**Bundeswettbewerb Mathematik 2006, 2. Runde, Aufgabe 4**

Eine positive ganze Zahl heiße *ziffernreduziert*, wenn in ihrer Dezimaldarstellung höchstens neun verschiedene Ziffern vorkommen. (Dabei werden führende Nullen nicht berücksichtigt.)

Es sei $M$ eine endliche Menge ziffernreduzierter Zahlen.

Man beweise, dass die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus $M$ kleiner als 180 ist.

**Lösung von Darij Grinberg:**

Für jede natürliche Zahl $k$ bezeichnen wir mit $A_k$ die Menge aller $k$-stelligen[1] ziffernreduzierten Zahlen, und mit $b_k$ die Summe der Kehrwerte dieser Zahlen. Wir bezeichnen mit $|X|$ die Mächtigkeit (also die Anzahl der Elemente) einer beliebigen Menge $X$.

Nun zeigen wir:

**Hilfssatz 1:** Für jedes natürliche $k$ gilt $|A_k| \leq 10 \cdot 9^k$. Mit anderen Worten: Die Anzahl der $k$-stelligen ziffernreduzierten Zahlen ist $\leq 10 \cdot 9^k$.

*Beweis von Hilfssatz 1:* Eine ziffernreduzierte Zahl zeichnet sich dadurch aus, dass in ihrer Dezimaldarstellung höchstens neun verschiedene Ziffern vorkommen, d. h. dass (mindestens) eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 nicht in ihrer Dezimaldarstellung vorkommt. Somit ist die Menge $A_k$ aller $k$-stelligen ziffernreduzierten Zahlen gleich $A_k = A_{k;\ 0} \cup A_{k;\ 1} \cup A_{k;\ 2} \cup ... \cup A_{k;\ 9}$, wobei für jede Ziffer $z$ die Menge $A_{k;\ z}$ definiert ist als die Menge aller $k$-stelligen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer $z$ nicht vorkommt.

Ist nun $z$ eine beliebige von den Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, dann ist $|A_{k;\ z}| \leq 9^k$, denn $A_{k;\ z}$ ist die Menge aller $k$-stelligen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer $z$ nicht vorkommt, und jeder solchen Zahl $n \in A_{k;\ z}$ entspricht auf eindeutige Weise ein $k$-Tupel von Ziffern, die alle von $z$ verschieden sind (dieses $k$-Tupel ist einfach das $k$-Tupel $(a_1;\ a_2;\ ...;\ a_k)$, wobei $\overline{a_1 a_2 ... a_k}$ die Dezimaldarstellung der Zahl $n$ ist), und die Anzahl aller solchen $k$-Tupel ist $9^k$ (denn für jede der $k$ Ziffern stehen 9 Möglichkeiten zur Auswahl, nämlich alle Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 außer der Ziffer $z$). [Umgekehrt entspricht nicht unbedingt jedem $k$-Tupel von Ziffern, die alle von $z$ verschieden sind, eine $k$-stellige Zahl, denn die erste Ziffer einer $k$-stelligen Zahl darf nicht 0 sein. Somit gilt auch $|A_{k;\ z}| \leq 9^k$ und nicht notwendig $|A_{k;\ z}| = 9^k$.]

Da wir $|A_{k;\ z}| \leq 9^k$ für jede Ziffer $z$ haben, ist

$$\begin{aligned} |A_k| &= |A_{k;\ 0} \cup A_{k;\ 1} \cup A_{k;\ 2} \cup ... \cup A_{k;\ 9}| \leq |A_{k;\ 0}| + |A_{k;\ 1}| + |A_{k;\ 2}| + ... + |A_{k;\ 9}| \\ &\leq \underbrace{9^k + 9^k + 9^k + ... + 9^k}_{10 \text{ Summanden}} = 10 \cdot 9^k, \end{aligned}$$

und Hilfssatz 1 ist bewiesen.

Mithilfe von Hilfssatz 1 können wir zeigen:

**Hilfssatz 2:** Für jedes natürliche $k$ gilt $b_k \leq 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k$.

[1] Dabei verstehen wir unter einer *$k$-stelligen Zahl* eine Zahl, die im Dezimalsystem $k$ Ziffern *ohne führende Nullen* hat.

*Beweis von Hilfssatz 2:* Laut Definition ist $b_k$ die Summe der Kehrwerte aller $k$-stelligen ziffernreduzierten Zahlen. Jede $k$-stellige ziffernreduzierte Zahl ist $\geq 10^{k-1}$ (weil sie $k$-stellig ist); ihr Kehrwert ist also $\leq \frac{1}{10^{k-1}}$. Da die Anzahl aller $k$-stelligen ziffernreduzierten Zahlen $\leq 10 \cdot 9^k$ ist (nach Hilfssatz 1), ist also $b_k$ die Summe von $\leq 10 \cdot 9^k$ Kehrwerten, die alle $\leq \frac{1}{10^{k-1}}$ sind. Somit ist $b_k \leq \left(10 \cdot 9^k\right) \cdot \frac{1}{10^{k-1}}$, also

$$b_k \leq \left(10 \cdot 9^k\right) \cdot \frac{10}{10^k} = 100 \cdot \frac{9^k}{10^k} = 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Als nächstes beweisen wir ein bekanntes Resultat aus der Analysis:

**Hilfssatz 3:** Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \leq \ln n + 1.$$

*Beweis von Hilfssatz 3:* Aus dem Schulunterricht ist bekannt: $\ln n = \int\limits_1^n \frac{1}{t} dt$. Indem wir das Integrationsintervall $[1;\ n]$ in die Intervalle $[1;\ 2]$, $[2;\ 3]$, ..., $[n-1;\ n]$ unterteilen, erhalten wir daraus $\ln n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \int\limits_i^{i+1} \frac{1}{t} dt$. Doch für jedes $i > 0$ gilt $\int\limits_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \geq \int\limits_i^{i+1} \frac{1}{i+1} dt$, weil für alle Werte von $t$ im Intervall $[i;\ i+1]$ die Ungleichung $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{i+1}$ gilt (denn $t \leq i+1$). Somit ist

$$\begin{aligned} \ln n &= \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \geq \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_i^{i+1} \frac{1}{i+1} dt = \sum_{i=1}^{n-1} ((i+1) - i) \cdot \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Nach Addition von 1 wird diese Ungleichung zu

$$\ln n + 1 \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) + 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n},$$

und damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Aus Hilfssatz 3 folgt:

**Hilfssatz 4:** Für jedes natürliche $k$ ist $b_1 + b_2 + ... + b_k < k \ln 10 + 1$.

*Beweis von Hilfssatz 4:* Die Zahl $b_1$ ist die Summe der Kehrwerte aller 1-stelligen ziffernreduzierten Zahlen, die Zahl $b_2$ ist die Summe der Kehrwerte aller 2-stelligen ziffernreduzierten Zahlen, ..., die Zahl $b_k$ ist die Summe der Kehrwerte aller $k$-stelligen ziffernreduzierten Zahlen. Somit ist die Zahl $b_1 + b_2 + ... + b_k$ die Summe der Kehrwerte aller ziffernreduzierten Zahlen, die höchstens $k$ Stellen in ihrer Dezimaldarstellung haben. Folglich ist diese Zahl $b_1 + b_2 + ... + b_k$ nicht größer als die Summe der Kehrwerte aller natürlichen Zahlen, die höchstens $k$ Stellen in ihrer Dezimaldarstellung haben (also nicht nur der ziffernreduzierten), und diese Summe ist $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{10^k - 1}$. Wir haben also

$$b_1 + b_2 + ... + b_k \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{10^k - 1}.$$

Doch nach Hilfssatz 3 ist $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{10^k - 1} \leq \ln\left(10^k - 1\right) + 1$ (denn $10^k - 1 > 1$, da $k \geq 1$). Somit ist

$$b_1 + b_2 + ... + b_k \leq \ln\left(10^k - 1\right) + 1 < \ln 10^k + 1 = k \ln 10 + 1,$$

womit Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Nun zeigen wir zwei Hilfssätze:

**Hilfssatz 5:** Es gilt $\ln 10 < 3$.

*Beweis von Hilfssatz 5:* Wegen $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ist $e^3 > \left(\frac{5}{2}\right)^3$. Aber $\left(\frac{5}{2}\right)^3 > 10$, denn $5^3 > 10 \cdot 2^3$, denn $5^3 = 125 > 80 = 10 \cdot 8 = 10 \cdot 2^3$. Somit ist $e^3 > \left(\frac{5}{2}\right)^3 > 10$, und nach Logarithmieren ergibt sich $3 > \ln 10$, womit Hilfssatz 5 bewiesen ist.

**Hilfssatz 6:** Es ist $\left(\frac{9}{10}\right)^{32} < \frac{1}{25}$.

*Beweis von Hilfssatz 6:* Wir haben

$$\begin{aligned} 9^4 \cdot 3 &= (9 \cdot 9 \cdot 81) \cdot 3 = (9 \cdot 729) \cdot 3 < (9 \cdot 730) \cdot 3 = 6570 \cdot 3 < 6600 \cdot 3 \\ &= 19800 < 20000 = 2 \cdot 10^4, \end{aligned}$$

also $\frac{9^4}{10^4} < \frac{2}{3}$, das heißt, $\left(\frac{9}{10}\right)^4 < \frac{2}{3}$. Somit ist

$$\left(\frac{9}{10}\right)^8 = \left(\left(\frac{9}{10}\right)^4\right)^2 < \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Nun ist $\left(\frac{4}{9}\right)^2 < \frac{1}{5}$, denn $5 \cdot 4^2 < 9^2$, denn $5 \cdot 4^2 = 5 \cdot 16 = 80 < 81 = 9^2$. Somit ist

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{16} = \left(\left(\frac{9}{10}\right)^8\right)^2 < \left(\frac{4}{9}\right)^2 < \frac{1}{5}.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{32} = \left(\left(\frac{9}{10}\right)^{16}\right)^2 < \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25},$$

und Hilfssatz 6 ist bewiesen.

Schließlich zeigen wir:

**Hilfssatz 7:** Für jedes natürliche $n$ gilt

$$b_1 + b_2 + ... + b_n < 180.$$

*Beweis von Hilfssatz 7:* Nach Hilfssatz 4 ist

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + ... + b_{31} &< 31 \ln 10 + 1 < 31 \cdot 3 + 1 \qquad \text{(nach Hilfssatz 5)} \\ &= 93 + 1 = 94. \end{aligned}$$

Für $n \leq 31$ gilt somit $b_1 + b_2 + ... + b_n \leq b_1 + b_2 + ... + b_{31} < 94 < 180$, und damit ist Hilfssatz 7 für $n \leq 31$ bewiesen.

Für $n \geq 32$ ist

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 + ... + b_n \\ = \ & (b_1 + b_2 + ... + b_{31}) + (b_{32} + b_{33} + ... + b_n) < 94 + (b_{32} + b_{33} + ... + b_n) \\ \leq \ & 94 + \left(100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{32} + 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{33} + ... + 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n}\right) \qquad \text{(nach Hilfssatz 2)} \\ = \ & 94 + 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{32} \cdot \left(\left(\frac{9}{10}\right)^{0} + \left(\frac{9}{10}\right)^{1} + ... + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-32}\right) \\ = \ & 94 + 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{32} \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-31}}{1 - \frac{9}{10}} \qquad \text{(nach der Summenformel für geometrische Folgen)} \\ = \ & 94 + 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{32} \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-31}}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 94 + 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{32} \cdot 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-31}\right) \\ = \ & 94 + 1000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{32} \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-31}\right) < 94 + 1000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{32} \qquad \left(\text{da } 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-31} < 1\right) \\ < \ & 94 + 1000 \cdot \frac{1}{25} \qquad \text{(nach Hilfssatz 6)} \\ = \ & 94 + 40 = 134 < 180, \end{aligned}$$

und Hilfssatz 7 ist auch für $n \geq 32$ bewiesen. Somit ist der Beweis von Hilfssatz 7 vollständig.

Sei $n$ die maximale Anzahl von Stellen, die eine Zahl aus der Menge $M$ im Dezimalsystem haben kann (eine solche maximale Anzahl existiert, da die Menge $M$ endlich ist). Dann besteht die Menge $M$ aus ziffernreduzierten Zahlen, die höchstens $n$ Stellen in ihrer Dezimaldarstellung haben. Somit ist die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus $M$ höchstens gleich der Summe der Kehrwerte aller ziffernreduzierten Zahlen, die höchstens $n$ Stellen in ihrer Dezimaldarstellung haben, und diese letztere Summe ist gleich $b_1 + b_2 + ... + b_n$ (denn $b_1$ ist die Summe der Kehrwerte aller 1-stelligen ziffernreduzierten Zahlen, $b_2$ ist die Summe der Kehrwerte aller 2-stelligen ziffernreduzierten Zahlen, ..., und $b_n$ ist die Summe der Kehrwerte aller $n$-stelligen ziffernreduzierten Zahlen). Wir haben also gezeigt, dass die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus $M$ höchstens gleich $b_1 + b_2 + ... + b_n$ ist, und da $b_1 + b_2 + ... + b_n < 180$ ist laut Hilfssatz 7, ist diese Summe also auch $< 180$. Hiermit ist die Aufgabe gelöst.