Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 2. Runde, Aufgabe 2

Es sei x eine rationale Zahl.

Man beweise: Es gibt nur endlich viele Tripel $(a;\ b;\ c)$ ganzer Zahlen mit $a < 0$ und $b^2 - 4ac = 5$, für die die Zahl $ax^2 + bx + c$ positiv ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir halten eine rationale Zahl x fest. Jede Behauptung in der folgenden Lösung wird sich auf dieses x beziehen.

Da die Zahl x rational ist, können wir sie in der Form $x = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligen p und q darstellen, wobei $q > 0$ ist.

Ein Tripel $(a;\ b;\ c)$ ganzer Zahlen heiße *gescheit*, wenn $a < 0$, $b^2 - 4ac = 5$ und $ax^2 + bx + c > 0$ ist. Die Aufgabe erfordert es zu zeigen, daß es nur endlich viele gescheite Tripel gibt. Um dies zu zeigen, betrachten wir ein gescheites Tripel $(a;\ b;\ c)$.

Jetzt werden wir eine Fallunterscheidung durchführen, je nachdem, ob $c \geq 0$ oder $c < 0$ ist.

Fall 1: Es ist $c \geq 0$.

In diesem Fall muß auch $c > 0$ gelten, denn im Falle von $c = 0$ würde sich die Gleichung $b^2 - 4ac = 5$ zu $b^2 = 5$ vereinfachen, was aber nicht möglich ist, denn b ist ganz und 5 ist keine Quadratzahl. Somit muß $c \geq 1$ sein (denn c ist eine ganze Zahl). Andererseits ist $a < 0$, also $a \leq -1$ (weil a eine ganze Zahl ist). Aus $c \geq 1$ und $a \leq -1$ folgt $ac \leq (-1) \cdot 1 = -1$, mit Gleichheit nur für $c = 1$ und $a = -1$; das heißt, wenn nicht $c = 1$ und $a = -1$ ist, dann gilt sogar $ac < -1$, also (da ac eine ganze Zahl ist) $ac \leq -2$. Andererseits muss wegen $b^2 - 4ac = 5$ gelten: $5 + 4ac = b^2$. Doch da Quadrate stets nichtnegativ sind, gilt $b^2 \geq 0$; damit wird $5 + 4ac \geq 0$. Wenn aber nicht $c = 1$ und $a = -1$ ist, dann gilt, wie wir bereits gesehen haben, $ac \leq -2$, also $5 + 4ac \leq 5 + 4 \cdot (-2) = 5 - 8 = -3 < 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $5 + 4ac \geq 0$. Somit muß $c = 1$ und $a = -1$ gelten. Aus $b^2 - 4ac = 5$ folgt dann $b^2 = 5 + 4ac = 5 + 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 5 - 4 = 1$, also $b = 1$ oder $b = -1$. Damit ergeben sich für das Zahlentripel $(a;\ b;\ c)$ nur zwei Möglichkeiten: $(a;\ b;\ c) = (-1;\ 1;\ 1)$ oder $(a;\ b;\ c) = (-1;\ -1;\ 1)$. Ob diese Zahlentripel auch wirklich gescheit sind, wissen wir nicht, aber auf jeden Fall sind sie die einzigen Zahlentripel, die dafür in Frage kommen. Damit wissen wir, daß es höchstens zwei - und damit nur endlich viele - gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$ mit $c \geq 0$ gibt.

Fall 2: Es ist $c < 0$.

In diesem Fall verwenden wir die Darstellung $x = \frac{p}{q}$, um die Bedingung $ax^2 + bx + c > 0$ umzuschreiben in der Form $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\frac{p}{q} + c > 0$. Mit anderen Worten: $a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c > 0$. Nach Multiplikation mit der (positiven!) Zahl q^2 wird dies zu $ap^2 + bpq + cq^2 > 0$. Nun ist $ap^2 + bpq + cq^2$ eine ganze Zahl (denn a, b, c, p und q sind ganz); daher ergibt sich daraus $ap^2 + bpq + cq^2 \geq 1$.

Wegen $a < 0$ ist $-4a > 0$. Andererseits haben wir $(2ap + bq)^2 \geq 0$, denn Quadrate sind stets nichtnegativ, und damit

$$\begin{aligned} 5q^2 &\geq 5q^2 - (2ap + bq)^2 = \left(b^2 - 4ac\right) q^2 - (2ap + bq)^2 \\ &= \left(b^2q^2 - 4acq^2\right) - \left(4a^2p^2 + 2 \cdot 2ap \cdot bq + b^2q^2\right) \\ &= -4a^2p^2 - 2 \cdot 2ap \cdot bq - 4acq^2 = -4a^2p^2 - 4abpq - 4acq^2 \\ &= -4a \cdot \left(ap^2 + bpq + cq^2\right) \geq -4a \end{aligned}$$

(denn $ap^2 + bpq + cq^2 \geq 1$ und $-4a > 0$). Damit haben wir $-4a \leq 5q^2$, also $a \geq -\frac{5q^2}{4}$. Andererseits ist $a < 0$. Daher liegt die Zahl a im Intervall $\left[-\frac{5q^2}{4};\ 0\right[$. Da die Zahl a ganz ist, und in einem endlichen Intervall nur endlich viele ganze Zahlen liegen, ergeben sich dadurch für die Zahl a nur endlich viele Möglichkeiten.

Völlig analog können wir für die Zahl c vorgehen: Wegen $c < 0$ ist $-4c > 0$. Andererseits haben wir $(2cq + bp)^2 \geq 0$, denn Quadrate sind stets nichtnegativ, und damit

$$\begin{aligned} 5p^2 &\geq 5p^2 - (2cq + bp)^2 = \left(b^2 - 4ac\right) p^2 - (2cq + bp)^2 \\ &= \left(b^2p^2 - 4acp^2\right) - \left(4c^2q^2 + 2 \cdot 2cq \cdot bp + b^2p^2\right) \\ &= -4acp^2 - 2 \cdot 2cq \cdot bp - 4c^2q^2 = -4cap^2 - 4cbpq - 4c^2q^2 \\ &= -4c \cdot \left(ap^2 + bpq + cq^2\right) \geq -4c \end{aligned}$$

(denn $ap^2 + bpq + cq^2 \geq 1$ und $-4c > 0$). Damit haben wir $-4c \leq 5p^2$, also $c \geq -\frac{5p^2}{4}$. Andererseits ist $c < 0$. Daher liegt die Zahl c im Intervall $\left[-\frac{5p^2}{4};\ 0\right[$. Da die Zahl c ganz ist, und in einem endlichen Intervall nur endlich viele ganze Zahlen liegen, ergeben sich dadurch auch für die Zahl c nur endlich viele Möglichkeiten.

Damit haben wir für die Zahlen a und c jeweils nur endlich viele Möglichkeiten erhalten. Ferner haben wir $b^2 - 4ac = 5$, also $b^2 = 4ac + 5$ und damit $b = \sqrt{4ac+5}$ oder $b = -\sqrt{4ac+5}$; damit existieren für jedes Paar $(a;\ c)$ von Zahlen a und c höchstens zwei Möglichkeiten für eine Zahl b, sodaß das Tripel $(a;\ b;\ c)$ gescheit ist. Da es nur endlich viele Möglichkeiten für die Zahlen a und c gibt, gibt es aber auch nur endlich viele Paare $(a;\ c)$, und somit auch nur endlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$. Damit ist gezeigt, daß es nur endlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$ mit $c < 0$ gibt.

Wir haben also gezeigt, daß es nur endlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$ mit $c \geq 0$ und nur endlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$ mit $c < 0$ gibt. Also gibt es insgesamt nur endlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Anhang

1. In der obigen Lösung haben wir gezeigt, daß es für ein gegebenes rationales x nur endlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$ gibt. Man könnte die Frage aufstellen, ob es für jedes rationale x überhaupt ein gescheites Tripel $(a;\ b;\ c)$ gibt. Diese Frage ist jedoch leicht zu beantworten: Ja, es gibt eins. Es gibt sogar für jedes reelle x ein gescheites Tripel $(a;\ b;\ c)$.

Um ein solches Tripel zu finden, bezeichnen wir mit u die größte ganze Zahl mit $u \leq x$. Dann ist natürlich $u+1>x$, also $x-u<1$. Aus $u \leq x$ folgt aber $x-u \geq 0$. Somit ist $0 \leq x-u<1$.

Nun sei $a=-1$, $b=2u+1$ und $c=1-u-u^2$. Dann sind die Zahlen a, b und c ganz; ferner ist $a<0$ trivial, und

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= (2u+1)^2-4\cdot(-1)\cdot\left(1-u-u^2\right)=\left(4u^2+2\cdot 2u+1\right)+4\cdot\left(1-u-u^2\right) \\ &= \left(4u^2+4u+1\right)+\left(4-4u-4u^2\right)=1+4=5. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= (-1)\,x^2+(2u+1)\,x+\left(1-u-u^2\right)=-x^2+2ux+x+1-u-u^2 \\ &= -\left(x^2-2ux+u^2\right)+(x-u)+1=-(x-u)^2+(x-u)+1. \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq x-u<1$ ist $(x-u)^2<x-u$, also $-(x-u)^2+(x-u)>0$, und damit

$$ax^2+bx+c=-(x-u)^2+(x-u)+1>1>0.$$

Somit ist das Zahlentripel $(a;\ b;\ c)$ gescheit.

2. Eine weitere natürliche Frage, die sich stellt, ist: Wenn für ein rationales x nur endlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$ existieren, kann es dann für irrationale x unendlich viele gescheite Tripel geben?

Die Antwort auf diese Frage ist ebenfalls positiv. Im Folgenden wird ein Beweis dafür skizziert, daß, wenn man für x die irrationale Zahl $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ einsetzt, man dann unendlich viele gescheite Tripel $(a;\ b;\ c)$ konstruieren kann.

Zur Konstruktion solcher Tripel verwenden wir die sogenannte *Lucas-Folge*; dies ist die Folge g_n, die durch die Startwerte $g_0=2$ und $g_1=1$ und die Rekursion $g_{i+2}=g_i+g_{i+1}$ definiert wird. Eine explizite Darstellung der Glieder dieser Folge ergibt sich durch die Formel

$$g_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Für ein beliebiges natürliches n nehme man nun

$$a=-\frac{-3+2g_{4n-1}}{5}; \qquad b=\frac{-3+4g_{4n}}{5}; \qquad c=-\frac{3+2g_{4n+1}}{5}.$$

Dann gilt $b^2-4ac=5$, was man entweder mithilfe der expliziten Formel oder induktiv mit der Rekursionsgleichung nachrechnen kann.

Außerdem sind die Zahlen a, b und c alle ganz, was man ebenfalls leicht nachrechnet (man zeigt induktiv, daß für jedes ganzzahlige $n \geq 0$ gilt: $g_{4n} \equiv 2 \bmod 5$, $g_{4n+1} \equiv 1 \bmod 5$, $g_{4n+2} \equiv 3 \bmod 5$ und $g_{4n+3} \equiv 4 \bmod 5$). Ferner ist $a<0$.

Schließlich ergibt sich als Resultat einer langwierigen Rechnung mithilfe der expliziten Formel für g_n die Identität

$$ax^2+bx+c=5\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n}.$$

Nun ist $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4n} = \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right)^2$ das Quadrat einer reellen Zahl, die nicht 0 ist, und damit > 0; daraus folgt $ax^2 + bx + c > 0$.

Somit ist das Tripel $(a;\ b;\ c)$ gescheit. Da man für jedes natürliche n ein neues solches Tripel erhält, hat man damit für die irrationale Zahl $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ unendlich viele gescheite Tripel gefunden.

3. Die Aufgabe läßt noch einige oberflächliche Erweiterungen zu:

Man kann z. B. die Bedingung, daß die Zahl ax^2+bx+c positiv ist, zu $ax^2+bx+c \geq 0$ schwächen. Dies ist insofern keine bedeutende Änderung, da der Fall $ax^2+bx+c = 0$ für ein rationales x sowieso nicht eintreten kann, weil dieser Fall nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ oder $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ führen würde, doch wegen $b^2 - 4ac = 5$ ist $\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{5}$ irrational, und somit stünde dies im Widerspruch zur Rationalität von x.

Man kann andererseits eine beliebige nichtnegative Zahl N vorgeben und die Bedingung $b^2 - 4ac = 5$ durch die Gleichung $b^2 - 4ac = N$ oder gar durch die Ungleichung $b^2 - 4ac \leq N$ ersetzen. Die Lösung wird dadurch nicht wesentlich komplizierter.

Allerdings kann man im Allgemeinen *nicht beide Erweiterungen gleichzeitig durchführen*, d. h. man kann nicht gleichzeitig die Bedingung, daß die Zahl $ax^2 + bx + c$ positiv ist, durch $ax^2 + bx + c \geq 0$ ersetzen und die Bedingung $b^2 - 4ac = 5$ durch $b^2 - 4ac = N$ oder $b^2 - 4ac \leq N$ ersetzen.