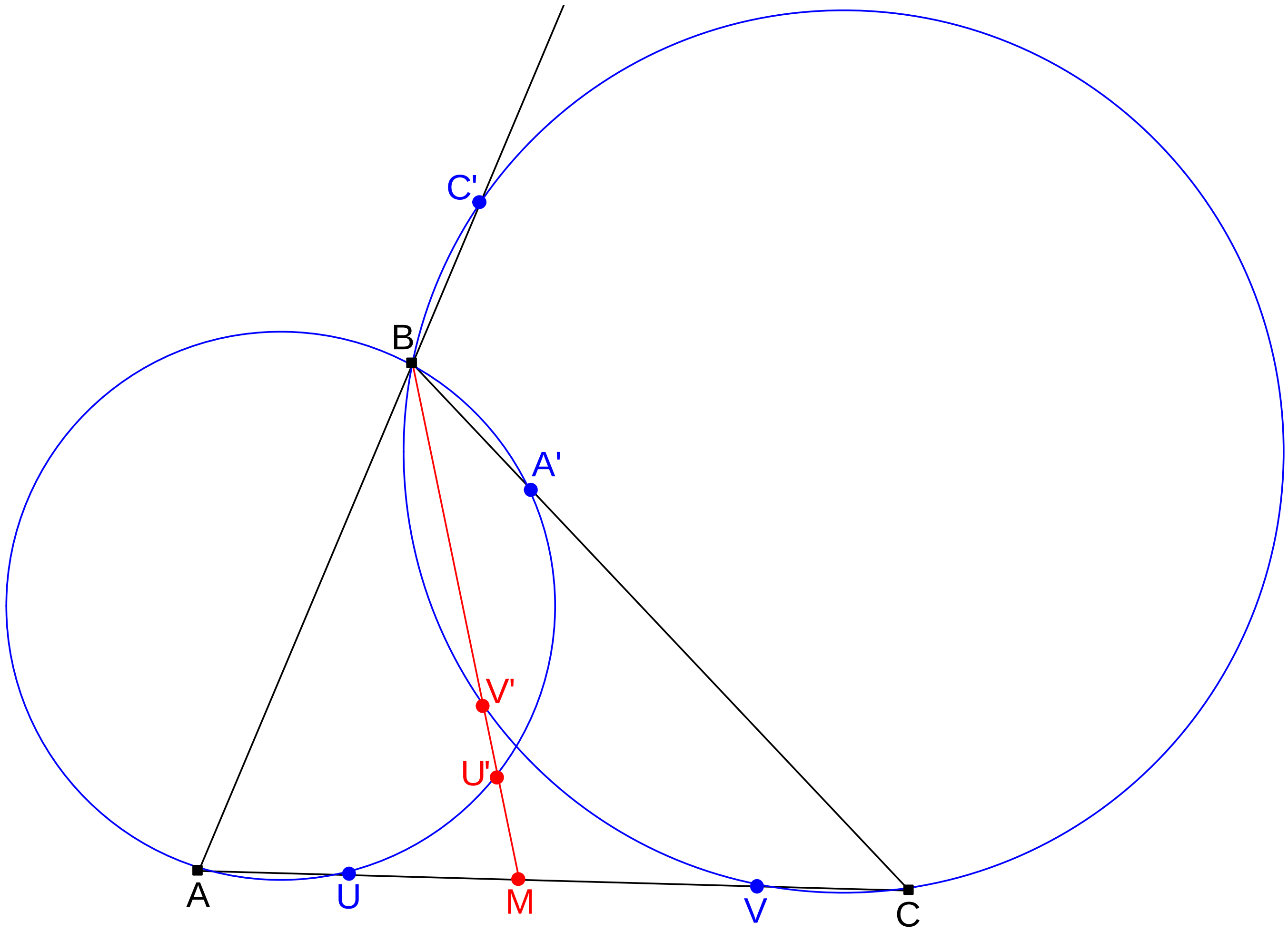

Fig. G3.3 (absichtlich falsch dargestellt)

Bemerkung: Wer mit dem Begriff der Potenzgeraden vertraut ist, wird mit der Gleichung $MC \cdot MV = MA \cdot MU$ den Beweis als fast fertig ansehen, denn dann läßt sich wie folgt argumentieren: Da $-MC \cdot MV$ die Potenz des Punktes M in bezug auf den Umkreis des Dreiecks CBC' und $-MA \cdot MU$ die Potenz des Punktes M in bezug auf den Umkreis des Dreiecks ABA' ist, bedeutet die Gleichung $MC \cdot MV = MA \cdot MU$, daß der Punkt M gleiche Potenzen in bezug auf die Umkreise der Dreiecke CBC' und ABA' hat. Das heißt, der Punkt M liegt auf der Potenzgeraden dieser beiden Umkreise. Doch die Potenzgerade zweier sich schneidender Kreise ist die Verbindungsgerade ihrer Schnittpunkte; das heißt, der Punkt M liegt auf der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Umkreise der Dreiecke CBC' und ABA', also auf der Geraden BQ. Mit anderen Worten: Die Gerade BQ geht durch den Mittelpunkt M der Strecke CA; das heißt, sie halbiert die Strecke CA. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe G4

Im folgenden steht die Abkürzung $g \cap h$ für den Schnittpunkt zweier Geraden g und h.

Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck. Sei

$$A' = BD \cap CE, \qquad B' = CE \cap DA, \qquad C' = DA \cap EB, \qquad D' = EB \cap AC \quad \text{und} \quad E' = AC \cap BD.$$

Ferner sei

$$A'' = AA' \cap EB, \qquad B'' = BB' \cap AC, \qquad C'' = CC' \cap BD, \qquad D'' = DD' \cap CE \quad \text{und} \quad E'' = EE' \cap DA.$$

Man beweise:

$$\frac{EA''}{A''B} \cdot \frac{AB''}{B''C} \cdot \frac{BC''}{C''D} \cdot \frac{CD''}{D''E} \cdot \frac{DE''}{E''A} = 1.$$

(Siehe Fig. G4.1.)

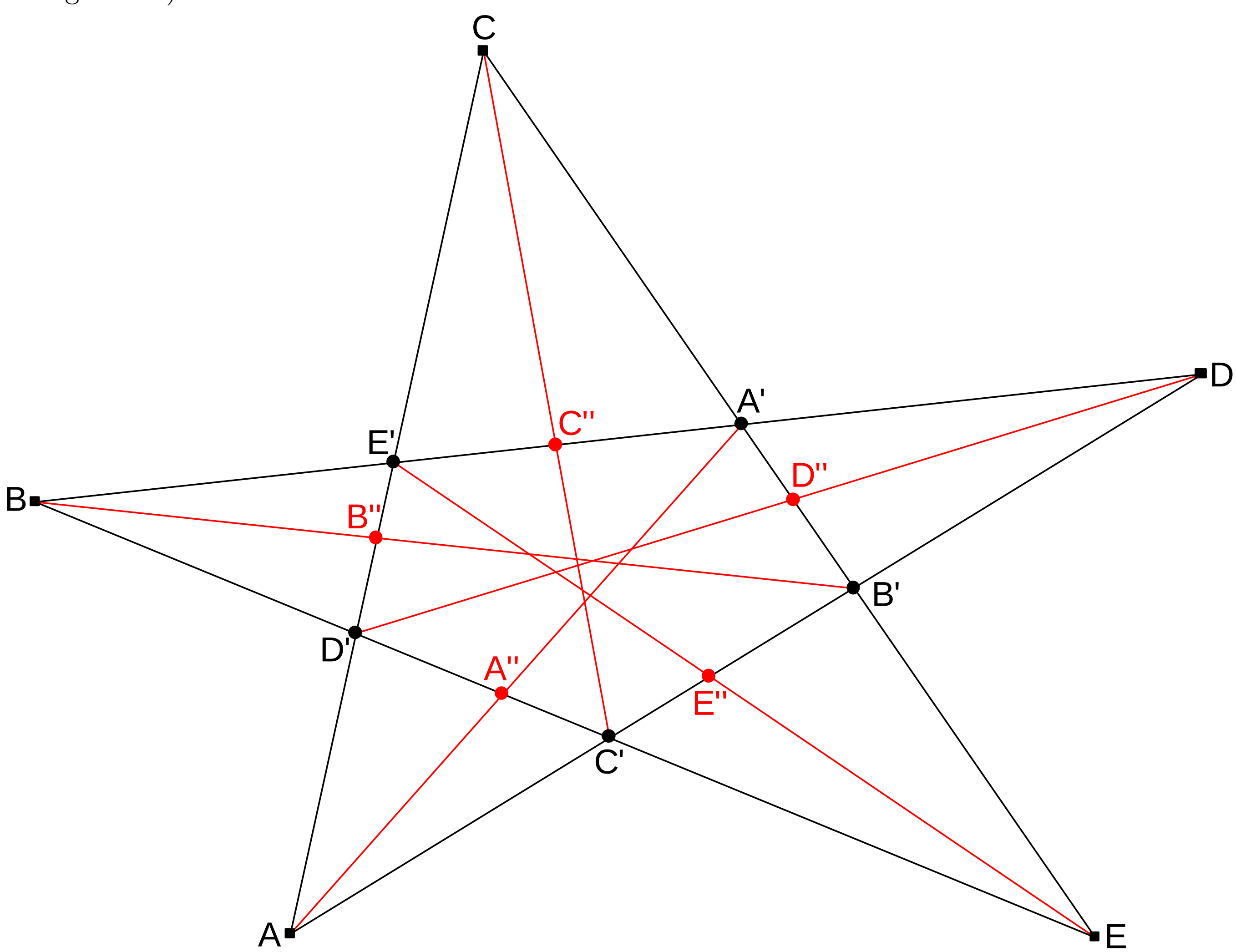

Fig. G4.1

Lösung der Aufgabe G4

Nach dem Sinussatz im Dreieck $EA''A'$ ist

$$\frac{EA''}{A'A''} = \frac{\sin \measuredangle EA'A''}{\sin \measuredangle A'EA''} = \frac{\sin \measuredangle EA'A}{\sin \measuredangle BEC}.$$

Nach dem Sinussatz im Dreieck $AA'E$ ist

$$\frac{\sin\measuredangle EA'A}{\sin\measuredangle AEA'}=\frac{EA}{AA'},\qquad \text{also}\qquad \sin\measuredangle EA'A=\sin\measuredangle AEA'\cdot\frac{EA}{AA'}=\sin\measuredangle AEC\cdot\frac{EA}{AA'}.$$

Damit ist

$$\frac{EA''}{A'A''}=\frac{\sin\measuredangle EA'A}{\sin\measuredangle BEC}=\frac{\sin\measuredangle AEC\cdot\dfrac{EA}{AA'}}{\sin\measuredangle BEC}=\frac{EA\cdot\sin\measuredangle AEC}{AA'\cdot\sin\measuredangle BEC}.$$

Analog ist

$$\frac{BA''}{A'A''}=\frac{AB\cdot\sin\measuredangle DBA}{AA'\cdot\sin\measuredangle DBE}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\frac{EA''}{BA''}&=\frac{EA''}{A'A''}:\frac{BA''}{A'A''}=\frac{EA\cdot\sin\measuredangle AEC}{AA'\cdot\sin\measuredangle BEC}:\frac{AB\cdot\sin\measuredangle DBA}{AA'\cdot\sin\measuredangle DBE}\\&=\frac{EA}{AB}\cdot\frac{\sin\measuredangle AEC}{\sin\measuredangle DBA}\cdot\frac{\sin\measuredangle DBE}{\sin\measuredangle BEC}.\end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned}\frac{AB''}{CB''}&=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle ECB}\cdot\frac{\sin\measuredangle ECA}{\sin\measuredangle CAD};\\\frac{BC''}{DC''}&=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle ADC}\cdot\frac{\sin\measuredangle ADB}{\sin\measuredangle DBE};\\\frac{CD''}{ED''}&=\frac{CD}{DE}\cdot\frac{\sin\measuredangle DCA}{\sin\measuredangle BED}\cdot\frac{\sin\measuredangle BEC}{\sin\measuredangle ECA};\\\frac{DE''}{AE''}&=\frac{DE}{EA}\cdot\frac{\sin\measuredangle EDB}{\sin\measuredangle CAE}\cdot\frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle ADB}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}&\frac{EA''}{BA''}\cdot\frac{AB''}{CB''}\cdot\frac{BC''}{DC''}\cdot\frac{CD''}{ED''}\cdot\frac{DE''}{AE''}\\=\;&\left(\frac{EA}{AB}\cdot\frac{\sin\measuredangle AEC}{\sin\measuredangle DBA}\cdot\frac{\sin\measuredangle DBE}{\sin\measuredangle BEC}\right)\cdot\left(\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle ECB}\cdot\frac{\sin\measuredangle ECA}{\sin\measuredangle CAD}\right)\\&\cdot\left(\frac{BC}{CD}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle ADC}\cdot\frac{\sin\measuredangle ADB}{\sin\measuredangle DBE}\right)\cdot\left(\frac{CD}{DE}\cdot\frac{\sin\measuredangle DCA}{\sin\measuredangle BED}\cdot\frac{\sin\measuredangle BEC}{\sin\measuredangle ECA}\right)\\&\cdot\left(\frac{DE}{EA}\cdot\frac{\sin\measuredangle EDB}{\sin\measuredangle CAE}\cdot\frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle ADB}\right).\end{aligned}$$

Nachdem sich die meisten Brüche in diesem Produkt gegenseitig wegkürzen, bleibt übrig:

$$\begin{aligned}&\frac{EA''}{BA''}\cdot\frac{AB''}{CB''}\cdot\frac{BC''}{DC''}\cdot\frac{CD''}{ED''}\cdot\frac{DE''}{AE''}\\=\;&\frac{\sin\measuredangle AEC}{\sin\measuredangle DBA}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle ECB}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle ADC}\cdot\frac{\sin\measuredangle DCA}{\sin\measuredangle BED}\cdot\frac{\sin\measuredangle EDB}{\sin\measuredangle CAE}\\=\;&\frac{\sin\measuredangle AEC}{\sin\measuredangle CAE}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle DBA}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle ECB}\cdot\frac{\sin\measuredangle DCA}{\sin\measuredangle ADC}\cdot\frac{\sin\measuredangle EDB}{\sin\measuredangle BED}.\end{aligned}$$

Nun gilt $\dfrac{\sin\measuredangle AEC}{\sin\measuredangle CAE} = \dfrac{AC}{CE}$ nach dem Sinussatz im Dreieck ACE, und entsprechend $\dfrac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle DBA} = \dfrac{BD}{DA}$, $\dfrac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle ECB} = \dfrac{CE}{EB}$, $\dfrac{\sin\measuredangle DCA}{\sin\measuredangle ADC} = \dfrac{DA}{AC}$ und $\dfrac{\sin\measuredangle EDB}{\sin\measuredangle BED} = \dfrac{EB}{BD}$. Daher erhalten wir

$$\frac{EA''}{BA''} \cdot \frac{AB''}{CB''} \cdot \frac{BC''}{DC''} \cdot \frac{CD''}{ED''} \cdot \frac{DE''}{AE''} = \frac{AC}{CE} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{DA}{AC} \cdot \frac{EB}{BD} = 1,$$

und die Aufgabe ist gelöst.

Bemerkung: Die kürzeste Lösung dieser Aufgabe, die nur die Sätze von Ceva und Menelaos verwendet, ist etwa 5 Seiten lang. Die Aufgabe scheint sich beharrlich jeglichen nichttrigonometrischen Lösungsversuchen zu widersetzen...