QED-Mathematikolympiade 1: Aufgaben und Lösungen

Ungleichungen

Darij Grinberg

Aufgabe U1

Seien a, b, c und d vier reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)+(a-c)^2(b-d)^2 \geq 0.$$

Lösung der Aufgabe U1

Erste Lösung: Sei $x = a-b$, $y = b-c$, $z = c-d$ und $w = d-a$. Dann ist

$$\begin{aligned} xz - yw &= (a-b)(c-d)-(b-c)(d-a) = (ac-ad-bc+bd)-(bd-ab-cd+ac) \\ &= ab-ad-bc+cd = (a-c)(b-d). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)+(a-c)^2(b-d)^2 \\ = \; & xyzw + ((a-c)(b-d))^2 = xyzw + (xz-yw)^2 = \frac{4xyzw + 4(xz-yw)^2}{4} \\ = \; & \frac{\left(4xyzw + (xz-yw)^2\right) + 3(xz-yw)^2}{4} = \frac{(xz+yw)^2 + 3(xz-yw)^2}{4} \geq 0, \end{aligned}$$

da Quadrate immer nichtnegativ sind. Somit ist die Aufgabe gelöst.

Zweite Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß die Zahl a die größte unter den vier Zahlen a, b, c und d ist (sonst können wir die Zahlen a, b, c und d ja zyklisch vertauschen; die zu beweisende Ungleichung bleibt dabei invariant). Dann ist $a \geq b$ und $a \geq d$, also $a-b \geq 0$ und $d-a \leq 0$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gilt $(b-c)(c-d) \leq 0$. Wegen $a-b \geq 0$ und $d-a \leq 0$ ist dann $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \geq 0$. Ferner ist $(a-c)^2(b-d)^2 \geq 0$ (denn Quadrate sind immer ≥ 0). Damit ist

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)+(a-c)^2(b-d)^2 \geq 0,$$

und die Aufgabe ist im Fall 1 gelöst.

Fall 2: Es gilt $(b-c)(c-d) \geq 0$. Dann ist entweder $b-c \geq 0$ und $c-d \geq 0$, oder $b-c \leq 0$ und $c-d \leq 0$. Wir unterscheiden also zwei Unterfälle:

Fall 2.1: Es gilt $b-c \geq 0$ und $c-d \geq 0$.

Sei $x = a - b$, $y = b - c$ und $z = c - d$. Wegen $a - b \geq 0$, $b - c \geq 0$ und $c - d \geq 0$ ist dann $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $z \geq 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned} d - a &= -(a-d) = -((a-b)+(b-c)+(c-d)) = -(x+y+z); \\ a - c &= (a-b)+(b-c) = x+y; \qquad b-d = (b-c)+(c-d) = y+z. \end{aligned}$$

Die zu beweisende Ungleichung

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) + (a-c)^2(b-d)^2 \geq 0$$

wird damit zu

$$\begin{aligned} xyz(-(x+y+z)) + (x+y)^2(y+z)^2 &\geq 0, \qquad \text{d. h.} \\ -(x+y+z)xyz + (x+y)^2(y+z)^2 &\geq 0, \qquad \text{d. h.} \\ (x+y)^2(y+z)^2 &\geq (x+y+z)xyz, \qquad \text{d. h.} \\ (x+y)(y+z) &\geq \sqrt{(x+y+z)xyz} \end{aligned}$$

(hierbei konnten wir ungestraft die Wurzel ziehen, da die Zahlen x, y und z alle nichtnegativ sind).

Nun sei $a_1 = y + z$, $b_1 = z + x$ und $c_1 = x + y$. Dann ist $b_1 + c_1 - a_1 = (z+x) + (x+y) - (y+z) = 2x \geq 0$, also $b_1 + c_1 \geq a_1$, und analog $c_1 + a_1 \geq b_1$ und $a_1 + b_1 \geq c_1$. Daher sind die Zahlen a_1, b_1 und c_1 die Seitenlängen eines (möglicherweise entarteten) Dreiecks. Der halbe Umfang s_1 dieses Dreiecks ist

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} = \frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{2} = x + y + z;$$

daher ist $s_1 - a_1 = (x+y+z) - (y+z) = x$ und genauso $s_1 - b_1 = y$ und $s_1 - c_1 = z$.

Daher läßt sich die zu beweisende Ungleichung $(x+y)(y+z) \geq \sqrt{(x+y+z)xyz}$ umschreiben als $c_1 a_1 \geq \sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)}$.

Nun ist nach der Heronschen Formel $F_1 = \sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)}$, wobei F_1 die Fläche des Dreiecks mit den Seitenlängen a_1, b_1 und c_1 ist. Andererseits ist aber bekanntlich $F_1 = \frac{1}{2} c_1 a_1 \sin \beta_1$, wobei β_1 der der Seite b_1 gegenüberliegende Winkel in diesem Dreieck ist. Also ist

$$\begin{aligned} c_1 a_1 &\geq \frac{1}{2} c_1 a_1 \geq \frac{1}{2} c_1 a_1 \sin \beta_1 \qquad \text{(denn Sinuse sind stets } \leq 1) \\ &= F_1 = \sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)}, \end{aligned}$$

und die geforderte Ungleichung ist bewiesen.

Fall 2.2: Es gilt $b - c \leq 0$ und $c - d \leq 0$. Dann ist $c - b \geq 0$ und $d - c \geq 0$. Ferner ist $a - d \geq 0$, denn $a \geq d$. Damit können wir in Analogie zu Fall 2.1 für die Zahlen a, d, c und b die Ungleichung

$$(a-d)(d-c)(c-b)(b-a) + (a-c)^2(d-b)^2 \geq 0$$

herleiten. Doch diese Ungleichung ist trivialerweise äquivalent zu

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) + (a-c)^2(b-d)^2 \geq 0,$$

und damit ist die Aufgabe auch im Fall 2.2 gelöst.

Somit ist die Aufgabe in allen Fällen gelöst.

Bemerkung: Die Aufgabe stammt von Vlad Bazon und ist Ungleichung (350) in Mihai Onucu Drimbe: *Inegalitati, idei si metode*, Zalau: Gil, 2003.

Aufgabe U2

Seien a, b und c drei positive Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}\geq 6.$$

Lösung der Aufgabe U2

Erste Lösung: Wir verwenden im Folgenden das Summenzeichen $\sum$ für zyklische Summen. Das heißt: Für jede Funktion $f(a;\ b;\ c)$ von drei Variablen a, b und c schreiben wir kurz

$$\sum f(a;\ b;\ c)=f(a;\ b;\ c)+f(b;\ c;\ a)+f(c;\ a;\ b).$$

Beispielsweise ist dann

$$\sum a = a+b+c; \qquad \sum b=b+c+a=a+b+c;$$
$$\sum\frac{a^2}{bc} = \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}; \qquad \sum\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}.$$

Mithilfe dieser Schreibweise läßt sich die zu beweisende Ungleichung umschreiben in der folgenden Form:

$$\sum\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}\geq 6.$$

Nun formen wir sie zunächst äquivalent um:

$$\sum\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}\geq 6 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}-6\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum\left(\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}-2\right)\geq 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\sum\left(\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}-2\right)=\sum\frac{(b+c)^2-2\left(a^2+bc\right)}{a^2+bc}=\sum\frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2+bc}\\
=&\sum\frac{\left(c^2-a^2\right)-\left(a^2-b^2\right)}{a^2+bc}=\sum\frac{c^2-a^2}{a^2+bc}-\sum\frac{a^2-b^2}{a^2+bc}\\
=&\sum\frac{b^2-c^2}{c^2+ab}-\sum\frac{b^2-c^2}{b^2+ca}=\sum\left(b^2-c^2\right)\left(\frac{1}{c^2+ab}-\frac{1}{b^2+ca}\right)\\
=&\sum\left(\left(b^2-c^2\right)\frac{\left(b^2+ca\right)-\left(c^2+ab\right)}{\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)}\right)=\sum\frac{(b-c)^2(b+c)(b+c-a)}{\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)}.
\end{aligned}$$

Zu beweisen bleibt also

$$\sum\frac{(b-c)^2(b+c)(b+c-a)}{\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)}\geq 0.$$

Nach Multiplikation mit $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)$ wird diese Ungleichung zu

$$\sum(b-c)^2(b+c)(b+c-a)\left(a^2+bc\right)\geq 0.$$

Nun ist $a^2+bc=(a-b)(a-c)+a(b+c)$. Damit schreibt sich die zu beweisende Ungleichung als Summe der folgenden beiden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}\sum(b-c)^2(b+c)(b+c-a)(a-b)(a-c) &\geq 0 \qquad\text{und}\\ \sum(b-c)^2(b+c)(b+c-a)\,a\,(b+c) &\geq 0.\end{aligned}$$

Die erste von diesen beiden Ungleichungen ist leicht zu zeigen:

$$\begin{aligned}&\sum(b-c)^2(b+c)(b+c-a)(a-b)(a-c)\\ =\;&\sum(b-c)^2(b+c)(a-b-c)(a-b)(c-a)\\ =\;&(b-c)(c-a)(a-b)\sum(b-c)(b+c)(a-b-c)\\ =\;&(b-c)(c-a)(a-b)\sum\left(c^3-b^3+ab^2-ac^2+bc^2-cb^2\right)\\ =\;&(b-c)(c-a)(a-b)\cdot 2\left(bc^2+ca^2+ab^2-cb^2-ac^2-ba^2\right)\\ =\;&(b-c)(c-a)(a-b)\cdot 2(b-c)(c-a)(a-b)=2\left((b-c)(c-a)(a-b)\right)^2\geq 0\end{aligned}$$

(denn Quadrate sind stets nichtnegativ). Es bleibt also nur noch, die zweite von diesen beiden Ungleichungen, also

$$\sum(b-c)^2(b+c)(b+c-a)\,a\,(b+c)\geq 0,$$

zu beweisen. Wir formen sie erst um zu

$$\sum(b-c)^2(b+c)^2a(b+c-a)\geq 0.$$

Da diese Ungleichung symmetrisch ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $a\geq b\geq c$ ist. Dann ist trivialerweise $c+a-b\geq c+b-b=c\geq 0$ und $a+b-c\geq c+b-c=b\geq 0$; wenn auch $b+c-a\geq 0$ ist, dann ist diese Ungleichung offensichtlich wahr, denn alle drei Summanden der zyklischen Summe sind ≥ 0. Betrachten wir also nur noch den Fall, wenn $b+c-a<0$ ist. Dann ist

$$(b+c)^2a-(c+a)^2b=\left(\underbrace{a-b}_{\geq 0,\text{ da }a\geq b}\right)\left(\underbrace{c^2-ab}_{\leq 0,\text{ da }c\leq a\text{ und }c\leq b}\right)\leq 0,$$

also $(b+c)^2a\leq(c+a)^2b$. Ferner ist $(b-c)^2\leq(c-a)^2$ (denn $|b-c|\leq|c-a|$, weil die Zahl b zwischen den Zahlen a und c liegt). Multiplikation dieser beiden Ungleichungen (alle Seiten sind nichtnegativ) liefert $(b-c)^2(b+c)^2a\leq(c-a)^2(c+a)^2b$. Jetzt multiplizieren wir diese Ungleichung mit der negativen Zahl $b+c-a$; wir erhalten damit $(b-c)^2(b+c)^2a(b+c-a)\geq(c-a)^2(c+a)^2b(b+c-a)$. Damit wird

$$\begin{aligned}&\sum(b-c)^2(b+c)^2a(b+c-a)\\ =\;&(b-c)^2(b+c)^2a(b+c-a)+(c-a)^2(c+a)^2b(c+a-b)+(a-b)^2(a+b)^2c(a+b-c)\\ \geq\;&(c-a)^2(c+a)^2b(b+c-a)+(c-a)^2(c+a)^2b(c+a-b)+(a-b)^2(a+b)^2c(a+b-c)\\ =\;&(c-a)^2(c+a)^2b\left(\underbrace{(b+c-a)+(c+a-b)}_{=2c\geq 0}\right)+(a-b)^2(a+b)^2c\left(\underbrace{a+b-c}_{\geq 0}\right)\geq 0.\end{aligned}$$

Somit ist die geforderte Ungleichung bewiesen. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Zweite Lösung (von Peter Scholze, skizziert): Nach aufwändiger Rechnung sehen wir ein, daß die zu beweisende Ungleichung

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}\geq 6$$

äquivalent ist zu der Ungleichung

$$\frac{(b-c)^2\,(c-a)^2\,(a-b)^2}{abc}+\frac{(b-c)^2\,(b+c)^2}{a}+\frac{(c-a)^2\,(c+a)^2}{b}+\frac{(a-b)^2\,(a+b)^2}{c}\geq 0;$$

diese ist aber trivialerweise wahr, da Quadrate stets nichtnegativ sind.