Bundeswettbewerb Mathematik 2006, 2. Runde, Aufgabe 2

Man bestimme alle reellwertigen Funktionen f, die auf der Menge der positiven rationalen Zahlen definiert sind, dort nur positive Funktionswerte annehmen, und die Gleichung

$$f(x) + f(y) + 2xy \cdot f(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)} \qquad \text{für alle positiven rationalen } x \text{ und } y$$

erfüllen.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir werden zeigen:

Behauptung: Die einzige Funktion $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$, die für alle positiven rationalen Zahlen x und y die Gleichung

$$f(x) + f(y) + 2xy \cdot f(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)} \tag{1}$$

erfüllt, ist die durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definierte Funktion.

Beweis: Dass die durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definierte Funktion $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ die Gleichung (1) für alle positiven rationalen Zahlen x und y erfüllt, ist leicht einzusehen: Für diese Funktion f gilt nämlich

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + 2xy \cdot f(xy) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 2xy \cdot \frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} \\ &= \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{x^2 y^2} = \frac{(x+y)^2}{(xy)^2} = \frac{\left(\frac{1}{(xy)^2}\right)}{\left(\frac{1}{(x+y)^2}\right)} = \frac{f(xy)}{f(x+y)}. \end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass jede Funktion $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$, die für alle positiven rationalen Zahlen x und y die Gleichung (1) erfüllt, mit der durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definierten Funktion übereinstimmt. Wir betrachten also eine Funktion $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$, die für alle positiven rationalen Zahlen x und y die Gleichung (1) erfüllt. Wir wollen zeigen, dass für jede positive rationale Zahl x gilt: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Sei $f(1) = a$. Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 1: Für jedes $x \in \mathbb{Q}^+$ gilt

$$f(x+1) = \frac{f(x)}{(1+2x)\, f(x) + a}. \tag{2}$$

Beweis von Hilfssatz 1: Anwendung von (1) mit $y = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} f(x) + f(1) + 2x \cdot 1 \cdot f(x \cdot 1) &= \frac{f(x \cdot 1)}{f(x+1)}, \qquad \text{also} \\ f(x) + a + 2x \cdot f(x) &= \frac{f(x)}{f(x+1)}, \qquad \text{also} \\ f(x+1) &= \frac{f(x)}{f(x) + a + 2x \cdot f(x)} = \frac{f(x)}{(1+2x) f(x) + a}, \end{aligned}$$

und Hilfssatz 1 ist bewiesen.

Nun ist

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) = \frac{f(1)}{(1+2\cdot 1) f(1) + a} \qquad \text{(nach Hilfssatz 1 für } x = 1\text{)} \\ &= \frac{a}{3a+a} = \frac{1}{4}, \qquad \text{damit} \\ f(3) &= f(2+1) = \frac{f(2)}{(1+2\cdot 2) f(2) + a} \qquad \text{(nach Hilfssatz 1 für } x = 2\text{)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5 \cdot \frac{1}{4} + a} = \frac{1}{5+4a}, \qquad \text{damit} \\ f(4) &= f(3+1) = \frac{f(3)}{(1+2\cdot 3) f(3) + a} \qquad \text{(nach Hilfssatz 1 für } x = 3\text{)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{5+4a}\right)}{7 \cdot \frac{1}{5+4a} + a} = \frac{1}{7 + a(5+4a)}. \end{aligned}$$

Andererseits können wir (1) auf $x = 2$ und $y = 2$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} f(2) + f(2) + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot f(2 \cdot 2) &= \frac{f(2 \cdot 2)}{f(2+2)}, \qquad \text{also} \\ 2f(2) + 8f(4) &= \frac{f(4)}{f(4)}, \qquad \text{also} \\ 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{7 + a(5+4a)} &= 1, \qquad \text{also} \\ 8 \cdot \frac{1}{7 + a(5+4a)} &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also $8 = \frac{1}{2} \cdot (7 + a(5+4a))$, also $16 = 7 + a(5+4a)$, also $0 = -9 + a(5+4a)$. Doch

$$-9 + a(5+4a) = 4a^2 + 5a - 9 = \left(4a^2 - 4a\right) + (9a - 9) = 4a(a-1) + 9(a-1) = (4a+9)(a-1).$$

Also ist $0 = (4a+9)(a-1)$. Da $4a + 9 \neq 0$ ist (denn $a = f(1) > 0$, weil die Funktion f nur positive Werte annimmt), gilt also $a - 1 = 0$, daher $a = 1$. Somit wird die Gleichung (2) zu

$$f(x+1) = \frac{f(x)}{(1+2x) f(x) + 1} = \frac{1}{(1+2x) + 1/f(x)}.$$

Somit vereinfacht sich Hilfssatz 1 zu Folgendem:

Hilfssatz 2: Für jedes $x \in \mathbb{Q}^+$ gilt

$$f(x+1) = \frac{1}{(1+2x) + 1/f(x)}.$$

Nun zeigen wir:

Hilfssatz 3: Sei a eine nichtnegative ganze Zahl.

a) Gilt für eine Zahl $x \in \mathbb{Q}^+$ die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$, dann gilt auch $f(x+a) = \frac{1}{(x+a)^2}$.

b) Gilt für eine Zahl $x \in \mathbb{Q}^+$ die Ungleichung $f(x) < \frac{1}{x^2}$, dann gilt auch $f(x+a) < \frac{1}{(x+a)^2}$.

c) Gilt für eine Zahl $x \in \mathbb{Q}^+$ die Ungleichung $f(x) > \frac{1}{x^2}$, dann gilt auch $f(x+a) > \frac{1}{(x+a)^2}$.

Beweis von Hilfssatz 3: Wir zeigen zuerst Hilfssatz 3 **b)**:

Den Beweis von Hilfssatz 3 **b)** führen wir nach der vollständigen Induktion über a:

Induktionsanfang: Für $a = 0$ ist zu beweisen, dass wenn $f(x) < \frac{1}{x^2}$ gilt, dann auch $f(x+0) < \frac{1}{(x+0)^2}$ gilt. Dies ist trivial.

Induktionsschritt: Sei a_1 eine nichtnegative ganze Zahl. Angenommen, Hilfssatz 3 **b)** gilt für $a = a_1$; das heißt, wenn eine Zahl $x \in \mathbb{Q}^+$ die Ungleichung $f(x) < \frac{1}{x^2}$ erfüllt, dann ist $f(x+a_1) < \frac{1}{(x+a_1)^2}$. Wir müssen Hilfssatz 3 **b)** auch für $a = a_1 + 1$ zeigen. Wir müssen also zeigen: Wenn eine Zahl $x \in \mathbb{Q}^+$ die Ungleichung $f(x) < \frac{1}{x^2}$ erfüllt, dann ist $f(x+(a_1+1)) < \frac{1}{(x+(a_1+1))^2}$.

Wegen $f(x+a_1) < \frac{1}{(x+a_1)^2}$ ist $(x+a_1)^2 \cdot f(x+a_1) < 1$, also $1/f(x+a_1) > (x+a_1)^2$, und damit $\frac{1}{(1+2(x+a_1)) + 1/f(x+a_1)} < \frac{1}{(1+2(x+a_1)) + (x+a_1)^2}$.

Nach Hilfssatz 2 für die Zahl $x + a_1$ anstelle von x gilt

$$\begin{aligned} f((x+a_1)+1) &= \frac{1}{(1+2(x+a_1)) + 1/f(x+a_1)} < \frac{1}{(1+2(x+a_1)) + (x+a_1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+a_1)^2 + 2(x+a_1) + 1} = \frac{1}{((x+a_1)+1)^2}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: $f(x+(a_1+1)) < \frac{1}{(x+(a_1+1))^2}$, was zu beweisen war. Damit ist der Induktionsschritt vollständig, und Hilfssatz 3 **b)** ist bewiesen.

Aus diesem Beweis von Hilfssatz 3 **b)** können wir einen Beweis von Hilfssatz 3 **c)** gewinnen, indem wir den Beweis wortwörtlich übernehmen und alle Zeichen $<$ durch $>$ und alle Zeichen $>$ durch $<$ ersetzen, und einen Beweis von Hilfssatz 3 **a)** gewinnen, indem wir alle Zeichen $<$ und $>$ durch $=$ ersetzen. Somit ist Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

Als erste Anwendung von Hilfssatz 3 zeigen wir:

Hilfssatz 4: Für jede natürliche[1] Zahl n gilt $f(n) = \dfrac{1}{n^2}$.

Beweis von Hilfssatz 4: Da n eine natürliche Zahl ist, ist $n-1$ eine nichtnegative ganze Zahl. Anwendung von Hilfssatz 3 **a)** auf $a = n-1$ und $x = 1$ ergibt: Wenn $f(1) = \dfrac{1}{1^2}$ gilt, dann gilt auch $f(1+(n-1)) = \dfrac{1}{(1+(n-1))^2}$. Mit anderen Worten: Wenn $f(1) = 1$ gilt, dann gilt auch $f(n) = \dfrac{1}{n^2}$.

Doch $f(1) = 1$ gilt (denn $f(1) = a = 1$); somit erhalten wir $f(n) = \dfrac{1}{n^2}$, und Hilfssatz 4 ist bewiesen.

Als nächstes zeigen wir:

Hilfssatz 5: Für jede natürliche Zahl n gilt $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = n^2$.

Beweis von Hilfssatz 5: Anwendung der Gleichung (1) auf $x = n+1$ und $y = \dfrac{n+1}{n}$ ergibt

$$\begin{aligned} & f(n+1) + f\left(\frac{n+1}{n}\right) + 2(n+1)\cdot\frac{n+1}{n}\cdot f\left((n+1)\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\ = \; & \frac{f\left((n+1)\cdot\frac{n+1}{n}\right)}{f\left((n+1)+\frac{n+1}{n}\right)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nach Hilfssatz 4 ist $f(n+1) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Ferner ist

$$(n+1)\cdot\frac{n+1}{n} = n\cdot\frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n} = (n+1) + \frac{n+1}{n}.$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung (3) zu

$$\frac{1}{(n+1)^2} + f\left(\frac{n+1}{n}\right) + 2(n+1)\cdot\frac{n+1}{n}\cdot f\left((n+1)+\frac{n+1}{n}\right) = \frac{f\left((n+1)+\frac{n+1}{n}\right)}{f\left((n+1)+\frac{n+1}{n}\right)},$$

also zu

$$\frac{1}{(n+1)^2} + f\left(\frac{n+1}{n}\right) + 2(n+1)\cdot\frac{n+1}{n}\cdot f\left((n+1)+\frac{n+1}{n}\right) = 1.$$

[1] Eine *natürliche Zahl* bedeutet im Folgenden eine positive ganze Zahl, d. h. eine von den Zahlen 1, 2, 3, ...

Mit anderen Worten:

$$\frac{1}{(n+1)^2} + f\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{2(n+1)^2}{n} \cdot f\left(\frac{n+1}{n} + (n+1)\right) = 1. \tag{4}$$

Nehmen wir nun an, es gilt $f\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$. Da $n+1$ eine nicht-negative ganze Zahl ist, gilt laut Hilfssatz 3 **b)** dann auch $f\left(\frac{n+1}{n} + (n+1)\right) < 1/\left(\frac{n+1}{n} + (n+1)\right)^2$, also

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n+1}{n} + (n+1)\right) &< 1/\left(\frac{n+1}{n} + (n+1)\right)^2 = 1/\left((n+1)\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)^2 \\ &= 1/\left((n+1)\cdot\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1/\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^2 = 1/\frac{(n+1)^4}{n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^4}, \end{aligned}$$

und aus $f\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ wird $f\left(\frac{n+1}{n}\right) < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2}{(n+1)^2}$; somit liefert (4) folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{(n+1)^2} + f\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{2(n+1)^2}{n} \cdot f\left(\frac{n+1}{n} + (n+1)\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{2(n+1)^2}{n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^4} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{2n}{(n+1)^2} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = 1, \end{aligned}$$

was offensichtlich falsch ist. Wir haben also unter Annahme von $f\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ einen Widerspruch erhalten. Analog bekommen wir auch einen Widerspruch, wenn wir $f\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ annehmen (dabei müssen wir in der obigen Argumentation alle Zeichen $<$ durch $>$ ersetzen und statt Hilfssatz 3 **b)** den Hilfssatz 3 **c)** anwenden). Somit kann weder $f\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ noch $f\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ gelten; es muß also $f\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ sein.

Anwendung von Hilfssatz 2 auf $x = \frac{1}{n}$ ergibt nun

$$f\left(\frac{1}{n}+1\right) = \frac{1}{\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right) + 1/f\left(\frac{1}{n}\right)}, \qquad \text{also}$$

$$\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right) + 1/f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{1}{f\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{1}{1/\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2,$$

und damit

$$\begin{aligned}1/f\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - \left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 - \frac{2}{n} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n^2 - 2n}{n^2} = \frac{(n^2+2n+1) - n^2 - 2n}{n^2} = \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

also $f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2$. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Nun können wir endlich beweisen, dass für jede positive rationale Zahl x gilt: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

In der Tat ist die Zahl x, weil sie positiv und rational ist, als Quotient $x = \frac{u}{v}$ zweier natürlicher Zahlen u und v darstellbar. Nach Hilfssatz 4 für $n = u$ gilt $f(u) = \frac{1}{u^2}$. Nach Hilfssatz 5 für $n = v$ gilt $f\left(\frac{1}{v}\right) = v^2$, also $f\left(\frac{1}{v}\right) = 1/\left(\frac{1}{v}\right)^2$. Nach Hilfssatz 3 **a)** für $x = \frac{1}{v}$ und $a = u$ ist somit $f\left(\frac{1}{v}+u\right) = 1/\left(\frac{1}{v}+u\right)^2$. Nach der Gleichung (1) für $x = u$ und $y = \frac{1}{v}$ ist aber

$$\begin{aligned}f(u) + f\left(\frac{1}{v}\right) + 2\cdot u\cdot\frac{1}{v}\cdot f\left(u\cdot\frac{1}{v}\right) &= \frac{f\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)}{f\left(u+\frac{1}{v}\right)}, &&\text{also}\\ f(u) + f\left(\frac{1}{v}\right) + 2\cdot\frac{u}{v}\cdot f\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{f\left(\frac{u}{v}\right)}{f\left(\frac{1}{v}+u\right)}, &&\text{also}\\ \frac{1}{u^2} + v^2 + 2\cdot\frac{u}{v}\cdot f(x) &= \frac{f(x)}{1/\left(\frac{1}{v}+u\right)^2}, &&\text{also}\\ \frac{1}{u^2} + v^2 + 2\cdot\frac{u}{v}\cdot f(x) &= \left(\frac{1}{v}+u\right)^2\cdot f(x),\end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{u^2} + v^2 &= \left(\frac{1}{v}+u\right)^2\cdot f(x) - 2\cdot\frac{u}{v}\cdot f(x)\\ &= \left(\frac{1}{v^2} + 2\cdot\frac{1}{v}\cdot u + u^2\right)\cdot f(x) - 2\cdot\frac{u}{v}\cdot f(x) = \left(\frac{1}{v^2} + \frac{2u}{v} + u^2\right) f(x) - \frac{2u}{v} f(x)\\ &= \left(\frac{1}{v^2} + u^2\right) f(x),\end{aligned}$$

also

$$f\left(x\right)=\frac{\frac{1}{u^2}+v^2}{\frac{1}{v^2}+u^2}=\frac{\left(\frac{1+u^2v^2}{u^2}\right)}{\left(\frac{1+u^2v^2}{v^2}\right)}=\frac{v^2}{u^2}=1/\left(\frac{u}{v}\right)^2=\frac{1}{x^2},$$

was zu beweisen war. Damit ist die Behauptung bewiesen, und die Aufgabe gelöst.