Bundeswettbewerb Mathematik 2006, 1. Runde, Aufgabe 4

Ein quadratisches Blatt Papier liegt auf dem Tisch. Es wird schrittweise in mehrere Teile zerschnitten: Bei jedem Schnitt wird ein Teil vom Tisch genommen und durch einen geraden Schnitt in zwei Teile zerlegt; diese beiden Teile werden auf den Tisch zurückgelegt.

Man bestimme die kleinste Anzahl an Schritten, mit denen man erreichen kann, daß sich auf dem Tisch unter den Teilen wenigstens 100 Zwanzigecke befinden.

Lösung von Darij Grinberg:

Antwort: Die kleinste Anzahl an Schritten, mit denen man erreichen kann, daß sich auf dem Tisch unter den Teilen wenigstens 100 Zwanzigecke befinden, ist 1699.

Beweis: Um dies nachzuweisen, müssen wir folgende zwei Aussagen zeigen:

Aussage 1: Es gibt eine Folge von 1699 Schritten, nach der auf dem Tisch 100 Zwanzigecke liegen.

Aussage 2: Wenn nach einer Folge von k Schritten wenigstens 100 Zwanzigecke auf dem Tisch liegen, dann ist $k \geq 1699$.

Beweis von Aussage 1: Wir können eine solche Folge explizit angeben. Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1: Wenn auf dem Tisch ein n-Eck (d. h. ein Blatt Papier in der Form eines n-Ecks) liegt, dann können wir es in einem Schritt in ein Dreieck und ein $(n+1)$-Eck zerteilen.

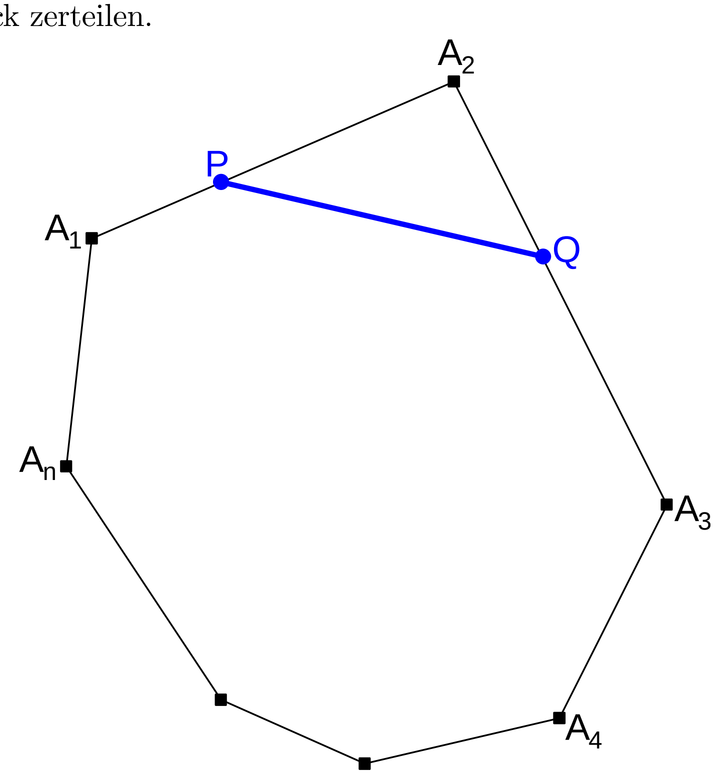

Fig. 1

Beweis von Hilfssatz 1: (Siehe Fig. 1.) Wir bezeichnen unser n-Eck mit $A_1A_2...A_n$. Nun nehmen wir zwei Punkte P und Q im Inneren seiner Seiten A_1A_2 bzw. A_2A_3. Ein

Schnitt entlang der Strecke PQ zerteilt das n-Eck $A_1A_2...A_n$ in das Dreieck PA_2Q und das $(n+1)$-Eck $QA_3A_4...A_nA_1P$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: Seien n und k zwei natürliche Zahlen[1] mit $n \geq 3$. Wenn auf dem Tisch ein n-Eck liegt, dann können wir es in k Schritten in k Dreiecke und ein $(n+k)$-Eck zerteilen.

Beweis von Hilfssatz 2: Wir beweisen Hilfssatz 2 durch vollständige Induktion über k:

Induktionsanfang: Für $k = 1$ folgt Hilfssatz 2 sofort aus Hilfssatz 1.

Induktionsschritt: Sei k_1 eine natürliche Zahl. Angenommen, Hilfssatz 2 gelte für $k = k_1$; das heißt, man kann in k_1 Schritten ein n-Eck in k_1 Dreiecke und ein $(n+k_1)$-Eck zerteilen.

Nun können wir laut Hilfssatz 1 in einem weiteren Schritt dieses $(n+k_1)$-Eck in ein Dreieck und ein $(n+k_1+1)$-Eck zerlegen.

In unseren insgesamt k_1+1 Schritten haben wir also das n-Eck in insgesamt k_1+1 Dreiecke und ein $(n+k_1+1)$-Eck zerlegt. Das heißt, Hilfssatz 2 gilt auch für $k = k_1+1$. Damit ist der Induktionsschritt komplett, und Hilfssatz 2 ist bewiesen.

Nun geben wir unsere Schrittfolge an:

Am Anfang liegt ein quadratisches Blatt Papier auf dem Tisch, d. h. ein Viereck. Nach Hilfssatz 2, angewandt auf $n = 4$ und $k = 16$, können wir dieses Viereck in 16 Schritten in 16 Dreiecke und ein $(4+16)$-Eck, also in ein Zwanzigeck zerteilen.

Nun nehmen wir eines von diesen 16 Dreiecken. Nach Hilfssatz 2, angewandt auf $n = 3$ und $k = 17$, können wir dieses Dreieck in 17 Schritten in 17 Dreiecke und ein $(3+17)$-Eck, also in ein Zwanzigeck zerteilen.

Nun nehmen wir wieder eines von den dabei entstandenen 17 Dreiecken und zerteilen es genauso in 17 Dreiecke und ein Zwanzigeck. Diese Prozedur wiederholen wir so lange, bis wir 100 Zwanzigecke erhalten haben.

Wieviele Schritte waren dafür nötig? Für das erste Zwanzigeck hatten wir (da wir von einem Viereck ausgegangen waren) 16 Schritte benötigt, für jedes der 99 weiteren Zwanzigecke jeweils 17 Schritte (da wir von Dreiecken ausgegangen sind). Daher haben wir insgesamt $16+99\cdot 17 = 1699$ Schritte benötigt, um 100 Zwanzigecke auf dem Tisch zu erhalten. Aussage 1 ist damit bewiesen.

Beweis von Aussage 2: Da das Blatt Papier, welches anfangs auf dem Tisch liegt, die Form eines Vielecks hat (nämlich eines Quadrats), und da man durch geradliniges Zerschneiden von Vielecken nur weitere Vielecke erhält, sind alle Papierteile, die zu irgendeinem Zeitpunkt auf dem Tisch liegen, Vielecke.

Unter dem **Gewicht** eines Vielecks verstehen wir die Zahl $n-3$, wobei n die Anzahl seiner Ecken ist. Wegen $n \geq 3$ (ein Vieleck hat immer mindestens 3 Ecken) ist das Gewicht eines Vielecks stets nichtnegativ.

Ferner bezeichnen wir die Summe der Gewichte aller Vielecke, die zu einem bestimmten Zeitpunkt auf dem Tisch liegen, als **Gesamtgewicht** des Tisches an diesem Zeitpunkt.

Nun zeigen wir:

Hilfssatz 3: Mit jedem Schritt (d. h. geradliniges Zerschneiden eines auf dem Tisch liegenden Vielecks in zwei Teile und Zurücklegen dieser zwei Teile auf den Tisch) vergrößert sich das Gesamtgewicht des Tisches um höchstens 1. [2]

[1] Dabei verstehen wir unter den natürlichen Zahlen die Zahlen 1, 2, 3, ...; die 0 zählt nicht dazu.

[2] Auch eine Verkleinerung zählt als "Vergrößerung um höchstens 1". In der Tat wird aus dem

Beweis von Hilfssatz 3: Angenommen, bei einem Schritt wurde ein n-Eck entlang einer Geraden s geschnitten und dabei in ein d-Eck und ein e-Eck zerlegt. Dieser Schritt hat sich folgendermaßen auf das Gesamtgewicht des Tisches ausgewirkt: Erst wurde vom Gesamtgewicht des Tisches $n-3$ (das Gewicht des n-Ecks) abgezogen, dann wurden $d-3$ (das Gewicht des d-Ecks) und $e-3$ (das Gewicht des e-Ecks) hinzuaddiert. Insgesamt hat sich dadurch das Gesamtgewicht um

$$(d-3)+(e-3)-(n-3)=(d+e)-n-3$$

vergrößert. Um Hilfssatz 3 zu beweisen, müssen wir also zeigen, daß $(d+e)-n-3 \leq 1$ ist, d. h. daß $d+e \leq n+4$ ist.

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Gerade s, entlang der das n-Eck zerschnitten wurde. Diese Schnittgerade s muß die Peripherie des n-Ecks in zwei Punkten P und Q schneiden. Nun unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1 (Fig. 2)*:* Keiner der Punkte P und Q fällt mit einer Ecke des n-Ecks zusammen.

Dann wird bei unserem Schritt das n-Eck in ein d-Eck und ein e-Eck zerschnitten mit $d+e=n+4$, denn beim Zerschneiden sind alle Ecken des n-Ecks erhaltengeblieben, und es sind zusätzlich 4 neue Ecken hinzugekommen (nämlich jede der beiden Ecken P und Q jeweils zweimal - einmal als Ecke des d-Ecks, einmal als Ecke des e-Ecks).

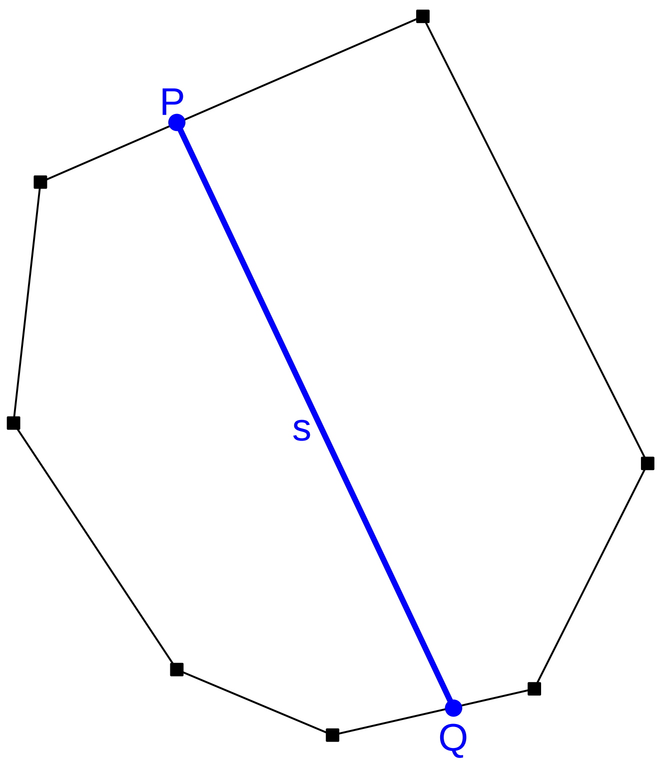

Fig. 2

Fall 2 (Fig. 3)*:* Genau einer der Punkte P und Q fällt mit einer Ecke des n-Ecks zusammen. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, der Punkt P sei eine Ecke des n-Ecks, während der Punkt Q keine ist.

Dann wird bei unserem Schritt das n-Eck in ein d-Eck und ein e-Eck zerschnitten mit $d+e=n+3$, denn beim Zerschneiden sind alle Ecken des n-Ecks erhaltengeblieben,

Beweis folgen, daß bei einem Schritt das Gesamtgewicht des Tisches entweder sich um 1 vergrößert, oder gleich bleibt, oder sich um 1 verkleinert.

wobei sich eine Ecke (nämlich die Ecke P) "verdoppelt" hat (sie ist nämlich sowohl Ecke des d-Ecks, als auch Ecke des e-Ecks geworden), und 2 neue Ecken hinzugekommen sind (nämlich die Ecke Q einmal als Ecke des d-Ecks und einmal als Ecke des e-Ecks).

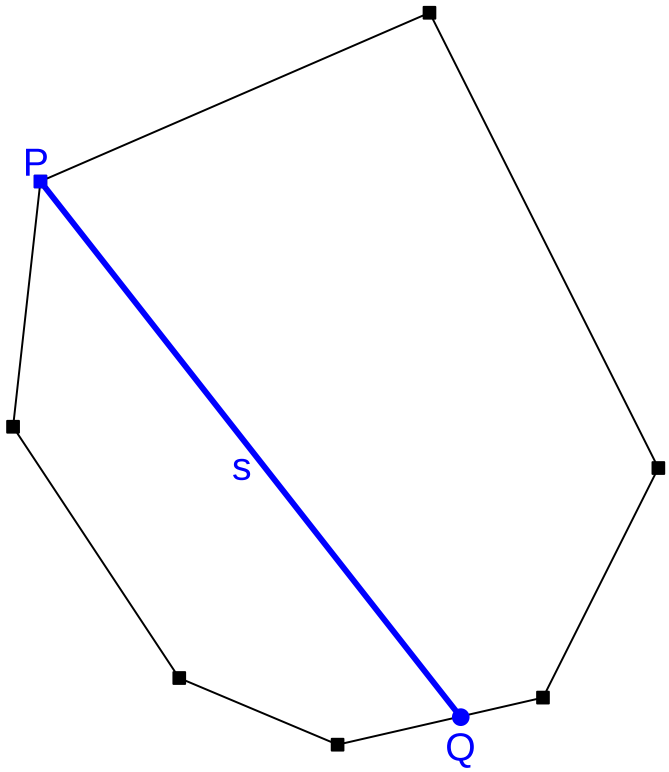

Fig. 3

Fall 3 (Fig. 4)*:* Beide Punkte P und Q sind Ecken des n-Ecks.

Dann wird bei unserem Schritt das n-Eck in ein d-Eck und ein e-Eck zerschnitten mit $d+e = n+2$, denn beim Zerschneiden sind alle Ecken des n-Ecks erhaltengeblieben, wobei sich zwei Ecken (nämlich die Ecken P und Q) "verdoppelt" haben (sie sind sowohl Ecken des d-Ecks, als auch Ecken des e-Ecks geworden).

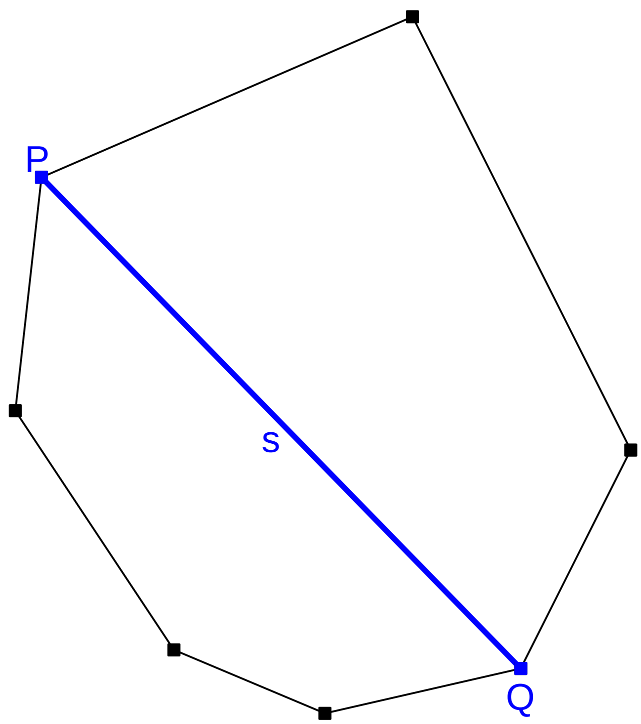

Fig. 4

Die Zahl $d+e$ ist also, in Abhängigkeit vom konkreten Fall, gleich $n+4$, $n+3$ oder $n+2$. Somit gilt stets $d+e \leq n+4$, und Hilfssatz 3 ist bewiesen.

Nun können wir Aussage 2 leicht zeigen: Anfangs liegt auf dem Tisch nur ein quadratisches Blatt Papier, also ein 4-Eck; sein Gewicht ist $4-3=1$. Das heißt, anfangs ist das Gesamtgewicht des Tisches gleich 1. Nach einer Folge von k Schritten ist das Gesamtgewicht des Tisches $\leq 1+k$, denn laut Hilfssatz 3 kann bei jedem Schritt das Gesamtgewicht nur um höchstens 1 zugenommen haben, und daher kann es bei k Schritten nur um höchstens k zugenommen haben.

Wenn aber wenigstens 100 Zwanzigecke auf dem Tisch liegen, muß das Gesamtgewicht des Tisches $\geq 100 \cdot 17$ sein (denn jedes Zwanzigeck hat 20 Ecken, also Gewicht $20-3=17$, womit bereits die 100 Zwanzigecke ein Gesamtgewicht von $100 \cdot 17$ ergeben, und zusätzliche weitere Vielecke auf dem Tisch können dieses Gesamtgewicht nicht verkleinern, da das Gewicht eines jeden Vielecks nichtnegativ ist).

Wenn also nach einer Folge von k Schritten wenigstens 100 Zwanzigecke auf dem Tisch liegen, dann muß das Gesamtgewicht des Tisches nach dieser Folge von Schritten einerseits $\leq 1+k$, andererseits $\geq 100 \cdot 17$ sein. Dies ist nur möglich, wenn $1+k \geq 100 \cdot 17$ ist, also wenn $k \geq 100 \cdot 17 - 1$ ist, d. h. wenn $k \geq 1699$ ist. Damit ist Aussage 2 bewiesen.

Nachdem nun beide Aussagen 1 und 2 bewiesen sind, ist die Aufgabe gelöst.