Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 2. Runde, Aufgabe 4
(bitte angepasste Bezeichnungen beachten)

Für eine natürliche Zahl $n \geq 3$ sei $A(n)$ die maximale Anzahl der Selbstüberschneidungen von geschlossenen Streckenzügen $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$, bei denen keine drei der Eckpunkte auf einer Geraden liegen.

Man beweise:

a) Wenn n ungerade ist, gilt $A(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

b) Wenn n gerade ist, gilt $A(n) = \dfrac{n(n-4)}{2} + 1$.

Erläuterung: Eine **Selbstüberschneidung** eines Streckenzugs ist ein (nicht geordnetes) Paar von zwei verschiedenen und nicht benachbarten Strecken, die sich schneiden.

Lösung von Darij Grinberg:

1. Vorbetrachtungen

Wir führen einige Schreibweisen ein, die für die Lösungen der Aufgabenteile **a)** und **b)** gleichermaßen gelten:

Wir werden in den Indizes modulo n rechnen. Das heißt, wir bezeichnen für jede ganze Zahl x mit $\overline{x}$ den Rest der Zahl x bei der Division durch n, und definieren für jede ganze Zahl x die Ecke P_x als die Ecke $P_{\overline{x}}$. Unter anderem ist dann $P_n = P_0$, $P_{n+1} = P_1$, $P_{-1} = P_{n-1}$, und allgemein gilt für zwei ganze Zahlen u und v die Gleichung $P_u = P_v$ genau dann, wenn $u \equiv v \mod n$ ist.

Eine weitere Abkürzung wird uns sehr dienlich sein: Wir sagen, zwei Strecken des Streckenzugs $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$ **schneiden sich echt**, wenn sie sich schneiden, dabei aber nicht zusammenfallen und nicht zueinander benachbart sind. Dann ist eine Selbstüberschneidung des Streckenzugs $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$ ein Paar von zwei Strecken, die sich echt schneiden.

Für jedes ganze i sei d_i die Anzahl aller Strecken des Streckenzugs $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$, welche die Strecke $P_i P_{i+1}$ echt schneiden, also die Anzahl aller Strecken des Streckenzugs $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$, welche die Strecke $P_i P_{i+1}$ schneiden, außer der Strecke $P_i P_{i+1}$ selber und den beiden zu ihr benachbarten Strecken.

Ferner sei $d(P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0)$ die Anzahl aller Selbstüberschneidungen des Streckenzugs $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$, also die Anzahl aller Paare von Strecken des Streckenzugs $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$, die sich echt schneiden. Die Zahl $A(n)$ ist dann definiert als der größtmögliche Wert, den die Zahl $d(P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0)$ annehmen kann.

Wir zeigen eine simple kombinatorische Aussage:

Hilfssatz 1.1: Es gilt

$$d(P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0) = \frac{d_0 + d_1 + ... + d_{n-1}}{2}.$$

Beweis: Für jedes ganzzahlige i ist d_i die Anzahl aller Strecken des Streckenzugs $P_0 P_1 ... P_{n-1} P_0$, welche die Strecke $P_i P_{i+1}$ echt schneiden. Daher zählt die Summe

$d_0 + d_1 + ... + d_{n-1}$ alle Paare von Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, die sich echt schneiden, und zwar jedes solche Paar genau zweimal. Damit ist $d_0 + d_1 + ... + d_{n-1} = 2d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right)$, also $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) = \frac{d_0 + d_1 + ... + d_{n-1}}{2}$, und somit ist Hilfssatz 1.1 bewiesen.

2. Das konvexe n-Eck $A_0A_1...A_{n-1}$

Bevor wir zu den Lösungen der einzelnen Aufgabenteile kommen, führen wir eine Konstruktion ein, die für beide Aufgabenteile wichtig sein wird:

Sei $A_0A_1...A_{n-1}$ ein konvexes n-Eck. (Dabei rechnen wir wieder in den Indizes modulo n; das heißt, die Ecke A_x soll gleich der Ecke $A_{\overline{x}}$ sein.)

Seien A_i und A_j zwei verschiedene Ecken des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$. Dann zerlegt die Diagonale A_iA_j des n-Ecks die Ebene in zwei (offene) Halbebenen; in einer davon liegen $\overline{j-i}$ Seiten des n-Ecks, und in der anderen liegen $n - \overline{j-i}$ Seiten. Wir bezeichnen diese zwei Anzahlen $\overline{j-i}$ und $n - \overline{j-i}$ als die **Spaltungszahlen** der zwei Ecken A_i und A_j des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$.

Für ein beliebiges ganzes i werden die Ecken A_i und A_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ als **Nachbarecken** bezeichnet. Nachbarecken sind also benachbarte Ecken des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$, *nicht zu verwechseln mit* benachbarten Eckpunkten des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$.

3. Lösung von Aufgabenteil a)

Zuerst werden wir Aufgabenteil **a)** lösen. Wir nehmen also an, daß die Zahl n ungerade ist.

3a. Die obere Schranke

Betrachten wir zunächst einen beliebigen Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, für den gilt, daß keine drei von seinen Eckpunkten auf einer Geraden liegen. Wir zeigen dann:

Hilfssatz 3.1: Für jedes ganze i gilt $d_i \leq n - 3$.

Beweis: Die Zahl d_i ist die Anzahl aller Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, welche die Strecke P_iP_{i+1} echt schneiden. Nun hat der Streckenzug n Strecken, und davon können nur $n - 3$ die Strecke P_iP_{i+1} echt schneiden (denn die Strecke P_iP_{i+1} selber sowie die beiden zu ihr benachbarten Strecken schneiden die Strecke P_iP_{i+1} nicht echt). Damit kann die Zahl d_i also höchstens gleich $n - 3$ sein. Damit ist Hilfssatz 3.1 bewiesen.

Nach Hilfssatz 1.1 und Hilfssatz 3.1 gilt

$$d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) = \frac{d_0 + d_1 + ... + d_{n-1}}{2} \leq \frac{\overbrace{(n-3) + (n-3) + ... + (n-3)}^{n \text{ mal}}}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

3b. Die untere Schranke

Nun betrachten wir unser konvexes n-Eck $A_0A_1...A_{n-1}$. Wir definieren jetzt einen Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, indem wir

$$\boxed{P_i = A_{\frac{n-1}{2}i}}$$

für jedes ganze i setzen. (Dies ist möglich, denn da n ungerade ist, ist $n-1$ gerade und daher $\frac{n-1}{2}$ eine ganze Zahl.) Dies ist ein wohldefinierter geschlossener Streckenzug, denn wenn $i \equiv j \bmod n$ ist, gilt auch $\frac{n-1}{2}i \equiv \frac{n-1}{2}j \bmod n$.

[Auf Fig. 1 ist der Fall $n = 7$ dargestellt. Der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ wird von den roten Strecken gebildet.]

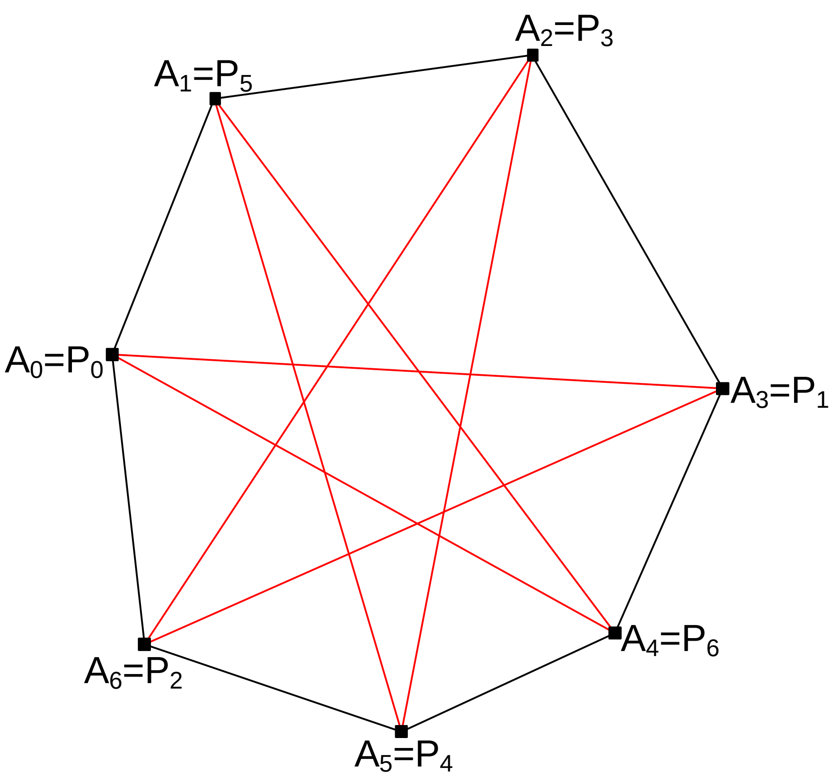

Fig. 1

Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 3.2: Die Ecken P_0, P_1, ..., P_{n-1} des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ sind paarweise verschieden; mit anderen Worten: Gilt für zwei ganze Zahlen i und j die Gleichung $P_i = P_j$, dann muß $i \equiv j \bmod n$ sein.

Beweis: Wenn $P_i = P_j$ gilt, dann ist $A_{\frac{n-1}{2}i} = A_{\frac{n-1}{2}j}$ (denn $P_i = A_{\frac{n-1}{2}i}$ und $P_j = A_{\frac{n-1}{2}j}$), also $\frac{n-1}{2}i \equiv \frac{n-1}{2}j \bmod n$; das heißt, die Zahl $\frac{n-1}{2}i - \frac{n-1}{2}j$ ist durch n teilbar. Nun ist $\frac{n-1}{2}$ teilerfremd zu n (denn ein gemeinsamer Teiler von $\frac{n-1}{2}$ und n würde auch $n-1$ teilen, er wäre damit ein gemeinsamer Teiler von $n-1$ und n, doch der einzige gemeinsame Teiler von $n-1$ und n ist 1). Da die Zahl $\frac{n-1}{2}i - \frac{n-1}{2}j = \frac{n-1}{2}(i-j)$ durch n teilbar ist, muß also auch die Zahl $i-j$ durch

n teilbar sein; damit ist $i \equiv j \bmod n$. Somit ist Hilfssatz 3.2 bewiesen.

Da laut Hilfssatz 3.2 die n Eckpunkte $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ paarweise verschieden sind, sind diese Eckpunkte alle n Ecken des konvexen n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$; daher liegen keine drei von diesen Eckpunkten auf einer Geraden.

Nun werden wir die wichtigste Eigenschaft unseres Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ nachweisen:

Hilfssatz 3.3: Seien P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1} zwei beliebige Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, die weder zusammenfallen, noch zueinander benachbart sind. Dann schneiden sich die Strecken P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1} echt.

Beweis von Hilfssatz 3.3: Da die Strecken P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1} weder zusammenfallen, noch zueinander benachbart sind, fällt keiner der Punkte P_j und P_{j+1} mit einem der Punkte P_i und P_{i+1} zusammen.

Die beiden Punkte P_i und P_{i+1} sind, wie wir wissen, zwei Ecken unseres n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$, und zwar $P_i = A_{\frac{n-1}{2}i}$ und $P_{i+1} = A_{\frac{n-1}{2}(i+1)}$. Die Spaltungszahlen dieser beiden Ecken sind die beiden Zahlen $\overline{\frac{n-1}{2}(i+1) - \frac{n-1}{2}i} = \overline{\frac{n-1}{2}} = \frac{n-1}{2}$ und $n - \overline{\frac{n-1}{2}(i+1) - \frac{n-1}{2}i} = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Analog sind die Spaltungszahlen der beiden Ecken P_j und P_{j+1} ebenfalls gleich $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$.

Nun zerlegt die Diagonale $P_iP_{i+1} = A_{\frac{n-1}{2}i}A_{\frac{n-1}{2}(i+1)}$ des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ die Ebene in zwei (offene) Halbebenen, und zwar liegen in einer davon $\frac{n-1}{2}$ Seiten des n-Ecks, und in der anderen liegen $\frac{n+1}{2}$ Seiten (denn die Spaltungszahlen der Ecken P_i und P_{i+1} sind $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$). Es ist nicht möglich, daß die Ecken P_j und P_{j+1} beide in *einer* von diesen zwei Halbebenen liegen, denn da sie die Spaltungszahlen $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ haben, müssten dann entweder $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Seiten des n-Ecks zwischen ihnen in der gleichen Halbebene liegen, und dazu kommen noch mindestens zwei Seiten, die diese Ecken P_j und P_{j+1} mit den "Grenz-Ecken" P_i und P_{i+1} verbinden (denn keine von den Ecken P_j und P_{j+1} fällt mit einer der Ecken P_i und P_{i+1} zusammen, d. h. die Ecken P_j und P_{j+1} liegen irgendwo *zwischen* den Ecken P_i und P_{i+1}); insgesamt müssten also mindestens $\frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n+3}{2}$ Seiten des n-Ecks in dieser Halbebene liegen, was im Widerspruch dazu steht, daß in der einen Halbebene nur $\frac{n-1}{2}$ Seiten und in der anderen nur $\frac{n+1}{2}$ Seiten liegen.

Somit liegen die Ecken P_j und P_{j+1} in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden P_iP_{i+1}. Analog zeigt man, daß die Ecken P_i und P_{i+1} in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden P_jP_{j+1} liegen. Somit schneiden sich die Strecken P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1}. Und zwar schneiden sich diese beiden Strecken echt, da sie ja weder zusammenfallen, noch zueinander benachbart sind. Damit ist Hilfssatz 3.3 bewiesen.

Nun ist für jedes ganze i die Zahl d_i definiert als die Anzahl aller Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, welche die Strecke P_iP_{i+1} echt schneiden. Laut Hilfssatz 3.3 sind dies alle n Strecken des Streckenzugs, bis auf die Strecke P_iP_{i+1} selber und die beiden zu ihr benachbarten Strecken. Es sind also insgesamt $n-3$ Strecken; damit haben wir $d_i = n-3$. Nach Hilfssatz 1.1 ist damit

$$d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) = \frac{d_0+d_1+...+d_{n-1}}{2} = \frac{\overbrace{(n-3)+(n-3)+...+(n-3)}^{n \text{ mal}}}{2} = \frac{n\left(n-3\right)}{2}.$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, daß für jeden Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ gilt: $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) \leq \frac{n\left(n-3\right)}{2}$, und ein Beispiel für einen Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ konstruiert, für den $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) = \frac{n\left(n-3\right)}{2}$ gilt. Damit ist $\frac{n\left(n-3\right)}{2}$ der größtmögliche Wert, den die Zahl $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right)$ annehmen kann. Das heißt, $A\left(n\right) = \frac{n\left(n-3\right)}{2}$. Damit ist Aufgabenteil **a)** gelöst.

4. Lösung von Aufgabenteil b)

Nun wenden wir uns dem Aufgabenteil **b)** zu. Wir nehmen also an, die Zahl n sei gerade. Dies hat zur Folge, daß, wenn eine ganze Zahl x gerade ist, auch jede ganze Zahl y, für die $x \equiv y \bmod n$ gilt, gerade sein muß, und entsprechend, wenn eine ganze Zahl x ungerade ist, auch jede ganze Zahl y, für die $x \equiv y \bmod n$ gilt, ungerade sein muß. Daher können wir im folgenden von geraden und ungeraden Indizes (modulo n) sprechen.

4a. Die obere Schranke

Betrachten wir wieder zunächst einen beliebigen Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, für den gilt, daß keine drei von seinen Eckpunkten auf einer Geraden liegen.

Eine Strecke P_iP_{i+1} unseres Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ heiße **groß**, wenn sie alle Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ schneidet. Dann gilt erstmal:

Hilfssatz 4.1: Für jedes ganze i gilt $d_i = n-3$, wenn die Strecke P_iP_{i+1} groß ist, und $d_i \leq n-4$, wenn nicht.

Beweis: Die Zahl d_i ist die Anzahl aller Strecken, die die Strecke P_iP_{i+1} schneiden, außer der Strecke P_iP_{i+1} selber sowie den beiden zu ihr benachbarten Strecken. Da der Streckenzug n Strecken hat und 3 davon nicht gezählt werden, kann die Zahl d_i also höchstens gleich $n-3$ sein.

Wenn die Strecke P_iP_{i+1} groß ist, dann ist die Zahl d_i auch tatsächlich gleich $n-3$, denn sie wird von allen Strecken geschnitten. Wenn die Strecke P_iP_{i+1} nicht groß ist, dann wird sie von einer der Strecken nicht geschnitten, und zwar ist dies weder die Strecke P_iP_{i+1} selber, noch eine der beiden zu ihr benachbarten Strecken (denn diese Strecken schneiden die Strecke P_iP_{i+1} immer) - also muss es eine der übrigen $n-3$ Strecken sein, und damit ist die Zahl d_i höchstens gleich $(n-3)-1 = n-4$.

Damit ist Hilfssatz 4.1 bewiesen.

Nun zeigen wir einen wesentlicheren Sachverhalt:

Hilfssatz 4.2: Der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ kann höchstens zwei große Strecken enthalten.

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Nehmen wir an, der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ enthalte mindestens drei paarweise verschiedene große Strecken. Seien diese Strecken P_iP_{i+1}, P_jP_{j+1} und P_kP_{k+1}. Wären diese drei Strecken P_iP_{i+1}, P_jP_{j+1} und P_kP_{k+1} paarweise benachbart, dann würden sie ein Dreieck bilden, und damit wäre unser gesamter Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ ein Dreieck; dies kann aber nicht sein, denn die Anzahl n der Strecken muß gerade sein. Also können die Strecken P_iP_{i+1}, P_jP_{j+1} und P_kP_{k+1} nicht paarweise benachbart sein; das heißt, mindestens zwei von diesen Strecken sind nicht benachbart. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß die Strecken P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1} nicht benachbart sind. Folglich schneiden sich die Strecken P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1} in einem inneren Punkt[1]. Sei O dieser innere Schnittpunkt der Strecken P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1}.

Da die Strecke P_iP_{i+1} groß ist, muß sie jede Strecke des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ schneiden; das heißt, für jedes ganze u gilt: Die Strecke P_iP_{i+1} schneidet die Strecke P_uP_{u+1}. Daher liegen die Punkte P_u und P_{u+1} in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden P_iP_{i+1} (außer dem Fall, wenn einer der Punkte P_u und P_{u+1} mit einem der Punkte P_i und P_{i+1} übereinstimmt; dann liegt dieser Punkt auf der Geraden P_iP_{i+1}). Wir erkennen also eine grundlegende Eigenschaft großer Strecken: Zwei benachbarte Ecken P_u und P_{u+1} des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ liegen in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden P_iP_{i+1} (außer dem Fall, wenn eine von diesen beiden Ecken mit einem der Punkte P_i und P_{i+1} übereinstimmt).

Nun führen wir eine vereinfachende Bezeichnungsweise ein:

Unter den Zahlen i und $i+1$ ist eine ungerade und eine gerade. Sei i_1 die ungerade und i_2 die gerade unter diesen Zahlen, und sei $I_1 = P_{i_1}$ und $I_2 = P_{i_2}$. Dann sind die Punkte I_1 und I_2 nichts anderes als die Punkte P_i und P_{i+1}, womöglich in anderer Reihenfolge. Folglich ist die Strecke I_1I_2 nichts anderes als die Strecke P_iP_{i+1}.

Analog bezeichnen wir mit j_1 die ungerade und mit j_2 die gerade unter den Zahlen j und $j+1$, und setzen $J_1 = P_{j_1}$ und $J_2 = P_{j_2}$. Dann ist die Strecke J_1J_2 nichts anderes als die Strecke P_jP_{j+1}. Genauso bezeichnen wir mit k_1 die ungerade und mit k_2 die gerade unter den Zahlen k und $k+1$, und setzen $K_1 = P_{k_1}$ und $K_2 = P_{k_2}$. Dann ist die Strecke K_1K_2 nichts anderes als die Strecke P_kP_{k+1}.

Nun betrachten wir die beiden abgeschlossenen Halbebenen, in die die Gerade P_iP_{i+1} die Ebene unterteilt. Von diesen beiden Halbebenen bezeichnen wir diejenige, die den Punkt P_{i+2} enthält, mit E_i^+, wenn die Zahl i gerade ist, und mit E_i^-, wenn die Zahl i ungerade ist.[2] Die andere von den beiden Halbebenen bezeichnen wir entsprechend mit E_i^-, wenn die Zahl i gerade ist, und mit E_i^+, wenn die Zahl i ungerade ist. Nun werden wir zeigen:

Hilfsaussage 4.2.1: Für jede ganze Zahl r gilt: Wenn r gerade ist, dann gilt $P_r \in E_i^+$, und wenn r ungerade ist, dann gilt $P_r \in E_i^-$.

Beweis von Hilfsaussage 4.2.1: Wir beweisen Hilfsaussage 4.2.1 durch vollständige Induktion nach r. Dabei reicht es aus, nur die Zahlen

$$r \in \{i+2;\ i+3;\ ...;\ i+n-1;\ i+n;\ i+n+1\}$$

zu betrachten, weil wir in den Indizes modulo n rechnen.

[1] Denn sie schneiden sich, da sie als große Strecken jede Strecke schneiden, und der Schnittpunkt ist ein innerer Punkt beider Strecken, denn wäre er Endpunkt beider Strecken, dann würden diese Strecken zueinander benachbart sein, was wir ja ausgeschlossen haben, und wäre er innerer Punkt einer Strecke und Endpunkt der anderen, dann würde damit dieser Endpunkt mit zwei anderen Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ auf einer Geraden liegen, doch laut Aufgabenstellung dürfen drei Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ nicht auf einer Geraden liegen.

[2] Diese Halbebene ist eindeutig definiert, denn der Punkt P_{i+2} liegt nicht auf der Geraden P_iP_{i+1}.

Induktionsanfang: Für $r = i + 2$ ist alles klar: Wenn die Zahl $i + 2$ gerade ist, dann ist auch i gerade, und damit liegt der Punkt P_{i+2} in der Halbebene E_i^+; wenn die Zahl $i + 2$ ungerade ist, dann ist auch i ungerade, und damit liegt der Punkt P_{i+2} in der Halbebene E_i^-. Somit ist für $r = i + 2$ die Hilfsaussage 4.2.1 erfüllt.

Induktionsschritt: Angenommen, Hilfsaussage 4.2.1 gelte für eine ganze Zahl r mit $i + 2 \leq r < i + n + 1$. Das heißt, es gilt $P_r \in E_i^+$, falls r gerade ist, und $P_r \in E_i^-$, falls r ungerade ist. Wir müssen zeigen, daß Hilfsaussage 4.2.1 auch für die Zahl $r + 1$ gilt, d. h., daß $P_{r+1} \in E_i^+$ gilt, falls $r+1$ gerade ist, und $P_{r+1} \in E_i^-$, falls $r+1$ ungerade ist.

Um dies zu beweisen, unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Die Zahl r ist gerade und $r + 1 < i + n$. Dann ist laut Induktionsannahme $P_r \in E_i^+$. Nun sind die Punkte P_r und P_{r+1} zwei benachbarte Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$. Sie liegen also in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden P_iP_{i+1} (außer dem Fall, wenn eine von ihnen mit einem der Punkte P_i und P_{i+1} übereinstimmt, doch dieser Fall ist wegen $i + 2 \leq r$ und $r + 1 < i + n$ ausgeschlossen). Da $P_r \in E_i^+$ ist, muß also $P_{r+1} \in E_i^-$ sein. Da andererseits die Zahl r gerade ist, muß die Zahl $r+1$ ungerade sein. Somit ist die Zahl $r+1$ ungerade, und $P_{r+1} \in E_i^-$; folglich ist Hilfsaussage 4.2.1 für die Zahl $r + 1$ im Fall 1 gültig.

Fall 2: Die Zahl r ist ungerade und $r + 1 < i + n$. Dann ist laut Induktionsannahme $P_r \in E_i^-$. Analog zum Fall 1 zeigen wir, daß dann $P_{r+1} \in E_i^+$ ist, und da dabei $r + 1$ gerade ist (denn r ist ungerade), ist dadurch Hilfsaussage 4.2.1 für die Zahl $r + 1$ im Fall 2 als gültig nachgewiesen.

Fall 3: Es gilt $r + 1 \geq i + n$. Wegen $r < i + n + 1$, also $r + 1 < i + n + 2$ ist in diesem Fall die Zahl $r + 1$ eine von den Zahlen $i + n$ und $i + n + 1$. Damit ist entweder $P_{r+1} = P_{i+n} = P_i$ oder $P_{r+1} = P_{i+n+1} = P_{i+1}$ (denn wir rechnen in den Indizes modulo n); somit ist der Punkt P_{r+1} einer der beiden Punkte P_i und P_{i+1}, und liegt daher in *beiden* abgeschlossenen Halbebenen, in die die Gerade P_iP_{i+1} die Ebene unterteilt, also sowohl in der Halbebene E_i^+, als auch in der Halbebene E_i^-. Damit ist Hilfsaussage 4.2.1 für die Zahl $r + 1$ im Fall 3 wahr.

Damit ist Hilfsaussage 4.2.1 für die Zahl $r + 1$ in allen Fällen gezeigt, d. h. der Induktionsschritt ist komplett. Somit ist Hilfsaussage 4.2.1 bewiesen.

Da die Zahl j_1 ungerade ist, muß nach Hilfsaussage 4.2.1 der Punkt $J_1 = P_{j_1}$ in der Halbebene E_i^- bezüglich der Geraden I_1I_2 liegen. Analog liegt der Punkt K_1 in der Halbebene E_i^-, und die Punkte J_2 und K_2 liegen in der Halbebene E_i^+. Ferner können wir analog zu den Halbebenen E_i^+ und E_i^- zwei abgeschlossene Halbebenen E_j^+ und E_j^- bezüglich der Geraden J_1J_2 definieren, sodaß die Punkte I_1 und K_1 in der Halbebene E_j^- und die Punkte I_2 und K_2 in der Halbebene E_j^+ liegen[3]. Schließlich können wir genauso zwei abgeschlossene Halbebenen E_k^+ und E_k^- bezüglich der Geraden K_1K_2 definieren, sodaß die Punkte I_1 und J_1 in der Halbebene E_k^- und die Punkte I_2 und J_2 in der Halbebene E_k^+ liegen.

[3] Die Definition dieser Halbebenen ist die gleiche wie bei den Halbebenen E_i^+ und E_i^-, nur muss man überall den Index i durch den Index j ersetzen. Analog zum Beweis von Hilfsaussage 4.2.1 ergibt sich dann, daß für jedes gerade r gilt: $P_r \in E_j^+$, und für jedes ungerade r gilt: $P_r \in E_j^-$.

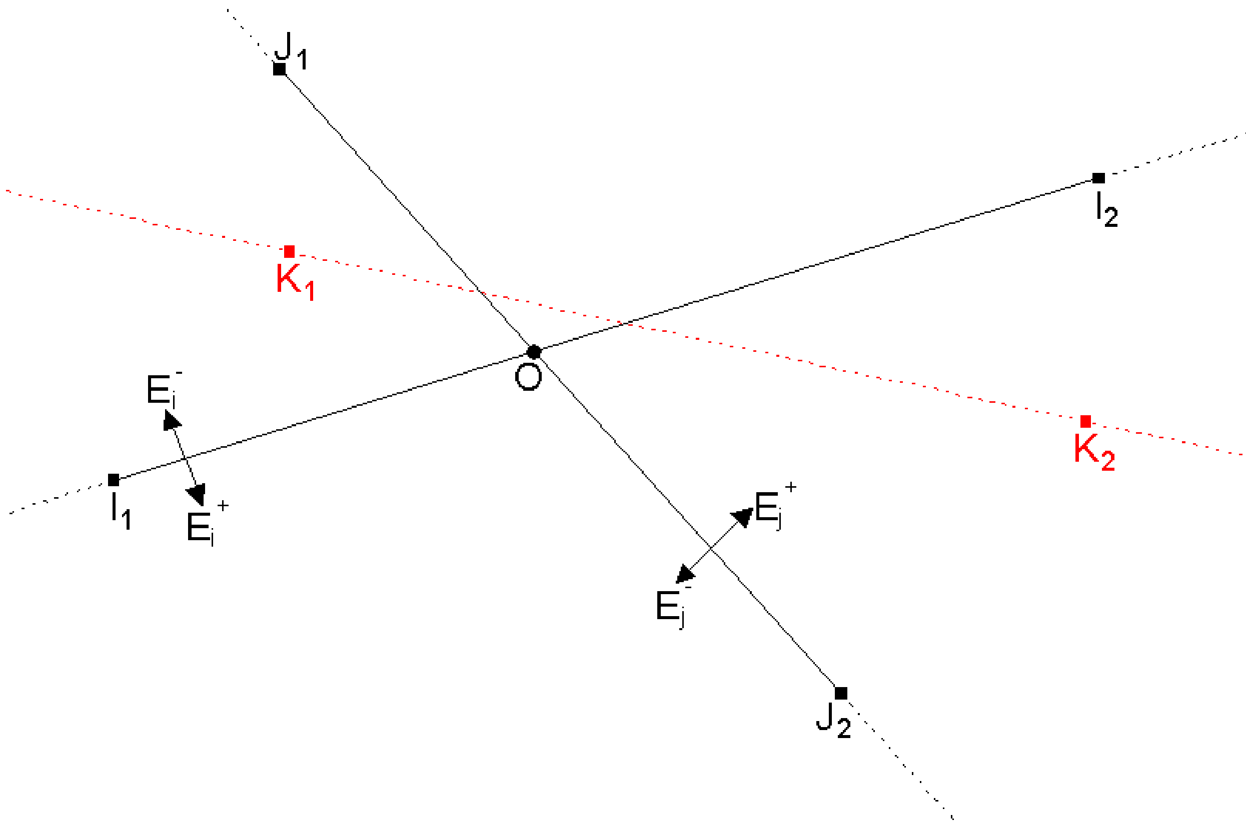

Fig. 2

(Siehe Fig. 2.) Wie wir wissen, schneiden sich die Strecken $I_1I_2 = P_iP_{i+1}$ und $J_1J_2 = P_jP_{j+1}$ in einem inneren Punkt O. Die Geraden I_1I_2 und J_1J_2 zerlegen die Ebene in vier Winkelfelder, nämlich die Winkelfelder I_1OJ_1, J_1OI_2, I_2OJ_2 und J_2OI_1. Das Winkelfeld I_1OJ_1 ist der Schnitt der Halbebenen E_i^- und E_j^- (denn die Halbebene E_i^- hat die Gerade $I_1I_2 = I_1O$ als Grenzgerade und enthält den Punkt J_1, und die Halbebene E_j^- hat die Gerade $J_1J_2 = J_1O$ als Grenzgerade und enthält den Punkt I_1); damit liegt der Punkt K_1 in diesem Winkelfeld (denn dieser Punkt K_1 liegt in beiden Halbebenen E_i^- und E_j^-). Folglich schneidet die Gerade K_1K_2 das Winkelfeld I_1OJ_1 (und zwar schneidet sie dieses Winkelfeld in mehr als nur seinem Scheitelpunkt O - denn der Punkt K_1 kann nicht mit dem Punkt O zusammenfallen, da er sonst mit den Punkten I_1 und I_2 auf einer Geraden liegen würde, was der Aufgabenstellung widerspricht). Analog zeigt man, daß die Gerade K_1K_2 das Winkelfeld I_2OJ_2 schneidet (ebenfalls in mehr als nur dem Punkt O). Nun liegen die Punkte I_1 und J_2 in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden K_1K_2 (und zwar liegt der Punkt I_1 in der Halbebene E_k^- und der Punkt J_2 in der Halbebene E_k^+); also schneidet die Gerade K_1K_2 die Strecke I_1J_2. Damit schneidet die Gerade K_1K_2 das Winkelfeld J_2OI_1 (und zwar ebenfalls in mehr als nur seinem Scheitelpunkt O - denn die Strecke I_1J_2 geht nicht durch den Punkt O). Analog schneidet die Gerade K_1K_2 das Winkelfeld J_1OI_2 (gleichfalls in mehr als nur seinem Scheitelpunkt O).

Somit schneidet die Gerade K_1K_2 alle vier Winkelfelder I_1OJ_1, J_1OI_2, I_2OJ_2 und J_2OI_1. Dies ist aber nur möglich, wenn diese Gerade K_1K_2 mit einer der beiden Geraden I_1I_2 und J_1J_2 zusammenfällt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß die Gerade K_1K_2 mit der Geraden I_1I_2 zusammenfällt. Mit anderen Worten: Die Gerade P_kP_{k+1} fällt mit der Geraden P_iP_{i+1} zusammen. Daher muss auch die *Strecke* P_kP_{k+1} mit der *Strecke* P_iP_{i+1} zusammenfallen (denn zwei verschiedene Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ können nicht entlang einer gemeinsamen Geraden verlaufen, weil sonst mindestens drei Ecken des Streckenzugs auf einer Geraden liegen würden, und das ist ja laut Aufgabenstellung ausgeschlossen). Dies führt aber zu einem Widerspruch, da wir die Strecken P_iP_{i+1}, P_jP_{j+1} und P_kP_{k+1} als drei *paarweise verschiedene* große Strecken definiert haben.

Somit muss unsere Annahme, der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ enthalte mindestens drei paarweise verschiedene große Strecken, falsch sein, und Hilfssatz 4.2 ist damit bewiesen.

Aus Hilfssatz 4.1 und Hilfssatz 4.2 folgt, daß die Summe $d_0+d_1+...+d_{n-1}$ höchstens zwei Summanden enthält, die gleich $n-3$ sind, und alle anderen (mindestens $n-2$) Summanden $\leq n-4$ sind (denn der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ enthält nach Hilfssatz 4.2 höchstens zwei große Strecken, die dann laut Hilfssatz 4.1 jeweils einen Summanden gleich $n-3$ ergeben, und alle anderen Strecken ergeben nach Hilfssatz 4.1 Summanden $\leq n-4$). Das heißt, in der Summe $d_0+d_1+...+d_{n-1}$ sind alle Summanden $\leq n-3$, und mindestens $n-2$ von diesen Summanden sind sogar $\leq n-4$.

Wir haben also

$$\begin{aligned} d_0+d_1+...+d_{n-1} &\leq (n-3)+(n-3)+\overbrace{(n-4)+(n-4)+...+(n-4)}^{n-2 \text{ mal}} \\ &= 2(n-3)+(n-2)(n-4) = (2n-6)+\left(n^2-6n+8\right) = n^2-4n+2, \end{aligned}$$

nach Hilfssatz 1.1 also

$$d(P_0P_1...P_{n-1}P_0) = \frac{d_0+d_1+...+d_{n-1}}{2} \leq \frac{n^2-4n+2}{2} = \frac{n(n-4)+2}{2} = \frac{n(n-4)}{2}+1.$$

4b. Die untere Schranke

Nun betrachten wir wieder unser konvexes n-Eck $A_0A_1...A_{n-1}$. Wir definieren nun einen Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ folgendermaßen:

Für jedes ganze i mit $0 \leq i < n$ setzen wir

$$\boxed{P_i = \begin{cases} A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)i}, & \text{wenn } 0 \leq i < \dfrac{n}{2}; \\ A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)i}, & \text{wenn } \dfrac{n}{2} \leq i < n. \end{cases}}$$

(Dies ist möglich, denn da n gerade ist, ist $\frac{n}{2}$ eine ganze Zahl.) Damit haben wir alle Ecken P_0, P_1, ..., $P_{\frac{n}{2}-1}$, $P_{\frac{n}{2}}$, $P_{\frac{n}{2}+1}$, ..., P_{n-1} des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ festgelegt.

Wir zeigen zunächst:

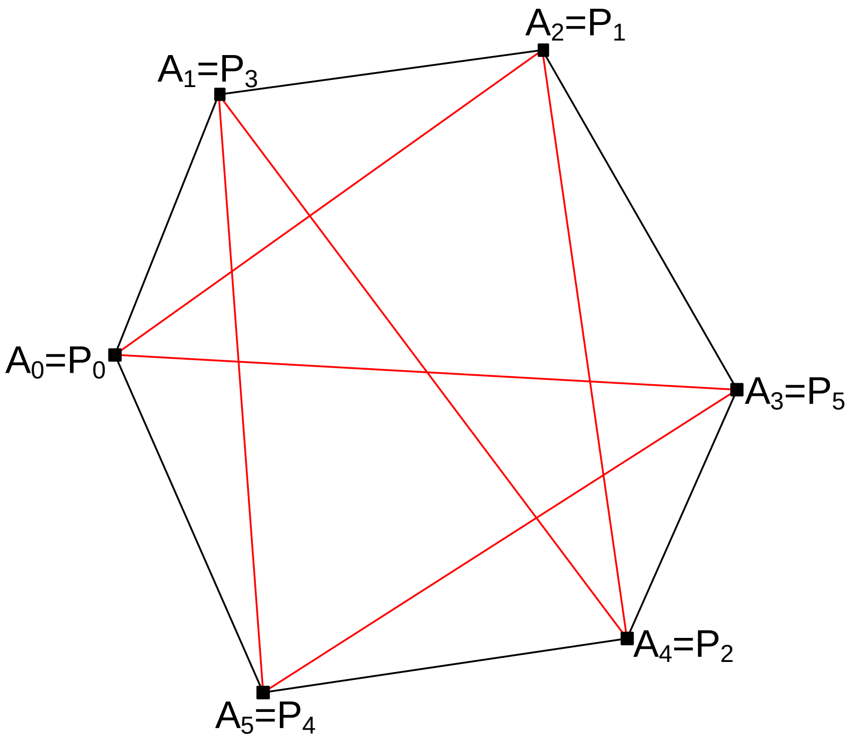

Fig. 3

Hilfssatz 4.3: Die Ecken P_0, P_1, ..., P_{n-1} des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ sind paarweise verschieden; mit anderen Worten: Gilt für zwei ganze Zahlen i und j die Gleichung $P_i = P_j$, dann muß $i \equiv j \bmod n$ sein.

Beweis: Angenommen, für zwei ganze Zahlen i und j gilt $P_i = P_j$. Betrachten wir die Reste $\overline{i}$ und $\overline{j}$ der Zahlen i bzw. j bei der Division durch n. Dann ist $0 \leq \overline{i} < n$ und $0 \leq \overline{j} < n$.

Da wir in den Indizes modulo n rechnen, gilt $P_i = P_{\overline{i}}$ und $P_j = P_{\overline{j}}$; aus $P_i = P_j$ folgt also $P_{\overline{i}} = P_{\overline{j}}$.

Nun unterscheiden wir vier Fälle:

Fall 1: Es gilt $0 \leq \overline{i} < \frac{n}{2}$ **und** $0 \leq \overline{j} < \frac{n}{2}$. Dann ist $P_{\overline{i}} = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i}}$ und $P_{\overline{j}} = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}}$. Aus $P_{\overline{i}} = P_{\overline{j}}$ folgt also $A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i}} = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}}$. Daher ist $\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} \equiv \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j} \bmod n$. Somit ist die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} - \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}$ durch n teilbar. Damit ist diese Zahl auch durch $\frac{n}{2}$ teilbar. Doch die Zahlen $\frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2}$ sind teilerfremd (als zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen). Da die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} - \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j} = \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\overline{i}-\overline{j}\right)$ durch $\frac{n}{2}$ teilbar ist, muß also auch die Zahl $\overline{i}-\overline{j}$ durch $\frac{n}{2}$ teilbar sein. Doch wegen $0 \leq \overline{i} < \frac{n}{2}$ und $0 \leq \overline{j} < \frac{n}{2}$ ist $-\frac{n}{2} < \overline{i}-\overline{j} < \frac{n}{2}$; die Zahl $\overline{i}-\overline{j}$ kann also nur dann durch $\frac{n}{2}$ teilbar sein, wenn sie 0 ist. Also ist $\overline{i}-\overline{j} = 0$, daher $\overline{i} = \overline{j}$. Das heißt, die Zahlen i und j lassen den gleichen Rest bei Division durch n. Mit anderen Worten: $i \equiv j \bmod n$.

Fall 2: Es gilt $0 \leq \overline{i} < \frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2} \leq \overline{j} < n$. Dann ist $P_{\overline{i}} = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i}}$ und $P_{\overline{j}} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}}$. Aus $P_{\overline{i}} = P_{\overline{j}}$ folgt also $A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i}} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}}$, also $\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} \equiv 1 - \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j} \bmod n$. Das heißt, die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} - \left(1 - \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}\right)$ ist durch n teilbar. Nun ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} - \left(1 - \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}\right) &= \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} - 1 + \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j} \\ &= \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\overline{i}+\overline{j}\right) - 1.\end{aligned}$$

Also muß die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\overline{i}+\overline{j}\right) - 1$ durch n teilbar sein. Wäre die Zahl $\frac{n}{2}-1$ gerade, dann wäre die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\overline{i}+\overline{j}\right) - 1$ ungerade, und könnte daher nicht durch n teilbar sein (weil n gerade ist, und eine ungerade Zahl nie durch eine gerade teilbar ist). Daher muß die Zahl $\frac{n}{2}-1$ ungerade sein. Folglich ist die Zahl $\frac{n}{2}$ gerade. Wir können sie also in der Form $\frac{n}{2} = 2w$ darstellen, wobei w eine natürliche Zahl ist. Dann ist $n = 4w$. Somit ist

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)+1 = \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right) + 1 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = (2w)^2 = 4w^2 = w \cdot 4w = w \cdot n.$$

Damit ist die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)+1$ durch n teilbar. Doch auch die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\overline{i}+\overline{j}\right)-1$ ist durch n teilbar. Damit ist die Summe dieser beiden Zahlen, also die Zahl

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)+1\right) + \left(\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\overline{i}+\overline{j}\right)-1\right) \\ = \; &\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) + \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\overline{i}+\overline{j}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\overline{i}+\overline{j}\right)\right),\end{aligned}$$

auch durch n teilbar. Nun sind die Zahlen $\frac{n}{2}-1$ und n teilerfremd (denn wegen $\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)+1 = w \cdot n$ ist $1 = w \cdot n - \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)$, und somit müsste ein gemeinsamer Teiler der Zahlen $\frac{n}{2}-1$ und n auch die Zahl 1 teilen). Da die Zahl $\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\overline{i}+\overline{j}\right)\right)$ durch n teilbar ist, muß also die Zahl $\left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\overline{i}+\overline{j}\right)$ durch n teilbar sein. Nun haben wir aber $0 \leq \overline{i} < \frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2} \leq \overline{j} < n$; wegen der Ganzzahligkeit der Zahlen $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\frac{n}{2}$ und n können wir diese beiden Ungleichungen zu $0 \leq \overline{i} \leq \frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2} \leq \overline{j} \leq n-1$ verschärfen. Addition dieser beiden Ungleichungsketten ergibt $0 + \frac{n}{2} \leq \overline{i}+\overline{j} \leq \left(\frac{n}{2}-1\right)+(n-1)$, also $\frac{n}{2} \leq \overline{i}+\overline{j} \leq \frac{3n}{2}-2$. Addieren wir nun noch $\frac{n}{2}+1$ zu dieser Ungleichungskette, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n}{2} &\leq \left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\overline{i}+\overline{j}\right) \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\frac{3n}{2}-2\right), \qquad \text{also} \\ n+1 &\leq \left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\overline{i}+\overline{j}\right) \leq 2n-1.\end{aligned}$$

Daher kann die Zahl $\left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\overline{i}+\overline{j}\right)$ nicht durch n teilbar sein, und wir haben einen Widerspruch erhalten. Somit kann Fall 2 nie eintreten.

Fall 3: Es gilt $\frac{n}{2} \leq \overline{i} < n$ **und** $0 \leq \overline{j} < \frac{n}{2}$. Dieser Fall geht in Fall 2 über, wenn man die Zahlen i und j vertauscht, und kann damit auf die gleiche Weise wie Fall 2 zum Widerspruch geführt werden.

Fall 4: Es gilt $\frac{n}{2} \leq \overline{i} < n$ **und** $\frac{n}{2} \leq \overline{j} < n$. Dann ist $P_{\overline{i}} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i}}$ und $P_{\overline{j}} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}}$. Aus $P_{\overline{i}} = P_{\overline{j}}$ folgt also $A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i}} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j}}$. Daher ist $1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} \equiv 1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j} \bmod n$, also $\left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{i} \equiv \left(\frac{n}{2}-1\right)\overline{j} \bmod n$. Daraus folgt wie im Fall 1, daß die Zahl $\overline{i}-\overline{j}$ durch $\frac{n}{2}$ teilbar ist. Doch wegen $\frac{n}{2} \leq \overline{i} < n$ und $\frac{n}{2} \leq \overline{j} < n$ ist $-\frac{n}{2} < \overline{i}-\overline{j} < \frac{n}{2}$; die Zahl $\overline{i}-\overline{j}$ kann also nur dann durch $\frac{n}{2}$ teilbar sein, wenn sie 0 ist. Also ist $\overline{i}-\overline{j}=0$, daher $\overline{i}=\overline{j}$. Das heißt, die Zahlen i und j lassen den gleichen Rest bei Division durch n. Mit anderen Worten: $i \equiv j \bmod n$.

Wir haben also gezeigt, daß in den Fällen 1 und 4 die Kongruenz $i \equiv j \bmod n$ gilt, während die Fälle 2 und 3 nicht eintreten können. Also muß $i \equiv j \bmod n$ gelten, und damit ist Hilfssatz 4.3 bewiesen.

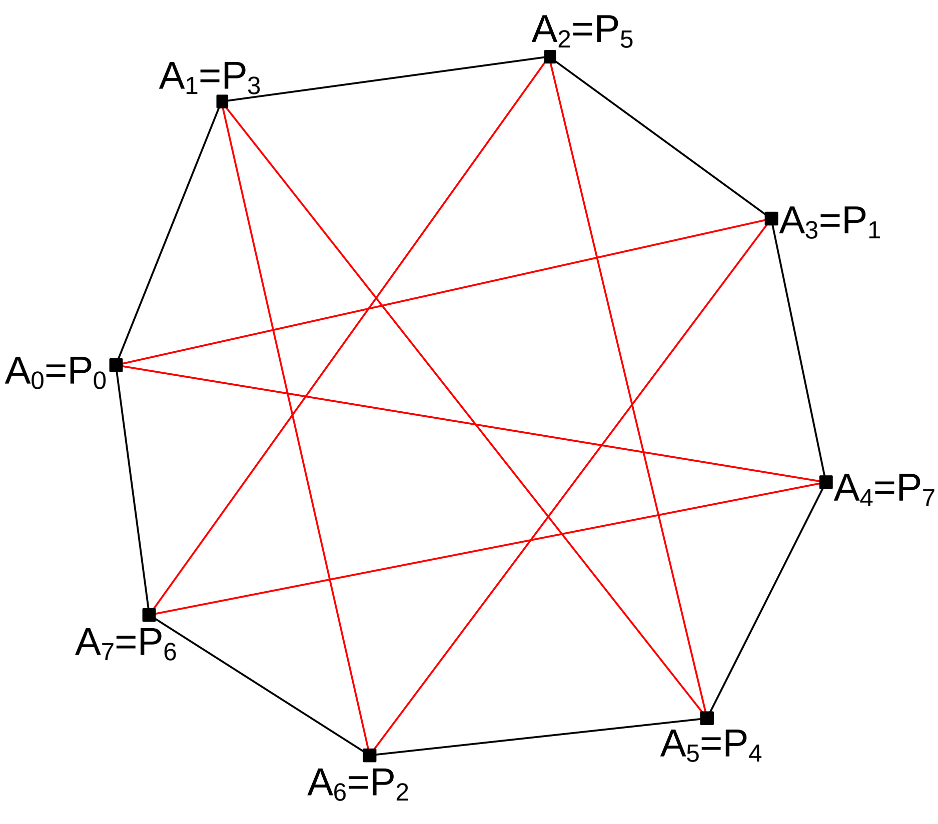

Fig. 4

Da laut Hilfssatz 4.3 die n Eckpunkte $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ paarweise verschieden sind, sind diese Eckpunkte alle n Ecken des konvexen n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$; daher liegen keine drei von diesen Eckpunkten auf einer Geraden.

[Fig. 3 zeigt den Fall $n = 6$, und Fig. 4 zeigt den Fall $n = 8$. Der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ wird jeweils von den roten Strecken gebildet.]

Nun zeigen wir die Haupteigenschaft unseres Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$:

Hilfssatz 4.4: Sei i eine ganze Zahl mit $0 \leq i < n$. Dann gilt $d_i = n-3$, wenn $i = \frac{n}{2} - 1$ oder $i = n-1$ ist, und sonst $d_i \geq n-4$. [4]

Beweis: Zuerst berechnen wir die Spaltungszahlen derjenigen Ecken des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$, die durch eine Strecke des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ verbunden sind.

- Ist i eine ganze Zahl mit $0 \leq i < \frac{n}{2} - 1$, dann gilt $P_i = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)i}$ (denn $0 \leq i < \frac{n}{2}$) und $P_{i+1} = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)(i+1)}$ (denn $0 \leq i+1 < \frac{n}{2}$). Daher sind die Spaltungszahlen der Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ die zwei Zahlen

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{n}{2}-1\right)(i+1) - \left(\frac{n}{2}-1\right)i} &= \overline{\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{2}-1 \qquad\qquad \text{und} \\
n - \overline{\left(\frac{n}{2}-1\right)(i+1) - \left(\frac{n}{2}-1\right)i} &= n - \left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{n}{2}+1.
\end{aligned}$$

- Ist $i = \frac{n}{2} - 1$, dann gilt $P_i = P_{\frac{n}{2}-1} = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)} = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}$ (denn $0 \leq \frac{n}{2} - 1 < \frac{n}{2}$) und $P_{i+1} = P_{\left(\frac{n}{2}-1\right)+1} = P_{\frac{n}{2}} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}}$ (weil $\frac{n}{2} \leq \frac{n}{2} < n$). Damit sind die Spaltungszahlen der beiden Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ gleich

$$\begin{aligned}
\overline{\left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2} &= \overline{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2} \\
&= \overline{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)} = \overline{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)} \\
&= \overline{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(-1)} \qquad\qquad \text{(denn wir rechnen mit Resten modulo } n) \\
&= \overline{1+\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \overline{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \qquad\qquad \text{und} \\
n - \overline{\left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2} &= n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

- Ist i eine ganze Zahl mit $\frac{n}{2} \leq i < n-1$, dann gilt $P_i = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)i}$ (denn $\frac{n}{2} \leq i < n$) und $P_{i+1} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(i+1)}$ (denn $\frac{n}{2} \leq i+1 < n$). Daher sind die Spaltungszahlen der Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ die zwei Zahlen

$$\begin{aligned}
\overline{\left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(i+1)\right) - \left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)i\right)} &= \overline{\left(\frac{n}{2}-1\right)i - \left(\frac{n}{2}-1\right)(i+1)} \\
&= \overline{-\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \overline{n-\left(\frac{n}{2}-1\right)} \qquad\qquad \text{(wir rechnen ja mit Resten modulo } n) \\
&= \overline{\frac{n}{2}+1} = \frac{n}{2}+1 \qquad\qquad \text{und} \\
n - \overline{\left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(i+1)\right) - \left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)i\right)} &= n - \left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}-1.
\end{aligned}$$

[4] In Wirklichkeit gilt sonst sogar $d_i = n-4$, aber dies ist für uns irrelevant.

- Ist $i = n-1$, dann gilt $P_i = P_{n-1} = A_{1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)}$ (denn $\frac{n}{2} \leq n-1 < n$) und $P_{i+1} = P_{(n-1)+1} = P_n = P_0 = A_{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 0} = A_0$ (weil $0 \leq 0 < \frac{n}{2}$). Damit sind die Spaltungszahlen der beiden Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ gleich

$$\begin{aligned}
\overline{0-\left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)\right)} &= \overline{-1+\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)} \\
&= \overline{-1+\left(\frac{n}{2}-1\right)(-1)} \qquad \text{(denn wir rechnen mit Resten modulo } n\text{)} \\
&= \overline{-1-\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \overline{-\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \qquad \text{und} \\
n-\overline{0-\left(1-\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)\right)} &= n-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Da zwei beliebige benachbarte Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ die Form P_i und P_{i+1} haben, wobei i eine ganze Zahl ist, für die entweder $0 \leq i < \frac{n}{2}-1$, oder $i = \frac{n}{2}-1$, oder $\frac{n}{2} \leq i < n-1$, oder $i = n-1$ gilt, erhalten wir damit: Zwei benachbarte Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ haben entweder die Spaltungszahlen $\frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2}+1$, oder die Spaltungszahlen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$.

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis von Hilfssatz 4.4:

Sei P_jP_{j+1} eine beliebige Strecke von unserem Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, die weder mit der Strecke P_iP_{i+1} zusammenfällt noch zu ihr benachbart ist. Das heißt: Keiner der Punkte P_j und P_{j+1} fällt mit einem der Punkte P_i und P_{i+1} zusammen.

Da i eine ganze Zahl mit $0 \leq i < n$ ist, gilt entweder $0 \leq i < \frac{n}{2}-1$, oder $i = \frac{n}{2}-1$, oder $\frac{n}{2} \leq i < n-1$, oder $i = n-1$. Demnach unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gilt eine der Gleichungen $i = \frac{n}{2}-1$ **und** $i = n-1$. Dann sind, gemäß dem Obigen, die Spaltungszahlen der beiden Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ gleich $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$.

Nun zerlegt die Diagonale P_iP_{i+1} die Ebene in zwei (offene) Halbebenen, und zwar liegen in jeder davon $\frac{n}{2}$ Seiten des n-Ecks (denn die Spaltungszahlen der Ecken P_i und P_{i+1} sind $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$). Es ist nicht möglich, daß die Ecken P_j und P_{j+1} beide in *einer* von diesen zwei Halbebenen liegen, denn da sie benachbarte Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ sind, haben sie entweder die Spaltungszahlen $\frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2}+1$, oder die Spaltungszahlen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$; würden sie in einer Halbebene bezüglich der Diagonalen P_iP_{i+1} liegen, müssten dann entweder $\frac{n}{2}-1$ oder $\frac{n}{2}+1$ oder $\frac{n}{2}$ Seiten des n-Ecks zwischen ihnen in der gleichen Halbebene liegen, und dazu kommen noch mindestens zwei Seiten, die diese Ecken P_j und P_{j+1} mit den "Grenz-Ecken" P_i und P_{i+1} verbinden (denn keine von den Ecken P_j und P_{j+1} fällt mit einer der Ecken P_i und P_{i+1} zusammen, d. h. die Ecken P_j und P_{j+1} liegen irgendwo *zwischen* den Ecken P_i und P_{i+1}); insgesamt müssten also mindestens $\left(\frac{n}{2}-1\right)+2 = \frac{n}{2}+1$ Seiten in dieser Halbebene liegen, was im Widerspruch dazu steht, daß in jeder der beiden Halbebenen bezüglich der Geraden P_iP_{i+1} nur $\frac{n}{2}$ Seiten des n-Ecks liegen.

Somit liegen die Ecken P_j und P_{j+1} in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden P_iP_{i+1}. Folglich schneidet die Strecke P_jP_{j+1} die Gerade P_iP_{i+1}. Da die Punkte P_i, P_{i+1}, P_j und P_{j+1} Ecken des konvexen n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ sind, muß der Schnittpunkt der Strecke P_jP_{j+1} mit der Geraden P_iP_{i+1} innerhalb dieses n-Ecks liegen (da er ja innerhalb seiner Diagonalen P_jP_{j+1} liegt), und damit liegt er auch innerhalb der Diagonalen P_iP_{i+1}. Das heißt, die Strecken P_iP_{i+1} und P_jP_{j+1} schneiden sich. Mit anderen Worten: Die Strecke P_iP_{i+1} wird von der Strecke P_jP_{j+1} geschnitten.

Da wir die Strecke P_jP_{j+1} definiert hatten als eine beliebige Strecke von unserem Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, die weder mit der Strecke P_iP_{i+1} zusammenfällt noch zu ihr benachbart ist, ergibt sich also: Die Strecke P_iP_{i+1} wird von jeder Strecke von unserem Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, die weder mit der Strecke P_iP_{i+1} zusammenfällt noch zu ihr benachbart ist, geschnitten. Da es genau $n-3$ solche Strecken gibt (der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ hat n Strecken, und drei davon werden nicht gezählt, nämlich die Strecke P_iP_{i+1} und die beiden zu ihr benachbarten Strecken), gibt es also genau $n-3$ Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, welche die Strecke P_iP_{i+1} schneiden, die Strecke P_iP_{i+1} selber und die beiden zu ihr benachbarten Strecken nicht mitgezählt. Da wir die Anzahl aller solcher Strecken mit d_i bezeichnet haben, ist also $d_i = n-3$.

Fall 2: Es gilt eine der Ungleichungen $0 \leq i < \frac{n}{2}-1$ **und** $\frac{n}{2} \leq i < n-1$. Dann haben, gemäß dem Obigen, die beiden Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ die Spaltungszahlen $\frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2}+1$.

Nun zerlegt die Diagonale P_iP_{i+1} die Ebene in zwei (offene) Halbebenen, und zwar liegen in einer davon $\frac{n}{2}-1$ Seiten des n-Ecks, und in der anderen $\frac{n}{2}+1$ Seiten (denn die Spaltungszahlen der Ecken P_i und P_{i+1} sind $\frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2}+1$). Bezeichnen wir mit H^- die Halbebene, in der $\frac{n}{2}-1$ Seiten des n-Ecks liegen, und mit H^+ die Halbebene, in der $\frac{n}{2}+1$ Seiten des n-Ecks liegen.

Nun nehmen wir an, die Strecke P_jP_{j+1} schneidet die Strecke P_iP_{i+1} nicht. Dann müssen die Ecken P_j und P_{j+1} in der gleichen Halbebene bezüglich der Geraden P_iP_{i+1} liegen (denn würden sie in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden P_iP_{i+1} liegen, könnte man mit dem gleichen Argument wie in Fall 1 schließen, daß die Strecke P_iP_{i+1} von der Strecke P_jP_{j+1} geschnitten wird). Nun hatten wir die beiden Halbebenen, in die die Gerade P_iP_{i+1} die Ebene zerlegt, mit H^+ und H^- bezeichnet; die Ecken P_j und P_{j+1} müssen also beide in *einer* von diesen zwei Halbebenen H^+ und H^- liegen.

Da diese Ecken P_j und P_{j+1} benachbarte Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ sind, haben sie entweder die Spaltungszahlen $\frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2}+1$, oder die Spaltungszahlen $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$; daher müssen entweder $\frac{n}{2}-1$ oder $\frac{n}{2}+1$ oder $\frac{n}{2}$ Seiten des n-Ecks zwischen ihnen in der gleichen Halbebene liegen, und dazu kommen noch mindestens zwei Seiten, die diese Ecken P_j und P_{j+1} mit den "Grenz-Ecken" P_i und P_{i+1} verbinden (denn keine der Ecken P_j und P_{j+1} fällt mit einer der Ecken P_i und P_{i+1} zusammen, d. h. die Ecken P_j und P_{j+1} liegen irgendwo *zwischen* den Ecken P_i und P_{i+1}); insgesamt müssen also mindestens $\left(\frac{n}{2}-1\right)+2 = \frac{n}{2}+1$ Seiten in dieser Halbebene liegen. Daraus folgt, daß diese Halbebene die Halbebene H^+ ist (denn die Halbebene H^- enthält nur $\frac{n}{2}-1$ Seiten des n-Ecks). Da ferner die Halbebene H^+ *genau* $\frac{n}{2}+1$ Seiten des n-Ecks enthält, müssen die Ecken P_j und P_{j+1} Nachbarecken der Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ sein[5], d. h. eine der Ecken P_j und P_{j+1} ist eine Nachbarecke der Ecke P_i, und die andere ist eine Nachbarecke der Ecke P_{i+1}. (Denn sonst würden außer den mindestens $\frac{n}{2}-1$ Seiten des n-Ecks zwischen den Ecken P_j und P_{j+1} mindestens *drei* weitere Seiten hinzukommen, die diese Ecken P_j und P_{j+1} mit den "Grenz-Ecken" P_i und P_{i+1} verbinden, was zur Folge hätte, daß die Halbebene H^+ mindestens $\left(\frac{n}{2}-1\right)+3=\frac{n}{2}+2>\frac{n}{2}+1$ Seiten des n-Ecks enthält, was einen Widerspruch darstellt.)

Wir haben also gezeigt, daß die Ecken P_j und P_{j+1} Nachbarecken der Ecken P_i und P_{i+1} des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ sind und in der Halbebene H^+ liegen. Nun hat die Ecke P_i des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ nur eine Nachbarecke, die in der Halbebene H^+ liegt, und genauso hat die Ecke P_{i+1} nur eine Nachbarecke, die in der Halbebene H^+ liegt. Somit sind die Ecken P_j und P_{j+1} bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt, d. h. die Strecke P_jP_{j+1} ist eindeutig bestimmt. Folglich kann es nur eine Strecke P_jP_{j+1} geben, die die Strecke P_iP_{i+1} nicht schneidet.

Nun ist die Zahl d_i definiert als die Anzahl aller Strecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$, welche die Strecke P_iP_{i+1} echt schneiden. Nun hat der Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ genau n Strecken; wenn wir die Strecke P_iP_{i+1} selber und die beiden zu ihr benachbarten Strecken außer Betracht lassen, haben wir immer noch $n-3$ Strecken; unter diesen kann es laut dem Obigen nur eine geben, die die Strecke P_iP_{i+1} nicht schneidet, und die restlichen mindestens $n-4$ Strecken müssen die Strecke P_iP_{i+1} schneiden, und zwar echt schneiden (denn wir haben die Strecke P_iP_{i+1} selber und die beiden zu ihr benachbarten Strecken ausgeschlossen). Somit ist $d_i \geq n-4$.

Insgesamt haben wir also gezeigt: Wenn eine der Gleichungen $i=\frac{n}{2}-1$ und $i=n-1$ gilt, ist $d_i=n-3$; wenn eine der Ungleichungen $0\leq i<\frac{n}{2}-1$ und $\frac{n}{2}\leq i<n-1$ gilt, ist $d_i\geq n-4$. Damit ist Hilfssatz 4.4 gezeigt.

Gemäß Hilfssatz 1.1 ist damit

$$
\begin{aligned}
& d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right)=\frac{d_0+d_1+...+d_{n-1}}{2} \\
= & \frac{\left(d_0+d_1+...+d_{\frac{n}{2}-2}\right)+d_{\frac{n}{2}-1}+\left(d_{\frac{n}{2}}+d_{\frac{n}{2}+1}+...+d_{n-2}\right)+d_{n-1}}{2} \\
\geq & \frac{\overbrace{(n-4)+(n-4)+...+(n-4)}^{\frac{n}{2}-1\text{ mal}}+(n-3)+\overbrace{(n-4)+(n-4)+...+(n-4)}^{\frac{n}{2}-1\text{ mal}}+(n-3)}{2} \\
= & \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-4)+(n-3)+\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-4)+(n-3)}{2}=\frac{2\cdot\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-4)+(n-3)\right)}{2} \\
= & \frac{2\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-4)+2(n-3)}{2}=\frac{(n-2)(n-4)+2(n-3)}{2}=\frac{\left(n^2-6n+8\right)+(2n-6)}{2} \\
= & \frac{n^2-4n+2}{2}=\frac{n(n-4)+2}{2}=\frac{n(n-4)}{2}+1.
\end{aligned}
$$

[5] Wie schon eingangs gesagt, sind "Nachbarecken" benachbarte Ecken des n-Ecks $A_0A_1...A_{n-1}$ und nicht benachbarte Ecken des Streckenzugs $P_0P_1...P_{n-1}P_0$.

Nach dem Ergebnis von Abschnitt 4a gilt aber die umgekehrte Ungleichung: $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) \leq \frac{n\left(n-4\right)}{2}+1$. Somit muß $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) = \frac{n\left(n-4\right)}{2}+1$ sein.

Insgesamt haben wir also gezeigt, daß für jeden Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ gilt: $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) \leq \frac{n\left(n-4\right)}{2}+1$, und ein Beispiel für einen Streckenzug $P_0P_1...P_{n-1}P_0$ konstruiert, für den $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right) = \frac{n\left(n-4\right)}{2}+1$ gilt. Damit ist $\frac{n\left(n-4\right)}{2}+1$ der größtmögliche Wert, den die Zahl $d\left(P_0P_1...P_{n-1}P_0\right)$ annehmen kann. Das heißt, $A\left(n\right) = \frac{n\left(n-4\right)}{2}+1$. Damit ist Aufgabenteil **b)** gelöst.

Somit ist die Aufgabe vollständig gelöst.