Bundeswettbewerb Mathematik 2006, 1. Runde, Aufgabe 3

Für die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks gelte die Beziehung $a^2 + b^2 > 5c^2$. Man beweise, dass dann c die Länge der kürzesten Seite ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Da die Zahlen a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks sind, gilt nach der Dreiecksungleichung $c + a > b$. Damit ist $a^2 + (c + a)^2 > a^2 + b^2 > 5c^2 = 4c^2 + c^2$. Doch $a^2 + (c + a)^2 = a^2 + (c^2 + 2ca + a^2) = 2a^2 + 2ca + c^2$; also ist $2a^2 + 2ca + c^2 > 4c^2 + c^2$. Das heißt, $2a^2 + 2ca > 4c^2$. Nach Division durch 2 wird dies zu $a^2 + ca > 2c^2$, also zu $a^2 + ca - 2c^2 > 0$. Das heißt, $(a - c)(a + 2c) = a^2 + ca - 2c^2 > 0$; wegen $a + 2c > 0$ ist also $a - c > 0$, und damit $a > c$. Analog zeigt man $b > c$. Also ist c die Länge der kürzesten Seite des Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c. Die Aufgabe ist gelöst.