Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 2. Runde, Aufgabe 1

Zwei Spieler A und B haben auf einem 100×100-Schachbrett je einen Stein. Sie ziehen abwechselnd ihren Stein, wobei jeder Zug aus einem Schritt senkrecht oder waagerecht auf ein Nachbarfeld besteht, und Spieler A den ersten Zug ausführt. Zu Beginn liegt der Stein von A in der linken unteren Ecke und der Stein von B in der rechten unteren Ecke des Schachbretts.

Man beweise: Der Spieler A kann stets unabhängig von den Spielzügen des Spielers B nach endlich vielen Zügen erreichen, daß sein Stein und der Stein von B auf dem gleichen Feld stehen.

Lösung von Darij Grinberg:

Um eine, für Beweise in der Kombinatorik leider übliche, Ungenauigkeit in der Darstellung zu vermeiden, wird im Folgenden sehr detailliert, abstrakt und langwierig argumentiert. Ich bitte um Verständnis für die daraus resultierende kombinatorische Explosion der Seitenanzahl.

1. Terminologie

Zuerst werden wir einige Schreib- und Sprechweisen einführen.

Wir bezeichnen den Stein des Spielers A kurz als **A-Stein** und den Stein des Spielers B als **B-Stein**.

Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf unserem Schachbrett ein, wobei der Ursprung der Mittelpunkt des linken unteren Feldes ist, die x-Achse entlang der unteren Zeile verläuft, die y-Achse entlang der linken Spalte verläuft, und die Einheit des Koordinatensystems der Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Schachbrettfelder ist. Dann ist der Mittelpunkt eines jeden Schachbrettfeldes ein Gitterpunkt in diesem Koordinatensystem, wobei zwei Felder genau dann benachbart sind, wenn ihre Mittelpunkte benachbarte Gitterpunkte sind.

Für jedes Feld f des Schachbretts können wir die Koordinaten $(x_f \mid y_f)$ des Mittelpunktes dieses Feldes bestimmen; wir bezeichnen diese Koordinaten kurz als **Koordinaten des Feldes** f. Da der Mittelpunkt eines Feldes stets ein Gitterpunkt ist, sind dann diese Koordinaten x_f und y_f ganzzahlig. Ferner gilt $0 \leq x_f \leq 99$ und $0 \leq y_f \leq 99$ (denn das Schachbrett ist ein 100×100-Schachbrett, und die x-Achse und die y-Achse verlaufen entlang der unteren Zeile bzw. der linken Spalte). Umgekehrt ist jedes Paar $(x;\ y)$ von ganzen Zahlen x und y, die $0 \leq x \leq 99$ und $0 \leq y \leq 99$ erfüllen, das Koordinatenpaar des Mittelpunktes eines Feldes auf dem Schachbrett; wir bezeichnen dieses Feld mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Natürlich kann man dann jedes Feld f in der Form $f = \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \end{pmatrix}$ ausdrücken, wobei $(x_f \mid y_f)$ die Koordinaten des Feldes f sind.

Ist $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Feld des Schachbretts, dann ist

$$\begin{aligned}
f^L &= \begin{pmatrix} x_f - 1 \\ y_f \end{pmatrix} \text{ das linke Nachbarfeld von } f; \\
f^R &= \begin{pmatrix} x_f + 1 \\ y_f \end{pmatrix} \text{ das rechte Nachbarfeld von } f; \\
f^U &= \begin{pmatrix} x_f \\ y_f - 1 \end{pmatrix} \text{ das untere Nachbarfeld von } f; \\
f^O &= \begin{pmatrix} x_f \\ y_f + 1 \end{pmatrix} \text{ das obere Nachbarfeld von } f.
\end{aligned}$$

Ein Zug von einem der beiden Spieler besteht darin, daß sein Spielstein von einem Feld f in eines von seinen Nachbarfeldern f^L, f^R, f^U und f^O wechselt.

Nun definieren wir eine "Distanz" zweier Felder wie folgt: Sind $f_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei Felder, dann bezeichnet man die Zahl $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ als **Distanz** $\operatorname{dist}(f_1;\ f_2)$ **der beiden Felder** f_1 **und** f_2. Selbstverständlich ist diese Distanz eine nichtnegative ganze Zahl (nichtnegativ, weil Beträge reeller Zahlen stets nichtnegativ sind, und ganz, weil die Koordinaten x_1, x_2, y_1 und y_2 ganz sind). Es gelten zwei einfache Eigenschaften der Distanz:

Hilfssatz 1: Zwei Felder f_1 und f_2 haben genau dann die Distanz 0, wenn sie übereinstimmen (d. h. wenn sie das gleiche Feld sind).

Beweis von Hilfssatz 1: Seien $f_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Felder f_1 und f_2 in Koordinatendarstellung. Die Distanz der Felder f_1 und f_2 ist dann gleich $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Doch $|x_1 - x_2|$ und $|y_1 - y_2|$ sind zwei nichtnegative Zahlen, und die Summe zweier nichtnegativer Zahlen ist genau dann 0, wenn beide Zahlen 0 sind. Das heißt, die Distanz $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ der Felder f_1 und f_2 ist genau dann 0, wenn $|x_1 - x_2| = 0$ und $|y_1 - y_2| = 0$ ist, also wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist; doch dies bedeutet, daß die Felder $f_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ übereinstimmen. Wir haben also gezeigt, daß die Distanz der Felder f_1 und f_2 genau dann 0 ist, wenn diese Felder übereinstimmen. Somit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: Zwei Felder f_1 und f_2 haben genau dann die Distanz 1, wenn sie zwei benachbarte Felder sind.

Beweis von Hilfssatz 2: Seien $f_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Felder f_1 und f_2 in Koordinatendarstellung. Die Distanz der Felder f_1 und f_2 ist dann gleich $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Nun sind die Zahlen $|x_1 - x_2|$ und $|y_1 - y_2|$ nichtnegativ und ganz; die Summe zweier nichtnegativer ganzer Zahlen ist genau dann 1, wenn eine von diesen Zahlen 0 und eine 1 ist. Das heißt, die Distanz $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ der Felder f_1 und f_2 ist genau dann 1, wenn eine von den Zahlen $|x_1 - x_2|$ und $|y_1 - y_2|$ gleich 0 und die andere gleich 1 ist, also wenn die Felder $f_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $f_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in einer Koordinate übereinstimmen und sich in der anderen Koordinate um 1 unterscheiden; doch dies bedeutet, daß die Felder f_1 und f_2 benachbart sind. Wir haben also gezeigt, daß die Distanz der Felder f_1 und f_2 genau dann 1 ist, wenn diese Felder benachbart sind; damit ist Hilfssatz 2 nachgewiesen.

Wir sagen, durch einen bestimmten Spielzug hat der Spieler A **gewonnen**, wenn nach diesem Zug erstmalig der A-Stein und der B-Stein auf dem gleichen Feld stehen. (Dieser Spielzug kann dabei sowohl ein Zug von Spieler A, als auch ein Zug von Spieler B sein.)

2. Der Hauptsatz

Nun formulieren wir einen Satz, aus dem die Aussage der Aufgabe folgen wird:

Satz 3: Angenommen, zu einem bestimmten Zeitpunkt steht der A-Stein auf einem Feld f_A und der B-Stein auf einem Feld f_B, und die Distanz der beiden Felder f_A und f_B ist gerade. Ferner nehmen wir an, daß zu diesem Zeitpunkt der Spieler B gerade am Zug ist. Dann kann, unabhängig von den Spielzügen des Spielers B, der Spieler A nach endlich vielen Zügen gewinnen.

Wieso folgt aus Satz 3 die Aufgabe? Nun, gemäß der Aufgabenstellung steht ganz am Anfang des Spiels der A-Stein in der linken unteren Ecke des Schachbretts - also im Feld $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -, und der B-Stein in der rechten unteren Ecke des Schachbretts - also im Feld $\begin{pmatrix} 99 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nun macht der Spieler A einen Zug nach rechts, d. h. er geht vom Feld $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf sein rechtes Nachbarfeld $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann stehen der A-Stein und der B-Stein auf den Feldern $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 99 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Distanz dieser beiden Felder ist $|1-99|+|0-0| = 98+0 = 98$, also gerade; ferner ist der Spieler B am Zug. Daher kann nach Satz 3 der Spieler A, unabhängig von den Spielzügen des Spielers B, nach endlich vielen Zügen gewinnen, d. h. er kann es erreichen, daß der A-Stein und der B-Stein auf dem gleichen Feld stehen. Doch damit ist die Aufgabe gelöst.

Zur Lösung der Aufgabe reicht es also aus, Satz 3 nachzuweisen.

3. Der Beweis des Hauptsatzes

Zum *Beweis von Satz 3* betrachten wir die Distanz $\operatorname{dist}(f_A;\ f_B)$ der Felder f_A und f_B. Diese Distanz ist eine nichtnegative ganze Zahl, und laut der Bedingung von Satz 3 ist sie gerade. Daher kann man diese Distanz der Felder f_A und f_B in der Form $\operatorname{dist}(f_A;\ f_B) = 2e$ darstellen, wobei e eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Nun beweisen wir Satz 3 durch vollständige Induktion nach der Zahl e.

Induktionsanfang: Im Falle $e = 0$ ist die Distanz der Felder f_A und f_B gleich $2e = 0$. Laut Hilfssatz 1 sind also die Felder f_A und f_B das gleiche Feld. Das heißt, der A-Stein und der B-Stein stehen auf dem gleichen Feld, d. h. Spieler A hat gewonnen. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsschritt: Nehmen wir jetzt an, Satz 3 sei für $e = e_1$ gültig, wobei e_1 eine nichtnegative ganze Zahl ist; das heißt, wenn die Felder f_A und f_B die Distanz $2e_1$

haben, dann kann der Spieler A gewinnen. Wir müssen nun zeigen, daß Satz 3 auch für $e = e_1 + 1$ gültig ist, d. h. auch in dem Fall, wenn die Felder f_A und f_B die Distanz $2(e_1 + 1)$ haben, kann der Spieler A gewinnen.

Seien $f_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ und $f_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ die Felder f_A bzw. f_B in Koordinatendarstellung. Dann ist die Distanz dieser Felder gleich $2(e_1 + 1)$; das heißt,

$$\operatorname{dist}(f_A;\ f_B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = 2(e_1 + 1).$$

Da e_1 nichtnegativ ist, ist $e_1 + 1 \geq 1$, also $\operatorname{dist}(f_A;\ f_B) = 2(e_1 + 1) \geq 2 \cdot 1 = 2$.

Nun unterscheiden wir mehrere Fälle, je nachdem, wieviele von den nichtnegativen Zahlen $|x_A - x_B|$ und $|y_A - y_B|$ positiv und wieviele gleich 0 sind:

Fall 1: Die Zahlen $|x_A - x_B|$ und $|y_A - y_B|$ sind beide positiv. Das heißt, $x_A \neq x_B$ und $y_A \neq y_B$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $x_A < x_B$ und $y_A < y_B$ ist. Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß der A-Stein links unten vom B-Stein auf dem Schachbrett liegt. (Alle anderen Fälle kann man durch Drehen des Schachbretts auf diesen Fall zurückführen, deshalb betrachten wir nur diesen Fall.)

Es sei angemerkt, daß in diesem Fall das Feld f_A sowohl ein rechtes Nachbarfeld f_A^R, als auch ein oberes Nachbarfeld f_A^O hat. Denn wegen $x_A < x_B$ und $y_A < y_B$ liegt das Feld f_B weiter rechts und weiter oben als das Feld f_A, und daher liegt das Feld f_A weder am rechten Rand, noch am oberen Rand des Schachbretts, d. h. es hat ein rechtes und ein oberes Nachbarfeld.

Nun ist der Spieler B dran. Wir machen eine Fallunterscheidung, je nachdem, wohin er zieht:

Fall 1.1: Der Spieler B zieht nach rechts. Das heißt, der B-Stein wechselt vom Feld $f_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_B^R = \begin{pmatrix} x_B + 1 \\ y_B \end{pmatrix}$. Darauf antwortet der Spieler A, indem er ebenfalls nach rechts zieht, d. h. den A-Stein vom Feld $f_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_A^R = \begin{pmatrix} x_A + 1 \\ y_A \end{pmatrix}$ verschiebt. Wegen

$$\operatorname{dist}\left(f_A^R;\ f_B^R\right) = |(x_A + 1) - (x_B + 1)| + |y_A - y_B| = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = \operatorname{dist}(f_A;\ f_B) = 2(e_1 + 1)$$

hat sich durch diese zwei Züge die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, nicht geändert, d. h. diese Distanz ist weiterhin gleich $2(e_1 + 1)$. Ferner haben wir wegen $x_A + 1 < x_B + 1$ (denn $x_A < x_B$) und $y_A < y_B$ weiterhin den Fall vorliegen, daß der A-Stein links unten vom B-Stein liegt.

Das heißt, jedesmal, wenn der Spieler B nach rechts zieht, kann der Spieler A dies erwidern, indem er ebenfalls nach rechts zieht; dabei bleibt die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, weiterhin gleich $2(e_1 + 1)$, und der A-Stein liegt weiterhin links unten vom B-Stein.

Fall 1.2: Der Spieler B zieht nach oben. Dieser Fall kann analog zum Fall 1.1 behandelt werden: Der Spieler A zieht ebenfalls nach oben; dabei bleibt die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, weiterhin gleich $2(e_1 + 1)$, und der A-Stein liegt weiterhin links unten vom B-Stein.

Fall 1.3: Der Spieler B zieht nach links. Das heißt, der B-Stein wechselt vom Feld $f_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_B^L = \begin{pmatrix} x_B - 1 \\ y_B \end{pmatrix}$. Darauf antwortet der Spieler A, indem er nach oben zieht, d. h. den A-Stein vom Feld $f_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_A^O = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A + 1 \end{pmatrix}$ verschiebt.

Wir haben $x_A < x_B$, also, da die Zahlen x_A und x_B beide ganz sind, $x_A \leq x_B - 1$. Damit ist $|x_A - (x_B - 1)| = (x_B - 1) - x_A$. Wegen $x_A < x_B$ ist aber $|x_A - x_B| = x_B - x_A$. Damit erhalten wir

$$|x_A - (x_B - 1)| = (x_B - 1) - x_A = (x_B - x_A) - 1 = |x_A - x_B| - 1.$$

Wir haben $y_A < y_B$, also, da die Zahlen y_A und y_B beide ganz sind, $y_A + 1 \leq y_B$. Daraus folgt $|(y_A + 1) - y_B| = y_B - (y_A + 1)$. Wegen $y_A < y_B$ ist aber $|y_A - y_B| = y_B - y_A$. Daher ist

$$|(y_A + 1) - y_B| = y_B - (y_A + 1) = (y_B - y_A) - 1 = |y_A - y_B| - 1.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\left(f_A^O;\ f_B^L\right) &= |x_A - (x_B - 1)| + |(y_A + 1) - y_B| = (|x_A - x_B| - 1) + (|y_A - y_B| - 1) \\ &= (|x_A - x_B| + |y_A - y_B|) - 2 = \operatorname{dist}(f_A;\ f_B) - 2 = 2(e_1 + 1) - 2 = 2e_1. \end{aligned}$$

Das heißt: Zieht der Spieler B nach links, kann der Spieler A mit einem Zug nach oben kontern, und erreicht dadurch, daß die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, auf $2e_1$ verringert wird. Nun kann aber laut Induktionsannahme der Spieler A gewinnen.

Fall 1.4: Der Spieler B zieht nach unten. Dieser Fall läßt sich analog zum Fall 1.3 behandeln: Der Spieler A antwortet mit einem Zug nach rechts, und die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, verringert sich auf $2e_1$. Laut Induktionsannahme kann dann der Spieler A gewinnen.

Das Fazit ist also: Wenn der Spieler B nach rechts oder nach oben zieht, kann der Spieler A genauso ziehen; dadurch bleibt die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, weiterhin gleich $2(e_1 + 1)$, und es ist wieder die Situation erreicht, daß der A-Stein links unten vom B-Stein liegt. Das heißt, wir können wieder die gleiche Fallunterscheidung durchführen nach dem nächsten Zug des Spielers B. Sobald aber der Spieler B nach links oder nach unten zieht, kann der Spieler A gewinnen.

Doch der Spieler B kann nicht beliebig lange nur Züge nach rechts und nach oben machen, denn bei jedem solchen Zug vergrößert er eine der beiden Koordinaten des Feldes, auf dem sein Stein steht, um 1, aber die Koordinaten müssen ≤ 99 bleiben (da das Schachbrett beschränkt ist). Somit muß der Spieler B irgendwann einmal auch einen Zug nach links oder nach unten machen. Und dann kann, gemäß dem Obigen, der Spieler A gewinnen.

Somit kann der Spieler A im Fall 1 immer gewinnen.

Fall 2: Die Zahl $|x_A - x_B|$ ist positiv, während die Zahl $|y_A - y_B| = 0$ ist. Das heißt, $x_A \neq x_B$, aber $y_A = y_B$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $x_A < x_B$ ist (der Fall $x_A > x_B$ läßt sich durch Spiegelung des Schachbretts in den Fall $x_A < x_B$ überführen). Das heißt, der A-Stein steht links vom B-Stein in der gleichen Zeile des Schachbretts.

Es sei angemerkt, daß in diesem Fall das Feld f_A ein rechtes Nachbarfeld f_A^R hat. Denn wegen $x_A < x_B$ liegt das Feld f_B weiter rechts als das Feld f_A, und daher kann das Feld f_A nicht am rechten Rand des Schachbretts liegen, d. h. es hat ein rechtes Nachbarfeld.

Nun haben wir $\operatorname{dist}(f_A;\ f_B) \geq 2$, also $|x_A - x_B| + |y_A - y_B| \geq 2$; wegen $|y_A - y_B| = 0$ ist also $|x_A - x_B| \geq 2$. Da $x_A < x_B$ ist, gilt $|x_A - x_B| = x_B - x_A$; damit wird dies zu $x_B - x_A \geq 2$. Daraus folgt $x_A + 2 \leq x_B$, also $x_A + 1 < x_B$.

Der Spieler B ist am Zug. Wir führen eine Fallunterscheidung nach der Richtung, in die er zieht:

Fall 2.1: Der Spieler B zieht nach rechts. Dieser Fall ist völlig analog zum Fall 1.1 zu behandeln. Der Spieler A zieht ebenfalls nach rechts; die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, bleibt weiterhin gleich $2(e_1 + 1)$, und der A-Stein steht weiterhin links vom B-Stein.

Fall 2.2: Der Spieler B zieht nach oben. Das heißt, der B-Stein wechselt vom Feld $f_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_B^O = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B + 1 \end{pmatrix}$. Darauf antwortet der Spieler A, indem er nach rechts zieht, d. h. den A-Stein vom Feld $f_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_A^R = \begin{pmatrix} x_A + 1 \\ y_A \end{pmatrix}$ verschiebt.

Wegen $x_A + 1 < x_B$ ist $|(x_A + 1) - x_B| = x_B - (x_A + 1)$. Andererseits ist aber $|x_A - x_B| = x_B - x_A$. Damit erhalten wir

$$|(x_A + 1) - x_B| = x_B - (x_A + 1) = (x_B - x_A) - 1 = |x_A - x_B| - 1.$$

Andererseits ist $y_A = y_B$, damit

$$|y_A - (y_B + 1)| = |y_B - (y_B + 1)| = |-1| = 1 = 1 + 0 = 1 + |y_B - y_B| = 1 + |y_A - y_B|.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\left(f_A^R;\ f_B^O\right) &= |(x_A + 1) - x_B| + |y_A - (y_B + 1)| = (|x_A - x_B| - 1) + (1 + |y_A - y_B|) \\ &= |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = \operatorname{dist}(f_A;\ f_B) = 2(e_1 + 1). \end{aligned}$$

Nun ist aber $x_A + 1 < x_B$ und $y_A < y_B + 1$ (letzteres wegen $y_A = y_B$). Somit steht das Feld $f_A^R = \begin{pmatrix} x_A + 1 \\ y_A \end{pmatrix}$ links unten vom Feld $f_B^O = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B + 1 \end{pmatrix}$; die Zahlen $|(x_A + 1) - x_B|$ und $|y_A - (y_B + 1)|$ sind beide positiv. Damit sind wir im Fall 1 angelangt.

Das heißt: Zieht der Spieler B nach oben, kann der Spieler A mit einem Zug nach rechts kontern; dabei bleibt die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, gleich $2(e_1 + 1)$, aber die Situation verändert sich von einer Situation von Fall 2 in eine Situation von Fall 1. Da wir wissen, daß im Fall 1 der Spieler A immer gewinnen kann, erhalten wir somit, daß im Fall 2.2 der Spieler A immer gewinnen kann.

Fall 2.3: Der Spieler B zieht nach unten. Dieser Fall ist analog zum Fall 2.2 zu behandeln: Der Spieler A beantwortet den Zug von B mit einem Zug nach rechts;

die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, bleibt weiterhin gleich $2(e_1+1)$, aber wir sind in Fall 1 angelangt, und der Spieler A kann gewinnen.

Fall 2.4: Der Spieler B zieht nach links. Das heißt, der B-Stein wechselt vom Feld $f_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_B^L = \begin{pmatrix} x_B - 1 \\ y_B \end{pmatrix}$. Darauf antwortet der Spieler A, indem er nach rechts zieht, d. h. den A-Stein vom Feld $f_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ auf das Feld $f_A^R = \begin{pmatrix} x_A + 1 \\ y_A \end{pmatrix}$ verschiebt.

Nun haben wir $x_A + 2 \leq x_B$, also $|(x_A+2) - x_B| = x_B - (x_A+2)$. Andererseits ist aber $|x_A - x_B| = x_B - x_A$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |(x_A+1)-(x_B-1)| &= |x_A - x_B + 2| = |(x_A+2)-x_B| = x_B - (x_A+2) = (x_B - x_A) - 2 \\ &= |x_A - x_B| - 2. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\left(f_A^R;\ f_B^L\right) &= |(x_A+1)-(x_B-1)| + |y_A - y_B| = (|x_A - x_B| - 2) + |y_A - y_B| \\ &= (|x_A - x_B| + |y_A - y_B|) - 2 = \operatorname{dist}(f_A;\ f_B) - 2 = 2(e_1+1) - 2 = 2e_1. \end{aligned}$$

Das heißt: Zieht der Spieler B nach links, so kann dies der Spieler A mit einem Zug nach rechts erwidern, und dadurch verringert sich die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, auf $2e_1$. In dieser Situation kann aber laut Induktionsannahme der Spieler A gewinnen.

Das Fazit ist also: Wenn der Spieler B nach rechts zieht, kann der Spieler A genauso ziehen; dadurch bleibt die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, weiterhin gleich $2(e_1+1)$, und es ist wieder die Situation erreicht, daß der A-Stein links vom B-Stein liegt. Das heißt, wir können wieder die gleiche Fallunterscheidung durchführen nach dem nächsten Zug des Spielers B. Sobald aber der Spieler B nach oben, nach unten oder nach links zieht, kann der Spieler A gewinnen.

Doch der Spieler B kann nicht beliebig lange nur Züge nach rechts machen, denn bei jedem solchen Zug vergrößert er die x-Koordinate des Feldes, auf dem sein Stein steht, um 1, aber diese Koordinate muss ≤ 99 bleiben (da das Schachbrett beschränkt ist). Somit muß der Spieler B irgendwann einmal auch einen Zug nach oben, nach unten oder nach links machen. Und dann kann, gemäß dem Obigen, der Spieler A gewinnen.

Somit kann der Spieler A im Fall 2 immer gewinnen.

Fall 3: Die Zahl $|y_A - y_B|$ ist positiv, während die Zahl $|x_A - x_B| = 0$ ist. Dieser Fall geht in den Fall 2 über, wenn man das Schachbrett um 90° dreht. Somit ist er völlig analog zum Fall 2, und daher kann auch im Fall 3 der Spieler A stets gewinnen.

Fall 4: Beide Zahlen $|x_A - x_B|$ und $|y_A - y_B|$ sind $= 0$. Dieser Fall ist ausgeschlossen, da $|x_A - x_B| + |y_A - y_B| = \operatorname{dist}(f_A;\ f_B) \geq 2$ ist.

Somit sehen wir, daß der Spieler A in jedem Fall gewinnen kann. *Damit ist die Aufgabe gelöst.*

Anhang:

Satz 3 besagt, daß wenn zu einem Zeitpunkt die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, gerade ist, und der Spieler B am Zug ist, dann der Spieler A gewinnen kann. Es gilt auch eine Umkehrung dieses Satzes:

Satz 4: Angenommen, zu einem bestimmten Zeitpunkt steht der A-Stein auf einem Feld f_A und der B-Stein auf einem Feld f_B, und die Distanz der beiden Felder f_A und f_B ist ungerade. Ferner nehmen wir an, daß zu diesem Zeitpunkt der Spieler B gerade am Zug ist. Dann kann der Spieler B verhindern, daß der Spieler A nach endlich vielen Zügen gewinnt.

Beweis von Satz 4: Zuerst zeigen wir einen Hilfssatz:

Hilfssatz 5: Jedesmal, wenn ein Spieler einen Zug ausführt, ändert sich die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, um genau 1 (nach oben oder nach unten).

Beweis von Hilfssatz 5: Seien $f_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ und $f_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ die Felder, auf denen der A-Stein bzw. der B-Stein *vor dem Zug* stehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß der Zug ein Zug des Spielers A ist, und darin besteht, daß der A-Stein von dem Feld $f_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ auf sein rechtes Nachbarfeld $f_A^R = \begin{pmatrix} x_A + 1 \\ y_A \end{pmatrix}$ verschoben wird. Dabei bleibt der B-Stein natürlich auf seinem Feld $f_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ stehen.

Wir unterscheiden nun den Fall $x_A < x_B$ und den Fall $x_A \geq x_B$:

Fall 1: Es ist $x_A < x_B$. Da die Zahlen x_A und x_B ganz sind, folgt daraus $x_A + 1 \leq x_B$, und damit $|(x_A + 1) - x_B| = x_B - (x_A + 1)$; wegen $x_A < x_B$ ist aber $|x_A - x_B| = x_B - x_A$, und damit

$$|(x_A + 1) - x_B| = x_B - (x_A + 1) = (x_B - x_A) - 1 = |x_A - x_B| - 1,$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\left(f_A^R;\ f_B\right) &= |(x_A + 1) - x_B| + |y_A - y_B| = (|x_A - x_B| - 1) + |y_A - y_B| \\ &= (|x_A - x_B| + |y_A - y_B|) - 1 = \operatorname{dist}(f_A;\ f_B) - 1. \end{aligned}$$

Das heißt, die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, ändert sich bei dem Zug um 1 nach unten.

Fall 2: Es ist $x_A \geq x_B$. Dann ist auch $x_A + 1 \geq x_B$, also $|(x_A + 1) - x_B| = (x_A + 1) - x_B$; aus $x_A \geq x_B$ folgt aber $|x_A - x_B| = x_A - x_B$, und damit ist

$$|(x_A + 1) - x_B| = (x_A + 1) - x_B = (x_A - x_B) + 1 = |x_A - x_B| + 1,$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\left(f_A^R;\ f_B\right) &= |(x_A + 1) - x_B| + |y_A - y_B| = (|x_A - x_B| + 1) + |y_A - y_B| \\ &= (|x_A - x_B| + |y_A - y_B|) + 1 = \operatorname{dist}(f_A;\ f_B) + 1. \end{aligned}$$

Das heißt, die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, ändert sich bei dem Zug um 1 nach oben.

Somit ändert sich in beiden Fällen die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, bei dem Zug um genau 1, und Hilfssatz 5 ist bewiesen.

Nun beweisen wir Satz 4:

Laut der Bedingung von Satz 4 ist am Ausgangszeitpunkt der Spieler B dran, und die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, ist ungerade. Nach dem ersten Zug - einem Zug von Spieler B - hat sich diese Distanz (laut Hilfssatz 5) um 1 geändert, d. h. sie ist dann gerade. Nach dem zweiten Zug - einem Zug von Spieler A - hat sich diese Distanz wieder um 1 geändert, d. h. sie ist dann wieder ungerade. Wenn wir die Änderung der Parität dieser Distanz weiterverfolgen, dabei beachtend, daß die Spieler A und B abwechselnd ziehen und bei jedem Zug sich die Distanz um 1 ändert, also ihre Parität wechselt, sehen wir: Nach jedem Zug von Spieler B ist die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, gerade, und nach jedem Zug von Spieler A ist sie ungerade.

Nun fragen wir uns: Durch was für einen Zug kann der Spieler A gewinnen?

Nach einem Zug von Spieler A ist die Distanz der Felder, auf denen der A-Stein und der B-Stein stehen, ungerade; daher kann sie nicht 0 sein, d. h. nach einem Zug von Spieler A können der A-Stein und der B-Stein nicht auf dem gleichen Feld stehen. Damit ist klar, daß Spieler A nicht durch einen von seinen eigenen Zügen gewinnen kann.

Allerdings kann der Spieler A auch nicht durch einen Zug von Spieler B gewinnen, falls Spieler B geschickt spielt: Jedesmal, wenn der Spieler B dran ist, kann er den B-Stein von seinem Feld in eines seiner Nachbarfelder verschieben, und dabei hat er mindestens zwei Nachbarfelder zur Auswahl[1]. Eventuell steht auf einem von diesen Nachbarfeldern der A-Stein, aber es gibt mindestens ein Nachbarfeld, auf dem der A-Stein *nicht* steht, und der Spieler B zieht in dieses Nachbarfeld. Dadurch erreicht er, daß nach seinem Zug der A-Stein und der B-Stein in verschiedenen Feldern stehen, d. h. der Spieler A hat durch seinen Zug nicht gewonnen.

Somit kann der Spieler A bei geschickter Spielweise des Spielers B weder durch einen von seinen eigenen Zügen noch durch einen Zug von Spieler B gewinnen; das heißt, der Spieler B kann verhindern, daß Spieler A gewinnt. Damit ist Satz 4 bewiesen.

[1] Denn jedes Feld auf dem Schachbrett hat mindestens zwei Nachbarfelder. (Ein Feld im Inneren des Schachbrettes hat vier Nachbarfelder, ein Feld auf dem Rand hat drei, und ein Eckfeld hat zwei.)