Orientierte Winkel modulo 180° und eine Lösung der $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag

Darij Grinberg

Einführung

In dieser Notiz geht es um eine spezielle Art von orientierten Winkeln, nämlich **orientierte** (**gerichtete**) **Winkel modulo** 180°, auch **Kreuze** oder **Kreiswinkel** genannt. Solche Winkel sind zwar grundsätzlich nichts Neues; sie spielen schon seit langer Zeit eine wichtige Rolle in der Analytischen Geometrie. Jedoch wurden sie erst 1917 von R. A. Johnson in die Elementargeometrie "importiert" und erwiesen sich dort als fruchtbar. Eine gute Einführung in die Theorie dieser Winkel wurde in [7] gegeben; in [8] wird diese Theorie mit Bezug auf die Inversion am Kreis fortgesetzt. Auch in dem (mir nicht zugänglichen) Standardwerk [6] soll eine Darstellung dieser Theorie zu finden sein. Trotz ihrer Nützlichkeit und Eleganz wurden Kreuze aber schnell wieder vergessen und tauchten nur ab und zu in Arbeiten zur Abbildungsgeometrie auf. Im Zuge der Rehabilitation der Elementargeometrie in den letzten Jahren ist auch die Theorie der Kreuze von vielen wiederentdeckt worden; in [1] wurden Kreuze als Winkeltyp 4 erwähnt und in [4] verwendet.

Als ich begann, eine Einführung in die Theorie der Kreuze zu schreiben ([Der ursprüngliche Impuls zu dieser Arbeit war für mich die Lösung der $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag.]), wußte ich noch nichts von [7] und [8] - und mußte nachher feststellen, daß Teile meiner Darstellung mit einigen Abschnitten aus [7] merkbare Ähnlichkeiten aufwiesen. Der Zugang zu der Definition eines orientierten Winkels unterscheidet sich nur geringfügig von dem in [7]. In der Geometrie läuft man immer Gefahr, etwas zu entdecken, was schon ein Jahrhundert zuvor bekannt gewesen ist. Wenn sich also doch alles, was ich im folgenden schreibe, als seit langem bekannt herausstellt, so hoffe ich doch, daß meine Arbeit zumindest zur Wiederbelebung dieses geometrischen Konzepts und allgemein der Elementargeometrie förderlich sein wird. Ansonsten habe ich eine Reihe von Aufgaben aus verschiedensten Quellen und von verschiedenem Schwierigkeitsgrad integriert - der Leser wird vielleicht einige davon kennen, einige werden ihm neu sein -, alles Aufgaben, an denen der Leser seine geometrischen Erfahrungen und Fertigkeiten bereichern kann.

Kreiswinkel sind nicht nur für die Kreisgeometrie sehr geeignet, sondern für viele geometrische Beweise; sie ersparen Fallunterscheidungen, weil sie komplett anordnungsunabhängig sind, und machen es möglich, viele längere Beweise zumindest in der Formulierung zu verkürzen. Im folgenden versuche ich, diesen Winkeltyp in voller Ausführlichkeit zu definieren, die meisten seiner Haupteigenschaften nachzuweisen und einige Anwendungen aufzuführen. Darunter werden ausführlich gelöste Beispielaufgaben, eine neue Lösung der in der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ erschienenen Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag und, wie schon gesagt, eine Reihe von Aufgaben zum selbstständigen Lösen sein.

Ein gewöhnlicher gerichteter Winkel ASB ist ein Winkel, der nach folgender Regel mit einem Vorzeichen versehen ist: Der Winkel ist positiv, wenn sein Umlaufsinn positiv (d. h. gegen den Uhrzeigersinn) ist, und negativ, wenn sein Umlaufsinn negativ (d. h. im Uhrzeigersinn) ist. Für gerichtete Winkel gilt also $\measuredangle ASB = -\measuredangle BSA$.

Nun wird jeder Winkel α mit allen denjenigen Winkeln β identifiziert, für die der Winkel $\beta - \alpha$ ein (positives oder negatives) ganzzahliges Vielfaches von 180° ist. Strenggenommen betrachtet man also nicht mehr den orientierten Winkel α selber, sondern die Klasse $K_\alpha \{...;\ \alpha - 360°;\ \alpha - 180°;\ \alpha;\ \alpha + 180°;\ \alpha + 360°;\ ...\}$. Diese Klasse K_α nennen wir dann **orientierter Winkel modulo** 180°, oder **Kreuz**, oder **Kreiswinkel** zum orientierten Winkel α. Der Winkel α sowie jeder andere Winkel aus seiner Klasse K_α wird **Repräsentant des Kreiswinkels** K_α genannt.

Man addiert zwei Kreiswinkel, indem man einen beliebigen Repräsentanten des ersten mit einem beliebigen Repräsentanten des zweiten addiert; das Ergebnis ist ein Kreiswinkel, der von der konkreten Wahl der Repräsentanten der Kreiswinkel unabhängig ist, da die Summe zweier Vielfachen von 180° wieder ein Vielfaches von 180° ist. Genauso läßt sich die Subtraktion zweier Kreiswinkel erklären und die Multiplikation mit einem ganzzahligen Faktor.

Wie schon gesagt, ist jeder Kreiswinkel eine Klasse von orientierten Winkeln. Wir werden jedoch in der Zukunft Kreiswinkel nicht mehr mit K_α, sondern einfach nur mit α bezeichnen, falls keine

Verwechselung zu befürchten ist. Ferner werden wir im folgenden z. B. von einem **Kreiswinkel** $\measuredangle ASB$ sprechen und dabei den Kreiswinkel zum orientierten Winkel $\measuredangle ASB$ meinen.

Mit der Identifikation jedes orientierten Winkels mit allen anderen orientierten Winkeln, die sich von diesem um ein ganzahliges Vielfaches von 180° unterscheiden, haben wir auch 180° mit 0° gleichgesetzt. Also gilt für jeden Kreiswinkel α die nach beiden Seiten unendlich fortsetzbare Gleichung

$$... = \alpha - 360° = \alpha - 180° = \alpha = \alpha + 180° = \alpha + 360° = ... \;.$$

Aus $0° = 180°$ folgt auch $90° = -90°$.

Jetzt werden wir den ersten Vorteil von Kreiswinkeln kennenlernen.

Betrachten wir zwei Geraden g und h. Sind diese Geraden nicht parallel, dann haben sie einen Schnittpunkt S.

Sei A ein beliebiger Punkt auf g und B ein beliebiger Punkt auf h. Bezeichnen wir den Kreiswinkel $\measuredangle ASB$ mit α. Sei nun A' ein anderer beliebiger Punkt auf g und B' ein anderer beliebiger Punkt auf h. Wir werden beweisen, daß dann $\measuredangle ASB = \measuredangle A'SB'$ ist. [Dies ist eine einzigartige Eigenschaft und nur Kreiswinkeln zueigen! Würden wir z. B. gewöhnliche (nicht orientierte, d. h. Euklidische) Winkel betrachten, dann wäre $\measuredangle A'SB'$ von der Anordnung der Punkte abhängig; z. B. wäre unter Umständen $\measuredangle A'SB' = 180° - \measuredangle ASB$.]

Beweis: Wir machen eine Fallunterscheidung durch (vier Fälle):

Erster Fall (Fig. 1): Liegen die Punkte A und A' auf einer Seite von $S,$ und liegen die Punkte B und B' auf einer Seite von $S,$ dann ist offensichtlich $\measuredangle ASB = \measuredangle A'SB' = \alpha$.

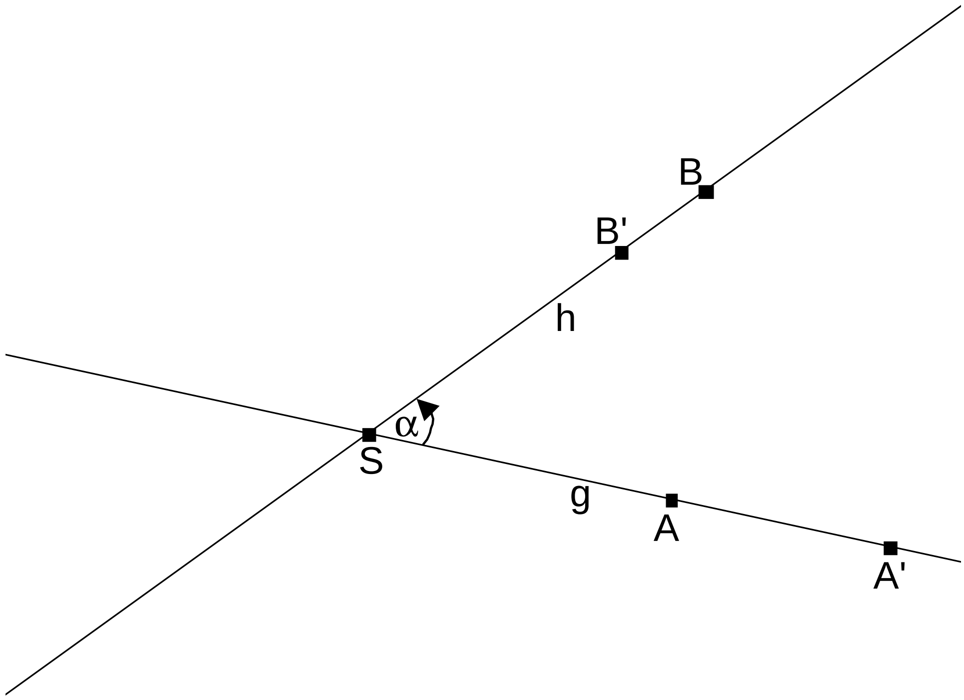

Fig. 1

Zweiter Fall (Fig. 2): Liegen die Punkte A und A' auf einer Seite von $S,$ und liegen die Punkte B und B' auf verschiedenen Seiten von $S,$ dann ist $\measuredangle B'SA' = 180° - \measuredangle ASB$ (Nebenwinkel; die Winkel $B'SA'$ und ASB haben den gleichen Umlaufsinn). Also ist $\measuredangle B'SA' = 180° - \alpha$. Aber wegen $\measuredangle A'SB' = -\measuredangle B'SA'$ folgt daraus $\measuredangle A'SB' = -(180° - \alpha) = \alpha - 180°$. Wegen $180° = 0°$ haben wir also $\measuredangle A'SB' = \alpha = \measuredangle ASB$.

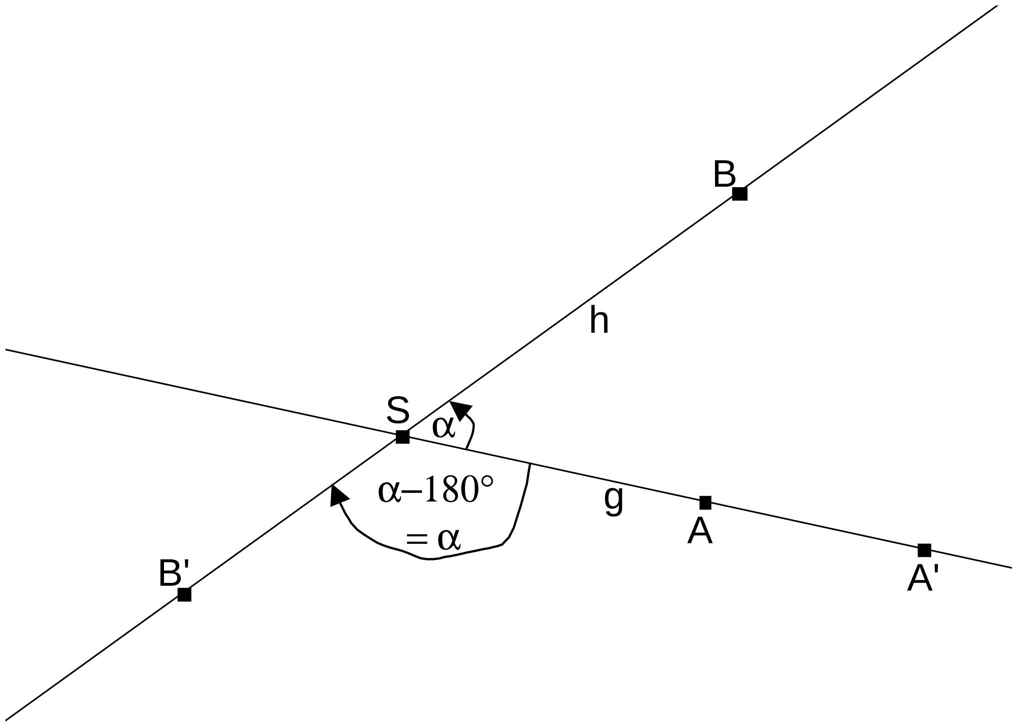

Fig. 2

Dritter Fall (Fig. 3): Liegen die Punkte A und A' auf verschiedenen Seiten von S, und liegen die Punkte B und B' auf einer Seite von S, dann geht der Beweis genauso wie im Zweiten Fall: Erstmals ist $\measuredangle B'SA' = 180° - \measuredangle ASB$ (Nebenwinkel; die Winkel $B'SA'$ und ASB haben den gleichen Umlaufsinn). Also ist $\measuredangle B'SA' = 180° - \alpha$. Aber wegen $\measuredangle A'SB' = -\measuredangle B'SA'$ folgt daraus $\measuredangle A'SB' = -(180° - \alpha) = \alpha - 180°$. Wegen $180° = 0°$ haben wir also $\measuredangle A'SB' = \alpha = \measuredangle ASB$.

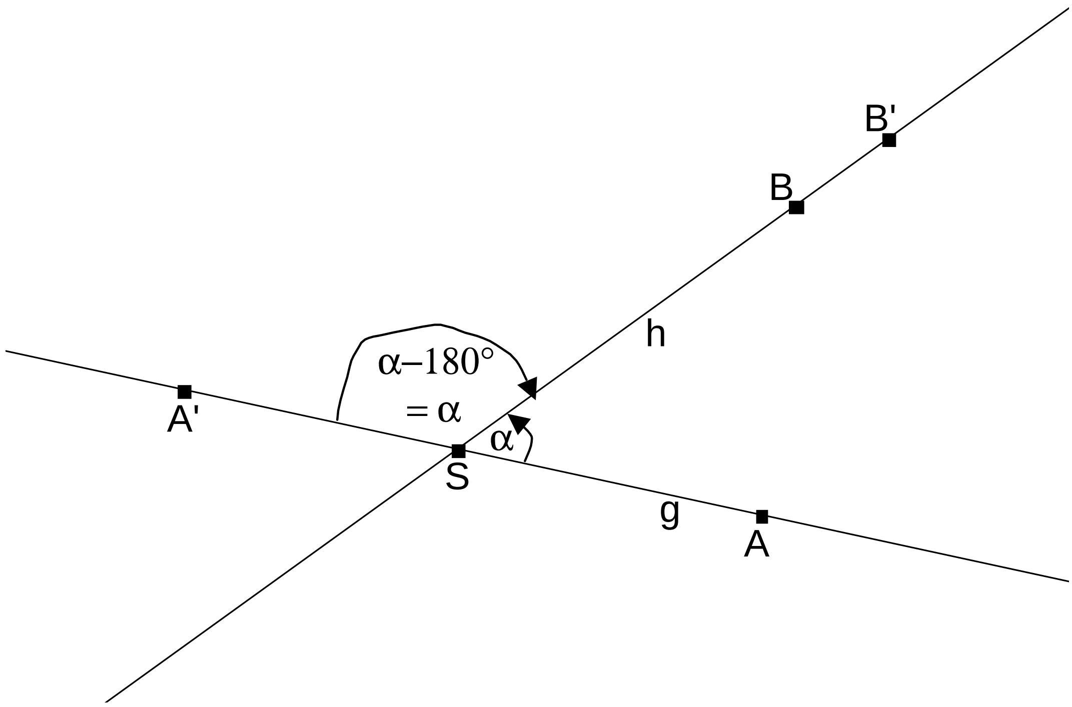

Fig. 3

Vierter Fall (Fig. 4): Liegen die Punkte A und A' auf verschiedenen Seiten von S, und liegen die Punkte B und B' auf verschiedenen Seiten von S, dann ist $\measuredangle A'SB' = \measuredangle ASB = \alpha$ (als Scheitelwinkel mit gleichem Umlaufsinn).

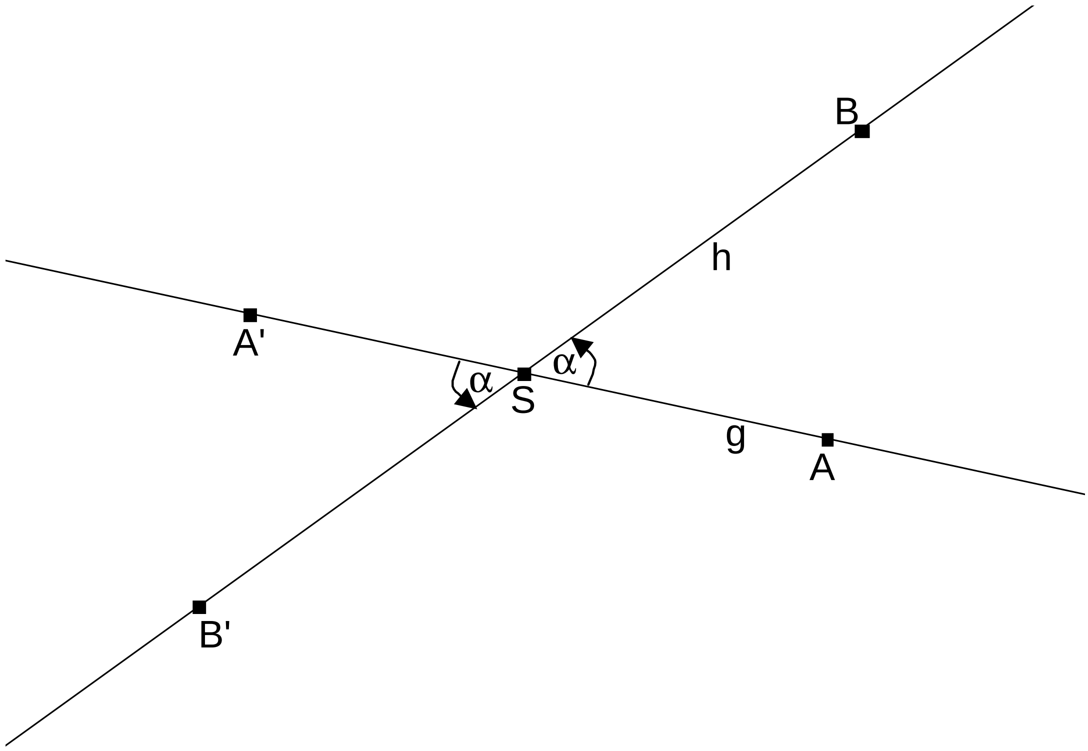

Fig. 4

Wir haben also immer $\measuredangle ASB = \measuredangle A'SB'$. Das bedeutet: Der Kreiswinkel $\measuredangle ASB$ ist für alle Punkte A und B auf den Geraden g bzw. h gleich groß. In anderen Worten: Der Winkel $\measuredangle ASB$ hängt nur von den Geraden g und h ab, nicht aber von der konkreten Lage der Punkte A und B auf diesen Geraden.

Wir bezeichnen den Winkel $\measuredangle ASB$ als **Kreiswinkel zwischen den Geraden** g **und** h und schreiben für ihn $\measuredangle\left(g;\ h\right)$. (Siehe Fig. 5.)

[Eine Bemerkung: Wir haben $\measuredangle\left(g;\ h\right) = \measuredangle\left(AS;\ BS\right) = \measuredangle ASB$. Man kann den Ausdruck $\measuredangle\left(AS;\ BS\right)$ umschreiben zu $\measuredangle\left(AS;\ SB\right)$, $\measuredangle\left(SA;\ SB\right)$ oder zu $\measuredangle\left(SA;\ BS\right)$, ohne daß sich die Größe des Winkels ändert (denn AS und SA ist ja dieselbe Gerade). Wenn man aber die Geraden AS und BS vertauscht, dann verändert sich das Vorzeichen: $\measuredangle\left(BS;\ AS\right) = -\measuredangle\left(AS;\ BS\right)$.]

Der Kreiswinkel $\measuredangle\left(g;\ h\right)$ zwischen den Geraden g und h kann auch folgendermaßen geometrisch erklärt werden: Es ist der Winkel, um den man die Gerade g drehen muß (gegen den Umlaufsinn, falls der Winkel positiv ist, und im Umlaufsinn, falls er negativ ist), sodaß die Bildgerade zu h parallel ist.

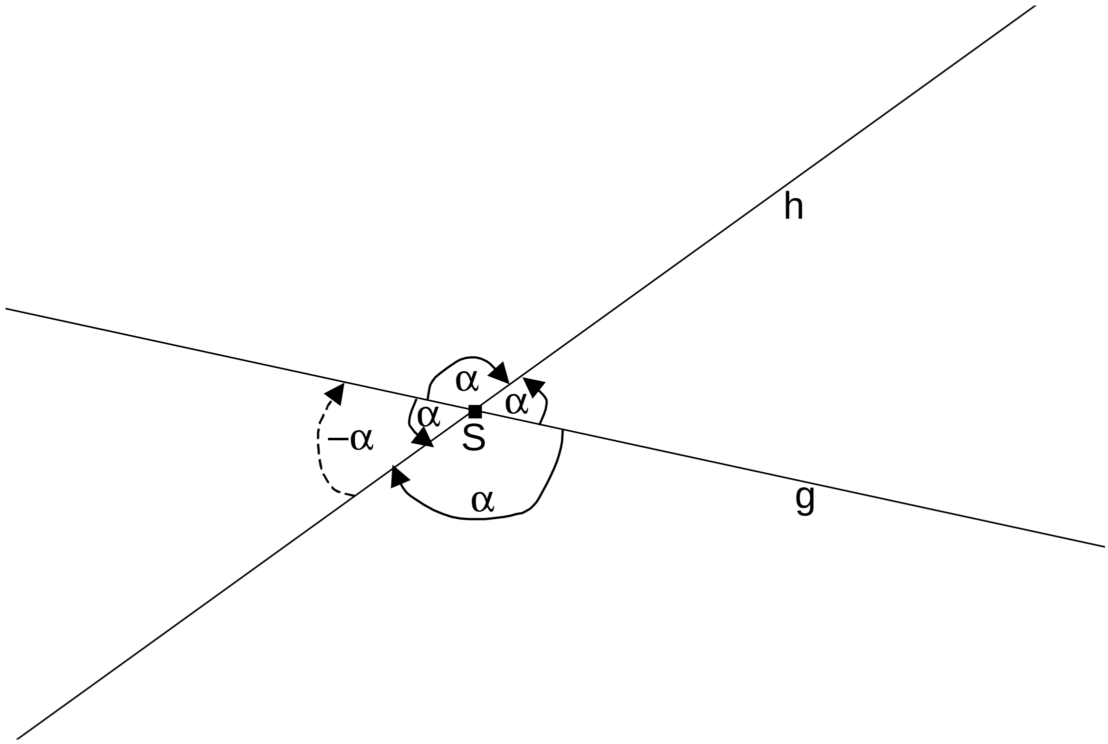

Fig. 5

Damit haben wir den Kreiswinkel zwischen zwei nicht parallelen Geraden definiert. Definieren wir auch noch den Kreiswinkel zwischen zwei parallelen Geraden: Sind die Geraden g und h parallel oder fallen sie zusammen, dann sei $\measuredangle\left(g;\ h\right) = 0°$.

Für zwei beliebige Geraden g und h gilt $\measuredangle\left(g;\ h\right) = -\measuredangle\left(h;\ g\right)$.

Beweis: Sind die Geraden g und h nicht parallel, dann haben sie einen Schnittpunkt S. Ist A ein beliebiger Punkt auf g und B ein beliebiger Punkt auf h, dann ist $\measuredangle\left(g;\ h\right) = \measuredangle ASB$ und $\measuredangle\left(h;\ g\right) = \measuredangle BSA$. Wegen $\measuredangle ASB = -\measuredangle BSA$ ist also $\measuredangle\left(g;\ h\right) = -\measuredangle\left(h;\ g\right)$.

Sind die Geraden g und h parallel, dann ist $\measuredangle\left(g;\ h\right) = 0°$ und $\measuredangle\left(h;\ g\right) = 0°$, woraus offensichtlich $\measuredangle\left(g;\ h\right) = -\measuredangle\left(h;\ g\right)$ folgt.

Es sei angemerkt, daß ein Kreiswinkel zwischen zwei Geraden gemessen wird und nicht zwischen zwei Halbgeraden (wie z. B. gewöhnliche Euklidische Winkel).

Sind g und g' zwei parallele Geraden und h eine beliebige andere Gerade, dann gilt $\measuredangle\left(g;\ h\right) = \measuredangle\left(g';\ h\right)$.

Beweis: Dies ist nichts anderes als der Stufenwinkelsatz (Fig. 6).

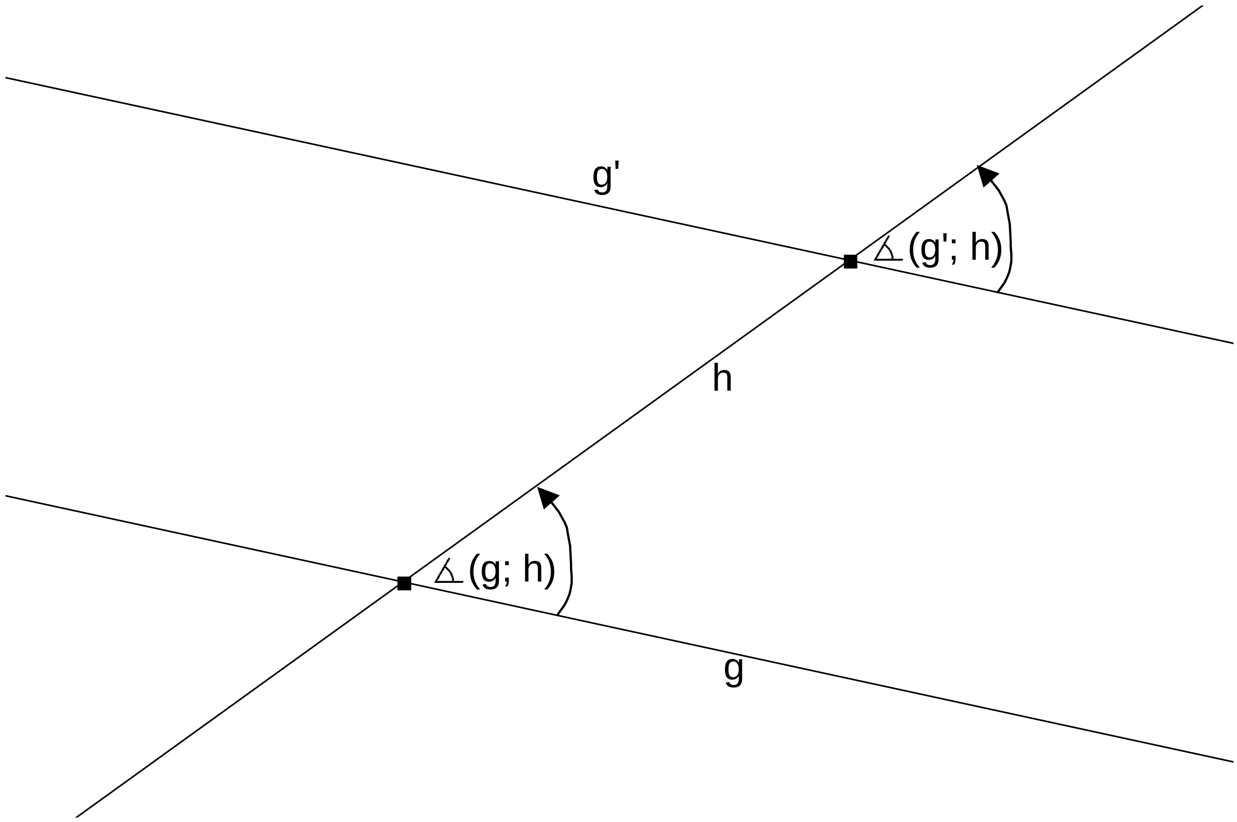

Fig. 6

Wegen $\measuredangle\left(g;\ h\right) = -\measuredangle\left(h;\ g\right)$ und $\measuredangle\left(g';\ h\right) = -\measuredangle\left(h;\ g'\right)$ ist also auch $\measuredangle\left(h;\ g\right) = \measuredangle\left(h;\ g'\right)$.

Seien g und g' zwei parallele Geraden und h und h' zwei parallele Geraden. Dann gilt $\measuredangle\left(g;\ h\right) = \measuredangle\left(g';\ h'\right)$.

Beweis: Wegen $g \parallel g'$ und $h \parallel h'$ ist $\measuredangle\left(g;\ h\right) = \measuredangle\left(g;\ h'\right) = \measuredangle\left(g';\ h'\right)$.

Das heißt: Der Winkel zwischen zwei Geraden ist immer gleich dem Winkel zwischen zwei jeweils zu ihnen parallelen Geraden. Oder: Winkel mit parallelen Schenkeln sind gleich groß.

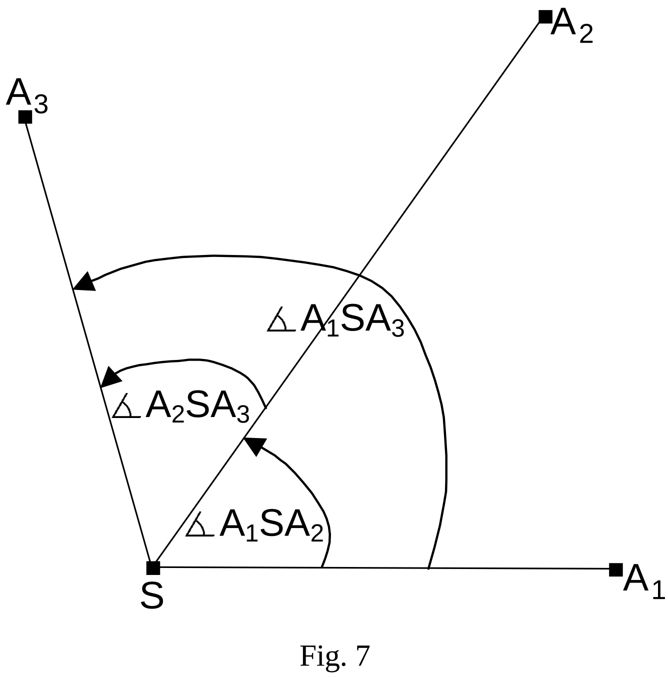

Fig. 7

Jetzt kommen wir zu den additiven Eigenschaften von Kreiswinkeln. Kreiswinkel sind gerichtete Winkel modulo 180°; folglich gilt $\measuredangle A_1SA_2 + \measuredangle A_2SA_3 = \measuredangle A_1SA_3$ für beliebige Punkte $A_1,\ A_2,\ A_3$ und S.

(Siehe Fig. 7.)

Durch mehrfache Anwendung dieser Gleichung bekommt man

$$\measuredangle A_1SA_2 + \measuredangle A_2SA_3 + \ldots + \measuredangle A_{n-1}SA_n = \measuredangle A_1SA_n \tag{1}$$

für beliebige Punkte $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ und S. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, die wiederum nur eingeschränkt für gewöhnliche ungerichtete Winkel gilt.

Wegen $\measuredangle A_1SA_n = -\measuredangle A_nSA_1$ können wir unsere Gleichung auch umschreiben zu

$$\measuredangle A_1SA_2 + \measuredangle A_2SA_3 + \ldots + \measuredangle A_{n-1}SA_n = -\measuredangle A_nSA_1,$$

also zu

$$\measuredangle A_1SA_2 + \measuredangle A_2SA_3 + \ldots + \measuredangle A_{n-1}SA_n + \measuredangle A_nSA_1 = 0°. \tag{2}$$

Betrachten wir jetzt n beliebige Geraden $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$. Wir wollen zeigen:

$$\measuredangle\left(g_1;\ g_2\right) + \measuredangle\left(g_2;\ g_3\right) + \ldots + \measuredangle\left(g_{n-1};\ g_n\right) = \measuredangle\left(g_1;\ g_n\right) \tag{3}$$

und

$$\measuredangle\left(g_1;\ g_2\right) + \measuredangle\left(g_2;\ g_3\right) + \ldots + \measuredangle\left(g_{n-1};\ g_n\right) + \measuredangle\left(g_n;\ g_1\right) = 0°. \tag{4}$$

Beweis: Haben die Geraden $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$ einen gemeinsamen Punkt $S,$ dann sind diese Gleichungen offensichtlich, denn sind $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ beliebige Punkte auf den Geraden $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n,$ dann ist $\measuredangle\left(g_k;\ g_m\right) = \measuredangle A_kSA_m$ für beliebige k und $m,$ und die Gleichungen (3) und (4) sind nur Umschreibungen der Gleichungen (1) und (2).

Haben die Geraden $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$ keinen gemeinsamen Punkt, dann betrachten wir einen beliebigen Punkt S und die Parallelen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ zu den Geraden $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$ durch S. Die Geraden $h_1, h_2, \ldots, h_n$ haben einen gemeinsamen Punkt; daher gilt für sie

$$\measuredangle\left(h_1;\ h_2\right) + \measuredangle\left(h_2;\ h_3\right) + \ldots + \measuredangle\left(h_{n-1};\ h_n\right) = \measuredangle\left(h_1;\ h_n\right)$$

und

$$\measuredangle\left(h_1;\ h_2\right) + \measuredangle\left(h_2;\ h_3\right) + \ldots + \measuredangle\left(h_{n-1};\ h_n\right) + \measuredangle\left(h_n;\ h_1\right) = 0°.$$

Aber da $\measuredangle\left(g_k;\ g_m\right) = \measuredangle\left(h_k;\ h_m\right)$ für beliebige k und m gilt (denn $g_k \parallel h_k$ und $g_m \parallel h_m$), folgen daraus die Gleichungen (3) und (4).

Damit sind die Formeln (3) und (4) bewiesen.

Bemerkung: Für $n = 3$ bedeutet die Gleichung (4), daß die Summe der Winkel (Kreiswinkel) eines Dreiecks gleich 0° ist (Fig. 8).

Diesen Satz kann man auch in der folgenden Form schreiben: Für Kreiswinkel gilt: Die Winkelsumme in einem Dreieck ist 0°, d. h. für drei beliebige Punkte $A,\ B$ und C gilt $\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = 0°$.

Beweis: Wir haben $\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = \measuredangle\left(CA;\ AB\right) + \measuredangle\left(AB;\ BC\right) + \measuredangle\left(BC;\ CA\right) = 0°$.

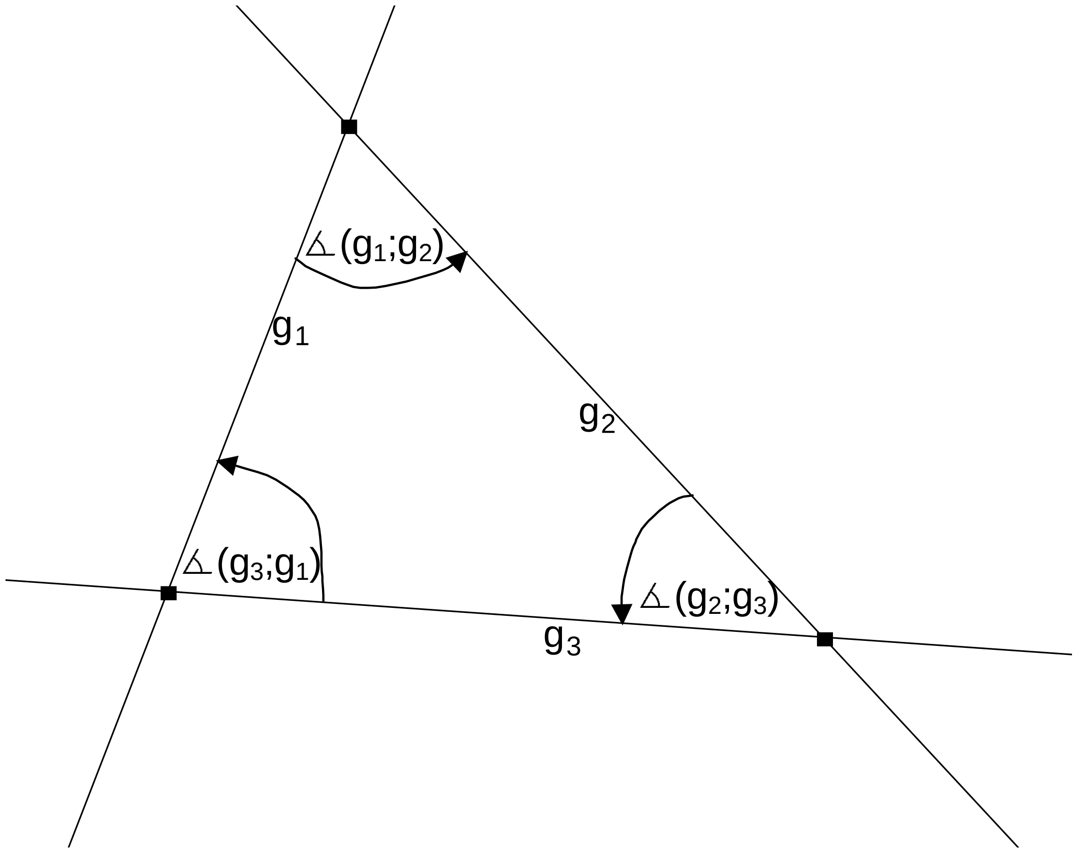

Fig. 8

Drei Punkte A, B und C liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\measuredangle ABC = 0°$ ist.

Es ist bekannt, daß (wie jeder Typ von gerichteten Winkeln) Kreiswinkel bei einer Geradenspiegelung ihr Vorzeichen ändern. Das heißt: Sind A, B und S drei Punkte, und A', B' und S' ihre Spiegelbilder an irgendeiner Geraden, dann gilt $\measuredangle A'S'B' = -\measuredangle ASB$.

Kreiswinkel und Kreise

Jetzt kommen wir zu der wichtigsten Eigenschaften von Kreiswinkeln, die ihnen auch den Namen gegeben hat: der Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel.

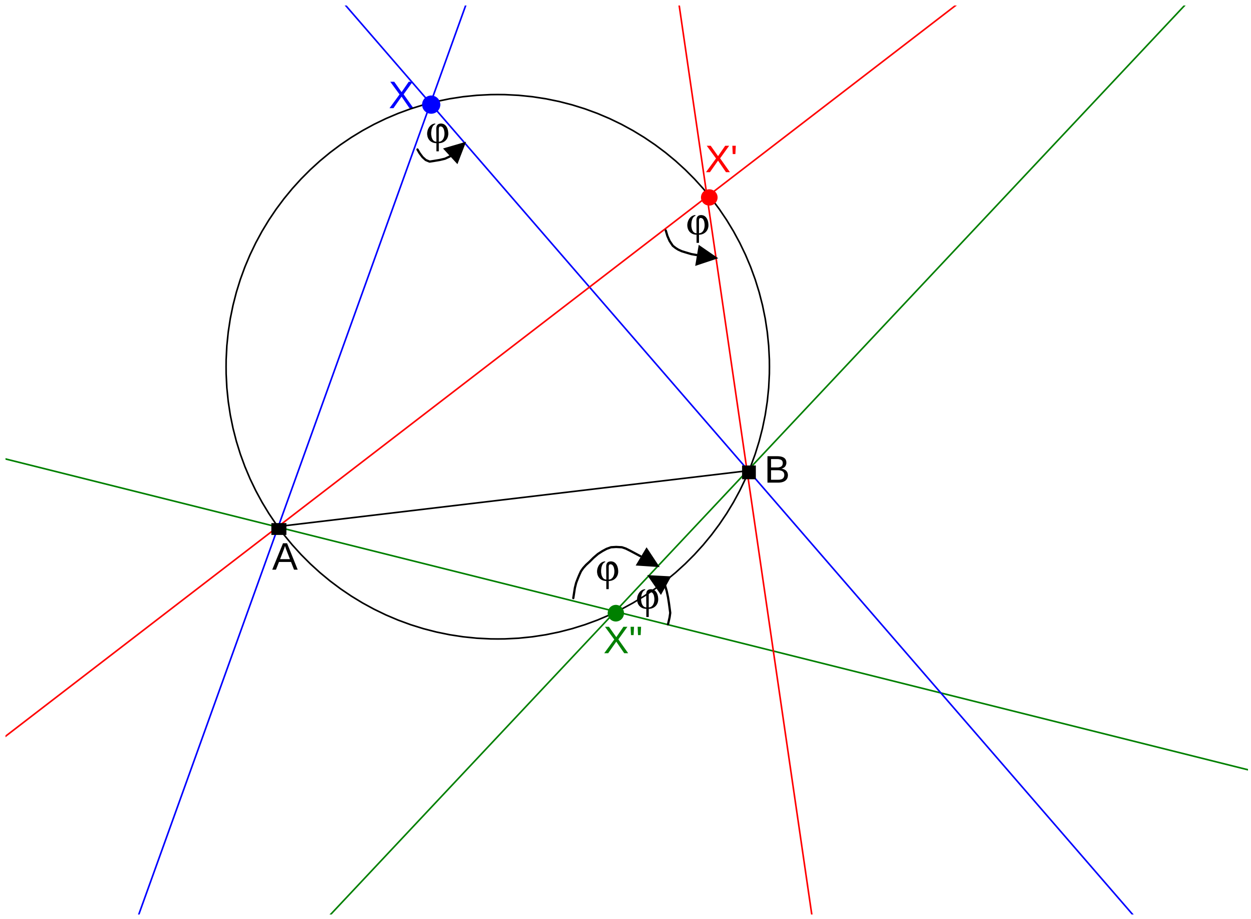

Fig. 9

Seien A und B zwei Punkte, und sei ein beliebiger Winkel φ gegeben. Die Menge aller Punkte $X,$ für die der Euklidische, nicht gerichtete Winkel AXB gleich φ ist, ist bekanntlich die Vereinigung zweier Kreisbögen durch die Punkte A und B. Für Kreiswinkel gilt: Die Menge aller Punkte $X,$ für die der Kreiswinkel AXB gleich φ ist, ist ein Kreis durch die Punkte A und B. [Dabei schließen wir die Punkte A und B aus; der Umfangswinkelsatz gilt aber in der Form des Sehnentangentenwinkelsatzes auch für sie. Siehe weiter unten.] (Siehe Fig. 9.)

Beweis: Wir haben, im Grunde genommen, folgendes zu beweisen: Sind X und X' zwei Punkte, dann gilt $\measuredangle AXB = \measuredangle AX'B$ genau dann, wenn die Punkte $A,\ B,\ X$ und X' auf einem Kreis liegen.

Wir führen eine einfache Fallunterscheidung durch:

Erster Fall: Die Punkte X und X' liegen in einer Halbebene der Geraden AB. Die Winkel AXB und $AX'B$ sind genau dann gleich groß und gleich orientiert, wenn die Punkte $A,\ B,\ X$ und X' auf einem Kreis liegen. (Umfangswinkelsatz mit Umkehrung.)

Zweiter Fall: Die Punkte X und X' liegen in verschiedenen Halbebenen der Geraden AB. Die (Euklidischen, nicht gerichteten) Winkel AXB und $BX'A$ sind genau dann gleich orientiert und ergänzen sich zu $180°,$ wenn die Punkte $A,\ B,\ X$ und X' auf einem Kreis liegen. (Sehnenvierecksatz mit Umkehrung.) In anderen Worten: $\measuredangle AXB + \measuredangle BX'A = 180°$ gilt genau dann, wenn die Punkte $A,\ B,\ X$ und X' auf einem Kreis liegen. Aber wegen $180° = 0°$ (denn wir rechnen mit Kreiswinkeln) und $\measuredangle BX'A = -\measuredangle AX'B$ ist $\measuredangle AXB + \measuredangle BX'A = 180°$ äquivalent zu $\measuredangle AXB - \measuredangle AX'B = 0°,$ also zu $\measuredangle AXB = \measuredangle AX'B$. Also gilt auch diesmal $\measuredangle AXB = \measuredangle AX'B$ genau dann, wenn die Punkte $A,\ B,\ X$ und X' auf einem Kreis liegen.

Damit ist der Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel bewiesen.

Bemerkung: Wir haben gerade bewiesen, daß die Menge aller Punkte $X,$ für die $\measuredangle AXB = \varphi$ ist, ein Kreis durch A und B ist. Die Menge aller Punkte $Y,$ für die $\measuredangle BYA = \varphi$ ist, ist dann folglich das Spiegelbild dieses Kreises an der Geraden AB (denn $\measuredangle BYA = -\measuredangle AYB$).

Es soll noch kurz gezeigt werden, daß auch ein Sehnentangentenwinkelsatz für Kreiswinkel gilt:

Für vier Punkte $A,\ B,\ X$ und $X',$ die auf einem Kreis liegen, gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle AXB = \measuredangle AX'B$. In dem Grenzfall $X' = B$ gibt es zwar keinen Winkel $\measuredangle AX'B$ mehr, aber man kann sich darunter den Winkel $\measuredangle\left(AX';\ X'B\right) = \measuredangle\left(AB;\ BB\right)$ vorstellen, wobei die Gerade BB als die Tangente an den Kreis in dem Punkt B zu verstehen ist. (Siehe Fig. 10.)

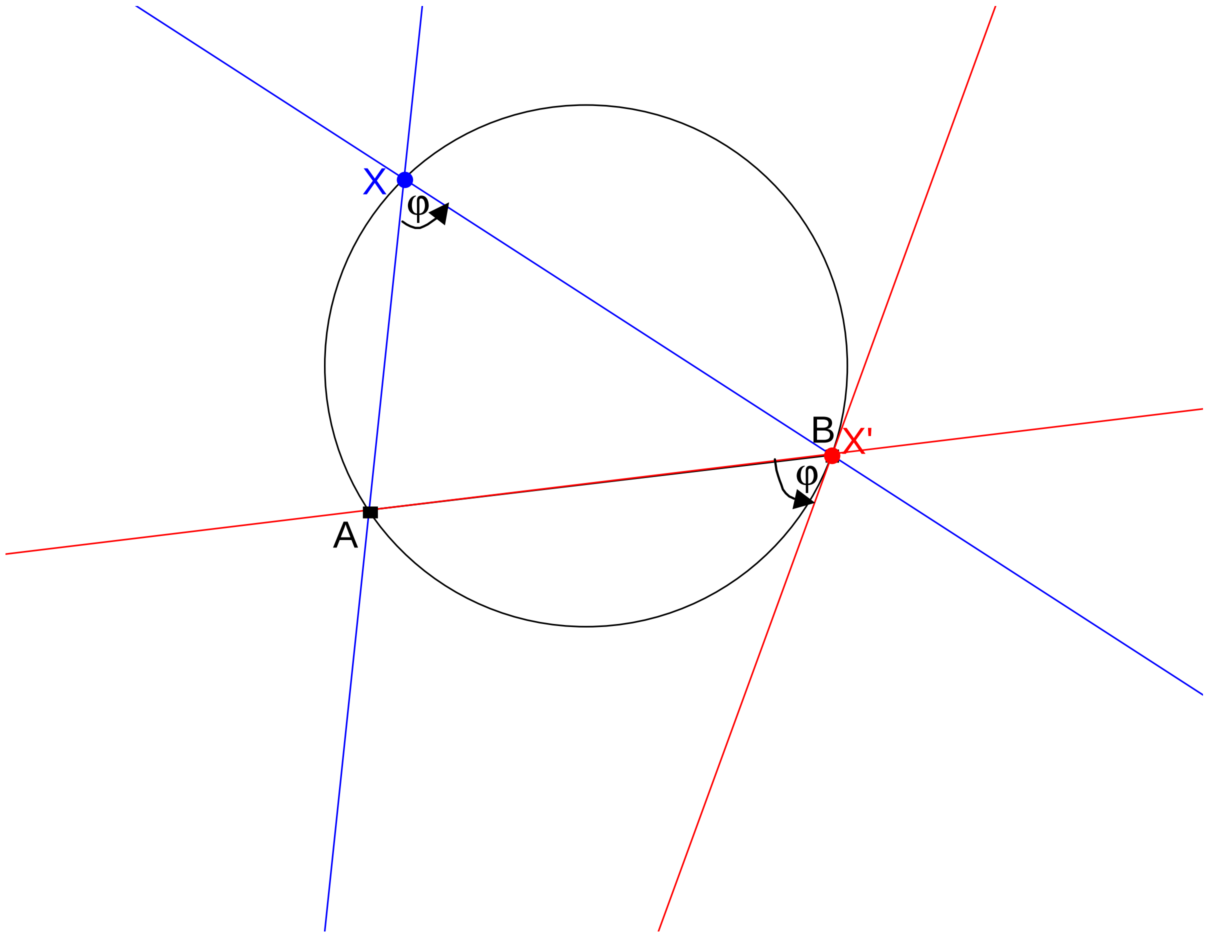

Fig. 10

Genauso wie für gewöhnliche Euklidische Winkel gilt für Kreuze der Satz von Thales: Sind zwei Punkte A und B gegeben, dann ist die Menge aller Punkte C, für die $\measuredangle ACB = 90°$ gilt, der Kreis mit dem Durchmesser AB. In der Tat ist der Kreiswinkel $\measuredangle ACB$ genau dann gleich $90°$, wenn der Euklidische Winkel $\measuredangle ACB$ gleich $90°$ ist (d. h., wenn $AC \perp BC$ ist), sodaß wir einfach nur den altbekannten Satz von Thales in die Kreiswinkel-Sprache "übersetzt" haben.

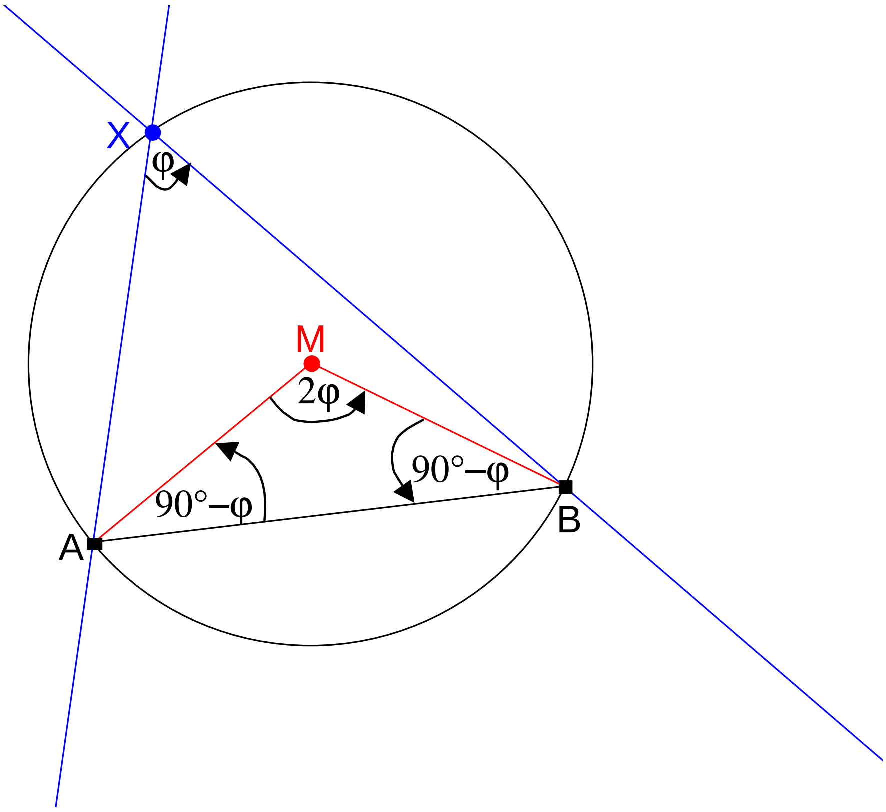

Fig. 11

Kommen wir nun zu dem Mittelpunktswinkelsatz für Kreiswinkel (Fig. 11): Seien $A,\ B$ und X drei Punkte auf einem Kreis und M der Mittelpunkt dieses Kreises. Sei $\measuredangle AXB = \varphi$. Dann gilt $\measuredangle AMB = 2\varphi$, $\measuredangle BAM = 90° - \varphi$ und $\measuredangle MBA = 90° - \varphi$.

Der *Beweis* von diesem Satz sei hier aufgeführt, weil er sich von einigen Beweisen für Euklidische Winkel unterscheidet. [In der Tat wird in einigen Beweisen des Mittelpunktswinkelsatzes für Euklidische Winkel sogar zuerst der Winkel $\measuredangle AMB = 2\varphi$ berechnet, und dann wird mithilfe des gleichschenkligen Dreiecks AMB der Winkel $\measuredangle BAM$ als $\frac{1}{2}(180° - \measuredangle AMB)$ gewonnen. Dies ist aber für Kreiswinkel unzulässig, weil man sie nicht teilen kann!] Sei A' der Punkt, der auf unserem Kreis dem Punkt A diametral gegenüberliegt. Nach dem Satz von Thales gilt dann $\measuredangle A'BA = 90°$; nach dem Umfangswinkelsatz ist andererseits $\measuredangle AA'B = \measuredangle AXB$; somit folgt aus der Winkelsumme im Dreieck $AA'B$ schließlich

$$\measuredangle BAA' + \measuredangle AA'B + \measuredangle A'BA = 0°,$$

also $\measuredangle BAA' = -\measuredangle AA'B - \measuredangle A'BA = -\measuredangle AXB - 90° = 90° - \measuredangle AXB$ (denn $90° = -90°$). Da aber der Punkt A' dem Punkt A diametral gegenüberliegt, liegen die Punkte $A,\ M$ und A' auf einer Geraden, und es folgt $\measuredangle BAM = 90° - \measuredangle AXB$. Analog ist $\measuredangle ABM = 90° - \measuredangle BXA$, also $\measuredangle MBA = -\measuredangle ABM = -(90° - \measuredangle BXA) = -(90° + \measuredangle AXB) = -90° - \measuredangle AXB = 90° - \measuredangle AXB$ (denn wiederum $90° = -90°$). Mit der Bezeichnung $\measuredangle AXB = \varphi$ ist also $\measuredangle BAM = 90° - \varphi$ und $\measuredangle MBA = 90° - \varphi$.

Nach der Winkelsumme im Dreieck ABM gilt nun $\measuredangle AMB + \measuredangle MBA + \measuredangle BAM = 0°$, also

$$\measuredangle AMB = -\measuredangle MBA - \measuredangle BAM = -(90° - \varphi) - (90° - \varphi) = -180° + 2\varphi = 2\varphi,$$

womit der Mittelpunktswinkelsatz bewiesen ist.

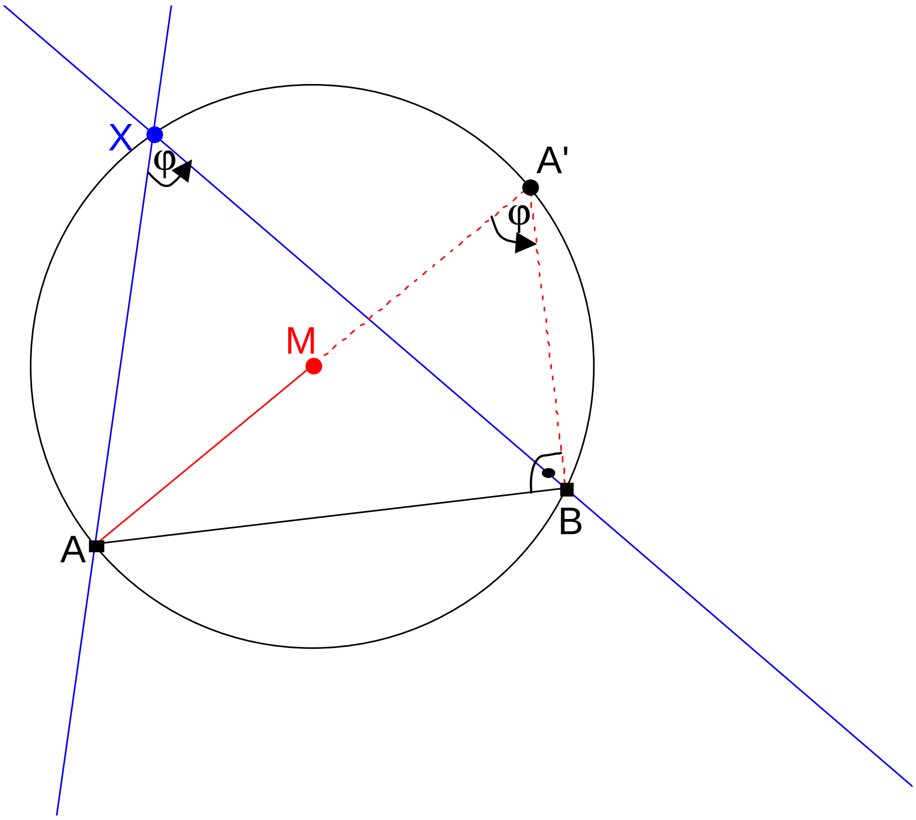

Fig. 12

Kreiswinkel erlauben ein einfaches Kriterium für gleichsinnig und gegensinnig ähnliche Dreiecke:

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind gleichsinnig ähnlich, wenn $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ und $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A'$ ist.

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind gegensinnig ähnlich, wenn $\measuredangle CAB = -\measuredangle C'A'B'$, $\measuredangle ABC = -\measuredangle A'B'C'$ und $\measuredangle BCA = -\measuredangle B'C'A'$ ist.

Bevor wir nun zu den Anwendungen von Kreiswinkeln kommen, zeigen wir noch zwei Nachteile dieses Winkeltyps auf:

Erstens kann man zwar Tangense und Kotangense von Kreiswinkeln nehmen (denn tan und cot haben die Periode 180°), aber keine Sinuse und Kosinuse (denn $\sin 90°$ ist nicht $\sin 270°$).

Ein anderer Nachteil wiegt schwerer: Man kann Kreiswinkel nicht gescheit dividieren. Für jeden Kreiswinkel φ gibt es genau *zwei* Winkel ψ, für die $2\psi = \varphi$ ist. So ist beispielsweise $2 \bullet 0° = 0°$ und $2 \bullet 90° = 0°$. Damit zusammenhängend soll noch angemerkt werden, daß Kreuze keine Ordnungsrelation zulassen, d. h. sind $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ zwei Kreuze, dann kann man keine sinnvolle Definition geben, wann $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ und wann $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$ ist. Deshalb sind Kreuze meist sehr ungeeignet für geometrische Ungleichungen; was ansonsten schon deshalb klar ist, weil der Sinn von Kreuzen darin besteht, sich bei geometrischen Überlegungen möglichst wenig auf Anordnungsbeziehungen berufen zu müssen, doch Ungleichungen sind immer an Anordnungsbeziehungen gebunden.

Beispielaufgaben

Jetzt werden wir einige Beispielaufgaben aus der Dreiecksgeometrie mit Hilfe von Kreiswinkeln durcharbeiten.

Aufgabe 1: Sei H der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC. Man beweise, daß die Spiegelbilder A', B' und C' des Punktes H an den Dreiecksseiten BC, CA bzw. AB auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen.

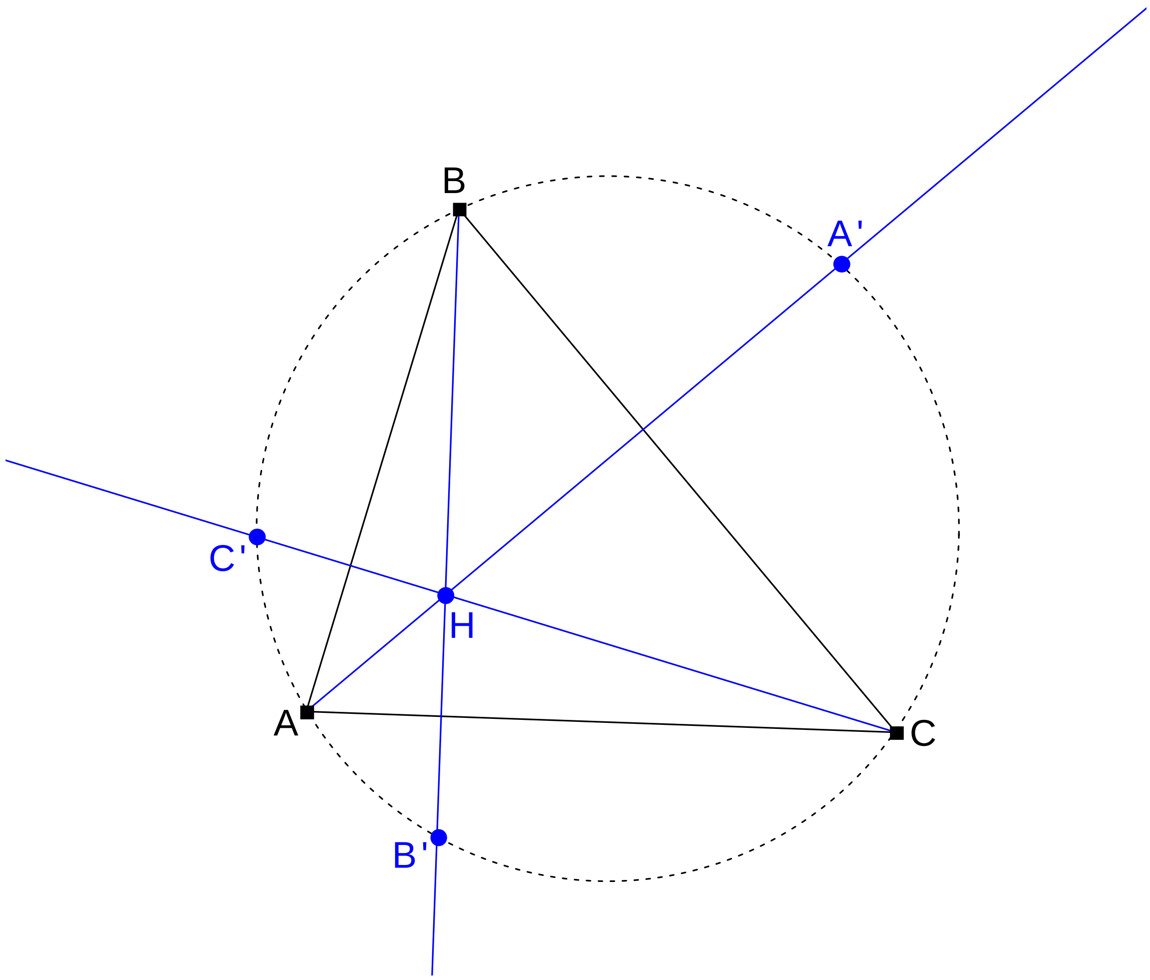

Fig. 13

Lösung: Da der Punkt H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, gilt $AH \perp BC,\ BH \perp CA$ und $CH \perp AB$. Damit ist

$$\begin{aligned}\measuredangle BHC &= \measuredangle\left(BH;\ CH\right) = \measuredangle\left(BH;\ CA\right) + \measuredangle\left(CA;\ AB\right) + \measuredangle\left(AB;\ CH\right)\\ &= 90^\circ + \measuredangle\left(CA;\ AB\right) + 90^\circ = 180^\circ + \measuredangle\left(CA;\ AB\right) = \measuredangle\left(CA;\ AB\right) = \measuredangle CAB.\end{aligned}$$

Da aber der Punkt A' das Spiegelbild des Punktes H an der Seite BC ist (und die Punkte B und C jeweils die Spiegelbilder von sich selbst sind), gilt $\measuredangle BA'C = -\measuredangle BHC$, also $\measuredangle BA'C = -\measuredangle CAB = \measuredangle BAC$. Also liegen die Punkte $A,\ B,\ C$ und A' auf einem Kreis. Das heißt, der Punkt A' liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. Analog zeigt man, daß die Punkte B' und C' auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Wir bemerken, was typisch für Beweise unter Verwendung von Kreiswinkeln ist: Der Beweis benötigt keine Zeichnung (Fig. 13 war zum Verständnis des Satzes hilfreich, aber nicht zum Beweis nötig), und er gilt für spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke gleichermaßen. [Dieser Beweis deckt trotzdem nicht alle Fälle. Grenzfälle sind im allgemeinen einfacher zu zeigen. (Ein Grenzfall bei dieser Aufgabe wäre beispielsweise der Fall eines rechtwinkligen Dreiecks ABC; der Höhenschnittpunkt H wäre dann die Ecke mit dem rechten Winkel.)] Dies sind sehr mächtige Vorteile gegenüber der Verwendung von Euklidischen Winkeln.

Gehen wir zur nächsten Aufgabe über:

Aufgabe 2: Sei P ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC. Die Fußpunkte der Lote von dem Punkt P auf die Geraden $BC,\ CA$ und AB seien $X,\ Y$ bzw. Z. Man beweise: Die Punkte $X,\ Y$ und Z liegen genau dann auf einer Geraden, wenn der Punkt P auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.

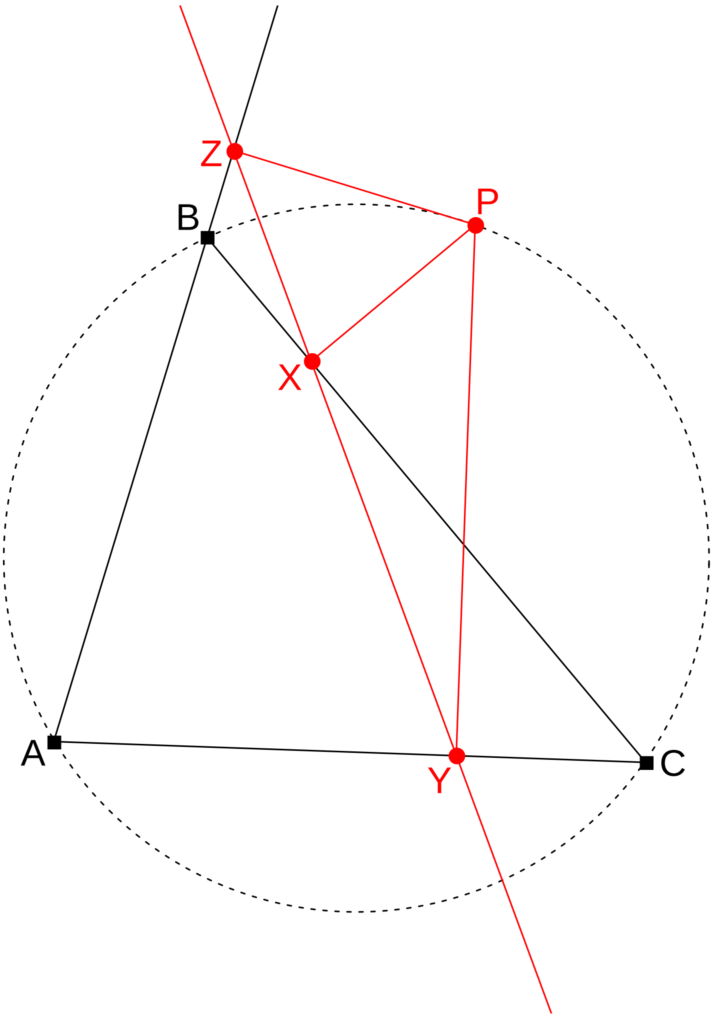

Fig. 14

Lösung: Wegen $\measuredangle PXC = 90°$ und $\measuredangle PYC = 90°$ liegen die Punkte X und Y auf dem Kreis mit dem Durchmesser PC (Satz von Thales). Das heißt, die Punkte $P,\ C,\ X$ und Y liegen auf einem Kreis; nach dem Umfangswinkelsatz gilt somit $\measuredangle PXY = \measuredangle PCY$, also $\measuredangle PXY = \measuredangle PCA$. Analog ist $\measuredangle PXZ = \measuredangle PBA$. Daraus folgt $\measuredangle ZXY = \measuredangle ZXP + \measuredangle PXY = -\measuredangle PXZ + \measuredangle PXY = -\measuredangle PBA + \measuredangle PCA$. Folglich liegen die Punkte $X,\ Y$ und Z genau dann auf einer Geraden, wenn $\measuredangle ZXY = 0°$ gilt, d. h. wenn $-\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = 0°$ ist, d. h. wenn $\measuredangle PBA = \measuredangle PCA$ ist, d. h. wenn die Punkte $A,\ B,\ C$ und P auf einem Kreis liegen, d. h. wenn der Punkt P auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Wenn der Punkt P auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt, heißt die Gerade XYZ die **Simsongerade** des Punktes P in bezug auf das Dreieck. [Statt ”Simsongerade” wird öfters der historisch korrekte Begriff ”Wallacegerade” verwendet.] Der folgende **Lemoinesatz** (nach [5]) liefert eine der vielen besonderen Eigenschaften von Simsongeraden:

Aufgabe 3: Angenommen, der Punkt P in Aufgabe 2 liege auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. Sei d der Abstand von P zu der Simsongeraden XYZ. Man beweise die Gleichung

$$PA \bullet PX = PB \bullet PY = PC \bullet PZ = 2rd,$$

wobei r der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist.

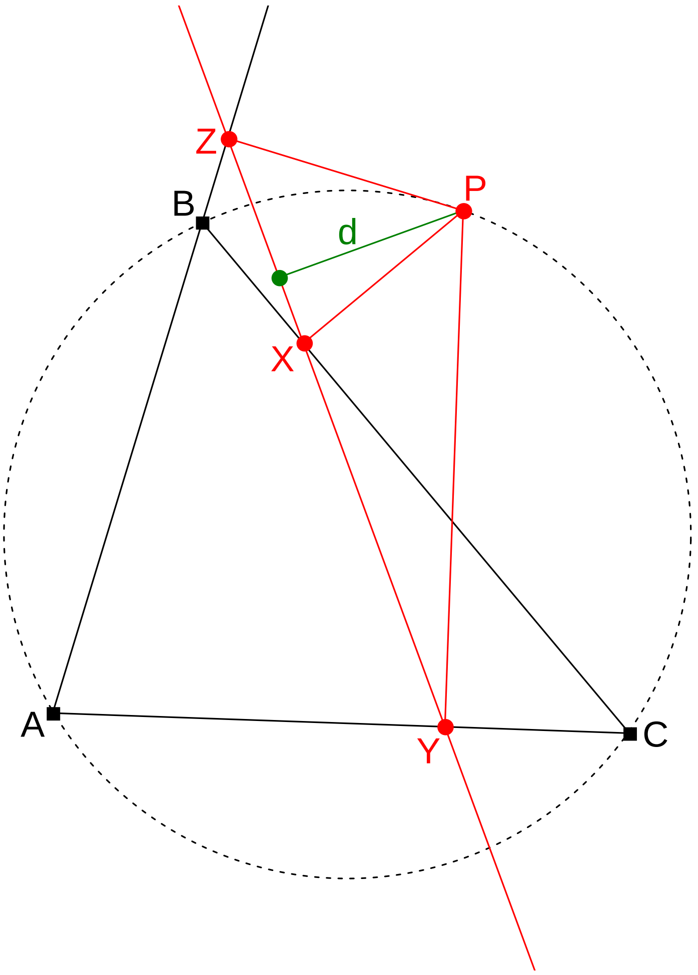

Fig. 15

Lösung: Statt der trigonometrischen Lösung in [5] geben wir hier einen etwas kürzeren synthetischen Beweis. In der Lösung der vorigen Aufgabe hatten wir $\measuredangle PXY = \measuredangle PCA$ gefunden. Da der Punkt P auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt, gilt nun $\measuredangle PCA = \measuredangle PBA$ (Umfangswinkel), und daher $\measuredangle PXY = \measuredangle PBA$. Analog ist $\measuredangle PYX = \measuredangle PAB$, also $\measuredangle XYP = \measuredangle BAP$. Mithin sind die Dreiecke PXY und PBA ähnlich (und zwar gleichsinnig ähnlich, was für uns aber nicht von Bedeutung sein wird). Aus dieser Ähnlichkeit folgt, daß sich der Umkreisdurchmesser des Dreiecks PXY zum Umkreisdurchmesser des Dreiecks PBA genauso verhält wie die von P ausgehende Höhe des Dreiecks PXY zu der von P ausgehenden Höhe des Dreiecks PBA.

Da aber die Punkte X und Y auf dem Kreis mit dem Durchmesser PC liegen, ist PC der Umkreisdurchmesser des Dreiecks PXY. Der Umkreisdurchmesser des Dreiecks PBA ist natürlich $2r$ (denn der Umkreis des Dreiecks PBA ist gleichzeitig Umkreis des ΔABC). Die von P ausgehende Höhe des Dreiecks PXY ist d, und die von P ausgehende Höhe des Dreiecks PBA ist PZ. Damit ist

$$\frac{PC}{2r} = \frac{d}{PZ},$$

also $PC \bullet PZ = 2rd$. Analog ist $PA \bullet PX = 2rd$ und $PB \bullet PY = 2rd$. Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Die nächste Aufgabe wird eine Variation von Aufgabe 2 sein:

Aufgabe 4: Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. Die Spiegelbilder von P an den Seiten BC, CA bzw. AB seien X', Y' bzw. Z'. Man beweise: Die Punkte X', Y' und Z' und der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden.

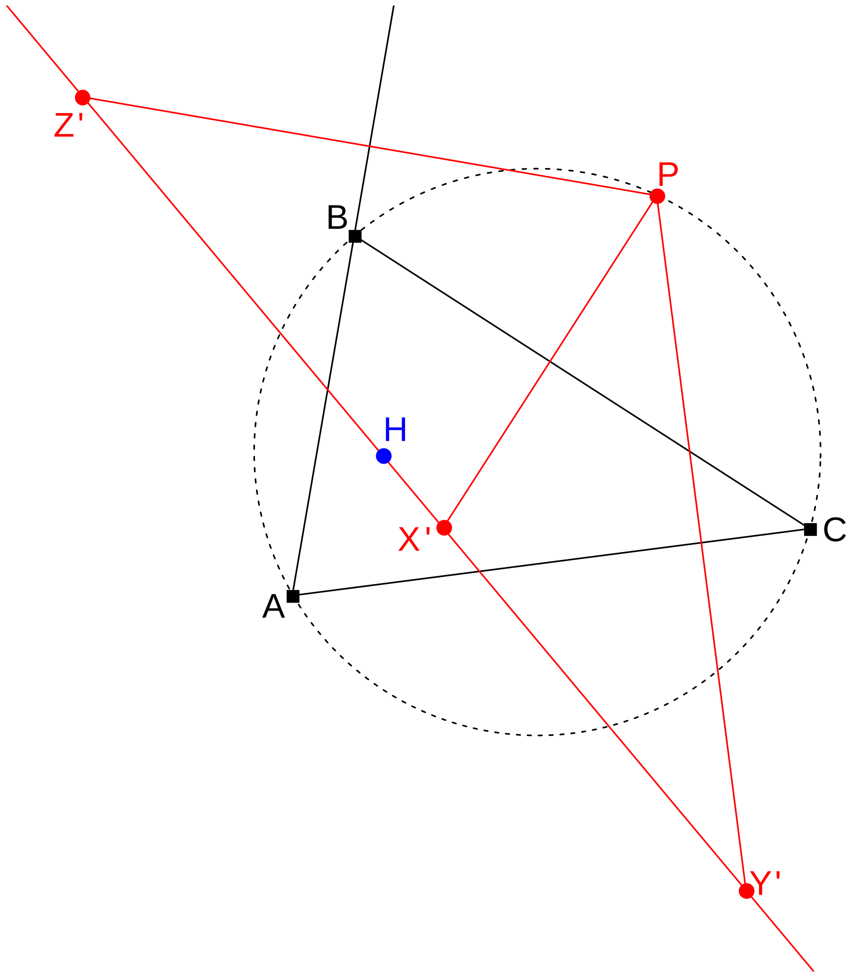

Fig. 16

Lösung: Wir müssen hier die Kollinearität von vier Punkten beweisen. Beginnen wir erstmals mit den Punkten H, Y' und Z'.

Erinnern wir uns, daß die Spiegelbilder B' und C' des Punktes H an den Dreiecksseiten CA bzw. AB auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen (Aufgabe 1). Die Punkte Y', H und B' sind die Spiegelbilder der Punkte P, B' bzw. H an der Geraden CA; also ist $\measuredangle Y'HB' = -\measuredangle PB'H$, oder $\measuredangle Y'HB' = -\measuredangle PB'B = -\measuredangle PAB$ (denn $\measuredangle PB'B = \measuredangle PAB$ als Umfangswinkel). Genauso findet man $\measuredangle Z'HC' = -\measuredangle PAC$. Nun ist

$$\begin{aligned}\measuredangle Y'HZ' &= \measuredangle Y'HB' + \measuredangle B'HC' + \measuredangle C'HZ' = \measuredangle Y'HB' + \measuredangle BHC - \measuredangle Z'HC' \\ &= -\measuredangle PAB + \measuredangle BHC - (-\measuredangle PAC) = \measuredangle BHC - (\measuredangle PAB - \measuredangle PAC) \\ &= \measuredangle BHC - \measuredangle CAB.\end{aligned}$$

Aber aus der Lösung der Aufgabe 1 wissen wir, daß $\measuredangle BHC = \measuredangle CAB$ ist. Also ist $\measuredangle Y'HZ' = 0°$, und die Punkte H, Y' und Z' liegen auf einer Geraden. Ebenso liegen die Punkte H, Z' und X' auf einer Geraden. Also liegen alle vier Punkte X', Y', Z' und H auf einer Geraden, und die Aufgabe ist gelöst.

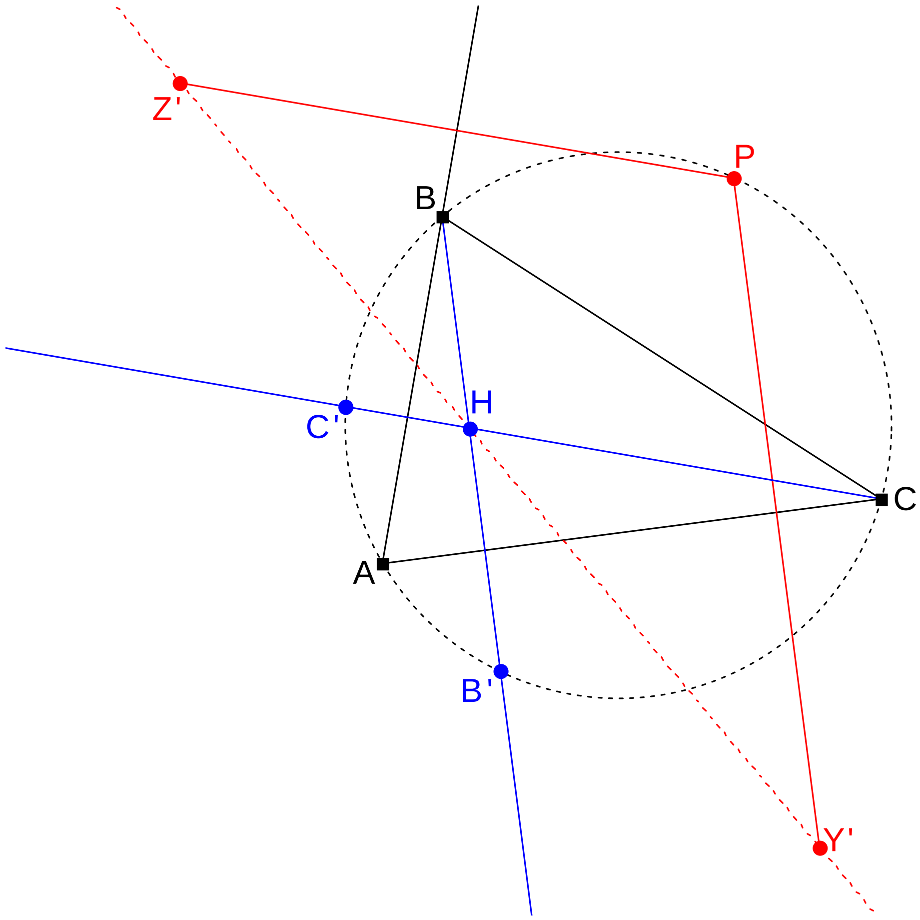

Fig. 17

Die Gerade $HX'Y'Z'$ heißt die **Steinergerade** des Punktes P in bezug auf das Dreieck ABC.

Man erkennt leicht, daß die Simsongerade und die Steinergerade eines Punktes P sehr eng miteinander verknüpft sind: Überlagern wir die Zeichnungen Fig. 14 und Fig. 16, sehen wir, daß die Punkte $X,\ Y$ und Z die Mittelpunkte der Strecken $PX',\ PY'$ bzw. PZ' sind. Das heißt, die Simsongerade (die durch die Punkte $X,\ Y$ und Z geht) ist das Bild der Steinergerade (durch die Punkte $X',\ Y'$ und Z') bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum P und dem Faktor $\frac{1}{2}$. Daher sind die Simsongerade und die Steinergerade eines Punktes P stets zueinander parallel. Außerdem wissen wir, daß der Höhenschnittpunkt H auf der Steinergeraden liegt, und schließen daraus, daß der Mittelpunkt der Strecke PH auf der Simsongeraden liegt. Dieses Ergebnis formuliert man oft folgendermaßen:

Die Simsongerade eines auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegenden Punktes P halbiert die Strecke $PH,$ wobei H der Höhenschnittpunkt des ΔABC ist.

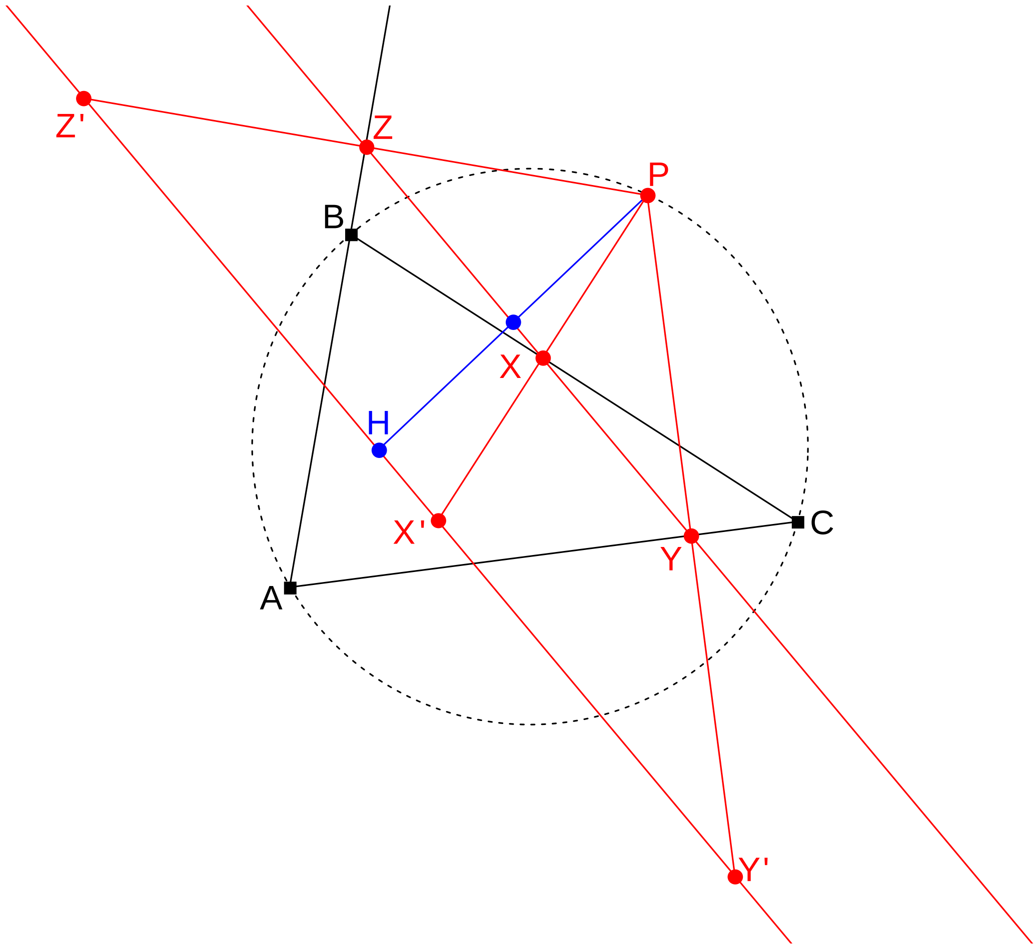

Fig. 18

Die letzte Aufgabe betrifft wieder Lotfußpunkte:

Aufgabe 5: Sei P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, aber nicht auf dem Umkreis. Die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden BC, CA und AB seien X, Y bzw. Z. Die Geraden AP, BP und CP schneiden den Umkreis des Dreiecks ABC zum zweiten Mal in den Punkten D, E bzw. F. Man zeige: Die Dreiecke XYZ und DEF sind gleichsinnig ähnlich.

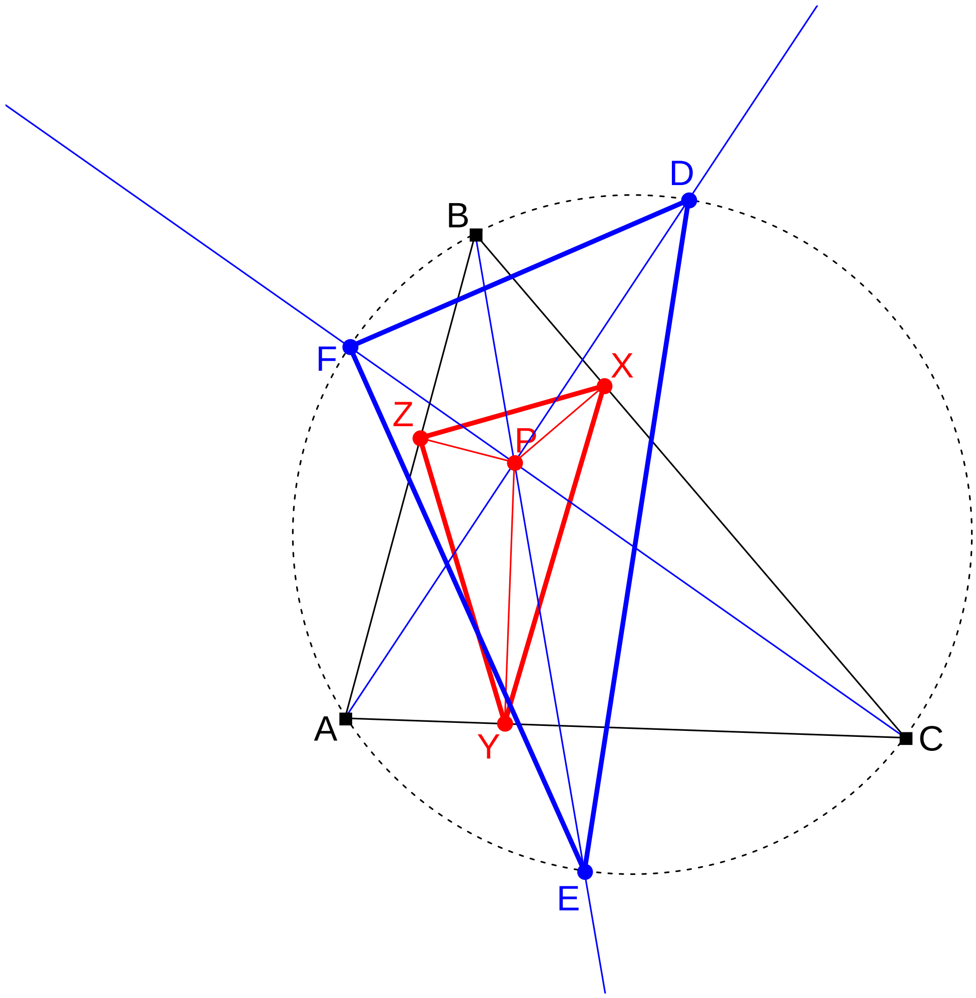

Fig. 19

Lösung: Wegen $\measuredangle PXC = 90°$ und $\measuredangle PYC = 90°$ liegen die Punkte X und Y auf dem Thaleskreis über der Strecke PC; also liegen die Punkte P, C, X und Y auf einem Kreis, und nach dem Umfangswinkelsatz folgt $\measuredangle PXY = \measuredangle PCY$, also $\measuredangle PXY = \measuredangle FCA$. Analog ist $\measuredangle PXZ = \measuredangle EBA$. Nun haben wir

$$\begin{aligned}\measuredangle ZXY &= \measuredangle ZXP + \measuredangle PXY = -\measuredangle PXZ + \measuredangle PXY = -\measuredangle EBA + \measuredangle FCA\\ &= -\measuredangle EDA + \measuredangle FDA \qquad\qquad \text{(Umfangswinkel)}\\ &= \measuredangle FDA + \measuredangle ADE = \measuredangle FDE.\end{aligned}$$

Genauso zeigt man $\measuredangle XYZ = \measuredangle DEF$ und $\measuredangle YZX = \measuredangle EFD$. Daher sind die Dreiecke XYZ und DEF gleichsinnig ähnlich, was zu beweisen war.

Lösung der $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag

Unsere letzte Beispielaufgabe wird die $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag sein, die in [9] mithilfe von komplexen Zahlen gelöst wurde (Fig. 20):

Aufgabe 6: Gegeben seien drei unterschiedlich große Kreise, die einen gemeinsamen Schnittpunkt S haben. Im Übrigen schneiden sich die Kreise paarweise in S_{23}, S_{31} und S_{12}. Die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 der Kreise werden an den Geraden $S_{31}S_{12}$, $S_{12}S_{23}$ bzw. $S_{23}S_{31}$ gespiegelt.

Man beweise, daß das Dreieck aus den gespiegelten Mittelpunkten zum Dreieck $M_1M_2M_3$ ähnlich ist.

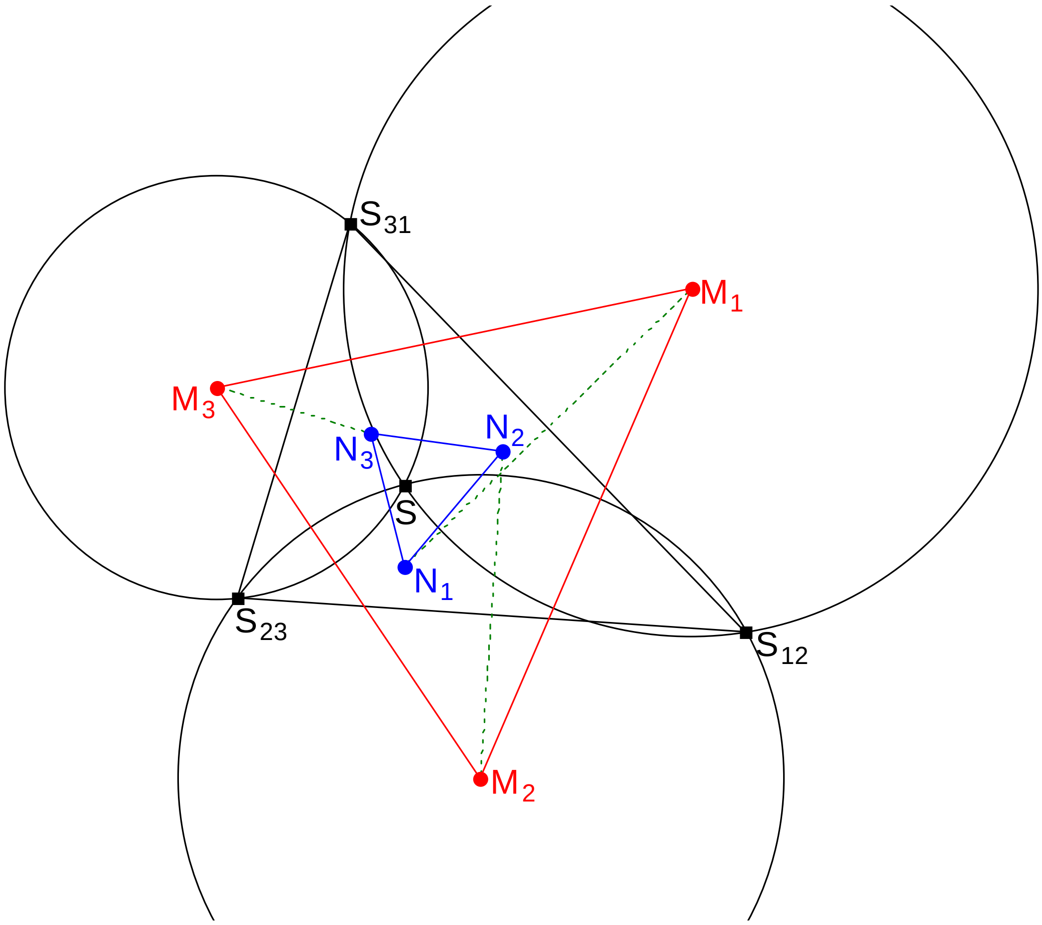

Fig. 20

Hier ist eine kürzere synthetische (d. h. rein-geometrische) *Lösung*: Im folgenden wird der Kreis durch drei Punkte $P_1,\ P_2$ und P_3 immer einfach als "Kreis $P_1P_2P_3$" bezeichnet.

Wir bezeichnen die Spiegelbilder der Kreismittelpunkte $M_1,\ M_2$ und M_3 an den Geraden $S_{31}S_{12}$, $S_{12}S_{23}$ bzw. $S_{23}S_{31}$ als $N_1,\ N_2$ bzw. N_3. Dann haben wir zu beweisen, daß die Dreiecke $N_1N_2N_3$ und $M_1M_2M_3$ ähnlich sind.

Wir werden sogar zeigen, daß diese beiden Dreiecke gegensinnig ähnlich sind.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz (Fig. 21):

Hilfssatz: Sei ABC ein Dreieck und $A',\ B'$ und C' beliebige Punkte, die der folgenden Bedingung genügen:

$$\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0°.$$

Dann gilt:

a) Die Kreise $A'BC,\ B'CA$ und $C'AB$ haben einen gemeinsamen Punkt.

b) Sind $X,\ Y$ und Z die Mittelpunkte dieser Kreise, dann gilt:

$$\measuredangle ZXY = \measuredangle BA'C; \qquad \measuredangle XYZ = \measuredangle CB'A; \qquad \measuredangle YZX = \measuredangle AC'B.$$

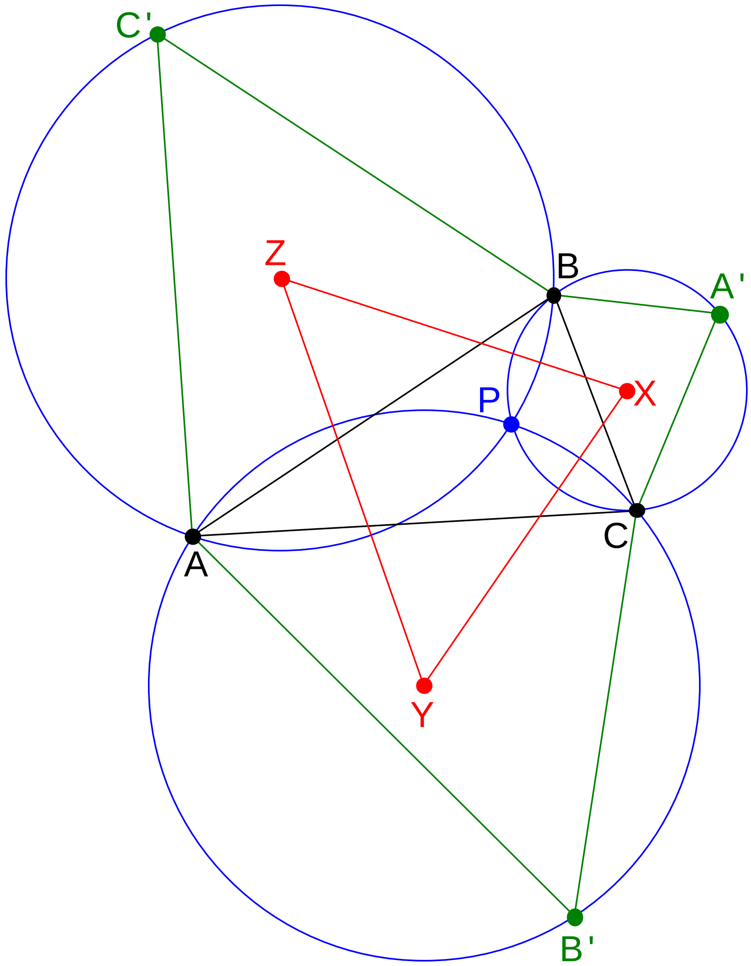

Fig. 21

Dieser Hilfssatz ist bekannt (siehe beispielsweise [2] und [3]), doch wir wollen einen *Beweis* mithilfe von Kreiswinkeln der Vollständigkeit halber und als zusätzliches Beispiel für deren Anwendung führen:

Sei P der von A verschiedene Schnittpunkt der Kreise $B'CA$ und $C'AB$ (falls sich diese Kreise berühren, sei $P = A$). Dann gilt nach dem Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel: $\measuredangle CPA = \measuredangle CB'A$ und $\measuredangle APB = \measuredangle AC'B$. Aber wegen

$$\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0° \qquad \text{und}$$
$$\measuredangle BPC + \measuredangle CPA + \measuredangle APB = 0°$$

folgt daraus auch $\measuredangle BPC = \measuredangle BA'C$. Nach der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes für Kreiswinkel liegt also der Punkt P auf dem Kreis $A'BC$. D. h., der Punkt P ist ein gemeinsamer Punkt der Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$. Damit ist der Teil **a**) des Hilfssatzes bewiesen.

Da die Zentrale zweier Kreise stets senkrecht auf der gemeinsamen Sehne steht, gilt $ZX \perp BP$ und $XY \perp CP$. Das heißt, $\measuredangle\left(ZX;\ BP\right) = 90°$ und $\measuredangle\left(CP;\ XY\right) = 90°$. Also ist

$$\begin{aligned}\measuredangle ZXY &= \measuredangle\left(ZX;\ XY\right) = \measuredangle\left(ZX;\ BP\right) + \measuredangle\left(BP;\ CP\right) + \measuredangle\left(CP;\ XY\right)\\ &= 90° + \measuredangle BPC + 90° = 180° + \measuredangle BPC = \measuredangle BPC = \measuredangle BA'C.\end{aligned}$$

Analog gilt $\measuredangle XYZ = \measuredangle CB'A$ und $\measuredangle YZX = \measuredangle AC'B$. Hiermit ist auch Teil **b**) des Hilfssatzes nachgewiesen.

Jetzt kommen wir zur Lösung der Aufgabe 6 (Fig. 20). Wenden wir den Hilfssatz (Teil **b**)) erstmals auf die Punkte $A = S_{23},\ B = S_{31},\ C = S_{12},\ A' = B' = C' = S$ und $X = M_1,\ Y = M_2,\ Z = M_3$ an (es gilt nämlich $\measuredangle S_{31}SS_{12} + \measuredangle S_{12}SS_{23} + \measuredangle S_{23}SS_{31} = 0°$), so erhalten wir

$$\measuredangle M_3M_1M_2 = \measuredangle S_{31}SS_{12}; \tag{5a}$$
$$\measuredangle M_1M_2M_3 = \measuredangle S_{12}SS_{23}; \tag{5b}$$
$$\measuredangle M_2M_3M_1 = \measuredangle S_{23}SS_{31}. \tag{5c}$$

Seien nun $S_1,\ S_2$ und S_3 die Spiegelbilder von S an den Geraden $S_{31}S_{12},\ S_{12}S_{23}$ bzw. $S_{23}S_{31}$. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt des Kreises $SS_{31}S_{12};$ da bei der Spiegelung an der Geraden $S_{31}S_{12}$ die Punkte M_1, $S,\ S_{31}$ und S_{12} jeweils in $N_1,\ S_1,\ S_{31}$ und S_{12} übergehen, ist also N_1 der Mittelpunkt des Kreises $S_1S_{31}S_{12}$. Analog ist N_2 der Mittelpunkt des Kreises $S_2S_{12}S_{23}$ und N_3 der Mittelpunkt des Kreises $S_3S_{23}S_{31}$. Wegen

$$\measuredangle S_{31}S_1S_{12} = -\measuredangle S_{31}SS_{12};$$
$$\measuredangle S_{12}S_2S_{23} = -\measuredangle S_{12}SS_{23};$$
$$\measuredangle S_{23}S_3S_{31} = -\measuredangle S_{23}SS_{31}$$

(aufgrund der Spiegelung) folgt aus $\measuredangle S_{31}SS_{12} + \measuredangle S_{12}SS_{23} + \measuredangle S_{23}SS_{31} = 0°$ sofort $\measuredangle S_{31}S_1S_{12} + \measuredangle S_{12}S_2S_{23} + \measuredangle S_{23}S_3S_{31} = 0°$. Also können wir den Hilfssatz (Teil **b**)) auf die Punkte $A = S_{23},\ B = S_{31},\ C = S_{12},\ A' = S_1,\ B' = S_2,\ C' = S_3$ und $X = N_1,\ Y = N_2,\ Z = N_3$ anwenden; damit erhalten wir

$$\measuredangle N_3N_1N_2 = \measuredangle S_{31}S_1S_{12};$$
$$\measuredangle N_1N_2N_3 = \measuredangle S_{12}S_2S_{23};$$
$$\measuredangle N_2N_3N_1 = \measuredangle S_{23}S_3S_{31},$$

also

$$\measuredangle N_3N_1N_2 = -\measuredangle S_{31}SS_{12};$$
$$\measuredangle N_1N_2N_3 = -\measuredangle S_{12}SS_{23};$$
$$\measuredangle N_2N_3N_1 = -\measuredangle S_{23}SS_{31}.$$

Vergleich mit (5a), (5b) und (5c) ergibt $\measuredangle N_3N_1N_2 = -\measuredangle M_3M_1M_2,\ \measuredangle N_1N_2N_3 = -\measuredangle M_1M_2M_3$ und $\measuredangle N_2N_3N_1 = -\measuredangle M_2M_3M_1$. Also sind die Dreiecke $N_1N_2N_3$ und $M_1M_2M_3$ gegensinnig ähnlich, was zu beweisen war.

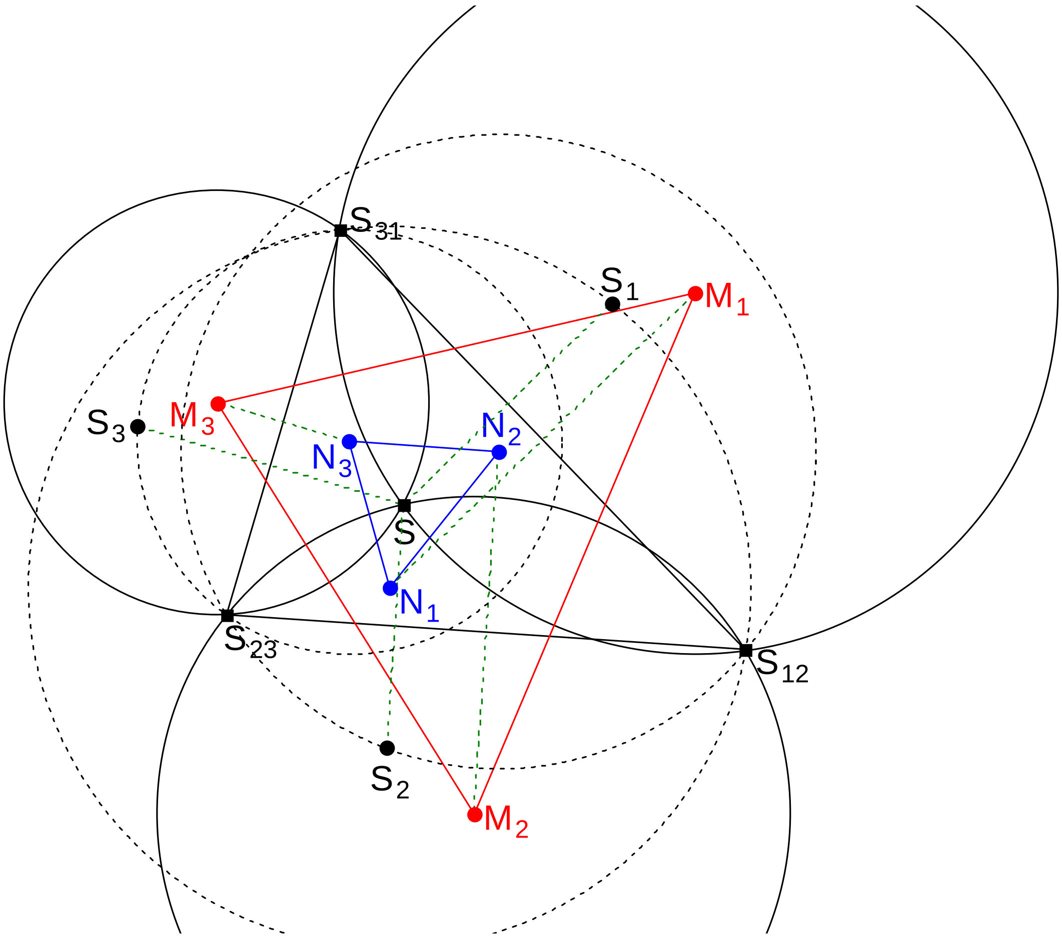

Fig. 22

Bemerkung: Wir haben in dem Beweis immer nur den Teil **b**) des Hilfssatzes benutzt. Der Teil **a**) wurde nur als Hilfsresultat in dem Beweis von Teil **b**) verwendet. Wir können jetzt den Teil **a**) des Hilfssatzes auf die Punkte $A = S_{23},\ B = S_{31},\ C = S_{12},\ A' = S_1,\ B' = S_2,\ C' = S_3$ und $X = N_1,\ Y = N_2,\ Z = N_3$ anwenden; wir erhalten dann, daß die Kreise $S_1S_{31}S_{12},\ S_2S_{12}S_{23}$ und $S_3S_{23}S_{31}$ einen gemeinsamen Punkt haben. In Wirklichkeit gilt sogar mehr: Die Kreise $S_1S_{31}S_{12},\ S_2S_{12}S_{23}$ und $S_3S_{23}S_{31}$ und $S_1S_2S_3$ haben einen gemeinsamen Punkt. Der Leser kann dies unschwer beweisen (Aufgabe 9 **a**) unten).

Zum Schluß gebe ich eine Aufgabe an den Leser weiter, von der ich im Moment keine Lösung weiß. Und zwar vermute ich, daß die Summe der *orientierten* Flächeninhalte der Dreiecke $M_1M_2M_3$ und $N_1N_2N_3$ gleich dem orientierten Flächeninhalt des Dreiecks $S_{23}S_{31}S_{12}$ ist. Ein Beweis (mit komplexen Zahlen wie in [9] oder mit orientierten Winkeln) wäre willkommen.

Aufgaben zum selbstständigen Lösen

Das folgende ist nun der Versuch einer Sammlung von Aufgaben, die mithilfe von Kreiswinkeln gelöst werden können. Dabei ist zu bedenken, daß Kreiswinkel nicht eine konkrete Lösungsstrategie sind, sondern nur eine Lösungshilfe, eine Sprache, mit der man oft Fallunterscheidungen vermeiden und Rechnungen übersichtlicher darstellen kann (z. B. spart man viele 180°- und 360°-Winkel, denn sie sind $= 0°$); man soll sich von diesen Winkeln deshalb auch keine Wunder erhoffen: Eine schwierige Aufgabe wird dadurch nicht einfacher, die Lösung kann höchstens etwas kürzer formuliert werden. Aus diesem Grund werde ich im folgenden zu den meisten Aufgaben auch Lösungshinweise angeben.

Keine der folgenden Aufgaben ist von mir erfunden worden, allerdings bin ich nicht der Suche nach den Erstentdeckern nachgegangen, weil sie in einem Forschungsfeld wie der Dreiecksgeometrie zuweilen ein aussichtsloses Unterfangen ist: Gewisse Aufgaben sind heute einfach Folklore und die Suche nach deren Autoren würde in schwer zugänglichen Publikationen des 19. Jahrhunderts enden; andere sind einfach ”herrenlose” Aufgaben. Nur in Ausnahmefällen, wo die Aufgabe direkt einer Publikation entnommen ist, nenne ich kurz den Autor.

Ansonsten soll noch bemerkt werden, daß die Aufgaben *nicht* nach steigendem Schwierigkeitsgrad angeordnet sind; die Reihenfolge ist eher so gewählt, daß die ersten Aufgaben (7 bis 13) an die Aufgabe 6 und den in ihrer Lösung verwendeten Hilfssatz anschließen.

In einem kürzlich in der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ erschienen Artikel [10] von Peter Gallin wird die Aussage von Aufgabe 9 und eine zu Aufgabe 11 äquivalente Aussage bewiesen; da jedoch die dortigen Beweise keine orientierten Winkel verwenden, sind sie an Zeichnungen gebunden, welche aufgrund der großen Zahl von Punkten und Kreisen sehr unübersichtlich und chaotisch wirken. Wenn man die Überlegungen in die Sprache der orientierten Winkel übersetzt, erhält man völlig zeichnungsfreie und kürzere Beweise.

Ich kürze wieder "Kreis durch drei Punkte $P_1,\ P_2$ und P_3" durch "Kreis $P_1P_2P_3$" ab.

Aufgabe 7: Seien $A,\ B,\ C,\ A',\ B'$ und C' sechs Punkte einer Ebene. Man beweise: Die Kreise $A'BC,\ B'CA$ und $C'AB$ haben genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn die Kreise $AB'C',\ BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt haben.

Aufgabe 8: Seien $A,\ B,\ C,\ A',\ B'$ und C' sechs Punkte einer Ebene. Man beweise: Die Kreise $A'BC,\ B'CA,\ C'AB$ und $A'B'C'$ haben genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn die Kreise $AB'C',\ BC'A',\ CA'B'$ und ABC einen gemeinsamen Punkt haben.

Aufgabe 9: Seien $A',\ B'$ und C' die Spiegelbilder eines Punktes P an den Seiten $BC,\ CA$ bzw. AB eines Dreiecks ABC. Man weise nach:

a) Die Kreise $A'BC,\ B'CA,\ C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt.

b) Die Kreise $AB'C',\ BC'A',\ CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt.

Bemerkung: Diese Eigenschaften wurden von M. S. Longuet-Higgins entdeckt.

Aufgabe 10: Seien $A',\ B'$ und C' die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $BPC,\ CPA$ bzw. $APB,$ wobei ΔABC ein Dreieck und P ein Punkt ist. Man weise nach:

a) Die Kreise $A'BC,\ B'CA,\ C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt.

b) Die Kreise $AB'C',\ BC'A',\ CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt.

Aufgabe 11: Seien $A',\ B'$ und C' die Spiegelbilder dreier Punkte $A,\ B$ bzw. C an einem Punkt P. Man weise nach:

a) Die Kreise $A'BC,\ B'CA,\ C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt.

b) Die Kreise $AB'C',\ BC'A',\ CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt.

Bemerkung: Dieses Ergebnis stammt von S. N. Collings.

Aufgabe 12: Auf den Seiten $BC,\ CA$ und AB eines Dreiecks ABC werden gleichseitige Dreiecke $BA'C,\ CB'A$ und $AC'B$ nach außen aufgesetzt. Zeige:

a) Die Kreise $A'BC,\ B'CA$ und $C'AB$ haben einen gemeinsamen Punkt.

b) Die Kreise $AB'C',\ BC'A'$ und $CA'B'$ haben einen gemeinsamen Punkt.

Bemerkung: Der gemeinsame Punkt in **a**) ist der bekannte **Fermatpunkt** des Dreiecks $ABC,$ der ebenfalls auf den drei Geraden $AA',\ BB'$ und CC' liegt. Der gemeinsame Punkt in **b**) ist anscheinend neu.

Aufgabe 13: Auf den Seiten $BC,\ CA$ und AB eines Dreiecks ABC werden gleichseitige Dreiecke nach außen aufgesetzt; die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke seien $A',\ B'$ bzw. C'. Zeige:

a) Das Dreieck $A'B'C'$ ist gleichseitig.

Bemerkung: Dies ist der sogenannte **Satz von Napoleon**.

b) Die Kreise $A'BC,\ B'CA,\ C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt.

c) Die Kreise $AB'C',\ BC'A',\ CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt.

Aufgabe 14: Sind U der Umkreismittelpunkt und $X,\ Y$ und Z die Fußpunkte der von $A,\ B$ bzw. C ausgehenden Höhen des Dreiecks $ABC,$ dann zeige man $YZ \perp AU,\ ZX \perp BU$ und $XY \perp CU.$

Aufgabe 15: Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Mittelsenkrechte der Seite BC schneide CA in Y_a und AB in Z_a. Die Mittelsenkrechte der Seite CA schneide BC in X_b und AB in Z_b. Man beweise, daß die Punkte $Y_a,\ Z_a,\ X_b$ und Z_b auf einem Kreis liegen.

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist sehr jung; es wurde, soweit ich weiß, zum ersten Mal 2000 von Fred Lang erwähnt.

Aufgabe 16: Vier Geraden, von denen keine drei sich in einem Punkt schneiden und keine zwei parallel sind, begrenzen immer vier Dreiecke. Man zeige, daß die Umkreise dieser vier Dreiecke einen gemeinsamen Punkt haben.

Bemerkung: Diese Eigenschaft ist unter verschiedenen Namen wie **Satz von Miquel**, **Satz von Steiner**, **Satz von Clifford** u. a. bekannt.

Aufgabe 17: Man beweise zusätzlich: Die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke aus Aufgabe 16 liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 18: Gegeben ist ein Dreieck $ABC;$ wir zeichnen den Kreis, der durch B und C geht und die

Gerade CA im Punkt C berührt. (Leichte Frage: Wie konstruieren wir diesen Kreis?) Ferner zeichnen wir den Kreis, der durch C und A geht und die Gerade AB in A berührt, und den Kreis, der durch A und B geht und die Gerade BC in B berührt. Beweise, daß die drei Kreise einen gemeinsamen Punkt haben.

Bemerkung: Die Aufgabe ist offensichtlich nicht symmetrisch: genauso haben der Kreis durch B und A, der die Gerade AC in A berührt, der Kreis durch C und B, der die Gerade BA in B berührt, und der Kreis durch A und C, der die Gerade CB in C berührt, auch einen gemeinsamen Punkt. Dieser Punkt und der gemeinsame Punkt vorhin heißen **erster Brocardpunkt** und **zweiter Brocardpunkt** des Dreiecks ABC, allerdings nicht immer in dieser Reihenfolge; die Reihenfolge ist leider von Buch zu Buch verschieden.

Aufgabe 19: Man zeige: Sind A', B' und C' drei Punkte auf den Seiten BC, CA bzw. AB eines Dreiecks ABC, dann haben die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt.

Bemerkung: Dieser Punkt heißt **Miquelpunkt** der Punkte A', B' und C' in bezug auf das Dreieck ABC.

Aufgabe 20: Sei P der gemeinsame Punkt aus Aufgabe 19 und X ein beliebiger Punkt in der Ebene. Die Geraden AX, BX und CX schneiden die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ bzw. $CA'B'$ außer den Punkten A, B bzw. C in drei weiteren Punkten. Man weise nach, daß diese drei Punkte zusammen mit den Punkten P und X auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 21: Sind D, E und F die Mittelpunkte der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ bzw. $CA'B'$ aus Aufgabe 19, dann sind die Dreiecke ABC und DEF gleichsinnig ähnlich.

Aufgabe 22: Sind X, Y und Z die Fußpunkte der Lote von einem Punkt P auf die Seiten BC, CA bzw. AB eines Dreiecks ABC, dann beweise man $\measuredangle ZXY = \measuredangle BAC - \measuredangle BPC$, $\measuredangle XYZ = \measuredangle CBA - \measuredangle CPA$ und $\measuredangle YZX = \measuredangle ACB - \measuredangle APB$.

Aufgabe 23: Inwiefern ist Aufgabe 22 eine Verallgemeinerung von Aufgabe 2?

Aufgabe 24: Eine Gerade, die durch den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks geht, werde an den drei Dreiecksseiten gespiegelt. Man zeige, daß die drei Spiegelbilder sich in einem Punkt schneiden, und dieser Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks liegt.

Aufgabe 25: Weise den folgenden Satz von V. Protassov nach: Wenn $ABCD$ ein Viereck und P ein Punkt ist, dann berühren sich die Kreise PAB und PCD genau dann, wenn $\measuredangle BPC = \measuredangle PDC - \measuredangle PAB$ ist.

Aufgabe 26: Von dem Schnittpunkt P der Diagonalen AC und BD eines Vierecks $ABCD$ fällt man Lote auf die Seiten AB, BC, CD und DA; die Fußpunkte dieser Lote seien X, Y, Z bzw. W. Man zeige, daß das Viereck $XYZW$ genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn $AC \perp BD$ gilt.

Aufgabe 27: Man zeige: Sind A', B' und C' die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB eines Dreiecks ABC, sind X, Y und Z die Fußpunkte der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen, und sind D, E und F die Mittelpunkte der Strecken AH, BH bzw. CH, wobei H der Höhenschnittpunkt des ΔABC ist, dann liegen die Punkte A', B', C', X, Y, Z, D, E und F auf einem Kreis.

Bemerkung: Dieser Kreis heißt **Feuerbachkreis** oder **Neunpunktekreis** des Dreiecks ABC.

Aufgabe 28: Gegeben seien vier Punkte A, B, C und D. Man zeige: Die Feuerbachkreise der Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB schneiden sich in einem Punkt.

Aufgabe 29: Gegeben sei ein Viereck $ABCD$. Seien A' und C' die Fußpunkte der Lote von A bzw. C auf die Diagonale BD, und seien B' und D' die Fußpunkte der Lote von B bzw. D auf die Diagonale AC. Zeige, daß die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegensinnig ähnlich sind.

Aufgabe 30: Liegen drei Punkte A, B und C auf einer Geraden und P außerhalb dieser Geraden, und sind D, E und F die Mittelpunkte der Kreise PBC, PCA bzw. PAB, dann ist zu zeigen, daß die Punkte P, D, E und F auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 31: Aufgabe 2 aus der 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1985:

Man beweise: Projiziert man den Fußpunkt einer Höhe eines Dreiecks senkrecht auf die beiden anderen Höhen und die zugehörigen Dreiecksseiten, so liegen die vier Bildpunkte auf einer Geraden.

Aufgabe 32: Seien ABC und $A'B'C'$ zwei gegensinnig ähnliche Dreiecke. Man beweise:

a) Die Senkrechten zu den Geraden BC, CA und AB durch die Punkte A', B' bzw. C' schneiden sich in einem Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks $A'B'C'$.

b) Die Parallelen zu den Geraden BC, CA und AB durch die Punkte A', B' bzw. C' schneiden sich in einem Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks $A'B'C'$.

Aufgabe 33: Seien A, B und C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und k_1 und k_2 zwei Kreise, sodaß der Kreis k_1 die Gerade AB in B berührt, der Kreis k_2 die Gerade AC in C berührt, und die beiden Kreise k_1 und k_2 sich auch gegenseitig berühren. Sei D der Berührpunkt der Kreise k_1 und k_2. Man beweise, daß der Mittelpunkt des Kreises BCD auf dem Kreis ABC liegt.

Aufgabe 34: Sind A, B, C, D, E und F sechs Punkte auf einem Kreis (in beliebiger Reihenfolge!), dann besagt der Satz von Pascal: Der Schnittpunkt G der Geraden AB und DE, der Schnittpunkt H der Geraden BC und EF, und der Schnittpunkt K der Geraden CD und FA liegen auf einer Geraden. Man beweise diesen Satz, indem man den von D verschiedenen Schnittpunkt der Kreise BDG und FDK mit Z bezeichnet und zeigt, daß die vier Punkte $Z,\ G,\ H$ und K auf einer Geraden liegen.

Hinweise zu den Aufgaben zum selbstständigen Lösen

zu Aufgabe 7: Der Hilfssatz in der Lösung von Aufgabe 6 kann hier mit Erfolg angewandt werden. Man muß nur zeigen, daß die Bedingungen $\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0°$ und $\measuredangle B'AC' + \measuredangle C'BA' + \measuredangle A'CB' = 0°$ äquivalent sind.

zu Aufgabe 8: Mache zweimal Gebrauch von Aufgabe 7, und zwar einmal angewandt auf die Punkte A, B, C, A', B' und C', das zweite Mal angewandt auf die Punkte A, B', C', A', B und C (man achte auf die Reihenfolge!).

zu Aufgabe 9: **a**) Die Mittelpunkte A'', B'' und C'' der Strecken PA', PB' bzw. PC' sind die Fußpunkte der Lote von P auf BC, CA bzw. AB. Sei Q der von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $A'BC$ und $A'B'C'$. Dann gilt nach dem Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel $\measuredangle BQA' = \measuredangle BCA'$ und $\measuredangle A'QC' = \measuredangle A'B'C'$, also $\measuredangle BQC' = \measuredangle BCA' + \measuredangle A'B'C'$. Man zeige nun $\measuredangle BCA' = \measuredangle PB''A''$ und $\measuredangle A'B'C' = \measuredangle A''B''C''$; dann erhält man $\measuredangle BQC' = \measuredangle PB''C''$. Wiederum ist unschwer einzusehen, daß $\measuredangle PB''C'' = \measuredangle BAC'$ ist; damit ist $\measuredangle BQC' = \measuredangle BAC'$, und der Punkt Q liegt auf dem Kreis $C'AB$ und analog auf dem Kreis $B'CA$.

b) Nach Aufgabe 8 sind die Punkte **a**) und **b**) zueinander äquivalent. Es gibt natürlich auch direkte Beweise.

zu Aufgabe 10: Aufgabe 10 **a**) und **b**) sind äquivalent zu Aufgabe 9 **b**) bzw. **a**), in dieser Reihenfolge. Warum? (Man denke an Mittelsenkrechten.)

zu Aufgabe 11: **a**) Sei Q der von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $A'BC$ und $A'B'C'$. Dann ist $\measuredangle B'QA' = \measuredangle B'C'A'$ und $\measuredangle A'QC = \measuredangle A'BC$. Damit wird

$$\measuredangle B'QC = \measuredangle B'C'A' + \measuredangle A'BC = \measuredangle BCA + \measuredangle A'BC = \measuredangle BCA + (\measuredangle A'BA + \measuredangle ABC).$$

Doch durch die Punktspiegelung entstehen viele parallele Geraden und damit u. a. das Parallelogramm $ABA'B'$; damit ist $\measuredangle A'BA = \measuredangle B'AB$, und daraus wird dann $\measuredangle B'QC = \measuredangle BCA + (\measuredangle B'AB + \measuredangle ABC) = ... = \measuredangle B'AC$, und Q liegt auf dem Kreis $B'CA$. Analog liegt Q auf dem Kreis $C'AB$.

b) Die Punkte **a**) und **b**) sind trivialerweise äquivalent.

zu Aufgabe 12: Nach Aufgabe 7 sind die Punkte **a**) und **b**) zueinander äquivalent. Benutze den Hilfssatz in der Lösung von Aufgabe 6 für den Beweis von **a**).

zu Aufgabe 13: Hier muß man auf Aufgabe 12 **a**) zurückgreifen. Nach Aufgabe 8 sind die Punkte **b**) und **c**) zueinander äquivalent.

zu Aufgabe 14: In der Figur erkennt man Thaleskreise und ferner läßt sich der Mittelpunktswinkelsatz für Kreiswinkel anwenden.

zu Aufgabe 17: Wende Aufgabe 4 auf den gemeinsamen Punkt in Aufgabe 16 an.

zu Aufgabe 18: Man benutze den Sehnentangentenwinkelsatz.

zu Aufgabe 19: Wer mit Inversionsgeometrie vertraut ist, wird diese Aufgabe als Grenzfall von Aufgabe 7 ansehen, denn die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ entarten zu Geraden und haben einen gemeinsamen Punkt (den uneigentlichen Punkt). Aber auch ohne Inversion ist die Aufgabe nahezu trivial.

zu Aufgabe 21: Ist M der gemeinsame Punkt der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$, dann ist $EF \perp MA'$, $FD \perp MB'$ und $DE \perp MC'$.

zu Aufgabe 22: Benutze den Lösungsansatz von Aufgabe 5 (Thaleskreise).

zu Aufgabe 24: Die Lösung macht Gebrauch von Aufgabe 1.

zu Aufgabe 25: Die beiden Umkreise berühren sich genau dann, wenn sie in P eine gemeinsame Tangente haben. Man berechne im Allgemeinfall den Winkel zwischen den Tangenten an die zwei Umkreise im Punkt P mit Hilfe des Sehnentangentenwinkelsatzes.

zu Aufgabe 26: Mithilfe von Thaleskreisen zeigt man leicht, daß das Viereck $XYZW$ genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn $\measuredangle APB = -\measuredangle APB$, also wenn $2 \bullet \measuredangle APB = 0°$ ist. Das bedeutet, daß $\measuredangle APB$ entweder 0° oder 90° ist, jedoch ist $\measuredangle APB = 0°$ ausgeschlossen.

zu Aufgabe 27: Eigentlich braucht man dazu gar keine orientierten Winkel: Als Mittelparallelen sind $EC' \parallel AH$ und $B'C' \parallel BC$, also $\measuredangle EC'B' = \measuredangle\left(EC';\ B'C'\right) = \measuredangle\left(AH;\ BC\right) = 90°$. Also liegt C' auf dem Thaleskreis über EB'. Analog liegt A' auf diesem Kreis und Y sowieso. Also liegen die Punkte E, B',

C', A' und Y auf einem Kreis. Analog findet man zwei weitere Kreise, die auch durch B', C' und A' gehen und deshalb mit diesem Kreis übereinstimmen; also liegen alle neun Punkte A', B', C', X, Y, Z, D, E und F auf einem Kreis.

zu Aufgabe 28: *Erste Lösung*: Seien M_a, M_b, M_c, M_d, M_e und M_f die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD, DA, AC bzw. BD. Die Feuerbachkreise der Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB sind dann die Kreise $M_aM_bM_e$, $M_bM_cM_f$, $M_cM_dM_e$ bzw. $M_dM_aM_f$. Ein Punkt P werde definiert als der von M_b verschiedene Schnittpunkt der Kreise $M_aM_bM_e$ und $M_bM_cM_f$, also der Feuerbachkreise der Dreiecke ABC und BCD; dann ist $\measuredangle M_ePM_b = \measuredangle M_eM_aM_b$ und $\measuredangle M_bPM_c = \measuredangle M_bM_fM_c$. Man forme diese Winkel um, ohne dabei die vielen Mittelparallelen aus den Augen zu verlieren; nach einigen Schritten erhält man dann $\measuredangle M_ePM_c = \measuredangle M_eM_dM_c$. Also liegt P auf dem Kreis $M_cM_dM_e$, d. h. auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks CDA. Analog liegt P auf dem Feuerbachkreis des Dreiecks DAB.

Zweite Lösung: Wir wählen die Bezeichnungen genauso wie bei der ersten Lösung. Bekanntlich schneiden sich die Strecken M_aM_c, M_bM_d und M_eM_f in einem Punkt S und werden in diesem Punkt halbiert. (Dies folgt aus dem Varignonparallelogramm, angewandt einmal auf das Viereck $ABCD$, dann auf das Viereck $ACBD$; man kann auch mit Vektoren argumentieren. Der Punkt S heißt **Schwerpunkt** des Vierecks $ABCD$.) Nun heißt das, daß die Punkte M_c, M_d und M_f die Spiegelbilder der Punkte M_a, M_b bzw. M_e an dem Punkt P sind. Jetzt wende man Aufgabe 11 **b**) an.

zu Aufgabe 29: Um zu zeigen, daß zwei Vierecke gegensinnig ähnlich sind, reicht die Gleichheit entsprechender Winkel natürlich nicht aus. Zwei Vierecke sind aber stets gegensinnig ähnlich, wenn sie in gleicher Weise aus ähnlichen Teildreiecken zusammengesetzt sind. Um die gegensinnige Ähnlichkeit der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ nachzuweisen, müssen wir also nur nachprüfen, daß $\Delta PAB \sim \Delta PA'B'$, $\Delta PBC \sim \Delta PB'C'$, $\Delta PCD \sim \Delta PC'D'$ und $\Delta PDA \sim \Delta PD'A'$ ist, wobei die Ähnlichkeiten alle gegensinnig sind und P der Schnittpunkt von AC und BD ist. Hier helfen aber die Thaleskreise über AB, BC, CD und DA.

zu Aufgabe 30: Der Mittelpunktswinkelsatz für Kreiswinkel ist hier ganz angemessen.

zu Aufgabe 31: Sei ΔABC das Dreieck, H sein Höhenschnittpunkt und A', B' und C' die Fußpunkte der Höhen von A, B bzw. C aus. Die Projektionen von A' auf die Höhen BB' und CC' seien Y bzw. Z, und die Projektionen von A' auf die Seiten CA und AB seien Y' bzw. Z'. Ein Thaleskreis ergibt $\measuredangle A'YZ' = \measuredangle A'BZ' = \measuredangle CBA$ und ein anderer $\measuredangle A'YZ = \measuredangle A'HZ = ... = \measuredangle CBA$. Also ist $\measuredangle A'YZ' = \measuredangle A'YZ$, und die Punkte Y, Z und Z' liegen auf einer Geraden. Genauso Y, Z und Y'. Folglich liegen alle vier Punkte auf einer und derselben Geraden. Und in den BWM-Lösungsbeispielen wurden fünf Fälle unterschieden!

zu Aufgabe 32: **a**) Sei P der Schnittpunkt der Senkrechten zu BC durch A' mit dem Umkreis des $\Delta A'B'C'$. Man zeige, daß P dann auch auf den beiden anderen Senkrechten liegt.

b) Beweis analog zu **a**). Im übrigen können Senkrechten und Parallelen durch Geraden, die die Geraden BC, CA und AB unter einem gleichen Winkel schneiden, ersetzt werden.

zu Aufgabe 33: Diese Aufgabe ist sinngemäß die Aufgabe 2 der 2. Klausur des Auswahlwettbewerbs zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2003 (der Unterschied besteht nur darin, daß in der Klausuraufgabe noch einige unnötige Anordnungsbedingungen aufgestellt wurden). Merkwürdigerweise war die vorgeschlagene Lösung recht umständlich; mit Kreiswinkeln geht es einfacher und kürzer:

Ist P der Mittelpunkt des Kreises BCD, dann ist zu beweisen, daß $\measuredangle BPC = \measuredangle BAC$ ist. Nun ist $\measuredangle BPC = 2 \bullet \measuredangle BDC$.

Ist t die gemeinsame Tangente der Kreise k_1 und k_2 in D, dann gilt $\measuredangle (BD;\ t) = \measuredangle (AB;\ BD)$ und $\measuredangle (CD;\ t) = \measuredangle (AC;\ CD)$, also

$$\measuredangle BDC = \measuredangle (BD;\ t) - \measuredangle (CD;\ t) = \measuredangle (AB;\ BD) - \measuredangle (AC;\ CD).$$

Nach einer kurzen Umformung wird daraus

$$\measuredangle BDC = \measuredangle (AB;\ AC) + \measuredangle (CD;\ BD) = \measuredangle BAC + \measuredangle CDB,$$

und $2 \bullet \measuredangle BDC = \measuredangle BAC$, also $\measuredangle BPC = \measuredangle BAC$, was zu beweisen war.

zu Aufgabe 34: Mehrmalige Anwendung des Umfangswinkelsatzes liefert

$$\begin{aligned}\measuredangle BZF &= \measuredangle BZD + \measuredangle DZF = \measuredangle BGD + \measuredangle DKF = \measuredangle (AB;\ DE) + \measuredangle (CD;\ FA)\\ &= ... = \measuredangle (AB;\ FA) + \measuredangle (DE;\ CD) = \measuredangle FAB + \measuredangle EDC = \measuredangle FCB + \measuredangle EFC\\ &= \measuredangle (FC;\ BC) + \measuredangle (EF;\ FC) = \measuredangle (BC;\ EF) = \measuredangle BHF,\end{aligned}$$

und der Punkt Z liegt folglich auf dem Kreis BFH. Der Umfangswinkelsatz liefert weiterhin

$$\begin{aligned}\measuredangle GZH &= \measuredangle GZD + \measuredangle DZF + \measuredangle FZH = \measuredangle GBD + \measuredangle DKF + \measuredangle FBH \\ &= \measuredangle ABD + \measuredangle DKF + \measuredangle FBC = \measuredangle AFD + \measuredangle DKF + \measuredangle FDC \\ &= \measuredangle\left(FA;\ FD\right) + \measuredangle\left(CD;\ FA\right) + \measuredangle\left(FD;\ CD\right) = 0°,\end{aligned}$$

und genauso $\measuredangle KZH = 0°,$ und die Punkte $Z,\ G,\ H$ und K liegen auf einer Geraden.

Literatur

[1] Eberhard M. Schröder: *Ein neuer Winkelbegriff für die Elementargeometrie*?, Praxis der Mathematik 9/1982, S. 257-269.

[2] K. Schütte: *Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon*, Elemente der Mathematik 1989, S. 133-138.

[3] H. Stachel: *Zu K. Schüttes Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon*, Elemente der Mathematik 1991, S. 25-27.

[4] Jan van Yzeren: *Pairs of Points*: *Antigonal*, *Isogonal*, *and Inverse*, Mathematics Magazine 5/1992, S. 339-347.

[5] Sefket Arslanagic: *Der Satz von der Simsonschen Geraden und der Lemoinesatz*, $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 2/2001, S. 26-28.

[6] R. A. Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*, New York 1960.

[7] R. A. Johnson: *Directed Angles in Elementary Geometry*, American Mathematical Monthly 24 (1917) Nr. 3, S. 101-105.

[8] R. A. Johnson: *Directed Angles and Inversion*, *With a Proof of Schoute*'*s Theorem*, American Mathematical Monthly 24 (1917) Nr. 7, S. 313-317.

[9] Wilfried Haag, Oleg Faynshteyn: *Aufgabe* $\boldsymbol{\kappa}$ 22 *mit Lösung*, $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 11/2003, S. 249-251.

[10] Peter Gallin: *Vier- und Fünf-Kreise-Punkte*, $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 12/2003, S. 281-284.