1 Aufgabe 1

Wir nummerieren alle Sektoren im Uhrzeigersinn von 0 bis $2n-1$ durch, startend bei einem beliebig (aber fest) gewählten Sektor.
Die in den Sektoren eingetragenen Zahlen seien als Restklassen $\mod n$ verstanden. Somit ordnen wir der Zahl z die Restklasse $z \mod n$ zu. Umgekehrt können wir jeder Restklasse $\mod n$ wieder ihren Vertreter aus $\{1,2,3,...,n\}$ zuordnen.
Die Voraussetzung lässt sich dann folgendermaßen ausdrücken: ist in einem weißen Sektor k die Zahl $z \mod n$ eingetragen, so befindet sich in dem im Uhrzeigersinn nächsten weißen Sektor die Zahl $z+1 \mod n$; ist in einem schwarzen Sektor k die Zahl $z \mod n$ eingetragen, so befindet sich in dem gegen Uhrzeigersinn nächsten schwarzen Sektor die Zahl $z+1 \mod n$ (man beachte, dass dies wegen der Betrachtung mod n auch für $z=n$ gilt, während es für alle anderen Werte von z schon vorher galt). Die Anforderung an die schwarzen Sektoren lässt sich auch in Richtung des Uhrzeigers ausdrücken: ist in einem schwarzen Sektor k die Zahl $z \mod n$ eingetragen, so befindet sich in dem im Uhrzeigersinn nächsten schwarzen Sektor die Zahl $z-1 \mod n$.

Definition 1. *Sei $k \in \{0,1,2,3,...,2n-1\}$ ein Sektor. Von k beginnend suchen wir im Uhrzeigersinn nun den nächsten weißen Sektor und nennen die dort geschriebene Zahl a_k (wenn insbesondere k weiß ist, so wird also a_k diejenige Zahl, die in k geschrieben steht). Ähnlich suchen wir von k beginnend im Uhrzeigersinn den nächsten schwarzen Sektor und nennen die dort geschriebene Zahl b_k.*
Zuletzt setzen wir $d_k := a_k - b_k$.

Wir wollen zuerst d_k für verschiedene k betrachten.

Hilfssatz 1. *Sei $k \in \{0,1,2,3,...,2n-2\}$. Dann gilt $d_{k+1} \equiv d_k + 1 \mod n$.*

Beweis. Die Einschränkung $k \neq 2n-1$ ist natürlich nur, um den Übergang von $2n-1$ nach 0 bei der Nummerierung zu vermeiden. Es wäre ein leichtes, diesen Fall mit einzuschließen, aber da wir ihn nicht benötigen werden sei er hier weggelasen.
Wir unterscheiden nun nach der Farbe des Sektors k:

Fall 1: Sektor k ist weiß.
Dann ist a_k die in Sektor k geschriebene Zahl. Der im Uhrzeigersinn nächste weiße Sektor nach k, also der erste weiße Sektor ab $k+1$, enthält somit nach Voraussetzung eine Zahl $\equiv a_k + 1 \mod n$. Somit wird $a_{k+1} \equiv a_k + 1 \mod n$. Der erste schwarze Sektor im Uhrzeigersinn ist ab k der selbe wie ab $k+1$, so dass $b_{k+1} = b_k$. Dadurch wird $d_{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1} \equiv a_k + 1 - b_k = d_k + 1 \mod n$.

Fall 2: Sektor k ist schwarz.
Dann ist b_k die in Sektor k geschriebene Zahl. Der im Uhrzeigersinn nächste schwarze Sektor nach k, also der erste schwarze Sektor ab $k+1$, enthält somit nach Voraussetzung eine Zahl $\equiv b_k - 1 \mod n$. Somit wird $b_{k+1} \equiv b_k - 1 \mod n$. Der erste weiße Sektor im Uhrzeigersinn ist ab k der selbe wie ab $k+1$, so dass $a_{k+1} = a_k$. Dadurch wird $d_{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1} \equiv a_k - b_k + 1 = d_k + 1 \mod n$.

In beiden sich ergänzenden Fällen ist also $d_{k+1} \equiv d_k + 1 \mod n$. $\square$

Lemma 1. *Es gibt ein $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ mit $d_k \equiv 1 \mod n$.*

Beweis. Wir wählen k als den (eindeutig bestimmten) Restklassenrepräsentanten von $1 - d_0 \mod n$ aus $\{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$. Dann gilt nach Hilfssatz 1:

$$d_k \equiv d_{k-1} + 1 \equiv d_{k-2} + 2 \equiv ... \equiv d_1 + k - 1 \equiv d_0 + k \equiv d_0 + 1 - d_0 = 1 \mod n.$$

Somit erfüllt dieses k unsere Anforderungen. $\square$

Satz 1. *Es gibt n aufeinanderfolgende Sektoren die genau die Zahlen aus $1, 2, 3, ..., n$ enthalten.*

Beweis. Wir wählen $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ so, dass $a_k - b_k = d_k \equiv 1 \mod n$ (dies ist nach Lemma 1 möglich) und behaupten: in den (natürlich aufeinanderfolgenden) Sektoren $k, k+1, k+2, k+3, ..., k+n-1$ kommt jede der Zahlen vor (hier zeigt sich der Grund warum k aus $\{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ sein soll: nur so stellt jede der eben genannten Zahlen auch einen Sektor dar).
Seien unter den eben genannten n Sektoren genau x weiß und y schwarz. Die weißen Sektoren enthalten dann die Zahlen $a_k, a_k + 1, a_k + 2, ..., a_k + x - 1 \mod n$ und die schwarzen Sektoren die Zahlen $b_k, b_k - 1, b_k - 2, ..., b_k - y + 1 \mod n$. Wegen $b_k \equiv a_k - 1 \mod n$ (nach Wahl von k) und $y = n - x$ (da es im Ganzen n Sektoren sind) stehen in den schwarzen Sektoren also die Zahlen $a_k - 1, a_k - 2, a_k - 3, ..., a_k - n + x \mod n$ geschrieben.
Aber $a_k - n + x, ..., a_k - 2, a_k - 1, a_k, a_k + 1, a_k + 2, ..., a_k + x - 1$ sind n aufeinanderfolgende ganze Zahlen bzw. Restklassen, jede Restklasse $\mod n$ kommt unter ihnen also genau einmal vor. Käme also eine Zahl in den Sektoren $k, k+1, k+2, k+3, ..., k+n-1$ doppelt vor, so käme auch die zugehörige Restklasse $\mod n$ doppelt vor, was nicht der Fall ist. Also kommt jede der n möglichen Zahlen höchstens und damit genau einmal in diesen n Sektoren vor, was wir zeigen wollten.

q.e.tee.

2 Aufgabe 2

Alle im Folgenden durchgeführten Manupulationen von (Un-)Gleichungen sind erlaubt, da alle vorkommenden Zahlen positiv und insbesondere auch nicht 0 sind. Allerdings wollen wir dies nicht jedesmal extra erwähnen.

Gesucht sind alle Funktionen $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ (hierbei sei $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen, $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen) mit:

$$\begin{aligned} & f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy) = \tfrac{f(xy)}{f(x+y)} && (1)\\ \Leftrightarrow\quad & f(x+y)\cdot(f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy)) = f(xy) && (2)\\ \Leftrightarrow\quad & f(x+y) = \tfrac{f(xy)}{f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy)} && (3) \end{aligned}$$

Sei also nun $f(x)$ eine solche Funktion.

Hilfssatz 2. $f(2) = \dfrac{1}{4}$, $f(4) = \dfrac{1}{16}$

Beweis. Wir setzen $x = y = 1$ in (3) und erhalten

$$f(2) = f(1+1) = \frac{f(1)}{f(1)+f(1)+2\cdot f(1)} = \frac{1}{4}.$$

Setzen wir nun $x = y = 2$ in (1), so liefert dies

$$\begin{aligned} & f(2)+f(2)+8\cdot f(4) = \tfrac{f(4)}{f(4)} = 1\\ \Rightarrow\quad & \tfrac{1}{2}+8\cdot f(4) = 1\\ \Rightarrow\quad & f(4) = \tfrac{1}{16}. \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 3. $f(1) = 1$

Beweis. Setzen wir $x = 2, y = 1$ in (3), so ergibt sich (unter Benutzung von Hilfssatz 2):

$$f(3) = \frac{f(2)}{f(2)+f(1)+4\cdot f(2)} = \frac{\frac{1}{4}}{5\cdot\frac{1}{4}+f(1)} = \frac{1}{5+4\cdot f(1)} \qquad (4)$$

und ähnlich mit $x = 3, y = 1$ auch

$$\frac{1}{16} = f(4) = \frac{f(3)}{f(3)+f(1)+6\cdot f(3)} = \frac{f(3)}{7\cdot f(3)+f(1)} \qquad (5)$$

Setzt man aber (4) in (5) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} = \frac{\frac{1}{5+4\cdot f(1)}}{7\cdot\frac{1}{5+4\cdot f(1)}+f(1)} &= \frac{1}{7+f(1)\cdot(5+4\cdot f(1))}\\ \Rightarrow\quad & 4\cdot f(1)^2+5f(1)+7 = 16\\ \Rightarrow\quad & 4\cdot f(1)^2+5f(1)-9 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $z = f(1)$ eine Lösung der quadratischen Gleichung $4z^2+5z-9=0$. Diese Gleichung hat aber nur die Lösungen $z_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 36}}{8} = \frac{-5\pm 13}{8}$, welche sich zu $z_1 = 1$ und $z_2 = -\frac{9}{4}$ ergeben. Da $z_2 < 0$ sicher nicht im Wertebereich von f liegt, muss also $f(1) = 1$ sein. □

Lemma 2. *Für alle positiven ganzen Zahlen n gilt:* $f(n) = \dfrac{1}{n^2}$.

Beweis. Dies ist nicht schwer per Induktion zu zeigen (und uns für $n = 1, 2, 4$ schon bekannt).
Induktionsanfang $n = 1$: Dies ist einfach Hilfssatz 3.
Sei also nun $n > 1$ und die Aussage für $n - 1$ bereits bewiesen. Somit wissen wir also $f(n-1) = \dfrac{1}{(n-1)^2}$. Wir setzen $x = n - 1, y = 1$ in (3) und erhalten (unter Benutzung von Hilfssatz 3) wie gewünscht:

$$\begin{aligned} f(n) = f(n-1+1) &= \frac{f(n-1)}{f(n-1) + f(1) + 2 \cdot (n-1) \cdot f(n-1)} = \\ &= \frac{f(n-1)}{(2(n-1)+1) \cdot f(n-1) + 1} = \frac{\frac{1}{(n-1)^2}}{(2n-1) \cdot \frac{1}{(n-1)^2} + 1} = \\ &= \frac{1}{(2n-1) + (n-1)^2} = \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 4. *Sei $s \in \mathbb{Q}^+$.*
Falls $f(s) > \dfrac{1}{s^2}$, *so ist* $f(s+1) > \dfrac{1}{(s+1)^2}$.
Falls $f(s) < \dfrac{1}{s^2}$, *so ist* $f(s+1) < \dfrac{1}{(s+1)^2}$.

Beweis. Sei zuerst $f(s) > \dfrac{1}{s^2}$, so folgt $\dfrac{1}{f(s)} < s^2$. Wir benutzen (3) mit $x = s$ sowie $y = 1$ und erhalten (wieder auch unter Verwendung von Hilfssatz 3):

$$f(s+1) = \frac{f(s)}{f(s) + f(1) + 2s \cdot f(s)} = \frac{f(s)}{(2s+1) \cdot f(s) + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(s+1)} = \frac{(2s+1) \cdot f(s) + 1}{f(s)} = 2s + 1 + \frac{1}{f(s)} < 2s + 1 + s^2 = (s+1)^2$$

$$\Rightarrow f(s+1) > \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Im Falle $f(s) < \frac{1}{s^2}$ beweist sich die gewünschte Aussage vollkommen analog, es müssen nur alle Ungleichheitszeichen umgedreht werden. □

Lemma 3. *Sei n eine positive ganze Zahl und $t \in \mathbb{Q}^+$.*
Falls $f(t) > \dfrac{1}{t^2}$, *so ist* $f(t+n) > \dfrac{1}{(t+n)^2}$.
Falls $f(t) < \dfrac{1}{t^2}$, *so ist* $f(t+n) < \dfrac{1}{(t+n)^2}$.

Beweis. Sei zuerst einmal $f(t) > \dfrac{1}{t^2}$.
Wir zeigen $f(t+n) > \dfrac{1}{(t+n)^2}$ per Induktion nach n.
Induktionsvoraussetzung $n = 1$: Dies ist genau die erste Aussage von Hilfssatz 4 mit $s = t$.

Sei $n > 1$ und für $n-1$ die Aussage schon bewiesen, sprich: wir wissen $f(t+n-1) > \dfrac{1}{(t+n-1)^2}$. Nun aber können wir die erste Aussage aus Hilfssatz 4 mit $s = t+n-1$ anwenden und erhalten $f(t+n) = f(t+n-1+1) > \dfrac{1}{(t+n-1+1)^2} = \dfrac{1}{(t+n)^2}$, was wir gerade wollten.
Analog wird die zweite Aussage bewiesen, wieder durch Umkehrung der Ungleichheitszeichen. □

Lemma 4. *Es ist* $f(r) = \dfrac{1}{r^2}$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}^+$.

Beweis. Sei $r = \dfrac{a}{b}$ mit postiven ganzen Zahlen a, b (diese existieren, da r eine positive rationale Zahl ist; wir benötigen nicht, dass der genannte Bruch vollständig gekürzt ist). Setzen wir $x = r = \frac{a}{b}$ und $y = b$ in (2), so erhalten wir

$$f\left(\frac{a}{b}+b\right)\cdot\left(f\left(\frac{a}{b}\right)+f(b)+2a\cdot f(a)\right) = f(a). \tag{6}$$

Da a, b natürliche Zahlen sind können wir Lemma 2 anwenden und erhalten $f(a) = \frac{1}{a^2}, f(b) = \frac{1}{b^2}$, was in (6) eingesetzt liefert:

$$f\left(\frac{a}{b}+b\right)\cdot\left(f\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a}\right) = \frac{1}{a^2}. \tag{7}$$

Angenommen $f(r) \neq \dfrac{1}{r^2}$, dann ist entweder $f(r) > \dfrac{1}{r^2}$ oder $f(r) < \dfrac{1}{r^2}$.
Wir unterscheiden beide Fälle und führen jeden zum Widerspruch.

1. Fall: $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = f(r) > \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$.
   Nach Lemma 3 ist nun auch $f\left(\frac{a}{b}+b\right) = f(r+b) > \frac{1}{(r+b)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}+b\right)^2}$ und wir erhalten aus (7):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2} &= f\left(\tfrac{a}{b}+b\right)\cdot\left(f\left(\tfrac{a}{b}\right)+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{2}{a}\right) > \\
&> \tfrac{1}{\left(\frac{a}{b}+b\right)^2}\cdot\left(\tfrac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{2}{a}\right) = \\
&= \tfrac{b^2}{(a+b^2)^2}\cdot\left(\tfrac{b^2}{a^2}+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{2}{a}\right) = \\
&= \tfrac{b^2}{(a+b^2)^2}\cdot\left(\tfrac{b^4+a^2+2ab^2}{a^2b^2}\right) = \\
&= \tfrac{b^2}{(a+b^2)^2}\cdot\tfrac{(a+b^2)^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

   Insgesamt also $\dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{a^2}$, was sicherlich falsch ist. Dies ist unser Widerspruch.

2. Fall: $f(r) < \dfrac{1}{r^2}$.
   Wie schon einige male zuvor ist dies vollkommen analog zum 1. Fall. Genauer reicht es abermals aus, einfach alle Ungleichheitszeichen umzudrehen.

□

Satz 2. *Die einzige Lösung ist* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Beweis. Nach Lemma 4 kommt überhaupt nur noch $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in Frage. Dass dies auch tatsächlich eine Lösung ist prüft sich schnell nach (hier sind natürlich $x, y \in \mathbb{Q}^+$ beliebig):

$$f(x) + f(y) + 2xy \cdot f(xy) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2xy}{x^2y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{(xy)^2} = \frac{\frac{1}{(xy)^2}}{\frac{1}{(x+y)^2}} = \frac{f(xy)}{f(x+y)}.$$

q.e.tee.

3 Aufgabe 3

Skizze 1.

Skizze 2.

Sei $\alpha = \angle CAB = \angle C'A'B'$, $\beta = \angle ABC = \angle A'B'C'$ und $\gamma = \angle BCA$. Zusätzlich sei noch U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Auch sei P beliebig unter all den Punkten gewählt, die alle gestellten Anforderungen erfüllen.
Wenn im Folgenden das Wort "analog" benutzt wird, so ergeben sich diese Analogien immer durch zyklisches Vertauschen der Form $A \to B \to C \to A$ und $A' \to B' \to C' \to A'$.

Lemma 5.

$$\angle CUB = 2\alpha$$
$$\angle AUC = 2\beta$$

Beweis. $\angle CUB$ ist der Mittelpunktswinkel des Peripheriewinkels $\alpha = \angle CAB$. Da nach Voraussetzung $\alpha < 90°$ ist, liegen U und A auf der selben Seite von BC, so dass $2\alpha = \angle CUB$.
Analog ist $\angle AUC = 2\beta$ der Mittelpunktswinkel zum Peripheriewinkel β. □

Hilfssatz 5. *Die Vierecke $AC'PB'$, $BA'PC'$ und $CB'PA'$ sind jeweils Sehnenvierecke.*
Insbesondere liegt P im Innern von $\triangle A'B'C'$.

Beweis. Es ist $\angle AC'P + \angle PB'A = 90° + 90° = 180°$. Somit ist $AC'PB'$ ein Sehnenviereck (denn zwei gegenüberliegende Winkel summieren sich zu $180°$).
Analog lassen sich auch die anderen beiden Sehnenvierecke nachweisen.
Es bleibt noch die Lage von P:
Da P nach Voraussetzung im Innern von $\triangle ABC$ liegt, genügt es zu zeigen, dass P nicht in oder auf einem der Dreiecke $\triangle AC'B'$, $\triangle BA'C'$ oder $\triangle CB'A'$ liegt.
Dies aber ist offensichtlich, denn P befindet sich (wie ja eben gezeigt wurde) auf den Umkreisen dieser Dreiecke, ist aber von deren Eckpunkten (die nicht im Innern von $\triangle ABC$) liegen) verschieden. □

Lemma 6.

$$\angle CPB = 2\alpha$$
$$\angle APC = 2\beta$$

Beweis. Da $BA'PC'$ und $CB'PA'$ nach Hilfssatz 5 Sehnenvierecke sind und die Punkte A', B' und C' auf den Seiten von $\triangle ABC$ liegen (letzteres, da sich P im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ befindet), wird nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle ABP = \angle C'BP = \angle C'A'P$$

und

$$\angle PCA = \angle PCB' = \angle PA'B'.$$

Da P im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt, ist

$$\angle PBC = \beta - \angle ABP$$

und

$$\angle BCP = \gamma - \angle PCA.$$

Da P auch im Dreieck $\triangle A'B'C'$ liegt, ist zusätzlich auch

$$\angle C'A'P + \angle PA'B' = \angle C'A'B' = \alpha.$$

Somit ist

$$\angle PBC + \angle BCP = \beta + \gamma - \angle ABP - \angle PCA =$$
$$= \beta + \gamma - \angle C'A'P - \angle PA'B' = \beta + \gamma - \alpha.$$

Wegen der Winkelsumme im Dreieck (zuerst in $\triangle CPB$, dann in $\triangle ABC$) ist schließlich

$$\angle CPB = 180° - (\angle PBC + \angle BCP) = 180° - \beta - \gamma + \alpha = 2\alpha.$$

Der Nachweis von $\angle APC = 2\beta$ verläuft vollkommen analog. □

Lemma 7. $P = U$

Beweis. Seien k_A sowie k_B die Umkreise von CUB sowie AUC. Dann fallen diese beiden Kreise nicht komplett zusammen, denn z.B. der Punkt A liegt auf k_B, nicht aber auf k_A (ersteres nach Definition, letzteres da sonst nach dem Peripheriewinkelsatz $\alpha = 2\alpha$ wäre).
Da P nach Voraussetzung und U wegen der geforderten Spitzwinkligkeit des Dreiecks $\triangle ABC$ im Innern des Dreicks $\triangle ABC$ liegen, befinden sich P und U je auf der selben Seite von BC und CA. Da gleichzeitig laut den Lemmata 5 und 6 auch $\angle CPB = 2\alpha = \angle CUB$ und $\angle APC = 2\beta = \angle AUC$, befindet sich P auf k_A und k_B (Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes).
Nun haben (wie alle solchen Kreise) die beiden nicht zusammenfallenden Kreise k_A und k_B aber maximal 2 gemeinsame (Schnitt-)Punkte S, welche durch $S = U$ und $S = C$ schon ausgeschöpft sind. Deshalb muss $P = U$ sein, da $P = C$ wegen der Lage von P im Innern ausgeschlossen ist. □

Satz 3. *Es gibt genau einen Punkt P, der die Anforderungen erfüllt: $P = U$.*

Beweis. Nach Lemma 7 kommt überhaupt nur noch $P = U$ in Frage. Somit bleibt also zu zeigen, dass U auch die geforderten Eigenschaften hat:
Sicherlich liegt U im Innern, da das Dreieck $\triangle ABC$ spitzwinklig ist.
Bekanntermaßen ist U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, die hier mit den Loten von U auf die Seiten von $\triangle ABC$ übereinstimmen. Dadurch werden A', B' und C' die Mittelpunkte der Strecken $[BC]$, $[CA]$ und $[AB]$, diese Punkte halbieren also die Dreiecksseiten.
Nach der Umkehrung des Strahlensatzes sind die Geraden AB und $A'B'$, die Geraden BC und $B'C'$ sowie die Geraden CA und $C'A'$ parallel. Nochmal nach dem Strahlensatz sind die Strecken $[A'B']$, $[B'C']$ und $[C'A']$ jeweils halb so lang wie die Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CA]$. Somit sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ ähnlich, was wie gefordert $\angle CAB = \angle C'A'B$ und $\angle ABC = \angle A'B'C'$ bedingt.

q.e.tee.

4 Aufgabe 4

Sei $Z \subset \mathbb{N}$ die Menge aller (positiven ganzen) ziffernreduzierten Zahlen. Auch sei $A = \{z \in \mathbb{N} | z < 10^{29}\}$ (A ist also die Menge der natürlichen Zahlen $< 10^{29}$) und $B = \{z \in Z | z \geq 10^{29}\}$ (B ist also die Menge der ziffernreduzierten Zahlen mit mindestens 30 Stellen). Dann ist Z natürlich in der (disjunkten) Vereinigung von A und B enthalten, insbesondere auch jede endliche Teilmenge M von Z.

Abschätzung 1. *Seien X, Y endliche Mengen positiver ganzer Zahlen mit $X \subseteq Y$. Dann ist* $\sum_{x\in X} \frac{1}{x} \leq \sum_{y \in Y} \frac{1}{y}$.

Beweis. Sei $Z = Y \backslash X$. Da alle $z \in Z \subseteq Y$ positiv sind ist $\sum_{z \in Z} \frac{1}{z}$ als Summe positiver Zahlen nicht negativ (es kann sich im Falle $Z = \emptyset$ aber um die leere Summe handeln, die natürlich 0 ist). Nun gilt

$$\sum_{y\in Y} \frac{1}{y} = \sum_{x\in X} \frac{1}{x} + \sum_{z\in Z} \frac{1}{z} \geq \sum_{x\in X} \frac{1}{x}.$$

□

Abschätzung 2. *Für eine natürliche Zahl m gilt:*

$$\sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} \leq m$$

Beweis. Für $k \geq 2^s$ gilt $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^s}$ und somit $\sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{2^s} = 1$. Dies liefert aber

$$\sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{s=0}^{m-1} 1 = m.$$

□

Abschätzung 3. *Sei M_A eine (endliche) Teilmenge von A. Dann ist*

$$\sum_{m\in M_A} \frac{1}{m} \leq 120.$$

Beweis. Da M_A, A endlich sind und $M_A \subseteq A$ ist, kann Abschätzung 1 benutzt werden, um $\sum_{m\in M_A} \frac{1}{m} \leq \sum_{a\in A} \frac{1}{a}$ zu erhalten, und es reicht deshalb aus, $\sum_{a\in A} \frac{1}{a} \leq 120$ zu zeigen.
Nun ist $2^4 = 16 > 10 = 10^1$, also $2^{120} = (2^4)^{30} > (10)^{30} > 10^{29}$ bzw. $2^{120} - 1 > 10^{29} - 1$ und deshalb

$$\sum_{a\in A} \frac{1}{a} = \sum_{a=1}^{10^{29}-1} \frac{1}{a} \leq \sum_{a=1}^{2^{120}-1} \frac{1}{a} \leq 120,$$

die letzte Ungleichung nach Abschätzung 2. □

Abschätzung 4. *Sei $n > 1$ und S_n die Menge der n-stelligen ziffernreduzierten Zahlen. Dann ist* $\sum_{s \in S_n} \frac{1}{s} \leq 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

Beweis. Sei $d \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ eine Dezimalziffer. Dann gibt höchstens 9^n n-stellige Zahlen, die diese Ziffer nicht in ihrer Dezimaldarstellung enthalten: für jede der n Ziffern kommen höchstens die 9 verschiedenen Ziffern $\neq d$ in Frage (als führende Ziffer sogar weniger), es gibt also höchstens 9^n Möglichkeiten diese Ziffern zu wählen (einige der so erhaltenen Zahlen können allerdings führende Nullen haben, so dass es meist weniger als 9^n dieser Zahlen gibt; die Unschärfe der gezeigten Schranke soll uns aber nicht weiter stören).
Lassen wir nun d von 0 bis 9 laufen, so zeigt sich, dass es höchstens $10 \cdot 9^n$ verschiedene n-stellige ziffernreduzierte Zahlen gibt (wieder ist diese Abschätzung unscharf, da einige Zahlen mehrfach gezählt werden, und wieder soll uns dies egal sein).
Für eine beliebige n-stellige Zahl z gilt $z \geq 10^{n-1}$ oder äquivalent $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{10^{n-1}}$.
Somit ist

$$\sum_{s \in S_n} \frac{1}{s} \leq \sum_{s \in S_n} \frac{1}{10^{n-1}} \leq \frac{10 \cdot 9^n}{10^{n-1}} = 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

□

Abschätzung 5. *Seien $n \geq m > 1$ und sei $T_{m,n}$ die Menge der ziffernreduzierten Zahlen, die mindestens m und höchstens n Stellen besitzen. Dann ist*

$$\sum_{t \in T_{m,n}} \frac{1}{t} \leq 1000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^m.$$

Beweis. Offensichtlich ist $T_{m,n} = S_m \cup S_{m+1} \cup S_{m+2} \cup ... \cup S_n$, wobei es sich um eine disjunkte Vereinigung handelt. Somit wird $\sum_{t \in T_{m,n}} \frac{1}{t} = \sum_{k=m}^{n} \sum_{s \in S_k} \frac{1}{s}$. Nach Abschätzung 4 aber ist $\sum_{s \in S_k} \frac{1}{s} \leq 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k$, somit also insgesamt

$$\sum_{t \in T_{m,n}} \frac{1}{t} \leq \sum_{k=m}^{n} 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k = 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^{n-m} \left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

Wir brauchen also nur noch $\sum_{k=0}^{n-m} \left(\frac{9}{10}\right)^k \leq 10$ nachzuweisen. Die Summe der linken Seite aber ist eine (endliche) geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{s} q^k$, deren Wert sich bekanntlich zu $\frac{1 - q^{s+1}}{1 - q}$ ergibt. In unserem Fall ist $q = \frac{9}{10}$ und $s = n - m$, so dass die linke Seite den Wert

$$\frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-m+1}}{1 - \left(\frac{9}{10}\right)} = 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-m+1}\right)$$

hat. Da aber $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-m+1} < 1$ (links wird ja noch etwas abgezogen) ergibt sich nach Multiplikation mit 10 sofort wie gewünscht

$$10\cdot\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-m+1}\right)\leq 10$$

und damit schlussendlich

$$\sum_{t\in T_{m,n}}\frac{1}{t}\leq 100\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{m}\cdot\sum_{k=0}^{n-m}\left(\frac{9}{10}\right)^{k}\leq 1000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{m}.$$

□

Abschätzung 6. *Sei M_B eine endliche Teilmenge von B. Dann ist*

$$\sum_{m\in M_B}\frac{1}{m}<60.$$

Beweis. Da M_B endlich ist, gibt es eine ganze Zahl $n\geq 30$ (sogar unendlich viele solcher Zahlen), für welche 10^n größer als alle $m\in M_B$ ist. Jedes der $m\in M_B$ hat nun also mindestens 30, aber höchstens n Stellen. Dadurch aber wird M_B zu einer Teilmenge von $T_{30,n}$, und nach den Abschätzungen 1 und 5 (letztere darf angewendet werden da $n\geq 30>1$) ergibt sich

$$\sum_{m\in M_B}\frac{1}{m}\leq\sum_{t\in T_{30,n}}\frac{1}{t}\leq 1000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{30}.$$

Es genügt somit

$$1000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{30}<60$$

oder äquivalent

$$1000<60\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{30}$$

nachzuweisen:

Wir erinnern uns an den Binomialsatz $(a+b)^s=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}a^{s-k}b^k$ für beliebiges natürliches s und beliebige komplexe Zahlen a,b. Wir wenden ihn mit $a=1, b=\frac{1}{9}$ und $s=30$ an:

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{30}=\left(1+\frac{1}{9}\right)^{30}=\sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}\cdot\frac{1}{9^k}.$$

Wir betrachten nun die folgenden trivialen Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
\binom{30}{0}\cdot\frac{1}{9^0} &= 1 \geq && 1\\
\binom{30}{1}\cdot\frac{1}{9^1} &= \tfrac{30}{9} > \tfrac{27}{9} = && 3\\
\binom{30}{2}\cdot\frac{1}{9^2} &= \tfrac{30\cdot 29}{2\cdot 9^2} > \tfrac{30\cdot 27}{2\cdot 9^2} = && 5\\
\binom{30}{3}\cdot\frac{1}{9^3} &= \tfrac{30\cdot 29\cdot 28}{6\cdot 9^3} > \tfrac{30\cdot 27^2}{6\cdot 9^3} = && 5\\
\binom{30}{4}\cdot\frac{1}{9^4} &= \tfrac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{24\cdot 9^4} > \tfrac{27^3\cdot 24}{24\cdot 9^4} = && 3
\end{aligned}$$

Addieren wir diese, so erhalten wir $\sum_{k=0}^{4}\binom{30}{k}\cdot\frac{1}{9^k} > 17$, so dass nun

$$60\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{30} = 60\cdot\sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}\cdot\frac{1}{9^k} \geq 60\cdot\sum_{k=0}^{4}\binom{30}{k}\cdot\frac{1}{9^k} > 60\cdot 17 = 1020 > 1000.$$

Genau das wollten wir aber zeigen. □

Satz 4. *Ist M eine endliche Teilmenge von Z, so ist* $\sum_{m\in M}\frac{1}{m} < 180.$

Beweis. Wir setzen $M_A = M\cap A \subseteq A$ und $M_B = M\cap B\subseteq B$. Als Teilmengen von M sind diese auch endlich, so dass wir die Abschätzungen 3 und 6 anwenden können:

$$\sum_{m\in M_A}\frac{1}{m} \leq 120\ , \quad \sum_{m\in M_B}\frac{1}{m} < 60.$$

Da $M\subseteq Z\subseteq A\cup B$ ist

$$M = M\cap(A\cup B) = (M\cap A)\cup(M\cap B) = M_A\cup M_B$$

die Vereinigung von M_A und M_B. Da A und B disjunkt sind, sind dies auch M_A und M_B. Dadurch aber erhalten wir schließlich wie gewünscht

$$\sum_{m\in M}\frac{1}{m} = \sum_{m\in M_A}\frac{1}{m} + \sum_{m\in M_B}\frac{1}{m} < 120 + 60 = 180.$$

q.e.tee.