

# Bundeswettbewerb Mathematik

## Lösungen Runde 2

Hanno Becker

31. August 2005

### **Vorwort bzgl. Hilfsmittel**

Bei der Bearbeitung der Aufgaben bediente ich mich des Buches 'Problem-Solving Strategies' von Arthur Engel. Für die Lösungsfindung des Geometrie-Problems benutzte ich das Geometrie-Programm Geonext. Für meine Versuche zur Lösung der Zahlentheorie-Aufgabe verwendete ich einen Taschenrechner (TI89), Computersoftware wie MuPad und zum Finden von Lösungstriplets die Interpretersprache Python; letztendlich halfen diese Hilfsmittel allerdings nicht beim Finden der Lösung. 'Hilfsmittel' bei der Lösung von Aufgabe 1 war zudem mein heiß-geliebtes Schachbrett.

**Aufgabe 1**

Zwei Spieler  $A$  und  $B$  haben auf einem  $100 \times 100$  - Schachbrett je einen Stein. Sie ziehen abwechselnd ihren Stein, wobei jeder Zug aus einem Schritt senkrecht oder waagerecht auf ein Nachbarfeld besteht und  $A$  den ersten Zug ausführt. Zu Beginn liegt der Stein von  $A$  in der linken unteren Ecke und der Stein von  $B$  in der rechten unteren Ecke.

Man beweise: Der Spieler  $A$  kann unabhängig von den Spielzügen des Spielers  $B$  stets nach endlich vielen Zügen das Feld erreichen, auf dem Gerade der Stein von  $B$  steht.

**Lösung:** Es werden im Folgenden häufig einige Annahmen gemacht werden, die die Allgemeinheit der Ausführung nicht beschränken, für welche dies allerdings nicht unbedingt offensichtlich ist. Diese Annahmen begründen sich dadurch, dass das Spielbrett symmetrisch und die Spielzüge in alle Richtungen auf gleiche Weise durchführbar sind. Als Beispiel sei Lemma 2 genannt: dort wird angenommen werden, dass Spieler  $B$  weiter rechts und weiter oben von Spieler  $A$  steht. Dies beschränkt die Allgemeinheit nicht; stünde  $B$  z.B. weitere links und weiter unten, so müsste man in der gesamten Folgeargumentation lediglich Schritte nach rechts durch solche nach links und Schritte nach oben durch solche nach unten ersetzen und umgekehrt. Ebenso verhält es sich bei den übrigen Möglichkeiten für die Position von Spieler  $B$ . Dies rechtfertigt die Annahme einiger Tatsachen, die die Lösung des Problem es einfacher gestalten und erklärt, warum sie die Allgemeinheit nicht einschränken.

**Lemma 1**

Ist Spieler  $A$  am Zug, so stehen  $A$  und  $B$  auf verschiedenfarbigen Feldern des Schachbrettes.

**Beweis:** Das Spielfeld in der unteren, linken Ecke sei mit  $(1, 1)$  bezeichnet, die erste Koordinate stehe für die X-Position, die zweite für die Y-Position; das Feld in der oberen, rechten Ecke ist insbesondere  $(100, 100)$ .

Es sei o.B.d.A. das Startfeld von  $A$  weiß gefärbt. Dann sind die Felder  $(1, 2), (1, 4), \dots, (1, 100)$  schwarz gefärbt; insbesondere steht  $B$  also auf einem schwarzen Feld. Mit jedem Zug eines Spielers verändert sich ferner die Farbe des Spielfeldes, auf welchem er . Führen  $A$  und  $B$  zwei Züge durch, so hat sich die Farbe der Felder, auf denen sie stehen, für beide geändert. Da  $A$  und  $B$  zu Beginn auf verschiedenfarbigen Feldern stehen, tun sie dies demnach auch, wenn eine endliche Anzahl von Zugpaaren durchgeführt wurde und Spieler  $A$  wieder an der Reihe ist.  $\square$

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  seien  $A_n = (x_A(n), y_A(n)) \in \{1, 2, \dots, 100\}^2$  und  $B_n = (x_B(n), y_B(n)) \in \{1, 2, \dots, 100\}^2$  die Positionen von Spieler  $A$  und Spieler  $B$  (in dieser Reihenfolge) nach den ersten  $n$  Zügen (hier sind nicht Zugpaare gemeint). Insbesondere ist nach Voraussetzung  $A_0 = (1, 1), B_0 = (100, 1)$ . Ferner seien

$$\begin{aligned} d_1(n) &= ||x_A(n) - x_B(n)| - |y_A(n) - y_B(n)|| \\ &\text{und} \\ d_2(n) &= |x_A(n) - x_B(n)| + |y_A(n) - y_B(n)|. \end{aligned}$$

Für den Spieler  $A$  sei nun folgende Zugstrategie definiert:

**Strategie 1**

Nach  $2n - 1, n \in \mathbb{N}$  vergangenen Zügen zieht der Spieler A so, dass der Wert von  $d_1(2n) + d_2(2n)$  minimal wird. Sind mehrere Züge möglich, so wird ein beliebiger von ihnen gewählt.

Die Züge von A sind folglich stets darauf ausgerichtet, sowohl den Wert von  $d_1$ , als auch den von  $d_2$  möglichst klein werden zu lassen. Anschaulich bedeutet dies folgendes: die Minimalität von  $d_2$  bedeutet die Minimalität des Abstandes zwischen Spieler A und B; je kleiner ferner  $d_1$  wird, desto mehr ähnelt das Rechteck

$$((x_A(n), y_A(n)), (x_B(n), y_A(n)), (x_B(n), y_B(n)), (x_A(n), y_B(n)))$$

einem Quadrat. Genau dann ist  $d_1(n) = 0$ , wenn A und B nach dem  $n$ -ten Zug auf einer gemeinsamen Diagonalen stehen. A ist also einerseits bestrebt, den Abstand zu B, andererseits dabei aber auch den Unterschied zwischen den Koordinatendifferenzen zu verringern.

**Lemma 2**

Zieht Spieler A ausschließlich nach der gegebenen Strategie, so verringert sich der Wert von  $d_2$  nach endlich vielen Zügen. Insbesondere nimmt er nach endlich vielen Zügen den Wert 0 an.

**Beweis:** Betrachten wir die Spielstellung nach  $2n - 1, n \in \mathbb{N}$  Zügen; Spieler B ist folglich am Zuge. Ferner sei  $d_2(2n - 1) \neq 0$ , da sonst nichts mehr zu zeigen ist. O.B.d.A. (s.o.) dürfen wir annehmen, dass  $x_A(2n - 1) \leq x_B(2n - 1)$  und  $y_A(2n - 1) \leq y_B(2n - 1)$  gilt. Es seien nun zwei Fälle unterschieden:

1.  $x_B(2n - 1) - x_A(2n - 1), y_B(2n - 1) - y_A(2n - 1) \neq 0$ :

Soll vermieden werden, dass  $d_2$  kleiner wird, so muss Spieler B im nächsten Zug seine  $x$ - oder  $y$ -Koordinate erhöhen. Tut B dies nämlich nicht, so ist entweder

$$\begin{aligned} |x_A(2n) - x_B(2n + 1)| &= |x_A(2n - 1) - x_B(2n - 1)| - 1 \quad \text{und} \\ |y_A(2n) - y_B(2n + 1)| &= |y_A(2n - 1) - y_B(2n - 1)| \\ &\text{oder} \\ |x_A(2n) - x_B(2n + 1)| &= |x_A(2n - 1) - x_B(2n - 1)| \quad \text{und} \\ |y_A(2n) - y_B(2n + 1)| &= |y_A(2n - 1) - y_B(2n - 1)| - 1. \end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt

$$d_2(2n) = |x_A(2n) - x_B(2n)| + |y_A(2n) - y_B(2n)| = d_2(2n - 1) - 1,$$

insbesondere verringert sich also der Wert von  $d_2$ .

Soll  $d_2$  nicht kleiner werden, so muss folglich B seine  $x$ - oder seine  $y$ -Koordinate erhöhen. Ist dies nicht möglich, so folgt der eben beschriebene Fall und  $d_2(2n) = d_2(2n - 1) - 1$ .

Ist dies hingegen möglich und führt  $B$  einen solchen Schritt durch, so sei der darauf folgende Zug von  $A$  betrachtet. Da nach Voraussetzung  $x_A(2n-1) \leq x_B(2n-1)$ ,  $y_A(2n-1) \leq y_B(2n-1)$  und  $x_B(2n-1) - x_A(2n-1), y_B(2n-1) - y_A(2n-1) \neq 0$ , d.h.  $x_A(2n-1) < x_B(2n-1)$ ,  $y_A(2n-1) < y_B(2n-1)$  gilt, gilt ebenso  $x_A(2n) < x_B(2n)$ ,  $y_A(2n) < y_B(2n)$  nach dem Zug von  $B$ , da  $B$  seine Koordinaten nicht verringert hat. Weiter noch ist wenigstens eine der Koordinatendifferenzen  $x_B(2n) - x_A(2n)$ ,  $y_B(2n) - y_A(2n)$  nach dem Zug von  $B$  größer gleich 2, da die Differenzen vor dem Zug von  $B$  wenigstens 1 betragen haben und durch den Zug von  $B$  eine von ihnen um 1 erhöht wurde. Gemäß der Zugstrategie von  $A$  verringert  $A$  nun die größere der beiden Koordinatendifferenzen zu  $B$ , wobei die veränderte Koordinatendifferenz weiterhin größer gleich 1 bleibt, da sie, wie eben begründet, nach dem Zug von  $B$  wenigstens 2 betragen hat.

Nach den Zügen von  $A$  und  $B$  erhalten wir also die gleiche Situation wie zuvor: es ist  $x_A(2n+1) < x_B(2n+1)$ ,  $y_A(2n+1) < y_B(2n+1)$  und  $B$  muss im nächsten Zug seine  $x$ - oder seine  $y$ -Koordinate erhöhen, damit  $d_2$  nicht kleiner wird;  $A$  zieht gemäß seiner Zugstrategie nach und die Prozedur wiederholt sich so lange, wie es  $B$  möglich ist, seine  $x$ - oder  $y$  Koordinate zu erhöhen. Nach endlich vielen Schritten allerdings wird  $B$  so auf das Feld  $(100, 100)$  gedrängt werden; in diesem Fall kann  $B$  keiner der Koordinaten mehr erhöhen, sodass im nächsten Schritt in jedem Falle  $d_2$  verringert werden wird.

2.  $x_B(2n-1) = x_A(2n-1)$  oder  $y_B(2n-1) = y_A(2n-1)$ :

O.B.d.A. sei  $y_B(2n-1) = y_A(2n-1)$ . Soll  $d_2$  nicht verringert werden, so muss  $B$  entweder die  $x$ -Koordinate erhöhen oder in  $y$ -Richtung ziehen. Nehmen wir an,  $B$  erhöht seine  $x$ -Koordinate. Dann ist  $|x_A(2n) - x_B(2n)| \geq 1$  und  $A$  erhöht gemäß seiner Zugstrategie im nächsten Zug folglich seine  $x$ -Koordinate, da  $|y_A(2n) - y_B(2n)| = 0 < 1 \leq |x_A(2n) - x_B(2n)|$  gilt und die  $x$ -Koordinate von  $B$  größer der von  $A$  ist. Es ergibt sich die gleiche Situation; soll  $d_2$  nicht verringert werden, erhöht  $B$  seine  $x$ -Koordinate oder zieht in  $y$ -Richtung. Da  $B$  seine  $x$ -Koordinate nur endlich oft erhöhen kann, sei nun der Fall betrachtet, in dem  $B$  in  $y$ -Richtung zieht. O.B.d.A. erhöhe  $B$  seine  $y$ -Koordinate. Dann ist  $|y_A(2n) - y_B(2n)| = 1$  und  $|x_A(2n) - x_B(2n)| \geq 1$ ; letzteres gilt, da anderenfalls Spieler  $A$  und  $B$  vor dem Zug von Spieler  $B$  auf dem selben Feld gestanden hätten, was der Voraussetzung  $d_2(2n-1) \neq 0$  widerspricht. Weiter noch muss  $|x_A(2n) - x_B(2n)| \geq 2$  gelten, da sonst  $|x_A(2n) - x_B(2n)| = |y_A(2n) - y_B(2n)| = 1$  gelten würde;  $A$  und  $B$  stünden in diesem Falle auf einem gleichfarbigen Feld, Spieler  $A$  wäre an der Reihe; dies widerspricht Lemma 1. Folglich ist  $|x_A(2n) - x_B(2n)| \geq 2$  und  $A$  wird gemäß seiner Zugstrategie seine  $x$ -Komponente erhöhen. Nach diesem Zug tritt wegen  $x_B(2n+1) - x_A(2n+1), y_B(2n+1) - y_A(2n+1) \neq 0$  Fall (1) ein.

Da in jeder Situation irgendwann Fall (1) eintritt und aus diesem eine Verringerung von  $d_2$  folgt, ist der Satz bewiesen.  $\square$

Dass nach Lemma 2 die Differenz der Spieler  $A$  und  $B$  nach endlich vielen Zügen 0 beträgt, bedeutet, dass  $A$  nach endlich vielen Zügen auf dem gleichen Feld wie Spieler  $B$  steht. Damit ist die Aufgabe gelöst.  $\square$

**Aufgabe 2**

Es sei  $x$  eine rationale Zahl.

Man beweise: Es gibt nur endlich viele Tripel  $(a, b, c)$  ganzer Zahlen mit

$$a < 0 \quad \text{und} \quad b^2 - 4ac = 5,$$

für die

$$ax^2 + bx + c$$

positiv ist.

**Lösung:**

**Vorbemerkungen:** Spreche ich im folgenden von einer unendlichen Menge an Lösungstriple, so ist stets von einer abzählbaren Menge die Rede; andere unendliche Lösungsmengen kann es nicht geben, da dies Teilmengen der abzählbaren Menge  $\mathbb{Z}^3$  sind. Dies rechtfertigt, dass eine unendliche Lösungsmenge abgezählt und als  $\{(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{Z}^3\}_{n \in \mathbb{N}}$  angegeben werden kann.

**Lemma 1**

In einer unendlichen Menge  $\{(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{Z}^3\}_{n \in \mathbb{N}}$  Tripel ganzer Zahlen, die den in der Aufgabenstellung gestellten Bedingungen genügen, ist die Menge  $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben unbeschränkt.

**Beweis:** Zuerst sei bemerkt, dass in jedem Lösungstriple  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  stets  $a, c \neq 0$  gelten muss, da sonst  $b^2 = 5$  folgte, was in den ganzen Zahlen nicht lösbar ist.

Nehmen wir an, die Menge  $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  sei nach oben beschränkt und  $b_{\max} := \max(\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}})$ . Wären dies auch die Mengen  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\{|c_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_{\max} := \max(\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}})$  und  $c_{\max} := \max(\{|c_n|\}_{n \in \mathbb{N}})$ , dann wäre die Menge der Lösungstriple Teilmenge von

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid -a_{\max} \leq a \leq a_{\max}, -b_{\max} \leq b \leq b_{\max}, -c_{\max} \leq c \leq c_{\max}\},$$

es gäbe also höchstens  $(2a_{\max} + 1)(2b_{\max} + 1)(2c_{\max} + 1)$ , insbesondere also nur eine endliche Anzahl an Lösungstriple, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Es muss also entweder  $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $\{|c_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt sein. In beiden Fällen ist dann wegen  $a_n, c_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch  $\{|5 + 4a_n c_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  und somit auch  $\{b_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben unbeschränkt; letzteres widerspricht allerdings der Beschränktheit von  $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ ; folglich muss bei einer unendlichen Anzahl von Lösungstriple die Menge  $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt sein, was zu zeigen war.  $\square$

**Lemma 2**

Für fast alle Lösungstriple  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  ist  $c$  negativ.

**Beweis:** Ist  $c$  positiv und nach Voraussetzung  $a \leq -1$ , so ist

$$5 = b^2 - 4ac \geq b^2 - 4(-1)1 \geq b^2 + 4 \Leftrightarrow b^2 \leq 1.$$

Es folgt  $b \in \{-1, 0, 1\}$ . Da nach vorangegangenen Lemma in einer unendlichen Menge von Lösungstriplets  $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{Z}^3$  die Menge  $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist, folgt aus  $b \in \{-1, 0, 1\}$  im Umkehrschluss, dass die Menge der Lösungstriplets  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  mit  $c > 0$  nicht unendlich sein kann, was zu zeigen war.  $\square$

### Korollar 1 (Hauptsatz für $x=0$ )

Für  $x = 0$  gibt es nur endlich viele Lösungstriplets.

**Beweis:** Betrachten wir nun den Fall  $x = 0$ : ist  $x = 0$ , so sind die Lösungstriplets genau die Triplets  $(a, b, c)$  mit  $a < 0$ ,  $b^2 - 4ac = 5$  und  $ax^2 + bx + c = c > 0$ . Nach dem vorangegangenen Lemma kann es allerdings für alle  $x$  nur endlich viele Lösungstriplets  $(a, b, c)$  mit positivem  $c$  geben; damit ist der Hauptsatz für  $x = 0$  bewiesen.  $\square$

Existiert nun eine unendliche Menge an Lösungstriplets, so existiert nach vorangegangenen Lemma eine ebenfalls unendliche Teilmenge  $\{(a_n, b_n, c_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Lösungstriplets mit  $c_n < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Da der Satz für  $x = 0$  nun bereits bewiesen ist, darf im Folgenden  $x \neq 0$  angenommen werden. Wir führen nun die Annahme, dass es unendliche viele Lösungstriplets  $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{Z}^3$ , o.B.d.A. mit  $c_n < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gäbe, zu einem Widerspruch:

### Satz 1

In einer unendlichen Menge  $\{(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{Z}^3\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Lösungstriplets mit  $c_n < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $C \in \mathbb{Q}$  mit  $|b_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Es sei  $x = \frac{p}{q}$  mit ganzen, teilerfremden, ganzen Zahlen  $p, q$ .

[a]  $x$  ist positiv:

Sei nun  $(a, b, c)$  ein Lösungstriplet mit  $b > 0 > a, c$ . Dann gilt mit positiven  $a' = -a$ ,  $c' = -c$ :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \\ \Leftrightarrow a \left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \left(\frac{p}{q}\right) + c &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2} &> 0. \end{aligned}$$

Da  $\frac{ap^2+bpq+cq^2}{q^2}$  rational ist, ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{ap^2+bpq+cq^2}{q^2} &\geq \frac{1}{q^2} \\ \Leftrightarrow ap^2 + bpq + cq^2 &\geq 1 \\ \Leftrightarrow -(ap^2 + bpq + cq^2) &\leq -1 \\ \Leftrightarrow a'p^2 - bpq + c'q^2 &\leq -1 \\ \Leftrightarrow a'p^2 + c'q^2 &\leq bpq - 1 \end{aligned}$$

Da die linke Seite positiv ist, gilt ferner auch  $bpq - 1 > 0$ . Dies wird im Folgenden noch verwendet werden.

Nach der AM-GM-Ungleichung angewandt auf die positiven Zahlen  $a'p^2, c'q^2$  ist nun

$$\frac{a'p^2 + c'q^2}{2} \geq \sqrt{a'p^2 c'q^2} = \sqrt{a'c'}pq \Leftrightarrow a'p^2 + c'q^2 \geq \sqrt{4a'c'}pq$$

Die Ungleichung

$$a'p^2 + c'q^2 \leq bpq - 1$$

impliziert also

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{4a'c'}pq &\leq bpq - 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4a'c'} &\leq b - \frac{1}{pq} \quad (\text{pq ist positiv}) \\ \Rightarrow 4a'c' &\leq b^2 - \frac{2b}{pq} + \frac{1}{(pq)^2} \quad (\text{beide Seiten sind positiv, s.o.}) \\ \Leftrightarrow b^2 - 5 &\leq b^2 - \frac{2b}{pq} + \frac{1}{(pq)^2} \quad (\text{es ist } b^2 - 5 = 4ac = 4(-a')(-c') = 4a'c') \\ \Leftrightarrow \frac{2b}{pq} &\leq \frac{1}{(pq)^2} + 5 \\ \Leftrightarrow b &\leq \frac{\frac{1}{pq} + 5pq}{2} = \frac{\frac{1}{|pq|} + 5|pq|}{2} \quad (\text{pq ist positiv}) \end{aligned}$$

Nehmen wir an,  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ ,  $0 > a, b, c$  sei ein Lösungstripel. Da  $x$  positiv ist, ist  $-bx \geq bx$ , also  $ax^2 + (-b)x + c \geq ax^2 + bx + c > 0$ ; da zudem  $(-b)^2 - 4ac = b^2 - 4ac = 5$  gilt, ist mit  $(a, b, c)$  auch  $(a, -b, c)$  ein Lösungstripel.

Nehmen wir nun an, es gäbe ein Lösungstripel  $(a, b, c)$  mit  $0 > a, b, c$  und  $-\left(\frac{\frac{1}{|pq|} + 5|pq|}{2}\right) > b$ . Dann wäre auch  $(a, -b, c)$  Lösungstripel mit  $-b > \left(\frac{\frac{1}{|pq|} + 5|pq|}{2}\right)$ , was im Widerspruch zur obigen Ungleichung steht. Für positive  $x$  und ein Lösungstripel  $(a, b, c)$ ,  $0 > a, c$  gilt also stets

$$|b| < \frac{\frac{1}{|pq|} + 5|pq|}{2}.$$

[b]  $x$  ist negativ:

Mit  $x$  ist auch  $pq$  negativ. Dann lassen sich obige Umformungen bis zur Ungleichung  $a'p^2 + c'q^2 \leq bpq - 1$  übernehmen. Wenden wir nun AM-GM an, erhalten wir

$$\frac{a'p^2 + c'q^2}{2} = \frac{a'|p|^2 + c'|q|^2}{2} \geq \sqrt{a'c'|p|^2|q|^2} = |pq|\sqrt{a'c'}.$$

Die Ungleichung  $a'p^2 + c'q^2 \leq bpq - 1$  impliziert also

$$\Rightarrow \sqrt{4a'c'}|pq| \leq bpq - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4a'c'} \leq b \frac{pq}{|pq|} - \frac{1}{|pq|} = -b - \frac{1}{|pq|}$$

$$\Rightarrow 4a'c' \leq b^2 + \frac{2b}{|pq|} + \frac{1}{(|pq|)^2} \quad (\text{beide Seiten sind positiv, s.o.})$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 5 \leq b^2 + \frac{2b}{|pq|} + \frac{1}{(|pq|)^2} \quad (\text{es ist } b^2 - 5 = 4ac = 4(-a')(-c') = 4a'c')$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{5|pq| + \frac{1}{|pq|}}{2}\right) \leq b$$

Sei nun  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ ,  $b > 0 > a, c$  ein Lösungstripel. Da  $x$  negativ ist, ist dann  $(-b)x \geq bx$  also  $ax^2 + (-b)x + c \geq ax^2 + bx + c > 0$ ; da zudem  $(-b)^2 - 4ac = b^2 - 4ac = 5$  gilt, ist gezeigt, dass auch  $(a, -b, c)$  ein Lösungstripel ist.

Nehmen wir nun an, es gäbe ein Lösungstripel  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  mit  $b > \left(\frac{5|pq| + \frac{1}{|pq|}}{2}\right) > 0 > a, c$ ; dann wäre  $(a, -b, c)$  Lösungstripel mit  $-b < -\left(\frac{5|pq| + \frac{1}{|pq|}}{2}\right)$ , was im Widerspruch zur obigen Ungleichung steht. Es gilt also auch für negatives  $x$  die Ungleichung

$$|b| < \frac{\frac{1}{|pq|} + 5|pq|}{2}.$$

Damit ist eine obere Schranke für den Betrag von  $b$  gefunden und der Satz somit bewiesen.  $\square$

### Korollar 2 (Hauptsatz für $x \neq 0$ )

Für  $x \neq 0$  existieren nur endlich viele Lösungstripel.

### Beweis:

Für eine unendliche Menge  $\{(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{Z}^3\}_{n \in \mathbb{N}}$  an Lösungstripeln muss nach Lemma 1 einerseits  $\{|b_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt, nach dem vorangegangenen Satz aber auch beschränkt sein - Widerspruch. Es kann daher keine solche unendliche Menge existieren, was zu zeigen war.  $\square$

$\square$

$\square$

**Aufgabe 3**

Zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  schneiden sich in den Punkten  $A$  und  $B$ . Eine erste Gerade durch  $B$  schneide  $k_1$  in  $C$  und  $k_2$  in  $E$ . Eine zweite Gerade durch  $B$  schneide  $k_1$  in  $D$  und  $k_2$  in  $F$ ; dabei liege  $B$  zwischen den Punkten  $C$  und  $E$  sowie zwischen den Punkten  $D$  und  $F$ .  
Schließlich seien  $M$  und  $N$  die Mittelpunkte der Strecken  $CE$  und  $DF$ .  
Man beweise: Die Dreiecke  $ACD$ ,  $AEF$  und  $AMN$  sind zueinander ähnlich.

**Lösung:**

**Definitionen** Es sei  $M_1$  der Mittelpunkt von  $k_1$ ,  $M_2$  der Mittelpunkt von  $k_2$  und  $L$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{M_1M_2}$ . Es sei ferner  $k_3$  der Kreis durch  $A$  mit Mittelpunkt  $L$ .

**Lemma 1**

Die Gerade durch  $M_1$  und  $M_2$  entspricht der Mittelsenkrechte der Strecke  $AB$ .

**Beweis:** Die Strecken  $M_1A$  und  $M_1B$  sind Radien des Kreises  $k_1$ , das Dreieck  $M_1AB$  ist daher gleichschenkelig. Analog dazu sind  $M_2A$  und  $M_2B$  Radien des Kreises  $k_2$ . Da die Mittelsenkrechte in einem gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  mit Basis  $AB$  durch  $C$  geht, liegen die Kreismittelpunkte  $M_1, M_2$  auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $AB$ ; die Gerade durch  $M_1$  und  $M_2$  fällt also mit letzterer zusammen, was zu zeigen war.  $\square$

**Lemma 2**

Der Punkt  $B$  liegt auf dem Kreis  $k_3$ . Insbesondere ist  $AB$  eine Sehne von  $k_3$ .

**Beweis:** Nach Lemma 1 ist die Gerade durch  $M_1$  und  $M_2$  die Mittelsenkrechte von  $AB$ . Auf letztgenannter hat jeder Punkt die Eigenschaft, von  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt zu sein. Da  $L$  auf der Strecke  $M_1M_2$  und damit auf der Mittelsenkrechten zu  $AB$  liegt, folgt  $|LA| = |LB|$ . Da  $k_3$  durch  $A$  geht, ist  $|LA|$  der Radius von  $k_3$ . Dann liegt  $B$  wegen  $|LB| = |LA|$  ebenfalls auf  $k_3$ , was zu zeigen war.  $\square$

Aus der Tatsache, dass  $M_1M_2$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{AB}$  ist folgt bezogen auf das gleichschenklige Dreieck  $ALB$ , dass  $M_1M_2$  den Winkel  $\angle ALB$  halbiert (denn in einem gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  mit Basis  $\overline{AB}$  fallen Mittelsenkrechte von  $AB$  und Winkelhalbierende des Winkels bei  $C$  zusammen). Analog folgt, dass  $M_1M_2$  auch die Winkel  $\angle BM_1A$  und  $\angle AM_2B$  halbiert. Diese drei Beziehungen werden im folgenden öfters verwendet werden.

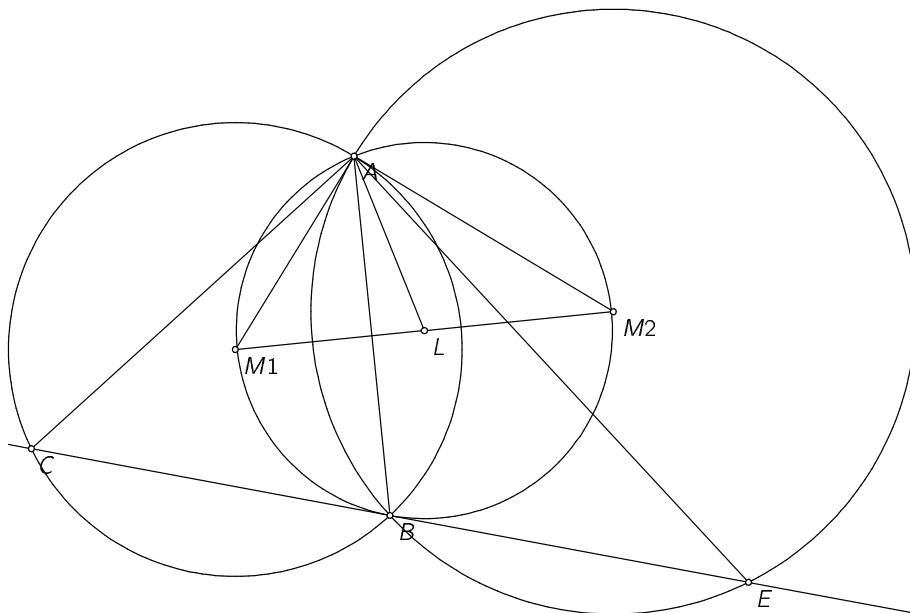
**Definitionen** Ist  $CE$  nicht Tangente an  $k_3$ , so sei  $M'$  der von  $B$  verschiedene Schnittpunkt von  $CE$  mit  $k_3$ . Ist  $CE$  Tangente an  $k_3$ , so sei  $M' = B$ . Analog dazu sei  $N'$  der von  $B$  verschiedene Schnittpunkt von  $DF$  mit  $k_3$ , wenn  $DF$  nicht Tangente an  $k_3$  ist, ansonsten  $N' = B$ .

**Bemerkung** Es wird im Folgenden gezeigt werden, dass  $M' = M$  und  $N' = N$  gilt. Dabei beschränke ich mich o.B.d.A. auf Ersteres, da die Strecken  $|DF|$  und  $|CE|$  in der Konstruktion vertauschbar sind.

### Lemma 3

Die Dreiecke  $ALM_1$  und  $AM'C$  sowie  $AEM'$  und  $ALM_2$  sind zueinander ähnlich.

**Beweis:** Da der Punkt  $B$  nach Konstruktion zwischen  $C$  und  $E$  liegt, tritt immer genau einer der folgenden Fälle ein:



**Abbildung 1:** Fall 1: die Gerade durch  $C$  und  $M'$  ist Tangente an  $k_3$ , d.h.  $M' = B$

**Fall 1: die Gerade durch  $C$  und  $M'$  ist Tangente an  $k_3$ , d.h.  $M' = B$**  In diesem Falle ist zu zeigen, dass  $ALM_1 \sim ABC$  und  $AEB \sim ALM_2$  gilt. Dies folgt aus

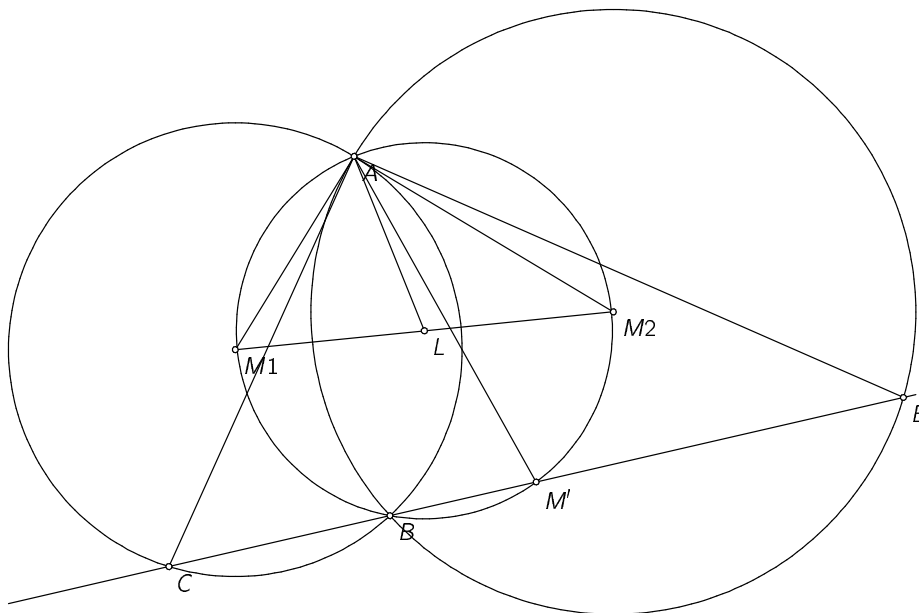
$$\begin{aligned}\angle ABC &= \frac{1}{2}\angle ALB \text{ (Sehnen-Tangentenwinkel-Satz, Peripherie-Zentriwinkel-Satz)} \\ &= \angle ALM_1, \\ &\quad \text{und} \\ \angle BCA &= \frac{1}{2}\angle BM_1A \text{ (Peripherie-Zentriwinkel-Satz)} \\ &= \angle LM_1A.\end{aligned}$$

Damit stimmen die Dreiecke  $ALM_1$  und  $ABC$  in zwei Winkeln, und nach dem Innenwinkelsatz auch in allen dreien Winkeln überein; sie sind daher ähnlich.

Weiter erhält man:

$$\begin{aligned}\angle AEB &= \frac{1}{2}\angle AM_2B \text{ (Peripherie-Zentriwinkel-Satz)} \\ &= \angle AM_2L \\ &\text{und} \\ \angle EBA &= 180^\circ - \angle ABC \\ &= 180^\circ - \angle ALM_1 \text{ (siehe oben)} \\ &= \angle M_2LA\end{aligned}$$

Damit stimmen die Dreiecke  $AEB$  und  $ALM_2$  in zwei, und nach dem Innenwinkelsatz in allen drei Winkeln überein; sie sind daher ähnlich.



**Abbildung 2:** Fall 2: es ist  $M' \neq B$  und  $M'$  liegt zwischen  $B$  und  $E$

**Fall 2: es ist  $M' \neq B$  und  $M'$  liegt zwischen  $B$  und  $E$**  Es gilt

$$\begin{aligned}
 \angle AM'C &= \angle AM'B \text{ (} B \text{ liegt zwischen } M' \text{ und } C \text{)} \\
 &= \frac{1}{2} \angle ALB \text{ (Peripherie-Zentriwinkel-Satz)} \\
 &= \angle ALM_1, \\
 &\text{und} \\
 \angle M'CA &= \angle BCA \text{ (} B \text{ liegt zwischen } M' \text{ und } C \text{)} \\
 &= \angle LM_1A \text{ (siehe oben) .}
 \end{aligned}$$

Damit stimmen die Dreiecke  $ALM_1$   $AM'C$  in zwei, nach dem Innenwinkelsatz also in allen drei Winkeln überein; sind daher ähnlich.

Weiter erhält man:

$$\begin{aligned}
 \angle AEM' &= \angle AEB \text{ (} M' \text{ liegt zwischen } E \text{ und } B \text{)} \\
 &= \angle AM_2L \text{ (siehe oben) ,} \\
 &\text{und} \\
 \angle EM'A &= 180^\circ - \angle AM'B \\
 &= 180^\circ - \angle ALM_1 \text{ (siehe oben)} \\
 &= \angle M_2LA
 \end{aligned}$$

Somit stimmen auch die Dreiecke  $AEM'$  und  $ALM_2$  in zwei Winkel überein, sie sind daher ähnlich.

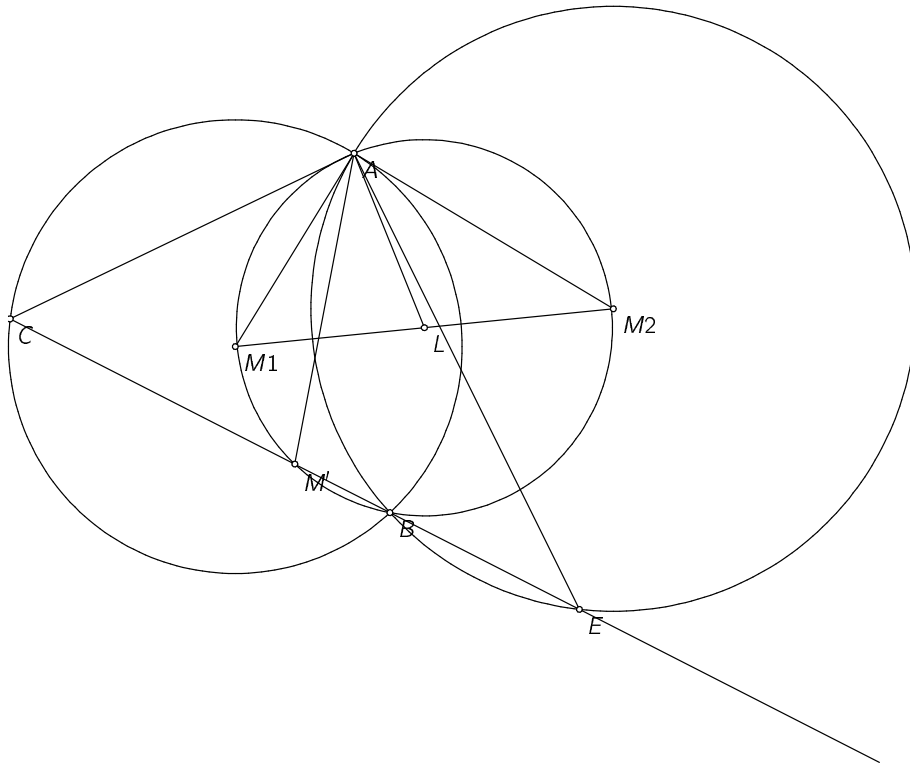
**Fall 3: es ist  $M' \neq B$  und  $M'$  liegt zwischen  $C$  und  $B$**  Es gilt

$$\begin{aligned}
 \angle AM'C &= 180^\circ - \angle BM'A \\
 &= \frac{1}{2} \angle ALB \text{ (Peripheriewinkelsatz, Peripherie-Zentriwinkel-Satz)} \\
 &= \angle ALM_1 \\
 &\text{und} \\
 \angle M'CA &= \angle BCA \text{ (} M' \text{ liegt zwischen } C \text{ und } B \text{)} \\
 &= \angle LM_1A \text{ (siehe oben) .}
 \end{aligned}$$

Damit stimmen die Dreiecke  $AM'C$  und  $ALM_1$  in zwei Winkeln überein, sie sind daher ähnlich. Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \angle AEM' &= \angle AEB \text{ (} B \text{ liegt zwischen } M' \text{ und } E \text{)} \\
 &= \angle AM_2L \text{ (siehe oben) ,} \\
 &\text{und} \\
 \angle EM'A &= \angle BM'A \text{ (} B \text{ liegt zwischen } E \text{ und } M' \text{)} \\
 &= 180^\circ - \angle ALM_1 \text{ (siehe oben)} \\
 &= \angle ALM_2.
 \end{aligned}$$

Damit stimmen auch die Dreiecke  $AEM'$  und  $ALM_2$  in zwei Winkeln überein, sie sind daher ähnlich.



**Abbildung 3:** Fall 3: es ist  $M' \neq B$  und  $M'$  liegt zwischen  $C$  und  $B$

Damit sind die besagten Dreiecke in allen drei Fällen ähnlich und Lemma 3 bewiesen. □

#### Lemma 4

Der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $\overline{CE}$  fällt mit  $M'$  zusammen.

#### Beweis:

Nach Lemma 3 ist  $AM_2L \sim AEM'$  mit  $\angle AEM' = \angle AM_2L$  und  $\angle EM'A = \angle M_2LA$ , woraus

$$\frac{|AM'|}{|M'E|} = \frac{|AL|}{|LM_2|}$$

folgt. Ebenso ist nach Lemma 3  $ALM_1 \sim AM'C$  mit  $\angle AM'C = \angle ALM_1$  und  $\angle M'CA = \angle LM_1A$ , woraus

$$\frac{|CM'|}{|AM'|} = \frac{|LM_1|}{|AL|}$$

folgt. Multiplikation beider Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{|AM'|}{|M'E|} \cdot \frac{|CM'|}{|AM'|} &= \frac{|AL|}{|LM_2|} \cdot \frac{|LM_1|}{|AL|} \\ \Leftrightarrow \frac{|CM'|}{|M'E|} &= \frac{|LM_1|}{|LM_2|}. \end{aligned}$$

Da  $\overline{LM_2}$  und  $\overline{LM_1}$  Radien von  $k_3$  sind, folgt aber  $|LM_1| = |LM_2| \Leftrightarrow \frac{|LM_1|}{|LM_2|} = 1$  und somit

$$\frac{|CM'|}{|M'E|} = 1 \Leftrightarrow |CM'| = |M'E|$$

Damit teilt  $M'$  die Strecke  $\overline{CE}$  in gleich lange Teile;  $M'$  ist demnach der Mittelpunkt von  $\overline{CE}$ , d.h.  $M' = M$ , was zu zeigen war.  $\square$

### Korollar 1

*Es gilt  $N = N'$ . Insbesondere ist das Viereck  $ABMN$  ein Sehnenviereck mit Umkreis  $k_3$ .*

**Beweis:** Obige Überlegungen lassen sich, wie vor Lemma 3 und 4 erwähnt, analog für die Strecke  $\overline{DF}$  mit Mittelpunkt  $N$  durchführen. Daraus folgt  $N = N'$ . Die Punkte  $M$  und  $N$  fallen mit den Schnitten von  $\overline{CE}$  bzw.  $\overline{DF}$  mit  $k_3$  zusammen; sie liegen also auf  $k_3$ . Ferner wissen wir, dass  $A$  und  $B$  auf  $k_3$  liegen; das Viereck  $ABMN$  ist demnach ein Sehnenviereck.  $\square$

### Satz 2 (Hauptsatz)

*Es gilt  $AMN \sim ACD \sim AEF$ .*

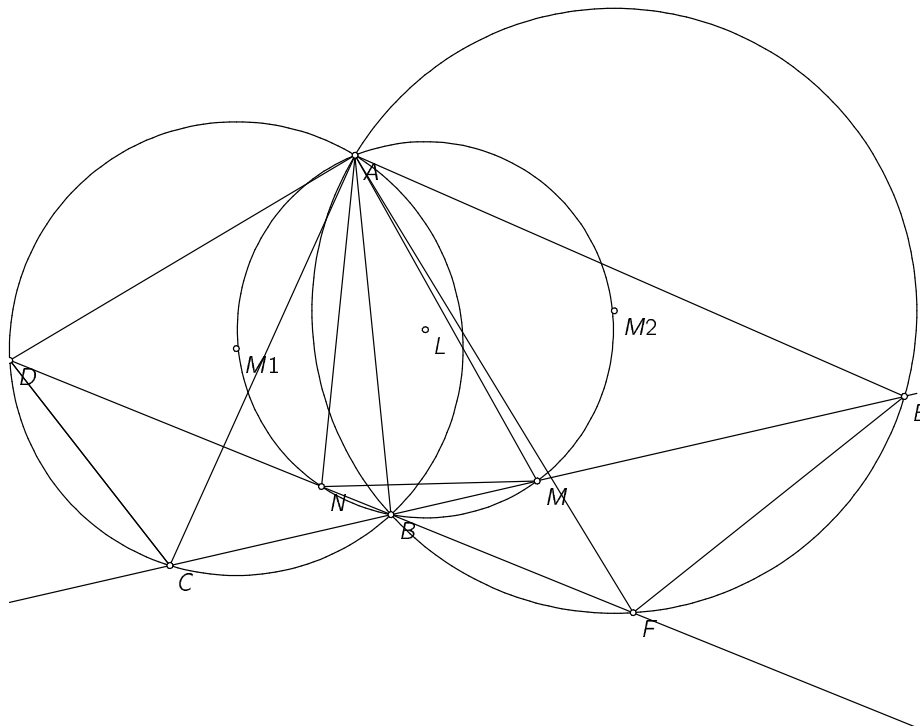
### Beweis:

Nach Korollar 2 ist  $ABMN$  ein Sehnenviereck mit Umkreis  $k_3$ . Es dürfen also die bekannten Winkelsätze angewandt werden.

Zuerst sei die Ähnlichkeit von  $AMN$  und  $ACD$  bewiesen. Nehmen wir an,  $M$  und  $N$  liegen auf verschiedenen Seiten der Sehne  $AB$ , so liege o.B.d.A.  $M$  auf der gleichen Seite von  $AB$  wie  $E$  (so, wie es auch auf dem Aufgabenblatt zu sehen ist). Dann gilt

$$\begin{aligned} \angle AMN &= \angle ABN \text{ (Peripheriwinkelsatz für } k_3) \\ &= \angle ABD \text{ (} N \text{ liegt zwischen } B \text{ und } D) \\ &= \angle ACD \text{ (Peripheriwinkelsatz für } k_1) \\ u \quad \text{und} \\ \angle MNA &= \angle MBA \text{ (Peripheriwinkelsatz für } k_3) \\ &= 180^\circ - \angle ABC \\ &= \angle CDA \text{ (Peripheriwinkelsatz für } k_1; \angle ABC \text{ und } \angle CDA \text{ sind supplementär)} \end{aligned}$$

Damit stimmen  $AMN$  und  $ACD$  in zwei Winkeln überein, sie sind somit ähnlich.



**Abbildung 4:** Beweis des Hauptsatz

Liegen  $M, N$  auf der gleichen Seite von  $AB$ , so seien sie o.B.d.A. auf der gleichen Seite von  $AB$  wie  $E$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \angle AMN &= 180^\circ - \angle NBA \text{ (Peripheriewinkelsatz für } k_3) \\
 &= \angle ABD \\
 &= \angle ACD \text{ (Peripheriewinkelsatz für } k_3) \\
 &\text{und} \\
 \angle MNA &= \angle MBA \text{ (Peripheriewinkelsatz für } k_3) \\
 &= \angle CDA \text{ (siehe oben)}
 \end{aligned}$$

Damit stimmen  $AMN$  und  $ACD$  in zwei Winkeln überein, sie sind somit ähnlich.

Falls  $CE$  oder  $DF$  Tangenten an  $k_3$  sind, so müssen die Schritte teils mit dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz begründet werden, wie ich dies auch schon beim Beweis von Lemma 3 in Fall 1 getan habe. Ich belasse es hier bei einem Hinweis und verzichte auf die Angabe der genauen Umformungen.

Die Dreiecke  $AMN$  und  $ACD$  sind somit in jedem Falle ähnlich.

Es bleibt die Ähnlichkeit von  $ACD$  und  $AEF$  zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}\angle ACD &= \angle ABD \text{ (Peripheriewinkelsatz für } k_1) \\ &= 180^\circ - \angle FBA \\ &= \angle AEF \text{ (Peripheriewinkelsatz für } k_2; \text{ die Winkel } \angle FBA \text{ und } \angle AEF \text{ sind supplementär)} \\ &\quad \text{und} \\ \angle DAC &= \angle DBC \text{ (Peripheriewinkelsatz für } k_1) \\ &= \angle FBE \\ &= \angle FAE \text{ (Peripheriewinkelsatz für } k_2)\end{aligned}$$

Damit stimmen die Dreiecke  $ACD$  und  $AEF$  in zwei Winkeln überein, sie sind folglich ähnlich. Zusammenfassend gilt also  $AMN \sim ACD \sim AEF$ , was zu zeigen war.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

□

□

**Aufgabe 4**

Es sei  $A(n)$  die maximale Anzahl der Selbstüberschneidungen von geschlossenen Streckenzügen  $P_1P_2\dots P_nP_1$  ( $n \geq 3$ ), bei denen keine drei der Eckpunkte auf einer Geraden liegen.

Man beweise:

1.  $A(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ , falls  $n$  ungerade,
2.  $A(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1$ , falls  $n$  gerade ist.

**Lösung:**

**Definitionen** Im Folgenden sei  $P = P_1P_2\dots P_nP_1$  ein geschlossener Streckenzug. Eine Teilstrecke  $P_iP_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (wobei  $P_{n+1} = P_1$ ) bezeichne ich als Kante von  $P$ ; als  $i$ -te Kante sei die Kante  $\overline{P_iP_{i+1}}$  bezeichnet. Die Anzahl der Selbstüberschneidungen von  $P$  sei mit  $S(P)$  bezeichnet. In einem solchen Streckenzug sei ferner  $P_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  immer als  $P_{i \pmod n + 1}$  zu verstehen. Ferner sei mit der Anzahl der Selbstüberschneidungen die Anzahl der (ungeordneten) Paare  $(i, j)$  bezeichnet, für die die  $i$ -te Kante die  $j$ -te Kante nicht-inzidente schneidet. Dies bedeutet, dass sich mehrere ( $\geq 3$ ) Kanten durchaus in einem einzigen Punkt schneiden können, für diesen Schnitt dann jedoch auch mehrere Selbstüberschneidungen gezählt werden. Eine Einschränkung stellt dies nicht dar, da man in einem solchen Falle die Eckpunkte der betroffenen Kanten um hinreichend kleine Distanzen verschieben und somit verschiedene Schnittpunkte erhalten könnte; die obige Konvention macht allerdings die Konstruktion von bestimmten Streckenzügen um einiges leichter und daher wurde sie hier gewählt.

**Lemma 1**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  gilt

$$A(n) \leq \frac{n(n-3)}{2}.$$

**Beweis:** Eine Kante  $p$  von  $P$  kann höchstens die  $n - 3$  Kanten schneiden, die nicht mit  $p$  inzidieren. Betrachten wir den Fall, in dem jede Kante genau  $n - 3$ , d.h. die maximale Anzahl an Kanten schneidet. Die Anzahl der Selbstüberschneidungen von  $P$  beträge dann  $\frac{n(n-3)}{2}$ ; dies erhalten wir, da wir für jede der  $n$  Kanten  $n - 3$  Schnitte zählen und die erhaltene Anzahl von Schnitten halbieren, da je ein Schnitt doppelt gezählt wurde. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Lemma 2**

Für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  existiert ein geschlossener Streckenzug  $P = P_1 P_2 \dots P_n P_1$  mit

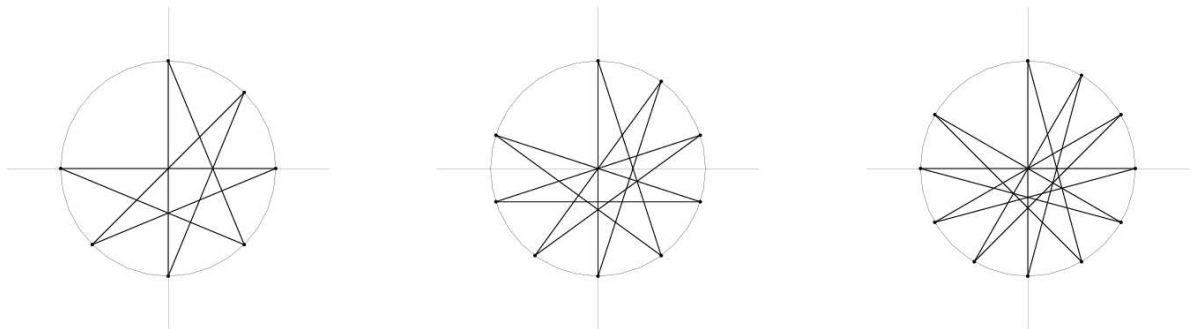
$$S(P) = \frac{n(n-3)}{2},$$

für den keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.

**Beweis:** Es ist hinreichend, für jedes ungerade  $n$  einen Streckenzug  $P$  mit  $S(P) = \frac{n(n-3)}{2}$  zu konstruieren. Wir wählen alle Punkte  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  auf dem Einheitskreis und definieren sie über die Winkel  $\varphi(i) \in [0, 360^\circ]$ , den die Verbindungsstrecken zum Ursprung mit der Y-Achse einschließen:

$$\varphi(i) = \begin{cases} k \cdot \frac{360^\circ}{n+1} & , \text{ wenn } i \text{ ungerade } i = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, \\ 180^\circ + (k-1) \frac{360^\circ}{n+1} & , \text{ wenn } i \text{ gerade, } i = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Zur Verdeutlichung hier die so konstruierten Streckenzüge für  $n = 7, 9, 11$ :



Es ist nun zu zeigen, dass sich je zwei nicht inzidierende Kanten  $P_i P_{i+1}$ ,  $P_j P_{j+1}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i, j$  o.B.d.A. gerade, schneiden. Sei dazu o.B.d.A.  $i < j$ . Offensichtlich gilt  $\varphi(i) \in [0^\circ, 180^\circ)$  für gerade  $i$  und  $\varphi(i) \in [180^\circ, 360^\circ)$  für ungerade  $i$ . Es folgt  $\varphi(i) < \varphi(j) < \varphi(i+1)$  und  $\varphi(i+1) < \varphi(j+1) < 360^\circ + \varphi(i)$ ; es liegen daher  $P_j$  und  $P_{j+1}$  auf verschiedenen Seiten der Kante  $P_i P_{i+1}$ , die Kanten  $P_i P_{i+1}$  und  $P_j P_{j+1}$  müssen sich also schneiden.

Damit ist gezeigt, dass sich je zwei verschiedene, nicht inzidierende Kanten schneiden. Wie oben bereits ausgeführt, erhalten wir somit die Gesamtzahl  $\frac{n(n-3)}{2}$  an Selbstüberschneidungen. Da ferner alle Eckpunkte des konstruierten Streckenzuges auf dem Einheitskreis liegen, liegen insbesondere keine drei von ihnen auf einer Geraden.

Damit ist ein gewünschter Streckenzug gefunden und das Lemma bewiesen. □

**Korollar 1 (Aufgabenteil (a))**

Es gilt

$$A(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

**Beweis:** Nach Lemma 2 existiert für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  ein Streckenzug  $P$  mit  $S(P) = \frac{n(n-3)}{2}$ , d.h. wir haben  $A(n) \geq S(P) = \frac{n(n-3)}{2}$ . Nach Lemma 1 gilt allerdings auch  $A(n) \leq \frac{n(n-3)}{2}$ . Zusammen folgt

$$A(n) = \frac{n(n-3)}{2},$$

was zu beweisen war. □

Den Aufgabenteil (b) konnte ich nicht lösen, dennoch seien meine Überlegungen bezüglich dieser Aufgabe hier noch angefügt: Ohne Beweis sei folgender, offensichtlicher Hilfssatz angebracht, der im Folgenden ohne explizite Nennung verwendet werden wird:

### Lemma 3

*Es seien  $A, B, C, D$  Punkte in der Ebene, wobei keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Schneidet die Strecke  $\overline{AB}$  die Strecke  $\overline{CD}$ , so liegen  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $CD$  durch  $C$  und  $D$ .*

### Lemma 4

*Es sei  $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$  gerade und  $P = P_1P_2 \dots P_nP_1$  ein geschlossener Streckenzug von  $n$  Strecken und  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  beliebig gewählt. Liegen  $P_i$  und  $P_{i+3}$  auf der gleichen Seite der Geraden durch  $P_{i+1}$  und  $P_{i+2}$ , so wird die Kante  $P_{i+1}P_{i+2}$  von höchstens  $n-4$  anderen Kanten geschnitten.*

**Beweis:** O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass  $i = 1$  ist. Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann würde die Kante  $P_2P_3$  von allen  $n-3$  nicht mit ihr inzidierenden Kanten geschnitten. Da  $P_4$  und  $P_1$  auf der gleichen Seite von  $P_2P_3$  liegen, läge dann nach dem vorangegangenen Lemma  $P_5$  als Endpunkt der  $P_2P_3$  schneidenden Kante  $P_4P_5$  auf der anderen Seite von  $P_2P_3$  wie  $P_4$ , also auch  $P_1$ ; es folgte ferner nach dem gleichen Argument, dass  $P_6$  auf der gleichen Seite von  $P_2P_3$  läge wie  $P_4$  bzw.  $P_1$ . So fortfahrend erhält man, dass jeder Punkt geraden Indexes auf der gleichen Seite von  $P_2P_3$  liegt wie  $P_3$ , also auch  $P_1$ ; insbesondere gälte dies also für  $P_n$ . Dann allerdings könnte (nach der Umkehrung des vorangegangenen Lemma) die Kante  $P_nP_1$  die Kante  $P_2P_3$  nicht mehr schneiden, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass die Kante  $P_2P_3$  von allen nicht mit ihr inzidierenden Kanten geschnitten wird. □

Betrachten wir nun einen Streckenzug  $P = P_1P_2 \dots P_nP_1$  und die Kante  $P_2P_3$ . Liegen  $P_1$  und  $P_3$  auf verschiedenen Seiten von  $P_2P_3$ , so folgt nach aus dem vorangegangenen Lemma, dass  $P_2P_3$  nicht maximal oft geschnitten wird. Liegen  $P_1$  und  $P_4$  nicht auf der gleichen Seite von  $P_2P_3$ , können sich  $\overline{P_3P_4}$  und  $\overline{P_1P_2}$  nicht schneiden. In beiden Fällen wird also ein Schnitt eingebüßt. Dies kann nun auch auf eine weitere Kante  $P_iP_{i+1}$  und die Punkte  $P_{i-1}, P_{i+1}$  übertragen werden; jedoch konnte ich keine Aussage darüber treffen, welche Einbußen ich beim Durchlaufen dieses Argumentes für alle Kanten mehrfach zähle. Daher enden dieser Ansatz und meine Arbeit hier. □