Bundeswettbewerb Mathematik 2006, 1. Runde, Aufgabe 2

Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, für die die Gleichung $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ gilt.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir führen einen indirekten Beweis: Angenommen, es gäbe zwei ganze Zahlen x und y, die $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ erfüllen.

Dann ist

$$\begin{aligned} & (x+y)^3 - 7xy(x+y) = (x+y)\left((x+y)^2 - 7xy\right) = (x+y)\left(\left(x^2+2xy+y^2\right) - 7xy\right) \\ = \; & (x+y)\left(\left(x^2-xy+y^2\right) - 4xy\right) = (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) - (x+y)\cdot 4xy \\ = \; & \left(x^3+y^3\right) - 4\left(x^2y+xy^2\right) = 4\left(x^2y+xy^2+1\right) - 4\left(x^2y+xy^2\right) = 4. \end{aligned}$$

Nun rechnen wir modulo 7: Setzen wir $u = x + y$, dann ist

$$u^3 = (x+y)^3 \equiv (x+y)^3 - 7xy(x+y) = 4 \bmod 7.$$

Nun führen wir eine Fallunterscheidung nach dem Rest, den die Zahl u bei Division durch 7 läßt:

- Ist $u \equiv 0 \bmod 7$, dann ist $u^3 \equiv 0^3 = 0 \bmod 7$; dies widerspricht $u^3 \equiv 4 \bmod 7$.
- Ist $u \equiv 1 \bmod 7$, dann ist $u^3 \equiv 1^3 = 1 \bmod 7$; dies widerspricht $u^3 \equiv 4 \bmod 7$.
- Ist $u \equiv 2 \bmod 7$, dann ist $u^3 \equiv 2^3 = 8 \equiv 1 \bmod 7$; dies widerspricht $u^3 \equiv 4 \bmod 7$.
- Ist $u \equiv 3 \bmod 7$, dann ist $u^3 \equiv 3^3 = 27 \equiv 6 \bmod 7$; dies widerspricht $u^3 \equiv 4 \bmod 7$.
- Ist $u \equiv 4 \bmod 7$, dann ist also $u \equiv -3 \bmod 7$, und damit $u^3 \equiv (-3)^3 = -27 \equiv 1 \bmod 7$; dies widerspricht $u^3 \equiv 4 \bmod 7$.
- Ist $u \equiv 5 \bmod 7$, dann ist also $u \equiv -2 \bmod 7$, und damit $u^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv 6 \bmod 7$; dies widerspricht $u^3 \equiv 4 \bmod 7$.
- Ist $u \equiv 6 \bmod 7$, dann ist also $u \equiv -1 \bmod 7$, und damit $u^3 \equiv (-1)^3 = -1 \equiv 6 \bmod 7$; dies widerspricht $u^3 \equiv 4 \bmod 7$.

Wir haben also in jedem Fall einen Widerspruch erhalten. Das heißt, unsere Annahme, daß es zwei ganze Zahlen x und y gibt, die $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$ erfüllen, ist falsch; daher gibt es keine zwei solche Zahlen, und die Aufgabe ist gelöst.