Bundeswettbewerb Mathematik 2006, 2. Runde, Aufgabe 1

Ein Kreis sei in $2n$ kongruente Sektoren eingeteilt, von denen n schwarz und die übrigen n weiß gefärbt sind. Die weißen Sektoren werden, irgendwo beginnend, im Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., n beschriftet. Danach werden die schwarzen Sektoren, irgendwo beginnend, gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., n beschriftet.

Man beweise, dass es n aufeinander folgende Sektoren gibt, in denen alle natürlichen Zahlen von 1 bis n stehen. [1]

Lösung von Darij Grinberg:

Sei $\mathbb{Z}_{2n}$ die additive Gruppe der Restklassen ganzer Zahlen modulo $2n$. Beginnend mit einem beliebigen Sektor nummerieren wir alle $2n$ Sektoren des Kreises im Uhrzeigersinn mit den Restklassen 0, 1, 2, ..., $2n-1$ aus $\mathbb{Z}_{2n}$ durch. Wir identifizieren damit die $2n$ Sektoren des Kreises mit den entsprechenden Restklassen aus $\mathbb{Z}_{2n}$. Offensichtlich gilt: Für einen beliebigen Sektor i sind die Sektoren $i-1$ und $i+1$ die zwei Nachbarsektoren von dem Sektor i, und zwar ist der Sektor $i+1$ der nächste Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn, und $i-1$ ist der nächste Sektor nach dem Sektor i gegen den Uhrzeigersinn.

Ein Sektor u heiße zu einem Sektor v **verschiedenfarbig**, wenn die Sektoren u und v verschiedene Farben haben, d. h. wenn einer der beiden Sektoren u und v weiß ist und der andere schwarz.

Wir definieren nun drei Funktionen bzw. Abbildungen:

- Wir definieren die Funktion $e : \mathbb{Z}_{2n} \to \mathbb{Z}$ folgendermaßen: Für jeden Sektor i bezeichnen wir mit $e(i)$ die Zahl, mit der dieser Sektor (gemäß der Aufgabenstellung) beschriftet ist. Diese Zahl $e(i)$ nennen wir kurz die **Beschriftung** des Sektors i. Diese Zahl $e(i)$ ist eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., n.

- Für jeden Sektor i sei i_+ der erste zum Sektor i verschiedenfarbige Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft.

- Wir definieren die Funktion $d : \mathbb{Z}_{2n} \to \mathbb{Z}$ folgendermaßen: Für jeden Sektor i sei $d(i) = e(i) - e(i_+)$, wenn der Sektor i weiß ist, und $d(i) = e(i_+) - e(i)$, wenn der Sektor i schwarz ist.

Wir fangen mit einem trivialen Hilfsresultat an:

Hilfssatz 1: a) Ist i ein weißer Sektor, und j der nächste weiße Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn, dann gilt $e(j) \equiv e(i) + 1 \mod n$.

[1] *Bemerkung:* Ich habe die ursprüngliche Aufgabenstellung leicht abgeändert. Unter anderem habe ich das Verb "nummerieren" durch ein "beschriften" ersetzt, weil ich in meiner Lösung die Sektoren mit den Restklassen 0, 1, 2, ..., $2n-1$ modulo $2n$ durchnummeriere, und nicht der Eindruck entstehen soll, es handele sich dabei um die gleiche Nummerierung wie die in der Aufgabe definierte Beschriftung mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., n.

b) Ist i ein schwarzer Sektor, und j der nächste schwarze Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn, dann gilt $e(j) \equiv e(i) - 1 \mod n$.

Beweis von Hilfssatz 1: Hilfssatz 1 **a)** folgt daraus, daß die weißen Sektoren im Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., n beschriftet sind, und Hilfssatz 1 **b)** folgt daraus, daß die schwarzen Sektoren gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., n beschriftet sind.

Zu der Funktion $d(i)$ ist folgendes anzumerken:

Hilfssatz 2: Für jedes $i \in \mathbb{Z}_{2n}$ gilt $d(i+1) \equiv d(i) + 1 \mod n$.

Beweis von Hilfssatz 2: Wir unterscheiden vier Fälle:

Fall 1: Die Sektoren i und $i+1$ sind beide weiß. Dann ist i_+ der erste zum Sektor i verschiedenfarbige - also schwarze - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft, und $(i+1)_+$ ist der erste zum Sektor $i+1$ verschiedenfarbige - also schwarze - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor $i+1$ ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft. Da die Sektoren i und $i+1$ beide weiß sind, müssen also die Sektoren i_+ und $(i+1)_+$ übereinstimmen, d. h., wir haben $i_+ = (i+1)_+$.

Da die Sektoren i und $i+1$ weiß sind, gilt $d(i) = e(i) - e(i_+)$ und $d(i+1) = e(i+1) - e\left((i+1)_+\right)$. Da i ein weißer Sektor ist, und $i+1$ der nächste weiße Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn ist, gilt nach Hilfssatz 1 **a)** aber $e(i+1) \equiv e(i) + 1 \mod n$.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} d(i+1) &= e(i+1) - e\left((i+1)_+\right) = e(i+1) - e(i_+) \qquad \text{(denn } i_+ = (i+1)_+ \text{)} \\ &\equiv (e(i) + 1) - e(i_+) \qquad \text{(denn } e(i+1) \equiv e(i) + 1 \mod n\text{)} \\ &= (e(i) - e(i_+)) + 1 = d(i) + 1 \mod n. \end{aligned}$$

Fall 2: Die Sektoren i und $i+1$ sind beide schwarz. Dann ist i_+ der erste zum Sektor i verschiedenfarbige - also weiße - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft, und $(i+1)_+$ ist der erste zum Sektor $i+1$ verschiedenfarbige - also weiße - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor $i+1$ ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft. Da die Sektoren i und $i+1$ beide schwarz sind, müssen also die Sektoren i_+ und $(i+1)_+$ übereinstimmen, d. h., wir haben $i_+ = (i+1)_+$.

Da die Sektoren i und $i+1$ schwarz sind, gilt $d(i) = e(i_+) - e(i)$ und $d(i+1) = e\left((i+1)_+\right) - e(i+1)$. Da i ein schwarzer Sektor ist, und $i+1$ der nächste schwarze Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn ist, gilt nach Hilfssatz 1 **b)** aber $e(i+1) \equiv e(i) - 1 \mod n$.

Somit ist

$$\begin{aligned} d(i+1) &= e\left((i+1)_+\right) - e(i+1) = e(i_+) - e(i+1) \qquad \text{(denn } i_+ = (i+1)_+ \text{)} \\ &\equiv e(i_+) - (e(i) - 1) \qquad \text{(denn } e(i+1) \equiv e(i) - 1 \mod n\text{)} \\ &= (e(i_+) - e(i)) + 1 = d(i) + 1 \mod n. \end{aligned}$$

Fall 3: Der Sektor i ist schwarz, und der Sektor $i+1$ ist weiß. Dann ist i_+ der erste zum Sektor i verschiedenfarbige - also weiße - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft, und dies muß offensichtlich der Sektor $i+1$ sein! Somit ist $i_+ = i+1$. Andererseits ist $(i+1)_+$ der erste zum Sektor $i+1$ verschiedenfarbige - also schwarze - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor $i+1$ ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft.

Für den schwarzen Sektor i ist $d(i) = e(i_+) - e(i) = e(i+1) - e(i)$, und für den weißen Sektor $i+1$ ist $d(i+1) = e(i+1) - e\left((i+1)_+\right)$.

Die Sektoren i und $(i+1)_+$ sind beide schwarz, und zwar ist der Sektor $(i+1)_+$ der erste schwarze Sektor, den man passiert, wenn man von dem weißen Sektor $i+1$ ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft, also der nächste schwarze Sektor nach dem schwarzen Sektor i im Uhrzeigersinn. Nach Hilfssatz 1 **b)** ist also $e\left((i+1)_+\right) \equiv e(i) - 1 \mod n$.

Somit gilt

$$\begin{aligned} d(i+1) &= e(i+1) - e\left((i+1)_+\right) \\ &\equiv e(i+1) - (e(i) - 1) \qquad \text{(denn } e\left((i+1)_+\right) \equiv e(i) - 1 \mod n\text{)} \\ &= (e(i+1) - e(i)) + 1 = d(i) + 1 \mod n. \end{aligned}$$

Fall 4: Der Sektor i ist weiß, und der Sektor $i+1$ ist schwarz. Dann ist i_+ der erste zum Sektor i verschiedenfarbige - also schwarze - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft, und dies muß offensichtlich der Sektor $i+1$ sein! Somit ist $i_+ = i+1$. Andererseits ist $(i+1)_+$ der erste zum Sektor $i+1$ verschiedenfarbige - also weiße - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor $i+1$ ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft.

Für den weißen Sektor i gilt $d(i) = e(i) - e(i_+) = e(i) - e(i+1)$, und für den schwarzen Sektor $i+1$ haben wir $d(i+1) = e\left((i+1)_+\right) - e(i+1)$.

Die Sektoren i und $(i+1)_+$ sind beide weiß, und zwar ist der Sektor $(i+1)_+$ der erste weiße Sektor, den man passiert, wenn man von dem schwarzen Sektor $i+1$ ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft, also der nächste weiße Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn. Nach Hilfssatz 1 **a)** gilt somit $e\left((i+1)_+\right) \equiv e(i) + 1 \mod n$.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} d(i+1) &= e\left((i+1)_+\right) - e(i+1) \\ &\equiv (e(i) + 1) - e(i+1) \qquad \text{(denn } e\left((i+1)_+\right) \equiv e(i) + 1 \mod n\text{)} \\ &= (e(i) - e(i+1)) + 1 = d(i) + 1 \mod n. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir in allen vier Fällen gesehen, daß $d(i+1) \equiv d(i) + 1 \mod n$ ist; somit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Nach Hilfssatz 2 gilt $d(1) \equiv d(0) + 1 \mod n$, $d(2) \equiv d(1) + 1 \mod n$, $d(3) \equiv d(2) + 1 \mod n$, ..., $d(n-1) \equiv d(n-2) + 1 \mod n$. Folglich liegen die n Zahlen $d(0), d(1), d(2), ..., d(n-1)$ in n aufeinander folgenden Restklassen modulo n. Doch unter n aufeinander folgenden Restklassen modulo n muss jede Restklasse modulo n vorkommen, insbesondere auch die Restklasse 0. Das heißt, eine der n Zahlen $d(0)$, $d(1)$, $d(2)$, ..., $d(n-1)$ liegt in der Restklasse 0 modulo n. Mit anderen Worten: Es gibt ein $i \in \{0;\ 1;\ 2;\ ...;\ n-1\}$, für das $d(i) \equiv 0 \mod n$ gilt. Da aber, laut der Definition der Funktion d, je nach Farbe des Sektors i entweder $d(i) = e(i) - e(i_+)$ oder $d(i) = e(i_+) - e(i)$ gilt, folgt aus $d(i) \equiv 0 \mod n$, daß entweder $e(i) - e(i_+) \equiv 0 \mod n$ oder $e(i_+) - e(i) \equiv 0 \mod n$ ist. In beiden Fällen erhalten wir $e(i_+) \equiv e(i) \mod n$. [2]

[2] Daraus folgt leicht $e(i_+) = e(i)$, aber dies ist für uns an dieser Stelle nicht von Belang.

Betrachten wir dieses i mit $e(i_+) \equiv e(i) \mod n$ genauer. Wir können zeigen:

Hilfssatz 3: Für keine zwei verschiedene Sektoren j_1 und j_2 aus der Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ gilt $e(j_1) = e(j_2)$.

Beweis von Hilfssatz 3: Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Der Sektor i ist weiß. Dann ist der Sektor i_+, da er ja zum Sektor i verschiedenfarbig ist, schwarz. Betrachten wir nun die n aufeinander folgenden Sektoren $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$. Angenommen, r von diesen Sektoren sind weiß, und $n-r$ von diesen Sektoren sind schwarz. Nummerieren wir die r weißen von diesen n Sektoren mit w_1, w_2, ..., w_r (im Uhrzeigersinn), und die $n-r$ schwarzen mit s_1, s_2, ..., s_{n-r} (ebenfalls im Uhrzeigersinn).[3]

Nun zeigen wir:

Hilfsaussage 1: Für jede natürliche Zahl u mit $1 \leq u \leq r$ ist $e(w_u) \equiv e(i) + u \mod n$.

Beweis von Hilfsaussage 1: Wir beweisen Hilfsaussage 1 nach der vollständigen Induktion über u.

Induktionsanfang: Für $u = 1$ ist zu beweisen, daß $e(w_1) \equiv e(i)+1 \mod n$ ist. Doch dies folgt aus Hilfssatz 1 **a)**, da der Sektor i weiß ist, und w_1 der nächste weiße Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn ist (denn w_1 ist der erste weiße Sektor unter den Sektoren $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$ im Uhrzeigersinn).

Induktionsschritt: Angenommen, für ein natürliches u mit $1 \leq u \leq r$ gilt $e(w_u) \equiv e(i) + u \mod n$. Ferner nehmen wir an, auch die Zahl $u+1$ erfülle $1 \leq u+1 \leq r$. Wir müssen dann beweisen, daß $e(w_{u+1}) \equiv e(i) + (u+1) \mod n$ ist. Da der Sektor w_u weiß ist, und der Sektor w_{u+1} der nächste weiße Sektor nach dem Sektor w_u im Uhrzeigersinn ist, liefert Hilfssatz 1 **a)** offensichtlich $e(w_{u+1}) \equiv e(w_u)+1 \mod n$. Wegen $e(w_u) \equiv e(i)+u \mod n$ wird dies zu $e(w_{u+1}) \equiv (e(i)+u)+1 = e(i)+(u+1) \mod n$, was zu beweisen war.

Damit ist die Induktion vollständig, und Hilfsaussage 1 ist bewiesen.

Hilfsaussage 2: Für jede natürliche Zahl v mit $1 \leq v \leq n-r$ ist $e(s_v) \equiv e(i) - v + 1 \mod n$.

Beweis von Hilfsaussage 2: Wir beweisen Hilfsaussage 2 nach der vollständigen Induktion über v.

Induktionsanfang: Für $v = 1$ ist zu beweisen, daß $e(s_1) \equiv e(i) - 1 + 1 \mod n$ ist, also daß $e(s_1) \equiv e(i) \mod n$ ist. In der Tat ist laut seiner Definition der Sektor s_1 der (im Uhrzeigersinn) erste schwarze Sektor unter den Sektoren $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$, also auch der erste schwarze Sektor, den man passiert, wenn man von dem (weißen) Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft. Andererseits ist der Sektor i weiß; somit ist der Sektor i_+ der erste zum Sektor i verschiedenfarbige - also schwarze - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft. Hieraus folgt $s_1 = i_+$, und da wir $e(i_+) \equiv e(i) \mod n$ haben, ist also $e(s_1) \equiv e(i) \mod n$, was zu beweisen war.

Induktionsschritt: Angenommen, für ein natürliches v mit $1 \leq v \leq n-r$ gilt $e(s_v) \equiv e(i) - v + 1 \mod n$. Ferner nehmen wir an, auch die Zahl $v+1$ erfülle $1 \leq v+1 \leq n-r$. Wir müssen dann beweisen, daß $e(s_{v+1}) \equiv e(i) - (v+1) + 1 \mod n$ ist. Da der Sektor s_v schwarz ist, und der Sektor s_{v+1} der nächste schwarze Sektor nach dem Sektor s_v

[3] Es kann durchaus passieren, daß $r = 0$ ist; in diesem Fall sind alle Aussagen über die Sektoren w_1, w_2, ..., w_r als Nullaussagen zu deuten. Entsprechendes gilt für Aussagen über die Sektoren s_1, s_2, ..., s_{n-r}, wenn $n - r = 0$ ist.

im Uhrzeigersinn ist, liefert Hilfssatz 1 **b)** offensichtlich $e(s_{v+1}) \equiv e(s_v) - 1 \mod n$. Wegen $e(s_v) \equiv e(i) - v + 1 \mod n$ wird dies zu $e(s_{v+1}) \equiv (e(i) - v + 1) - 1 = e(i) - (v + 1) + 1 \mod n$, was zu beweisen war.

Damit ist die Induktion vollständig, und Hilfsaussage 2 ist bewiesen.

Kommen wir nun zum Beweis von Hilfssatz 3. Den Beweis führen wir indirekt: Angenommen, es gibt zwei verschiedene Sektoren j_1 und j_2 aus der Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ mit $e(j_1) = e(j_2)$. Erstmal ist klar, daß die Sektoren j_1 und j_2 verschiedene Farben haben müssen (denn zwei verschiedene Sektoren gleicher Farbe können nicht mit der gleichen Zahl beschriftet sein). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, der Sektor j_1 sei weiß und der Sektor j_2 sei schwarz. Da die Sektoren j_1 und j_2 zur Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ gehören, muß also $j_1 = w_u$ für ein natürliches u mit $1 \leq u \leq r$ und $j_2 = s_v$ für ein natürliches v mit $1 \leq v \leq n - r$ sein (denn die weißen Sektoren aus der Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ sind $w_1, w_2, ..., w_r$, und die schwarzen Sektoren aus dieser Menge sind $s_1, s_2, ..., s_{n-r}$).

Damit wird $e(j_1) = e(j_2)$ zu $e(w_u) = e(s_v)$. Doch nach Hilfsaussage 1 ist $e(w_u) \equiv e(i) + u \mod n$, und nach Hilfsaussage 2 ist $e(s_v) \equiv e(i) - v + 1 \mod n$. Wegen $e(w_u) = e(s_v)$ ist also $e(i) + u \equiv e(i) - v + 1 \mod n$, also $u \equiv -v + 1 \mod n$, damit $u + v \equiv 1 \mod n$. Doch dies ist nicht möglich, denn Addition der Ungleichungen $1 \leq u \leq r$ und $1 \leq v \leq n - r$ ergibt $2 \leq u + v \leq r + (n - r) = n$. Damit erhalten wir einen Widerspruch; somit war unsere Annahme falsch, d. h. es gibt keine zwei verschiedene Sektoren j_1 und j_2 aus der Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ mit $e(j_1) = e(j_2)$. Damit ist Hilfssatz 3 im Fall 1 bewiesen.

Fall 2: Der Sektor i ist schwarz.[4] Dann ist der Sektor i_+, da er ja zum Sektor i verschiedenfarbig ist, weiß. Betrachten wir nun die n aufeinander folgenden Sektoren $i+1, i+2, ..., i+n$. Angenommen, r von diesen Sektoren sind schwarz, und $n-r$ von diesen Sektoren sind weiß. Nummerieren wir die r schwarzen von diesen n Sektoren mit $s_1, s_2, ..., s_r$ (im Uhrzeigersinn), und die $n - r$ weißen mit $w_1, w_2, ..., w_{n-r}$ (ebenfalls im Uhrzeigersinn).[5]

Nun zeigen wir:

Hilfsaussage 1: Für jede natürliche Zahl u mit $1 \leq u \leq r$ ist $e(s_u) \equiv e(i) - u \mod n$.

Beweis von Hilfsaussage 1: Wir beweisen Hilfsaussage 1 nach der vollständigen Induktion über u.

Induktionsanfang: Für $u = 1$ ist zu beweisen, daß $e(s_1) \equiv e(i) - 1 \mod n$ ist. Doch dies folgt aus Hilfssatz 1 **b)**, da der Sektor i schwarz ist, und s_1 der nächste schwarze Sektor nach dem Sektor i im Uhrzeigersinn ist (denn s_1 ist der erste schwarze Sektor unter den Sektoren $i+1, i+2, ..., i+n$ im Uhrzeigersinn).

Induktionsschritt: Angenommen, für ein natürliches u mit $1 \leq u \leq r$ gilt $e(s_u) \equiv e(i) - u \mod n$. Ferner nehmen wir an, auch die Zahl $u + 1$ erfülle $1 \leq u + 1 \leq r$. Wir müssen dann beweisen, daß $e(s_{u+1}) \equiv e(i) - (u + 1) \mod n$ ist. Da der Sektor s_u schwarz ist, und der Sektor s_{u+1} der nächste schwarze Sektor nach dem Sektor s_u im Uhrzeigersinn ist, liefert Hilfssatz 1 **b)** offensichtlich $e(s_{u+1}) \equiv e(s_u) - 1 \mod n$. Wegen $e(s_u) \equiv e(i) - u \mod n$ wird dies zu $e(s_{u+1}) \equiv (e(i) - u) - 1 = e(i) - (u + 1) \mod n$,

[4] Der Beweis von Hilfssatz 3 in diesem Fall ist völlig analog zu dem Beweis in Fall 1 und wird hier nur der Vollständigkeit halber angeführt.

[5] Es kann durchaus passieren, daß $r = 0$ ist; in diesem Fall sind alle Aussagen über die Sektoren $s_1, s_2, ..., s_r$ als Nullaussagen zu deuten. Entsprechendes gilt für Aussagen über die Sektoren $w_1, w_2, ..., w_{n-r}$, wenn $n - r = 0$ ist.

was zu beweisen war.

Damit ist die Induktion vollständig, und Hilfsaussage 1 ist bewiesen.

Hilfsaussage 2: Für jede natürliche Zahl v mit $1 \leq v \leq n-r$ ist $e(w_v) \equiv e(i) + v - 1 \mod n$.

Beweis von Hilfsaussage 2: Wir beweisen Hilfsaussage 2 nach der vollständigen Induktion über v.

Induktionsanfang: Für $v = 1$ ist zu beweisen, daß $e(w_1) \equiv e(i) + 1 - 1 \mod n$ ist, also daß $e(w_1) \equiv e(i) \mod n$ ist. In der Tat ist laut seiner Definition der Sektor w_1 der (im Uhrzeigersinn) erste weiße Sektor unter den Sektoren $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$, also auch der erste weiße Sektor, den man passiert, wenn man von dem (schwarzen) Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft. Andererseits ist der Sektor i schwarz; somit ist der Sektor i_+ der erste zum Sektor i verschiedenfarbige - also weiße - Sektor, den man passiert, wenn man von dem Sektor i ausgehend im Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft. Hieraus folgt $w_1 = i_+$, und da wir $e(i_+) \equiv e(i) \mod n$ haben, ist also $e(w_1) \equiv e(i) \mod n$, was zu beweisen war.

Induktionsschritt: Angenommen, für ein natürliches v mit $1 \leq v \leq n-r$ gilt $e(w_v) \equiv e(i)+v-1 \mod n$. Ferner nehmen wir an, auch die Zahl $v+1$ erfülle $1 \leq v+1 \leq n-r$. Wir müssen dann beweisen, daß $e(w_{v+1}) \equiv e(i) + (v+1) - 1 \mod n$ ist. Da der Sektor w_v weiß ist, und der Sektor w_{v+1} der nächste weiße Sektor nach dem Sektor w_v im Uhrzeigersinn ist, liefert Hilfssatz 1 **a)** offensichtlich $e(w_{v+1}) \equiv e(w_v) + 1 \mod n$. Wegen $e(w_v) \equiv e(i) + v - 1 \mod n$ wird dies zu $e(w_{v+1}) \equiv (e(i) + v - 1) + 1 = e(i) + (v+1) - 1 \mod n$, was zu beweisen war.

Damit ist die Induktion vollständig, und Hilfsaussage 2 ist bewiesen.

Kommen wir nun zum Beweis von Hilfssatz 3. Den Beweis führen wir indirekt: Angenommen, es gibt zwei verschiedene Sektoren j_1 und j_2 aus der Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ mit $e(j_1) = e(j_2)$. Erstmal ist klar, daß die Sektoren j_1 und j_2 verschiedene Farben haben müssen (denn zwei verschiedene Sektoren gleicher Farbe können nicht mit der gleichen Zahl beschriftet sein). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, der Sektor j_1 sei schwarz und der Sektor j_2 sei weiß. Da die Sektoren j_1 und j_2 zur Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ gehören, muß also $j_1 = s_u$ für ein natürliches u mit $1 \leq u \leq r$ und $j_2 = w_v$ für ein natürliches v mit $1 \leq v \leq n-r$ sein (denn die schwarzen Sektoren aus der Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ sind s_1, s_2, ..., s_r, und die weißen Sektoren aus dieser Menge sind w_1, w_2, ..., w_{n-r}).

Damit wird $e(j_1) = e(j_2)$ zu $e(s_u) = e(w_v)$. Doch nach Hilfsaussage 1 ist $e(s_u) \equiv e(i) - u \mod n$, und nach Hilfsaussage 2 ist $e(w_v) \equiv e(i) + v - 1 \mod n$. Wegen $e(s_u) = e(w_v)$ ist also $e(i) - u \equiv e(i) + v - 1 \mod n$, also $-u \equiv v - 1 \mod n$, damit $1 \equiv u + v \mod n$, also $u + v \equiv 1 \mod n$. Doch dies ist nicht möglich, denn Addition der Ungleichungen $1 \leq u \leq r$ und $1 \leq v \leq n-r$ ergibt $2 \leq u + v \leq r + (n-r) = n$. Damit erhalten wir einen Widerspruch; somit war unsere Annahme falsch, d. h. es gibt keine zwei verschiedene Sektoren j_1 und j_2 aus der Menge $\{i+1;\ i+2;\ ...;\ i+n\}$ mit $e(j_1) = e(j_2)$. Damit ist Hilfssatz 3 auch im Fall 2 bewiesen.

Somit ist der Beweis von Hilfssatz 3 komplett.

Laut Hilfssatz 3 sind die Beschriftungen $e(i+1)$, $e(i+2)$, ..., $e(i+n)$ der n aufeinander folgenden Sektoren $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$ paarweise verschieden. Doch da die Beschriftung eines Sektors nur n verschiedene Werte annehmen kann - nämlich die Werte 1, 2, 3, ..., n -, folgt hieraus, daß jede der n Zahlen 1, 2, 3, ..., n als Beschriftung von einem der n aufeinander folgenden Sektoren $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$ angenommen wird. Das heißt, in den n aufeinander folgenden Sektoren $i+1$, $i+2$, ..., $i+n$ stehen alle natürlichen Zahlen von 1 bis n. Damit ist die Aufgabe gelöst.