Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 2. Runde, Aufgabe 3

Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in zwei Punkten A und B. Eine erste Gerade durch den Punkt B schneide den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkt C und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkt E. Eine zweite Gerade durch den Punkt B schneide den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkt D und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkt F. Dabei liege der Punkt B zwischen den Punkten C und E sowie zwischen den Punkten D und F.

Schließlich seien M und N die Mittelpunkte der Strecken CE und DF.

Man beweise: Die Dreiecke ACD, AEF und AMN sind zueinander ähnlich.

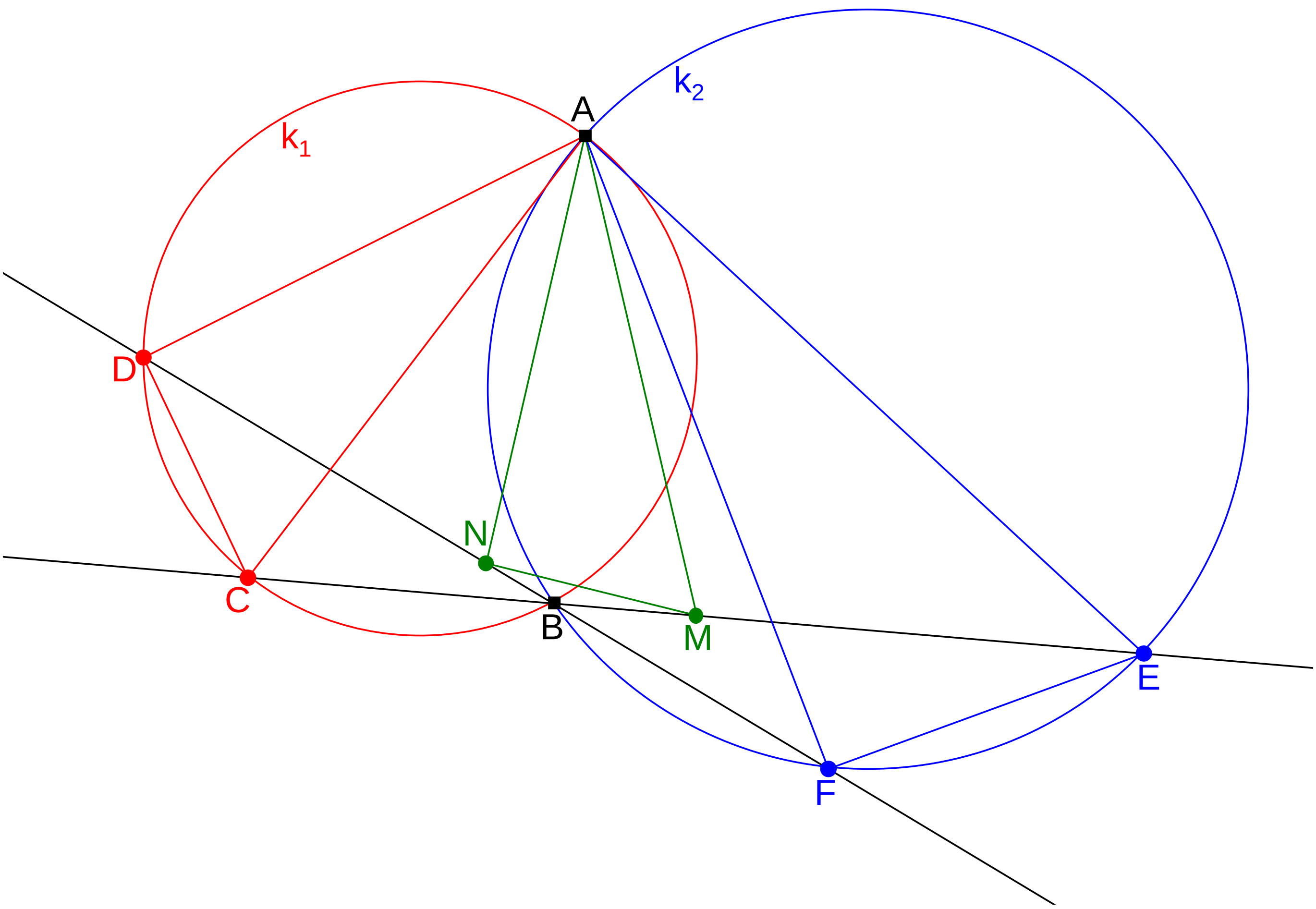

Fig. 1

Lösung von Darij Grinberg:

Wir werden in der folgenden Lösung orientierte Winkel modulo 180° verwenden. Eine Definition und wesentliche Eigenschaften dieser Winkelart sind in [1] und [2] zu finden (die Darstellung in [1] und in [2] ist mehr oder weniger die gleiche).

Wir betrachten nur den Fall, wenn die Punkte M und N beide von dem Punkt B verschieden sind. Der Fall, wenn einer von den Punkten M und N mit dem Punkt B übereinstimmt, ist ein Grenzfall und kann mithilfe der Stetigkeit aus dem allgemeinen Fall hergeleitet werden; alternativ kann dieser Fall auch auf eine zum allgemeinen Fall analoge Weise (teilweise mit dem Sehnentangentenwinkelsatz anstelle des Umfangswinkelsatzes) behandelt werden.

Da die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis liegen (nämlich auf dem Kreis k_1), gilt nach dem

Umfangswinkelsatz $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$. Mit anderen Worten: $\measuredangle ACE = \measuredangle ADF$. Analog gilt $\measuredangle AEC = \measuredangle AFD$. Daraus folgt nach dem gleichsinnigen WW-Ähnlichkeitssatz, daß die zwei Dreiecke *ACE* und *ADF* gleichsinnig ähnlich sind. Nun sind die Punkte *M* und *N* entsprechende Punkte in diesen zwei gleichsinnig ähnlichen Dreiecken *ACE* und *ADF* (denn sie sind die Mittelpunkte der entsprechenden Seiten *CE* bzw. *DF*). Bekanntlich bilden entsprechende Punkte in gleichsinnig ähnlichen Dreiecken gleiche Winkel. Daher ist $\measuredangle AMC = \measuredangle AND$. Da wir mit orientierten Winkeln modulo 180° arbeiten, haben wir $\measuredangle AMC = \measuredangle AMB$ und $\measuredangle AND = \measuredangle ANB$; damit wird also $\measuredangle AMB = \measuredangle ANB$. Nach der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes liegen also die Punkte *A*, *B*, *M* und *N* auf einem Kreis. Daraus folgt, wiederum nach dem Umfangswinkelsatz, $\measuredangle AMN = \measuredangle ABN$ und $\measuredangle ANM = \measuredangle ABM$. Andererseits ist $\measuredangle ABN = \measuredangle ABD$ und $\measuredangle ABM = \measuredangle ABC$; schließlich gilt, da die Punkte *A*, *B*, *C* und *D* auf einem Kreis liegen, nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ und $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Damit erhalten wir $\measuredangle AMN = \measuredangle ABN = \measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ und $\measuredangle ANM = \measuredangle ABM = \measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Nach dem gleichsinnigen WW-Ähnlichkeitssatz folgt daraus, daß die Dreiecke *AMN* und *ACD* gleichsinnig ähnlich sind. Analog zeigt man, daß die Dreiecke *AMN* und *AEF* gleichsinnig ähnlich sind. Somit sind die drei Dreiecke *ACD*, *AEF* und *AMN* alle zueinander gleichsinnig ähnlich. Damit ist die Aufgabe gelöst.

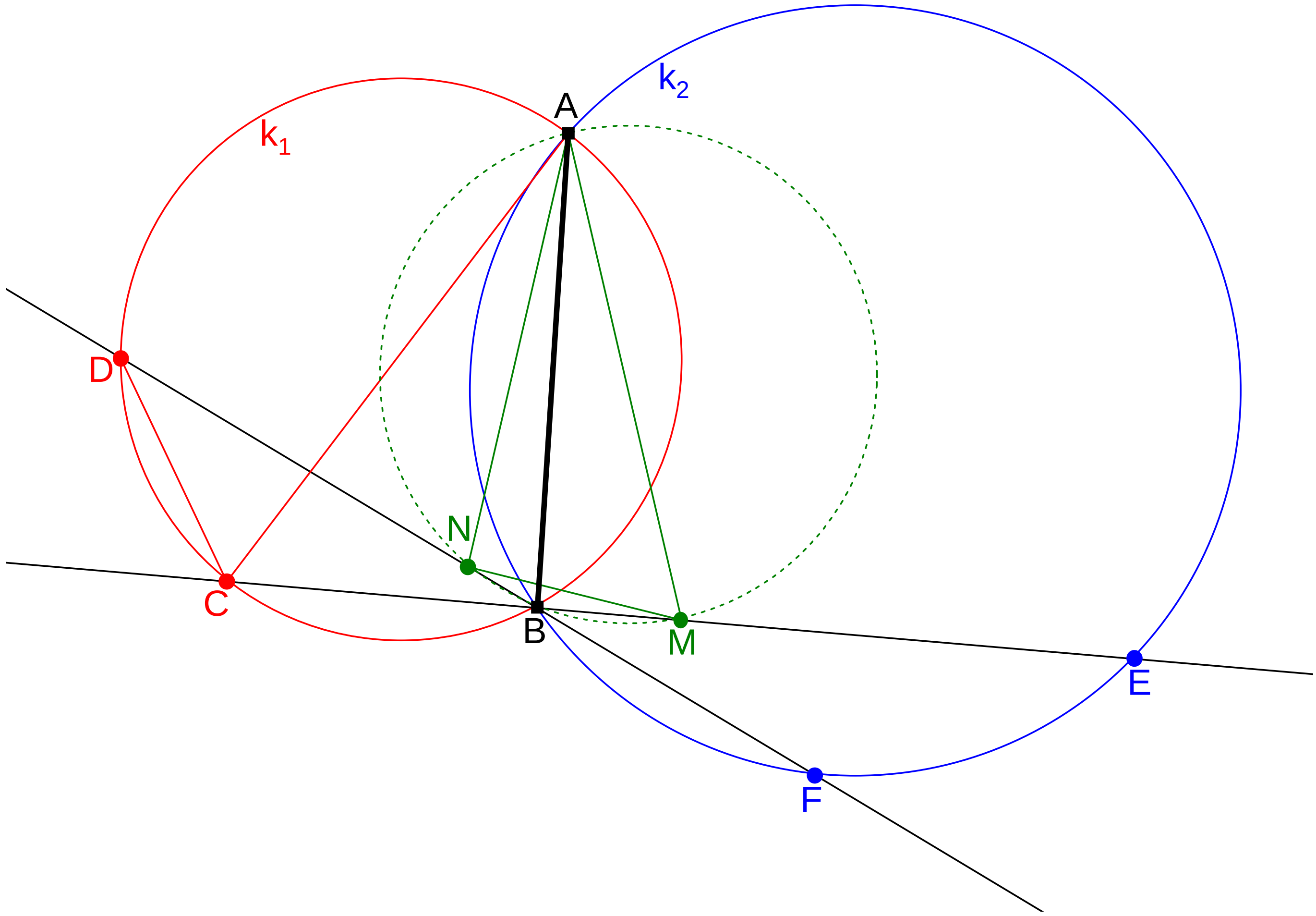

Fig. 2

Literaturhinweise

[1] Darij Grinberg: *Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 2. Runde, Aufgabe 3, Lösung*. http://de.geocities.com/darij_grinberg/Dreigeom/Inhalt.html#bwm

[2] Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo* 180° *und eine Lösung der* $\sqrt{\text{WURZEL}}$ *-Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag*.
http://de.geocities.com/darij_grinberg/Dreigeom/Inhalt.html

Teilweise erschienen in: $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 8/04, Seiten 170-176; $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 9+10/04, Seiten 226-229.