Bundeswettbewerb Mathematik 2006, 2. Runde, Aufgabe 3

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks. Die Fußpunkte der Lote von dem Punkt P auf die Seiten BC, CA und AB seien A', B' bzw. C'.

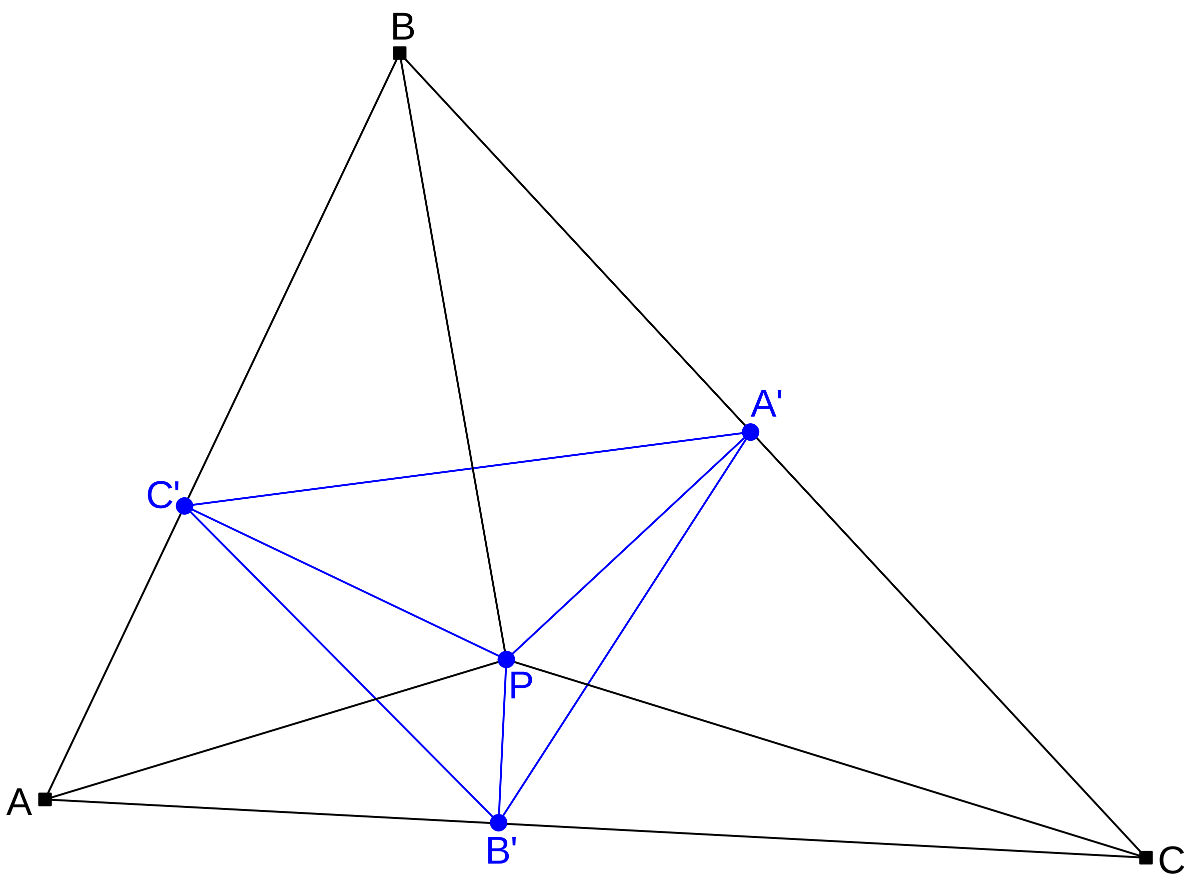
Bei welchen Lagen von P gelten $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle CBA = \measuredangle C'B'A'$?

Lösung von Darij Grinberg:

Wir werden zeigen:

Behauptung: Genau dann gelten beide Gleichungen $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle CBA = \measuredangle C'B'A'$, wenn der Punkt P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist.[1]

Beweis: Wir zeigen zuerst eine allgemeine Eigenschaft, die für uns von Nutzen sein wird (Fig. 1):



[1] Aus dieser Behauptung folgt, daß es für jedes spitzwinklige Dreieck ABC genau einen Punkt P in seinem Inneren gibt, für den $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle CBA = \measuredangle C'B'A'$ gelten. Denn der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC liegt stets in seinem Inneren, und die Fußpunkte der Lote von dem Umkreismittelpunkt auf die Seiten BC, CA und AB liegen im Inneren dieser Seiten (diese Fußpunkte sind nämlich die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB, da der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf den Mittelsenkrechten seiner Seiten BC, CA und AB liegt). Somit ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC in der Tat ein geeigneter Kandidat für den Punkt P, und laut der Behauptung erfüllt er auch die Gleichungen $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle CBA = \measuredangle C'B'A'$.

Fig. 1

Satz 1: Sei ABC ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$. Sei P ein Punkt in der Ebene, und seien A', B' und C' die Fußpunkte der Lote von dem Punkt P auf die Geraden BC, CA bzw. AB. Dann gilt $B'C' = AP \cdot \sin\alpha$, $C'A' = BP \cdot \sin\beta$ und $A'B' = CP \cdot \sin\gamma$ und

$$\frac{B'C'}{BC} : \frac{C'A'}{CA} : \frac{A'B'}{AB} = AP : BP : CP.$$

Beweis von Satz 1: Wir werden im Folgenden nur den Fall betrachten, wenn die Punkte A', B' und C' innerhalb der Strecken BC, CA bzw. AB liegen; alle anderen Fälle sind analog zu behandeln.[2]

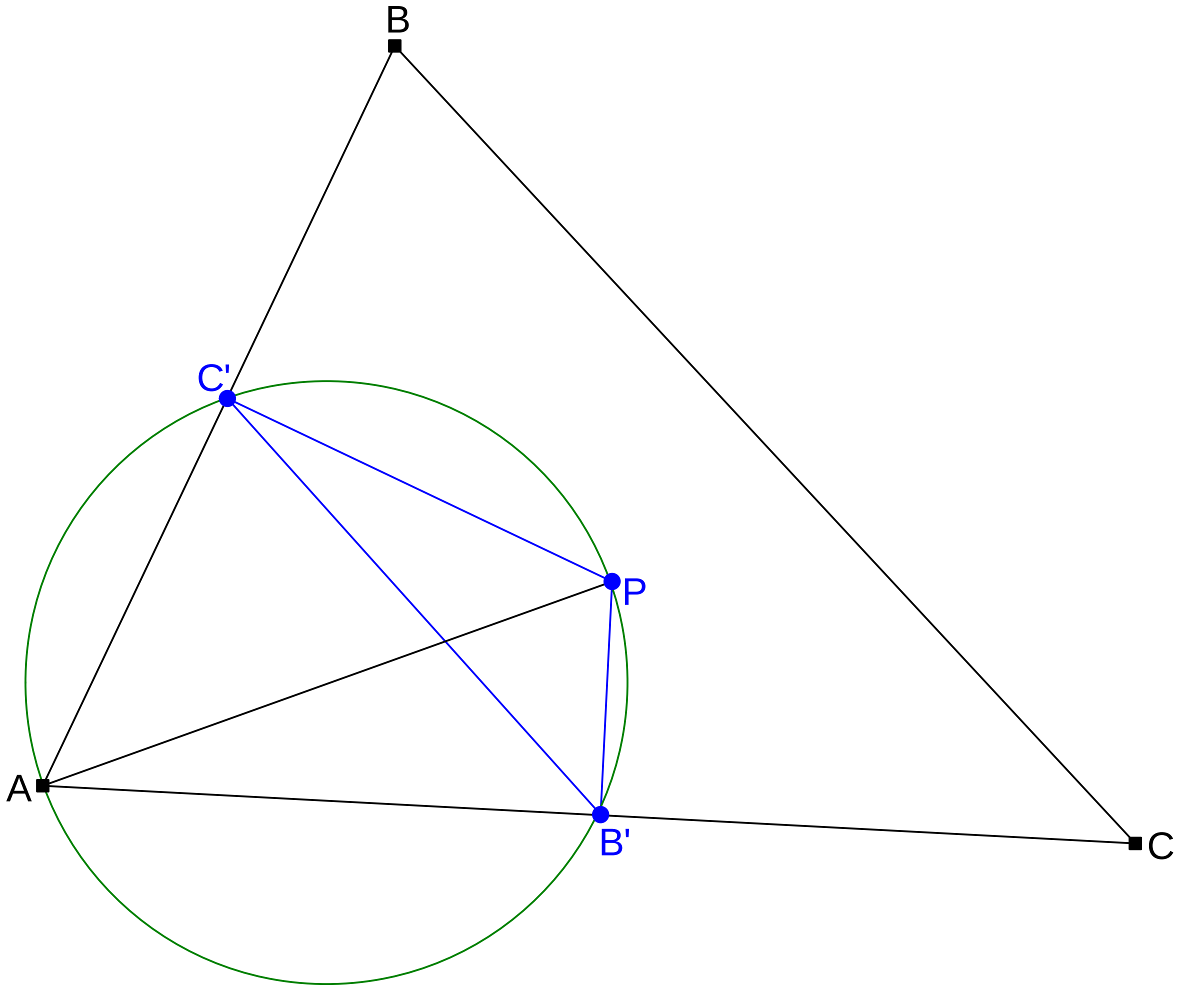


Fig. 2

(Siehe Fig. 2.) Wegen $\measuredangle AB'P = 90°$ und $\measuredangle AC'P = 90°$ liegen die Punkte B' und C' auf dem Thaleskreis über der Strecke AP. Daher ist nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle AB'C' = \measuredangle APC'$.

Nach dem Sinussatz im Dreieck $AB'C'$ gilt $\frac{B'C'}{\sin\measuredangle B'AC'} = \frac{AC'}{\sin\measuredangle AB'C'}$. Wegen $\measuredangle AB'C' = \measuredangle APC'$ und $\measuredangle B'AC' = \alpha$ wird dies zu $\frac{B'C'}{\sin\alpha} = \frac{AC'}{\sin\measuredangle APC'}$. Doch im

[2] Im Übrigen werden wir, wenn wir Satz 1 auf unsere Aufgabe anwenden, sowieso den Fall vorliegen haben, dass die Punkte A', B' und C' innerhalb der Strecken BC, CA bzw. AB liegen, denn das Dreieck ABC ist spitzwinklig und der Punkt P liegt in seinem Innern.

rechtwinkligen Dreieck $AC'P$ gilt $\dfrac{AC'}{\sin\measuredangle APC'} = AP$. Somit ist $\dfrac{B'C'}{\sin\alpha} = AP$, also $B'C' = AP\cdot\sin\alpha$. Analog ist $C'A' = BP\cdot\sin\beta$ und $A'B' = CP\cdot\sin\gamma$.

Wir haben $\dfrac{B'C'}{\sin\alpha} = AP$, und analog ist $\dfrac{C'A'}{\sin\beta} = BP$ und $\dfrac{A'B'}{\sin\gamma} = CP$. Somit ist $\dfrac{B'C'}{\sin\alpha} : \dfrac{C'A'}{\sin\beta} : \dfrac{A'B'}{\sin\gamma} = AP : BP : CP$. Nach dem Sinussatz im Dreieck ABC ist $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = BC : CA : AB$; somit können wir diese Verhältnisgleichung umschreiben zu $\dfrac{B'C'}{BC} : \dfrac{C'A'}{CA} : \dfrac{A'B'}{AB} = AP : BP : CP$. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Mit Satz 1 können wir nun unsere Behauptung schnell beweisen: Die Gleichungen $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle CBA = \measuredangle C'B'A'$ gelten genau dann, wenn die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ zueinander ähnlich sind, d. h. wenn $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{A'B'}{AB}$ gilt. Da nach Satz 1 aber $\dfrac{B'C'}{BC} : \dfrac{C'A'}{CA} : \dfrac{A'B'}{AB} = AP : BP : CP$ gilt, ist die Doppelgleichung $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{A'B'}{AB}$ äquivalent zu $AP = BP = CP$. Doch $AP = BP = CP$ gilt genau dann, wenn der Punkt P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist. Alles in allem haben wir dadurch die Behauptung bewiesen, und die Aufgabe ist gelöst.

Anhang

Eine alternative Lösung der Aufgabe ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Satz 2: Sei ABC ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$. Sei P ein Punkt in seinem Innern, und seien A', B' und C' die Fußpunkte der Lote von dem Punkt P auf die Geraden BC, CA bzw. AB. Dann gilt

$$\begin{aligned}\measuredangle C'A'B' &= \measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle BPC - \alpha;\\ \measuredangle A'B'C' &= \measuredangle PCB + \measuredangle PAB = \measuredangle CPA - \beta;\\ \measuredangle B'C'A' &= \measuredangle PAC + \measuredangle PBC = \measuredangle APB - \gamma.\end{aligned}$$

Beweis von Satz 2: (Siehe Fig. 2.) Wegen $\measuredangle AB'P = 90^\circ$ und $\measuredangle AC'P = 90^\circ$ liegen die Punkte B' und C' auf dem Thaleskreis über der Strecke AP. Daher ist nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle PB'C' = \measuredangle PAC'$. Analog ist $\measuredangle PB'A' = \measuredangle PCA'$. Somit ist $\measuredangle A'B'C' = \measuredangle PB'A' + \measuredangle PB'C' = \measuredangle PCA' + \measuredangle PAC' = \measuredangle PCB + \measuredangle PAB$. Nach der Winkelsumme in den Dreiecken BPC und APB ist $\measuredangle PCB = 180^\circ - \measuredangle BPC - \measuredangle PBC$ und $\measuredangle PAB = 180^\circ - \measuredangle APB - \measuredangle PBA$; somit ist

$$\begin{aligned}\measuredangle A'B'C' &= \measuredangle PCB + \measuredangle PAB = (180^\circ - \measuredangle BPC - \measuredangle PBC) + (180^\circ - \measuredangle APB - \measuredangle PBA)\\ &= (360^\circ - \measuredangle BPC - \measuredangle APB) - (\measuredangle PBC + \measuredangle PBA) = \measuredangle CPA - \beta.\end{aligned}$$

Somit ist $\measuredangle A'B'C' = \measuredangle PCB + \measuredangle PAB = \measuredangle CPA - \beta$ bewiesen. Analog ist $\measuredangle B'C'A' = \measuredangle PAC + \measuredangle PBC = \measuredangle APB - \gamma$ und $\measuredangle C'A'B' = \measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle BPC - \alpha$. Damit ist Satz 2 gezeigt.

Mittels Satz 2 und Mittelpunktswinkelsatz läßt sich die Behauptung wieder recht kurz zeigen; der genaue Beweis sei dem Leser überlassen.