Bundeswettbewerb Mathematik 2005

–

Stufe 1

Peter Patzt

27. Februar 2005

Aufgabe 1

Durch eine endliche Anzahl an in der Aufgabenstellung beschriebenen Zügen, lassen sich alle Felder des 2005×2005-Schachbrett erreichen.

Beweis:

> Hinweis: Der Zusammenhang 'A⟶B' bedeutet hier, dass die Spielfigur von Feld A nach Feld B ziehen kann.

Um diese Aussage zu beweisen, definieren wir zunächst die Felder des Schachbretts. Allen Feldern wird ein x und y so zugeordnet, dass sie eindeutig durch (x,y) identifiziert werden können. Das Feld auf dem der Mittelpunkt des Bretts liegt sei (0,0). Für alle Felder rechts bzw. links von (0,0) erhöht bzw. erniedrigt sich der x-Wert pro Feld um eins. Analog erhöht sich der y-Wert nach oben und erniedrigt sich nach unten.
Da die Summe zweier Zahlen, die auf einem Würfel gegenüberliegen, immer 7 ist und das Spielfeld auf $2 \cdot 1001 + 1$ Felder begrenzt ist, gilt die Aussage:

$$(x, y) \longrightarrow (x+n, y+m) \Longleftrightarrow |n| + |m| = 7;\ |x+n|, |y+m| \leq 1001;\ x, y, n, m \in \mathrm{Z}$$

Durch vollständige Induktion soll nun bewiesen werden, dass man in allen $2n+1 \times 2n+1$-Quadraten, für die $n \geq 6$ gilt und das Feld (0,0) deren Mittelpunkt darstellt, alle Felder erreichen kann, ohne das Quadrat zu verlassen.
Für $n = 6$ habe ich eine Skizze als Anlage (Anlage 1.1) hinzugefügt, die zeigt, wie man alle Felder von (0,0) aus in max. 4 Schritten erreichten kann.
Als nächstes müssen wir aus Symetriegründen nur die rechte obere Ecke (ein 6×6-Quadrate wie in Anlage 1.2). Für diese Ecke kann man alle angrenzenden Felder erreichen, wobei nur die oben und rechts angrenzenden Felder von Bedeutung sind (s. Anlage 1.3). Es ist leicht zu erkennen, dass mit gleicher Methodik der komplette Rand um jedes $2n+1 \times 2n+1$-Quadrat der gegebenen Eigenschaften erreicht werden kann, ohne das Quadrat weiter als den Rand zu verlassen. Somit kann man sind alle Felder eines $2n+3 \times 2n+3$-Quadrates mit den gegebenen Eigenschaften erreichbar, wenn das $2n+1 \times 2n+1$-Quadrat auch erreichbar ist. Da wir den Induktionsanfang schon mit einem 13×13-Quadrat (s. Anlage 1.1) gebildet haben, sind alle Felder jedes $2n+1 \times 2n+1$-Quadrates erreichbar, wenn $n \geq 6$ und der Mittelpunkt des Quadrates (0,0) ist.
Da das in der Aufgabenstellung gegebene 2005×2005-Schachbrett auch ein $2n+1 \times 2n+1$-Quadrat ist (nämlich für $n = 1001$), sind alle Felder dieses Schachbrettes erreichbar und die obige Aussage ist bewiesen.

Aufgabe 2

Behauptung: $\exists m, n : a = m^2 + 2n^2; a, m, n \in \mathrm{Z}$
Voraussetzung: $3a = x^2 + 2y^2; a, x, y \in \mathrm{Z}$ (1)

Beweis:
Aus (1) folgt logisch: $x^2 + 2y^2 \equiv 0 \pmod 3$ (2)
Eine Tabelle verdeutlicht, dass (2) in genau fünf Fällen wahr ist:

$x \pmod 3$	$x^2 \pmod 3$	$y \pmod 3$	$y^2 \pmod 3$
0	0	0	0
1	1	1	2
2	1	2	2

Diese 5 Fälle werden in eckigen Klammern durchnummeriert:

[1] $x \equiv 0 \pmod 3 \wedge y \equiv 0 \pmod 3$
[2] $x \equiv 1 \pmod 3 \wedge y \equiv 1 \pmod 3$
[3] $x \equiv 2 \pmod 3 \wedge y \equiv 2 \pmod 3$
[4] $x \equiv 1 \pmod 3 \wedge y \equiv 2 \pmod 3$
[5] $x \equiv 2 \pmod 3 \wedge y \equiv 1 \pmod 3$

In den nachfolgenden Absätzen werden x und y jeweils substituiert. Dies geschieht auf Grundlage der Restwerte bei Division durch 3.

Für [1]:

$$\begin{aligned}
x :=& 3u;\ u \in \mathrm{Z} \\
y :=& 3v;\ v \in \mathrm{Z} \\
3a =& x^2 + 2y^2 \\
=& (3u)^2 + 2 \cdot (3v)^2 \\
=& 9u^2 + 18v^2 \\
a =& 3u^2 + 6v^2 \\
=& u^2 - 4uv + 4v^2 + 2u^2 + 4uv + 2v^2 \\
=& (u - 2v)^2 + 2 \cdot (u + v)^2 \\
m =& u - 2v \\
n =& u + v
\end{aligned}$$

Für [2]:

$$\begin{aligned}
x :=& 3u + 1;\ u \in \mathrm{Z} \\
y :=& 3v + 1;\ v \in \mathrm{Z} \\
3a =& x^2 + 2y^2 \\
=& (3u + 1)^2 + 2 \cdot (3v + 1)^2 \\
=& 9u^2 + 6u + 1 + 18v^2 + 12v + 2 \\
a =& 3u^2 + 2u + 6v^2 + 4v + 1 \\
=& u^2 + 4uv + 4v^2 + 2 \cdot (u + 2v) + 1 + 2u^2 - 4uv + 2v^2 \\
=& (u + 2v + 1)^2 + 2 \cdot (u - v)^2 \\
m =& u + 2v + 1 \\
n =& u - v
\end{aligned}$$

Für [3]:

$$\begin{aligned}
x &:= 3u + 2;\ u \in \mathrm{Z} \\
y &:= 3v + 2;\ v \in \mathrm{Z} \\
3a &= x^2 + 2y^2 \\
&= (3u+2)^2 + 2 \cdot (3v+2)^2 \\
&= 9u^2 + 12u + 4 + 18v^2 + 24v + 8 \\
a &= 3u^2 + 4u + 6v^2 + 8v + 4 \\
&= u^2 + 4uv + 4v^2 + 4 \cdot (u + 2v) + 4 + 2u^2 - 4uv + 2v^2 \\
&= (u + 2v + 2)^2 + 2 \cdot (u - v)^2 \\
m &= u + 2v + 2 \\
n &= u - v
\end{aligned}$$

Für [4]:

$$\begin{aligned}
x &:= 3u + 1;\ u \in \mathrm{Z} \\
y &:= 3v + 2;\ v \in \mathrm{Z} \\
3a &= x^2 + 2y^2 \\
&= (3u+1)^2 + 2 \cdot (3v+2)^2 \\
&= 9u^2 + 6u + 1 + 18v^2 + 24v + 8 \\
a &= 3u^2 + 2u + 6v^2 + 8v + 3 \\
&= 4v^2 - 4uv + u^2 + 2 \cdot (2v - u) + 1 + 2u^2 + 4uv + 2v^2 + 4\,(u + v) + 2 \\
&= (2v - u + 1)^2 + 2 \cdot (u + v + 1)^2 \\
m &= 2v - u + 1 \\
n &= u + v + 1
\end{aligned}$$

Für [5]:

$$\begin{aligned}
x &:= 3u + 2;\ u \in \mathrm{Z} \\
y &:= 3v + 1;\ v \in \mathrm{Z} \\
3a &= x^2 + 2y^2 \\
&= (3u+2)^2 + 2 \cdot (3v+1)^2 \\
&= 9u^2 + 12u + 4 + 18v^2 + 12v + 2 \\
a &= 3u^2 + 4u + 6v^2 + 4v + 2 \\
&= u^2 - 4uv + 4v^2 + 2u^2 + 4uv + 2v^2 + 4\,(u + v) + 2 \\
&= (u - 2v)^2 + 2 \cdot (u + v + 1)^2 \\
m &= u - 2v \\
n &= u + v + 1
\end{aligned}$$

Da diese fünf Fälle alle Möglichkeiten für ein durch 3 teilbares ganzes a sind, sodass $3a$ in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen Zahlen x, y darstellbar ist, und die Behauptung für jeden Fall bewiesen wurde, ist auch die Gesamtbehauptung bewiesen.

Aufgabe 3

Den Seiten a, b, c eines Dreiecks liegendie Winkel α, β, γ gegenüber. Es sei ferner $3\alpha + 2\beta = 180\,°$. Man beweise, dass dann $a^2 + bc = c^2$ ist.

Behauptung: $a^2 + bc = c^2$
Voraussetzung: $3\alpha + 2\beta = 180\,°$ (1)

Beweis:

Aus (1) folgt $\beta = 90\,° - \frac{3}{2}\alpha$ (2).

Und aus (1) sowie dem Innenwinkelsatz folgt $2\alpha + \beta = \gamma$, woraus mit (2) $\gamma = 90\,° + \frac{1}{2}\alpha$ (3) folgt.

Weiterhin folgt aus dem Sinussatz, (2) und (3) folgt:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\left(90\,° - \frac{3}{2}\alpha\right)}{\sin\left(90\,° + \frac{1}{2}\alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} \qquad (4)$$

Geht man nun von der wahren Aussage aus, dass eine Zahl gleich der gleichen Zahl ist, kommt man zu diesen Umformungen:

$$\begin{aligned}
4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2} &= 4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2} \\
\cos\frac{\alpha}{2} + \left(4\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) \quad \text{Additionstheoreme} \\
\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(\frac{3}{2}\alpha\right) &= 2\cos\frac{\alpha}{2} 2\cos\alpha \\
1 + \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} &= 2\cos\alpha \qquad (4) \\
1 + \frac{b}{c} &= 2\cos\alpha \\
b + c &= 2c\cos\alpha \\
b - 2c\cos\alpha &= c
\end{aligned}$$

Dies Führte also zur Ausage $-c = b - 2c\cos\alpha$ (5).
Setzt man nun (5) in den Cosinussatz ein, erhält man die Behauptung:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
a^2 &= c^2 - b\,(b - 2c\cos\alpha) \\
a^2 &= c^2 + b\,(-c) \\
a^2 + bc &= c^2
\end{aligned}$$

q.e.d

Aufgabe 4

Aussage 1 *Für die ganze positve Zahl n gilt, dass man alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ so in eine Reihenfolge bringen kann, dass das arithmetische Mittel aller Zahlenpaare aus dieser Reihe nicht zwischen den beiden platziert ist. (1)*

Definition 1 *Arithmetisches Mittel zweier Zahlen $x, y := \mathsf{am}(x, y)$*

Definition 2 $\mathsf{R_x}$:= *die Reihenfolge für $n = 2^x$ mit der (1) erfüllt wird.*
Addiert oder multipliziert man $\mathsf{R_x}$ durch $+, -, \cdot$, oder : mit einer Zahl, so sollen alle Zahlen innerhalb der Reihe mit dieser Zahl addiert oder multipliziert werden.
Werden zwei Reihen mit $\frown$ verbunden, so soll eine neue,die beiden Reihen aneinander anschließende Reihe entstehen.

Behauptung Für alle $n = 2^x;\ x \in \mathrm{Z}$ gilt (1). [1]

Hilfsbeweis A
Das arith. Mittel einer geraden und einer ungeraden Zahl ergibt eine gebrochene Zahl:
$\mathsf{am}(2n+1, 2m) = \frac{2n+1+2m}{2} = n + m + \frac{1}{2}$
Hilfsbeweis B
Das arith. Mittel zweier Vorgänger ganzer Zahlen ist gleich der Vorgänger des arith. Mittels der eigentlichen Zahlen:
$\mathsf{am}(n-1, m-1) = \frac{n-1+m-1}{2} = \frac{n+m}{2} - 1 = \mathsf{am}(n, m) - 1$
Hilfsbeweis C
Das arith. Mittel zweier mit einer Zahl multiplizierten Zahlen, ist immer das arith. Mittel der eigentlichen Zahlen multipliziert mit der gleichen Zahl:
$\mathsf{am}(tn, tm) = \frac{nt+mt}{2} = \frac{n+m}{2} \cdot t = \mathsf{am}(n, m) \cdot t$

Beweis von [1] durch vollständige Induktion
Induktionsanfang:
$x = 0 \Rightarrow n = 2^0 = 1 \Rightarrow \mathsf{R_0} = \{1\}$
Es gibt also eine solche Reihenfolge.
Induktionsvorausetzung: [1] gilt für $x = k$
Induktionsschritt:
$2 \cdot \mathsf{R_k}$ enthält alle positven geraden Zahlen kleiner gleich 2^{k+1} und würde, da C, (1) in der Frage der arith. Mittel nicht widersprechen.
$2 \cdot \mathsf{R_k} - 1$ enthält alle positven ungeraden Zahlen kleiner gleich 2^{k+1} und würde, da C und B, (1) in der Frage der arith. Mittel auch nicht widersprechen.
Sei $\mathsf{R_{k+1}} = (2 \cdot \mathsf{R_k}) \frown (2 \cdot \mathsf{R_k} - 1)$, so enthält $\mathsf{R_{k+1}}$ alle positiven Zahlen kleiner gleich 2^{k+1}, und da laut A die Frage der arith. Mittel nur innerhalb $2 \cdot \mathsf{R_k}$ und $2 \cdot \mathsf{R_k} - 1$ geklärt werden muss, erfüllt $\mathsf{R_{k+1}}$ [1].

Da nun [1] für alle $x \geq 0$ gilt, gilt [1] auch für alle $n = 2^x \geq 1$ $(x, n \in \mathrm{Z})$.
Da weiter $\lim_{x\to\infty} n = \lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$, folgt dass es für jedes $n = n_1$ ein $n = n_0 = 2^x$ gibt, sodass $n_1 \leq n_0$.

Wenn man aber für alle $n = n_0 = 2^x$ eine Reihenfolge finden kann, so muss man für das $n_1 \leq n_0$ alle Zahlen $n_0, \ldots, n_1 + 1$ herausnehmen. Nun hat man eine Reihenfolge für $n = n_1$ gefunden, dass (1) erfüllt wird, da durch herausnehmen Zahlen nicht zwischen ein Zahlenpaar sein kann, dass vor dem Herausnehmen nicht dazwischen war, und da in der Reihenfolge alle Zahlen von 1 bis n_1 genau einmal enthalten sind.

Somit ist bewiesen, dass sich für alle n eine Reihenfolge, wie in (1) beschrieben finden lässt.