Hopfalgebren und Quantengruppen
[Wintersemester 2008/2009 und Sommersemester 2009]
Vorlesung von Prof. Dr. Hans-Jürgen Schneider
Unautoritative Mitschrift von Darij Grinberg mit Ergänzungen
Version 0.1.99 vom 3. Juli 2018

Übungsblätter zu der Vorlesung:
`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~hanssch/Hopfalgebren.html`
Übungsblätter zu einer anderen Vorlesung über Hopfalgebren:
`http://www.mathematik.uni-marburg.de/~heckenberger/hans.htm`

-1. Anmerkungen (DG)

Dies ist eine **Beta-Version**, die noch nie vollständig korrekturgelesen wurde. **Hinweise auf Fehler oder Verständnisfragen**[1] **sind willkommen!**

TO-DO:

Einführung: fehlt völlig (ich meine die ersten ca. 30 Minuten der Vorlesung).

Kapitel I.1: abgleichen mit Scan pp. 5-6 und pp. 10-12.

Kapitel I: summenlose Sweedler-Notation besser erklären.

Kapitel I: direkte Summe von Coalgebren einführen (Beweise?).

Kapitel I: Wedderburn-Artin-Sätze kompatibel machen.

Kapitel I: Beweis von Beispiel 2.60 (Shufflehopfalgebra) zu Ende führen.

Kapitel II.1: evtl. in Satz $1.4\frac{1}{2}$ Liestruktur auf $\left(A^{+}\diagup\left(A^{+}\right)^{2}\right)^{*}$ einführen, und bei 1.5. Beweis **g)** schöner machen.

Kapitel II.2-4: Einige Beweise brauchen Feinschliff.

Kapitel III.5: Noch nichts sinnvolles drin. Werde vielleicht eines Tages daran weiterschreiben...

Kapitel IV.4-7: Hier fehlt mir ein Teil der Mitschrift.

Ausblick auf Zweites Semester: fehlt größtenteils.

Dank geht an Johannes Flake für eine Mitschrift des 1. Kapitels, und an Katharina Jochemko und Valentin Hans für eine Vielzahl von Fehlerkorrekturen.

[1] bitte an `A@B.com`, wobei `A=darijgrinberg` und `B=gmail`

$\boxed{\textbf{Hinweis an den Leser}}$

Das nachfolgende Skriptum setzt sich zusammen aus einer Mitschrift von Prof. Schneiders Vorlesungen über Hopfalgebren und Quantengruppen auf der einen Seite, und meinen eigenen Materialien auf der anderen. (Das Verhältnis ersterer zu letzteren ist ungefähr 2:1.) Dies führt leider zu einer merkbaren Inhomogenität im Schreibstil (meine Beweise sind in der Regel detaillierter, aber auch deutlich schwerfälliger und weniger optimiert) und einer abenteuerlichen Nummerierung (wenn ich beispielsweise zwei neue Sätze zwischen einem Satz 3.3 und einem Satz 3.4 anfügen wollte, habe ich sie Satz $3.1\frac{1}{3}$ und Satz $3.1\frac{2}{3}$ genannt).

Die Mitschrift von Prof. Schneiders Vorlesungen ist unvollständig (es fehlen: die Einleitung, der Ausblick auf das 2. Semester, Beispiel IV.2.6 und Teile von Abschnitten IV.4, IV.5 und IV.6 und ggfls. später kommende Abschnitte), aber sie ist in sich selbst abgeschlossen (d. h. auf den fehlenden Teilen wird nicht aufgebaut).

Die zum Verständnis des Skriptums benötigten Vorkenntnisse sind:

- **Lineare Algebra**, insbesondere **Tensorprodukte von Vektorräumen**. (Zwar werden in Kapitel I Tensorprodukte von R-Moduln eingeführt, doch diese Einführung ist kurz und nicht wirklich als erste Einleitung geeignet, wenn man nicht bereits Tensorprodukte von Vektorräumen kennt. Ferner wird eine Reihe von Eigenschaften von Tensorprodukten über das gesamte Skriptum hinweg ohne expliziten Verweis verwendet.)

- **Algebra** im Umfang einer 1-Semester-Vorlesung. Vor allem die grundlegenden Eigenschaften von Ringen sind notwendig. Galoistheorie wird eher selten verwendet. Der Satz von Artin-Wedderburn wird allerdings in mehreren verschiedenen Formen gebraucht!

0. Vorbemerkungen

Empfohlene Literatur

Diese Vorlesung folgt nicht exakt einem Buch, aber es werden folgende Bücher zur Begleitlektüre empfohlen:

- Christian Kassel: *Quantum Groups*, New York 1995.
- Jens Carsten Jantzen: *Lectures on Quantum Groups*, Providence 1996.
- George Lusztig: *Introduction to Quantum Groups*, Birkhäuser 2008.
- Anatoli Klimyk, Konrad Schmüdgen: *Quantum Groups and Their Representations*, Berlin/Heidelberg 1997.
- Eiichi Abe: *Hopf Algebras*, Cambridge 1980.
- Susan Montgomery: *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, Providence 1993.
- Moss E. Sweedler: *Hopf Algebras*, New York 1969.

[...]

Notation

Bevor wir zu dem eigentlichen Skript kommen, wollen wir einige Schreibweisen einführen, die in der Literatur nicht einheitlich benutzt, oder benutzt aber nie definiert werden.

- Unter *Ringen* verstehen wir immer Ringe mit 1, die im Allgemeinen nicht kommutativ sein müssen. *Ringhomomorphismen* müssen die 1 auf die 1 abbilden.
- Ist T ein Term, in dem eine Variable x vorkommt, und sind C und D zwei Mengen, dann bezeichnen wir mit

  $$C \to D, \qquad x \mapsto T$$

  die Abbildung $f : C \to D$, die durch $f(\xi) = T[x \diagup \xi]$ für alle $\xi \in C$ definiert ist[2].[3]
  Wenn unmißverständlich klar ist, was C und D sind, können wir diese Abbildung f auch einfach mit $x \mapsto T$ bezeichnen und $C \to D$ weglassen.[4]
  Diese Notation setzt voraus, daß x eine einzelne Variable ist. Doch manchmal verwendet man auch eine gewisse Verallgemeinerung dieser Notation, bei der an

[2] Die Abkürzung $T[x \diagup \xi]$ bedeutet "das, was herauskommt, wenn man jedes Vorkommen von x im Term T durch ξ ersetzt".

[3] *Beispiel:* Die Abbildung

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad n \mapsto n^2$$

ist die Abbildung, die jeder ganzen Zahl ihr Quadrat zuordnet.

[4] Wer den Lambda-Kalkül aus der mathematischen Logik kennt, soll unsere Notation

$$C \to D, \qquad x \mapsto T$$

einfach als Synonym für die Notation $\lambda x.T : C \to D$ verstehen.

die Stelle der Variablen x ein komplizierterer Term S treten kann. Das heißt, wenn man zwei Terme S und T hat (in denen wiederum Variablen vorkommen können), sowie zwei Mengen C und D, dann versteht man unter

$$C \to D, \qquad S \mapsto T$$

eine Abbildung $f : C \to D$, die für jede Variablenbelegung ρ die Bedingung $f(S(\rho)) = T(\rho)$ erfüllt. Diese Definition macht nur Sinn, wenn klar ist, aus welchen Mengen die Variablen im Term S kommen, und wenn $S(\rho) \in C$ und $T(\rho) \in D$ für jede sinnvolle Variablenbelegung ρ ist. Und selbst dann ist eine Abbildung

$$C \to D, \qquad S \mapsto T$$

weder notwendigerweise existent noch notwendigerweise eindeutig. Doch manchmal erhält man Eindeutigkeit, wenn man zusätzliche Eigenschaften von dieser Abbildung verlangt. Ein Beispiel: Die Menge $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. Offensichtlich ist

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad e_i \mapsto 1$$

keine wohldefinierte Abbildung, denn nur ihre Werte auf den Vektoren e_1, e_2, ..., e_n sind vorgegeben, während die restlichen Werte beliebig sein können. Doch die $\mathbb{R}$-*lineare Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad e_i \mapsto 1$$

ist wohldefiniert (d. h. sie existiert und ist eindeutig), denn es gibt genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche $f(e_i) = 1$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ erfüllt.
Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad e_i + e_j \mapsto i - j$$

existiert (für $n > 1$) wiederum nicht, denn es gibt keine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die $f(e_i + e_j) = i - j$ für alle $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ erfüllt. Es gibt auch keine Abbildung

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad n + m \mapsto nm,$$

da eine solche Abbildung 1 in 0 überführen müsste (denn $1 = 1 + 0$ und $1 \cdot 0 = 0$) und 1 in -2 überführen müsste (denn $1 = (-1) + 2$ und $(-1) \cdot 2 = -2$), was einen Widerspruch darstellt. Es ist also klar, daß man jedesmal, wenn man von einer Abbildung

$$C \to D, \qquad S \mapsto T$$

redet, sich bewusst machen muss, warum so eine Abbildung existiert und eindeutig ist (denn es ist alles andere als garantiert).

- Wir werden hin und wieder gewisse Abbildungen mit kan bezeichnen. Welche Abbildung wir damit meinen, wird von Kontext zu Kontext unterschiedlich sein. Die allgemeine Regel ist folgende: Sind U und V zwei Mengen, dann bezeichnen wir mit $\operatorname{kan} : U \to V$ die *naheliegendste* Abbildung von der Menge U in die Menge V. Der Begriff "naheliegend" ist dabei kein formal definierter Begriff,

aber es wird (hoffentlich!) aus dem Kontext klar sein, welche Abbildung wir jeweils meinen. Indem wir die Abbildung mit $\operatorname{kan} : U \to V$ bezeichnen, werden wir uns ihre explizite Beschreibung ersparen; wir werden quasi die Definition dieser Abbildung dem Leser als Übung überlassen. Zwei Beispiele:
Beispiel 1: Ist M eine Menge und ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge M, dann wird die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen der Menge M modulo der Relation $\sim$ als $M\diagup\sim$ bezeichnet. Wenn wir dann von der Abbildung $\operatorname{kan} : M \to M\diagup\sim$ reden, dann meinen wir damit die Abbildung

$$M \to M\diagup\sim, \qquad x \mapsto \left(\text{Äquivalenzklasse des Elementes } x \in M \text{ modulo } \sim\right)$$

(dies ist die Abbildung, die jedes Element $x \in M$ auf seine Äquivalenzklasse modulo $\sim$ abbildet). Es kann zwar auch andere Abbildungen zwischen von der Menge M in die Menge $M\diagup\sim$ geben, aber diese eine Abbildung ist die einzige wirklich naheliegende, und deshalb bezeichnen wir sie mit $\operatorname{kan} : M \to M\diagup\sim$.
Beispiel 2: Sind U, V und W drei Mengen, dann bezeichnen wir mit $\operatorname{kan} : (U \times V) \times W \to U \times (V \times W)$ die naheliegendste Abbildung von $(U \times V) \times W$ nach $U \times (V \times W)$. Dies ist die Abbildung

$$(U \times V) \times W \to U \times (V \times W), \qquad ((u, v), w) \mapsto (u, (v, w)).$$

Bemerkung: Abbildungen, die wir kan nennen, werden immer kanonische Abbildungen sein[5], aber nicht jede kanonische Abbildung kann mit kan bezeichnet werden (denn "kanonisch" heißt noch lange nicht "naheliegend").

- Abbildungen "wissen" immer, von welcher Menge in welche Menge sie gehen. Das heißt, wenn wir von einer Abbildung $f : A \to B$ sprechen, sind nicht nur die Wertepaare $(a, f(a))$ für alle $a \in A$, sondern auch die Mengen A und B Teil der Spezifikation der Abbildung. Beispielsweise ist damit die Abbildung $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht das gleiche wie die Abbildung $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, auch wenn diese beiden Abbildungen auf der gleichen Menge definiert sind und überall die gleichen Werte haben.

- Sind f und g zwei Abbildungen, deren Verkettung $f \circ g$ wohldefiniert ist, dann schreiben wir für diese Verkettung $f \circ g$ gelegentlich auch fg. Ist f eine Abbildung und x ein Objekt, für das $f(x)$ wohldefiniert ist, dann schreiben wir für $f(x)$ gelegentlich auch fx. Diese beiden Notationen (fg für die Verkettung $f \circ g$, und fx für den Wert $f(x)$) können in gewissen Fällen kollidieren; in diesen Fällen werden wir auf diese Notationen verzichten.

- Sind p und q zwei Objekte (Zahlen, Vektoren, Matrizen, Mengen, oder was auch immer), dann definieren wir eine Zahl $\delta_{p,q}$ wie folgt: $\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } p = q; \\ 0, & \text{wenn } p \neq q \end{cases}$.
Normalerweise sind dabei mit 1 und 0 die ganzen Zahlen 1 bzw. 0 gemeint, aber manchmal werden wir damit auch die Eins bzw. die Null in einem bestimmten Ring meinen.

[5] Was der Begriff "kanonische Abbildung" genau bedeutet, wird im Abschnitt "Natürliche Transformationen zwischen Funktoren" erklärt.

- Wenn wir einen Begriff U definiert haben, der von einem Objekt O abhängt, dann können wir U auch mit U_O bezeichnen. Einige Beispiele:
  Eine abelsche (additive) Gruppe G ist definiert als eine Menge M mit einer bestimmten Verknüpfung $+$. Diese Verknüpfung können wir dann auch als $+_G$ bezeichnen.
  Oder: Ist V ein Modul über einem kommutativen Ring, dann gibt es einen kanonischen Homomorphismus

  $$\Psi : V \to V^{**}, \qquad \text{definiert durch } \Psi(x) = (f \mapsto f(x)) \text{ für alle } x \in V.$$

  Dieses Ψ können wir dann auch als Ψ_V bezeichnen.
  Der Sinn dieser Notation wird klar, wenn wir mehrere Objekte haben und die entsprechenden Begriffe betrachten wollen, z. B. zwei Vektorräume V und W und die entsprechenden kanonischen Homomorphismen $V \to V^{**}$ und $W \to W^{**}$. Wir können diese Homomorphismen nicht beide mit Ψ bezeichnen; deshalb nennen wir sie Ψ_V bzw. Ψ_W.

- Die Abkürzung dim steht für Dimension, und zwar für Dimension von Vektorräumen über einem Grundkörper oder (etwas allgemeiner) für Dimension von freien Moduln über *kommutativen* Ringen. (Über nichtkommutativen Ringen ist auch für freie Moduln die Dimension nicht eindeutig, d. h. ein Modul über einem nichtkommutativen Ring kann Basen unterschiedlicher Länge haben!)

- Die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnen wir mit E_n oder (wenn klar ist, welches n gemeint ist) kurz mit E.

- Unter der *Skalarmultiplikation* auf einem Vektorraum verstehen wir die Multiplikation eines Skalars (d. h. eines Elementes des Grundkörpers) mit einem Vektor des Vektorraums, und *nicht* ein etwaiges Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren. Statt "Skalarmultiplikation" sagen wir auch "Wirkung des Grundkörpers". Allgemein verstehen wir unter der *Wirkung eines Rings R auf einem R-Linksmodul M* die Abbildung $R \times M \to M$, die jedes Paar (r, m) auf rm abbildet. (Analog für Rechtsmoduln.)

- Wir werden für viele Begriffe eine etwas altertümliche, an das Lateinische angelehnte Schreibweise benutzen, bei der das Präfix "co/ko" mit einem "c" geschrieben wird (z. B. "Coalgebra", "Comodul", "coassoziativ", etc.). In der meisten modernen deutschsprachigen Literatur wird hingegen dieses Präfix mit einem "k" geschrieben (d. h. diese Begriffe lauten "Koalgebra", "Komodul", "koassoziativ", etc.).

- Ich werde manchmal den Buchstaben k in doppelter Bedeutung verwenden: Zum einen bezeichne ich mit k meistens den Grundkörper oder Grundring, über dem ich Vektorräume (bzw. Moduln), Algebren, Coalgebren usw. betrachte[6]; zum anderen kann k je nach Kontext für etwas anderes (z. B. für eine natürliche Zahl, für einen Summationsindex, o. ä.) stehen. Ich hoffe, daß sich die Mißverständnisse, die durch diese Doppelbelegung entstehen, in Grenzen halten, da ein Körper oder Ring meistens doch recht gut von einer Zahl zu unterscheiden ist. Aber

[6]Manchmal werde ich den Grundkörper auch anders nennen, aber meistens wird er k heißen.

es ist schlechte Notation, die ich hier benutze. Wenn ich dieses Skript nochmal schreiben würde, würde ich den Grundkörper bzw. Grundring anders nennen.

- Das Symbol $\diagup$ hat in diesem Text immer Präzedenz über den Symbolen $\times$ und $\otimes$. Das heißt, $A \times B \diagup C$ ist als $A \times (B \diagup C)$ zu lesen, und nicht als $(A \times B) \diagup C$. Ferner ist $A \otimes B \diagup C$ ist als $A \otimes (B \diagup C)$ zu lesen, und nicht als $(A \otimes B) \diagup C$.

- Sind X und Y zwei Mengen und ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann werden wir die Bildmenge der Abbildung f mit $\operatorname{Im} f$ oder auch mit $f(X)$ bezeichnen. Diese Bildmenge ist zu unterscheiden von der *Zielmenge* der Abbildung f, welche als Y definiert ist (auch wenn nicht alle Elemente von Y auch tatsächlich Bilder unter f sind!). Diese Unterscheidung ist dadurch möglich, daß (wie oben gesagt) nicht nur die Wertepaare $(a, f(a))$, sondern auch die Mengen X und Y zur Spezifikation der Abbildung f gehören (sonst wäre der Begriff der Zielmenge nicht wohldefiniert).

Erstes Semester

I. Kapitel: Grundlagen

1. Moduln, Algebren, Tensorprodukte, Kategorien, Funktoren

In diesem Abschnitt werden wir einige Grundlagen aus der Algebra bereitstellen.

Fundamentale Eigenschaften von Moduln

Diese Vorlesung baut auf der Theorie der Moduln über (nicht notwendig kommutativen!) Ringen auf. Ein paar Konventionen im Voraus:

- Sei R ein Ring. Ein *R-Linksmodul* ist eine abelsche Gruppe M mit einer Linkswirkung von R auf M. Ein *R-Rechtsmodul* ist eine abelsche Gruppe N mit einer Rechtswirkung von R auf N. Wirkungen sind dabei immer assoziativ[7], distributiv (sowohl im Ringelement, als auch im Modulelement) und unitär (d. h. die 1 des Ringes wirkt als Identität auf dem Modul). Wir werden diese Definition später detaillierter wiederholen, und zwei anderen (äquivalenten) Definitionen des Begriffes "R-Linksmodul" gegenüberstellen.
  Bemerkung: Statt dem Begriff "R-Linksmodul" benutzen viele Autoren auch das Synonym "Links-R-Modul", und entsprechend "Rechts-R-Modul" statt "R-Rechtsmodul", und analoge Synonyme für Comoduln und Hopfmoduln (dies sind Begriffe, die wir später einführen werden).

- Unter einem *R-Modul* verstehen wir ein Objekt, das ein R-Linksmodul oder ein R-Rechtsmodul ist. (Genauso werden wir später unter einem *C-Comodul* ein Objekt verstehen, das ein C-Linkscomodul oder ein C-Rechtscomodul ist.)

- Sei R ein Ring. Ist M ein R-Linksmodul, dann bezeichnet man den R-Linksmodul M auch mit ${}_RM$ (besonders, wenn man deutlich machen will, daß man den R-Linksmodul M und nicht nur die zugrundeliegende Menge M betrachtet). Ist N ein R-Rechtsmodul, dann bezeichnet man den R-Rechtsmodul N auch mit N_R.

[7] Insofern kann man nicht aus jeder Rechtswirkung eine Linkswirkung machen, indem man die Ringelemente "einfach" links statt rechts schreibt! (Natürlich geht dies, falls der Ring kommutativ ist.)

- Seien R und S zwei Ringe. Ein (R,S)-*Bimodul* ist eine abelsche Gruppe M mit einer Linkswirkung von R auf M und einer Rechtswirkung von S auf M, die folgende Eigenschaft erfüllen: Für alle $r \in R$, $s \in S$ und $x \in M$ gilt $(rx)\,s = r\,(xs)$ (diese Eigenschaft wird manchmal als *Kompatibilität* der beiden Modulstrukturen bezeichnet). Jeder (R,S)-Bimodul hat eine kanonische Struktur als R-Linksmodul (indem man die Rechtswirkung von S auf M vergisst) und eine kanonische Struktur als S-Rechtsmodul (indem man die Linkswirkung von R auf M vergisst).

- Seien R und S zwei Ringe. Ist M ein (R,S)-Bimodul, dann bezeichnet man den (R,S)-Bimodul M auch mit ${}_RM_S$ (besonders, wenn man unterstreichen will, daß man den (R,S)-Bimodul M meint, und nicht die zugrundeliegende Menge M). Die kanonische R-Linksmodulstruktur auf M heißt dann ${}_RM$, und die kanonische S-Rechtsmodulstruktur M_S.
  Es ist wichtig, ${}_RM_S$, ${}_RM$ und M_S miteinander nicht zu verwechseln, obwohl die zugrundeliegende Menge M immer die gleiche ist! (Hier ist ein Beispiel dafür, warum wir es notwendig ist, ${}_RM_S$, ${}_RM$ und M_S voneinander zu unterscheiden: Wenn wir zwei (R,S)-Bimoduln M und N haben, und ${}_RM_S \cong {}_RN_S$ schreiben, dann meinen wir, daß M und N *als (R,S)-Bimoduln isomorph sind*. Wenn wir aber ${}_RM \cong {}_RN$ schreiben, dann meinen wir, daß M und N *als R-Linksmoduln isomorph sind*. Der Unterschied ist gewaltig.)

- Sei R ein Ring. Eine *R-linkslineare Abbildung* ist ein anderes Wort für einen Homomorphismus zwischen R-Linksmoduln. Entsprechend ist eine *R-rechtslineare Abbildung* nichts anderes als ein Homomorphismus zwischen R-Rechtsmoduln. Eine *R-lineare Abbildung* ist ein Homomorphismus zwischen R-Moduln (Links- oder Rechtsmoduln, je nachdem, was für Moduln die Definitionsmenge und die Bildmenge sind).

- Für einen Ring R sind "*Homomorphismen zwischen R-Moduln*" und "*R-lineare Abbildungen*" Synonyme.

Wir rekapitulieren erstmal einige einfache Konstruktionen wie Produkte und Coprodukte von Moduln:

Erinnerung: Sei R ein Ring.

1) Ist M ein R-Linksmodul, und $N \subseteq M$ ein Untermodul, dann definiert man den R-Linksmodul $M\diagup N$ als Menge $\{\overline{m} \mid m \in M\}$ der Äquivalenzklassen von Elementen von M bezüglich der Relation $\sim$, die wie folgt definiert ist: Für zwei Elemente m_1 und m_2 von M gilt $m_1 \sim m_2$ genau dann, wenn $m_1 - m_2 \in N$ ist. Dabei definiert man auf $M\diagup N$ die Addition durch $\overline{m_1} + \overline{m_2} = \overline{m_1 + m_2}$ für alle $m_1, m_2 \in M$ und die Skalarmultiplikation durch $r\overline{m} = \overline{rm}$ für alle $r \in R$ und $m \in M$. Der R-Linksmodul $M\diagup N$ heißt *Faktormodul* des Moduls M modulo N.

Die Abbildung $\operatorname{kan} : M \to M\diagup N$, die jedes $m \in M$ auf die zugehörige Äquivalenzklasse $\overline{m} \in M\diagup N$ abbildet, ist R-linear. Der R-Linksmodul $M\diagup N$ und die kanonische Abbildung kan besitzen folgende universelle Eigenschaft:

Für jeden R-Linksmodul X und jede R-lineare Abbildung $f : M \to X$ mit $f(N) =$

0 gibt es genau eine R-lineare Abbildung $g : M \diagup N \to X$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"'] & X \\ M/N \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

2) Sei I eine Menge, und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Linksmoduln. Dann definiert man den R-Linksmodul $\prod\limits_{i\in I} M_i$ als die Menge $\prod\limits_{i\in I} M_i$ (das kartesische Produkt der Mengen M_i), ausgestattet mit komponentenweiser Addition (also $(m_i) + (m_i') = (m_i + m_i')$ für alle $(m_i), (m_i') \in \prod\limits_{i\in I} M_i$) und komponentenweiser Skalarmultiplikation (also $r(m_i) = (rm_i)$ für alle $r \in R$ und $(m_i) \in \prod\limits_{i\in I} M_i$). Für jedes $j \in I$ läßt sich eine Abbildung $\mathrm{pr}_j : \prod\limits_{i\in I} M_i \to M_j$ definieren durch $\mathrm{pr}_j((m_i)) = m_j$ für alle $(m_i) \in \prod\limits_{i\in I} M_i$. Diese Abbildung pr_j ist R-linear. Der R-Linksmodul $\prod\limits_{i\in I} M_i$ hat zusammen mit den Abbildungen pr_j folgende universelle Eigenschaft:

Ist X ein R-Linksmodul, und ist $f_i : X \to M_i$ eine R-lineare Abbildung für jedes $i \in I$, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $f : X \to \prod\limits_{i\in I} M_i$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, dotted, "f"'] & M_j \\ & \prod\limits_{i\in I} M_i \arrow[u, "\mathrm{pr}_j"'] \end{tikzcd} \qquad \text{für jedes } j \in I$$

kommutiert (nämlich die Abbildung f, die durch $f(x) = (f_i(x))$ für jedes $x \in X$ definiert ist). Diese Abbildung f nennt man $\prod\limits_{i\in I} f_i$.

Der R-Linksmodul $\prod\limits_{i\in I} M_i$ heißt *direktes Produkt* der R-Linksmoduln M_i.

3) Sei I eine Menge, und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Linksmoduln. Dann definiert man den R-Linksmodul $\coprod\limits_{i\in I} M_i$ als den R-Untermodul

$$\left\{(m_i) \in \prod_{i\in I} M_i \ \mid \ \text{es gibt eine endliche Menge } J \subseteq I \text{ so, dass für alle } i \in I \setminus J \text{ gilt: } m_i = 0\right\}$$

des R-Linksmoduls $\prod\limits_{i\in I} M_i$.

Für jedes $j \in I$ läßt sich eine Abbildung $\mathrm{in}_j : M_j \to \coprod\limits_{i\in I} M_i$ definieren durch $\mathrm{in}_j(m) = \left(\begin{cases} m, & \text{wenn } i = j; \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}\right)_{i\in I}$ für alle $m \in M_j$. Diese Abbildung in_j ist R-linear. Der R-Linksmodul $\coprod\limits_{i\in I} M_i$ hat zusammen mit den Abbildungen in_j folgende universelle Eigenschaft:

Ist X ein R-Linksmodul, und ist $f_i : M_i \to X$ eine R-lineare Abbildung für jedes $i \in I$, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $f : \coprod_{i\in I} M_i \to X$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X & M_j \arrow[l, "f_j"'] \arrow[d, "\mathrm{in}_j"] \\ & \coprod_{i\in I} M_i \arrow[ul, dotted, "f"] \end{tikzcd} \qquad \text{für jedes } j \in I$$

kommutiert (nämlich die Abbildung f, die durch $f((m_i)) = \sum_{i\in I} f_i(m_i)$ für jedes $(m_i) \in \coprod_{i\in I} M_i$ definiert ist). Diese Abbildung f nennt man $\coprod_{i\in I} f_i$.

Der R-Linksmodul $\coprod_{i\in I} M_i$ heißt *Coprodukt* der R-Linksmoduln M_i.

Für jedes $(m_i) \in \coprod_{i\in I} M_i$ gilt $(m_i) = \sum_{i\in I} \mathrm{in}_i(m_i)$.

4) Sei I eine Menge, sei M ein R-Linksmodul, und sei $M_i \subseteq M$ ein Untermodul für jedes $i \in I$.

a) Wir schreiben kurz $\sum_{i\in I} M_i$ für den Untermodul

$$\left\{ \sum_{i\in I} m_i \;\middle|\; \begin{array}{c} m_i \in M_i \text{ für alle } i \in I, \text{ und es gibt eine endliche} \\ \text{Menge } J \subseteq I \text{ so, dass für alle } i \in I \setminus J \text{ gilt: } m_i = 0 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{i\in I} m_i \;\middle|\; (m_i) \in \coprod_{i\in I} M_i \right\} = \left(\coprod_{i\in I} \mathrm{inc}_i \right) \left(\coprod_{i\in I} M_i \right)$$

von M, wobei $\mathrm{inc}_i : M_i \to M$ die kanonische Inklusion von M_i in M bedeutet.

b) In dem Fall, daß der Homomorphismus $\coprod_{i\in I} \mathrm{inc}_i : \coprod_{i\in I} M_i \to M$ injektiv ist (mit anderen Worten: falls für jedes $(m_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} M_i$ aus $\sum_{i\in I} m_i = 0$ sofort $m_i = 0$ für alle $i \in I$ folgt; mit noch anderen Worten: falls jedes Element von $\sum_{i\in I} M_i$ eine *eindeutige* Darstellung als $\sum_{i\in I} m_i$ für ein $(m_i) \in \coprod_{i\in I} M_i$ besitzt), schreibt man auch $\bigoplus_{i\in I} M_i$ für $\sum_{i\in I} M_i$, und bezeichnet den Untermodul $\bigoplus_{i\in I} M_i$ von M als *direkte Summe* der Untermoduln M_i.

5) Im Fall **4) b)** (also in dem Fall, daß $\coprod_{i\in I} \mathrm{inc}_i$ injektiv ist) gilt $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \coprod_{i\in I} M_i$.

Im Fall **3)** gilt wiederum $\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M'_i$, wobei $M'_i = \mathrm{in}_i\, M_i \cong M_i$ für alle $i \in I$ ist.

Somit sind Coprodukt ($\coprod_{i\in I} M_i$) und direkte Summe ($\bigoplus_{i\in I} M_i$) von Moduln "mehr oder weniger der gleiche Begriff", nur mit dem Unterschied, daß man bei der direkten Summe bereits im Voraus einen Modul M kennen muß, der alle M_i umschließt. Coprodukt und direkte Summe werden in der linearen Algebra auch äußere direkte Summe bzw. innere direkte Summe genannt (was diesen Zusammenhang noch deutlicher macht).

Definition: Sei R ein Ring, und M ein R-Linksmodul.

1) Sei I eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei $m_i \in M$ beliebig.

Die Familie (m_i) heißt *R-linear unabhängig*, wenn für jede endliche Menge $J \subseteq I$ und jede Familie $(r_j)_{j\in J}$ mit $r_j \in R$ für alle $j \in J$ gilt: Wenn $\sum\limits_{j\in J} r_j m_j = 0$, dann ist $r_j = 0$ für alle $j \in J$.

Die Familie (m_i) heißt ein *R-Erzeugendensystem von M*, wenn für jedes $p \in M$ eine endliche Menge $J \subseteq I$ und eine Familie $(r_j)_{j\in J}$ mit $r_j \in R$ für alle $j \in J$ existiert, die $p = \sum\limits_{j\in J} r_j m_j$ erfüllt.

Die Familie (m_i) heißt *R-Basis von M*, wenn sie R-linear unabhänig und ein R-Erzeugendensystem von M ist.

2) Der Modul M heißt ein *freier Modul*, wenn er eine R-Basis hat.

1.1. Bemerkung: 1) Jeder Ring R wird selber zu einem R-Linksmodul, wenn man die Wirkung von R auf R durch Multiplikation definiert.

2) Sei G eine Menge. Dann existiert ein R-Linksmodul mit Basis G, nämlich der R-Linksmodul $\coprod\limits_{g\in G} R$. In der Tat kann man jedes Element $g \in G$ kanonisch mit dem Element $(\delta_{g,h})_{h\in G}$ von $\coprod\limits_{g\in G} R$ identifizieren; diese Elemente $(\delta_{g,h})_{h\in G}$ für alle $g \in G$ bilden eine Basis von $\coprod\limits_{g\in G} R$.

Dieser Modul $\coprod\limits_{g\in G} R$ wird mit $R^{(G)}$ bezeichnet und *freier R-Linksmodul mit Basis G* genannt. Im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$ nennt man $R^{(G)} = \mathbb{Z}^{(G)}$ auch die *freie abelsche Gruppe mit Basis G*.

Der R-Linksmodul $\coprod\limits_{g\in G} R$ ist Untermodul des R-Linksmoduls $\prod\limits_{g\in G} R$. Jener Modul $\prod\limits_{g\in G} R$ wird auch mit R^G bezeichnet.

Ist G eine endliche Menge, dann ist $R^{(G)} = \coprod\limits_{g\in G} R = \prod\limits_{g\in G} R = R^G$.

Für jedes $g \in G$ schreiben wir E_g für das Element $\operatorname{in}_g 1$ von $\coprod\limits_{g\in G} R$. Dann ist $(E_g)_{g\in G}$ eine Basis des R-Linksmoduls $\coprod\limits_{g\in G} R$. Wir werden allerdings oft E_g einfach mit g gleichsetzen (auch wenn dies strenggenommen ein Mißbrauch von Notation ist); dann folgt hieraus, daß $(g)_{g\in G}$ eine Basis des R-Linksmoduls $\coprod\limits_{g\in G} R$ ist, also daß G selber eine Basis des R-Linksmoduls $\coprod\limits_{g\in G} R$ ist. Dies verleiht dem Begriff "freier R-Linksmodul mit Basis G" nachträglich Recht.

3) Ist I eine Menge, und M ein freier R-Linksmodul mit Basis $\{m_i\}_{i\in I}$, dann ist $M = \bigoplus\limits_{i\in I} Rm_i$ und $Rm_i \cong R$ für alle $i \in I$ (wobei das Zeichen $\cong$ für Isomorphie als R-Moduln steht).

Tensorielle Abbildungen und Tensorprodukte

Im Folgenden werden abelsche Gruppen immer additiv geschrieben. Somit können wir die Begriffe "abelsche Gruppe" und "$\mathbb{Z}$-Modul" als Synonyme verwenden (denn jede abelsche Gruppe ist kanonischerweise ein $\mathbb{Z}$-Modul, und jeder $\mathbb{Z}$-Modul eine abelsche Gruppe). Homomorphismen zwischen abelschen Gruppen sind das Gleiche wie $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{Z}$-Moduln.

Wir werden nun eine Theorie der Tensorprodukte von Moduln über Ringen entwickeln. Dabei arbeiten wir über allgemeinen, nicht notwendigerweise kommutativen Ringen. Dies führt zu einigen Überraschungen, die man nicht erwarten würde, wenn man nur die Theorie der Tensorprodukte von Moduln über *kommutativen* Ringen kennt. So kann man über einem allgemeinen Ring kein Tensorprodukt für zwei R-Linksmoduln definieren, sondern nur ein Tensorprodukt von einem R-Rechtsmodul und einem R-Linksmodul, und dieses Tensorprodukt selber ist weder ein R-Linksmodul noch ein R-Rechtsmodul - sondern nur eine abelsche Gruppe (also ein $\mathbb{Z}$-Modul). Eine stärkere Struktur auf dem Tensorprodukt erhält man nur, wenn man auf den zwei Tensoranden mehr Struktur festlegt. Doch beginnen wir mit dem grundlegendsten Fall:

Definition: Sei R ein Ring, sei X ein R-Rechtsmodul, und sei Y ein R-Linksmodul.

1) Sei M eine abelsche Gruppe, also ein $\mathbb{Z}$-Modul. Sei $\varphi : X \times Y \to M$ eine Abbildung (eine Abbildung von Mengen; sie muß nicht R-linear sein!). Die Abbildung φ heißt *R-tensoriell* oder auch *R-bilinear*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(x+x',y) &= \varphi(x,y)+\varphi(x',y) && \text{für alle } x,x' \in X \text{ und } y \in Y; \\ \varphi(x,y+y') &= \varphi(x,y)+\varphi(x,y') && \text{für alle } x \in X \text{ und } y,y' \in Y; \\ \varphi(xr,y) &= \varphi(x,ry) && \text{für alle } x \in X,\ y \in Y \text{ und } r \in R. \end{aligned}$$

2) Sei T eine abelsche Gruppe, und sei $\tau : X \times Y \to T$ eine R-tensorielle Abbildung. Dann heißt τ eine *universelle R-tensorielle Abbildung*, wenn für jede abelsche Gruppe M und für jede R-tensorielle Abbildung $\varphi : X \times Y \to M$ gilt: Es gibt genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung[8] $f : T \to M$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & M \\ T \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. (Das heißt, es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $f : T \to M$ so, daß $\varphi = f\tau$ ist.)

1.2. Bemerkung: Es gibt, bis auf Isomorphie, nur eine universelle R-tensorielle Abbildung. Hinter diesem kryptischen Satz verbirgt sich folgende Aussage:

Seien T eine abelsche Gruppe und $\tau : X \times Y \to T$ eine universelle R-tensorielle Abbildung. Seien T' eine abelsche Gruppe und $\tau' : X \times Y \to T'$ eine universelle R-tensorielle Abbildung. Dann gibt es einen Isomorphismus $f : T \to T'$ von abelschen Gruppen (d. h. von $\mathbb{Z}$-Moduln) so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau'"'] & T \arrow[dl, dotted, "f", "\cong"'] \\ T' & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.[9]

[8]d. h. Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen

[9]Eine ähnliche Eindeutigkeitsaussage (aber im Allgemeinen keine Existenz!) gilt für alle sogenannten "universellen Objekte" im Sinne der Kategorientheorie. Wir werden allerdings vermutlich nicht die Zeit haben, auf diese Begriffe einzugehen.

Beweis: Da $\tau' : X \times Y \to T'$ eine R-tensorielle Abbildung ist, und $\tau : X \times Y \to T$ eine *universelle* R-tensorielle Abbildung ist, gibt es genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f : T \to T'$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "\tau"'] & T' \\ T \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Da $\tau : X \times Y \to T$ eine R-tensorielle Abbildung ist, und $\tau' : X \times Y \to T'$ eine *universelle* R-tensorielle Abbildung ist, gibt es genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $g : T' \to T$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau'"'] & T \\ T' \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Damit ergibt sich folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr, "\tau"] \arrow[d, "\tau"'] \arrow[drr, "\tau'"] & & T \\ T \arrow[rr, "f"] \arrow[urr, bend right=60, "\mathrm{id}"'] & & T' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \quad .$$

Doch da $\tau : X \times Y \to T$ eine *universelle* R-tensorielle Abbildung ist, gibt es genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $u : T \to T$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau"'] & T \\ T \arrow[ur, dotted, "u"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Laut obigem kommutativen Diagramm ist dies aber sowohl für $u = \mathrm{id}$, als auch für $u = gf$ erfüllt. Also ist $gf = \mathrm{id}$; genauer gesagt, $gf = \mathrm{id}_T$. Analog ist $fg = \mathrm{id}_{T'}$. Damit ist f ein Isomorphismus, qed.

1.3. Satz: Sei R ein Ring, sei X ein R-Rechtsmodul, sei Y ein R-Linksmodul. Dann gibt es eine abelsche Gruppe T so, daß es eine universelle R-tensorielle Abbildung $\tau : X \times Y \to T$ gibt.

Beweis: Sei $F = \mathbb{Z}^{(X \times Y)}$ die freie abelsche Gruppe[10] mit Basis $X \times Y$. Sei $N \subseteq F$ die Untergruppe, die erzeugt wird von allen Elementen der Form

$$\left.\begin{array}{ll} (x+x', y) - (x,y) - (x',y) & \text{mit } x, x' \in X \text{ und } y \in Y; \\ (x, y+y') - (x,y) - (x,y') & \text{mit } x \in X \text{ und } y, y' \in Y; \\ (xr, y) - (x, ry) & \text{mit } x \in X,\ y \in Y \text{ und } r \in R. \end{array}\right\} \qquad (1.0)$$

[10] d. h. der freie $\mathbb{Z}$-Modul

Sei nun $T = F \diagup N$. Wir definieren eine Abbildung $\tau : X \times Y \to T = F \diagup N$ durch $\tau(x,y) = \overline{(x,y)}$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Wir müssen jetzt zeigen, daß die Abbildung $\tau : X \times Y \to T$ universell R-tensoriell ist.

Dazu beweisen wir zuerst, daß τ eine R-tensorielle Abbildung ist:

Für alle $x, x' \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} \tau(x+x',y) &= \overline{(x+x',y)} = \overline{(x,y)+(x',y)} \qquad \text{(nach der Definition von } T \text{ als } F \diagup N) \\ &= \overline{(x,y)} + \overline{(x',y)} = \tau(x,y) + \tau(x',y). \end{aligned}$$

Analog zeigen wir $\tau(x,y+y') = \tau(x,y) + \tau(x,y')$ für alle $x \in X$ und $y, y' \in Y$, sowie $\tau(xr,y) = \tau(x,ry)$ für alle $x \in X$, $y \in Y$ und $r \in R$. Also ist τ eine R-tensorielle Abbildung.

Um zu zeigen, daß τ universell R-tensoriell ist, müssen wir also nur noch folgende Aussage nachweisen:

(*) Sei M eine abelsche Gruppe, und sei $\varphi : X \times Y \to M$ eine R-tensorielle Abbildung. Dann gibt es genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f : T \to M$ mit $\varphi = f\tau$.

*Beweis von **(*)**: Existenz von f:* Wir definieren eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f_1 : F \to M$ durch $f_1((x,y)) = \varphi(x,y)$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ (diese Definition ist möglich nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes, denn $F = \mathbb{Z}^{(X\times Y)} = \coprod_{(x,y)\in X\times Y} \mathbb{Z}$).

Dann gilt $f_1(n) = 0$ für jedes Element $n \in N$ (denn N wird von allen Elementen der Form (1.0) erzeugt, und für alle Elemente $n \in N$ der Form (1.0) gilt $f_1(n) = 0$, wie man leicht sieht:

$$f_1((x+x',y) - (x,y) - (x',y)) = \varphi(x+x',y) - \varphi(x,y) - \varphi(x',y) = 0$$

(da φ eine R-tensorielle Abbildung ist) und analog $f_1((x,y+y') - (x,y) - (x,y')) = 0$ und $f_1((xr,y) - (x,ry)) = 0$). Das heißt, $f_1(N) = 0$. Nach der universellen Eigenschaft des Faktormoduls gibt es dann eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f : T = F \diagup N \to M$ mit $f(\overline{a}) = f_1(a)$ für alle $a \in F$. Betrachte dieses f. Nach Konstruktion der Abbildungen ist dann $\varphi = f\tau$, denn für alle $x \in X$ und $y \in Y$ ist

$$f(\tau(x,y)) = f\left(\overline{(x,y)}\right) = f_1((x,y)) = \varphi(x,y).$$

Damit haben wir eine gewünschte Abbildung f für die Aussage **(*)** konstruiert.

Eindeutigkeit von f: Jetzt werden wir zeigen, daß es nur eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f : T \to M$ mit $\varphi = f\tau$ gibt.

In der Tat seien $f : T \to M$ und $f' : T \to M$ zwei $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen, die $\varphi = f\tau$ und $\varphi = f'\tau$ erfüllen. Wir müssen dann zeigen, daß $f = f'$ ist.

In der Tat ist $f\left(\overline{(x,y)}\right) = f(\tau(x,y)) = \varphi(x,y)$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$, und analog $f'\left(\overline{(x,y)}\right) = \varphi(x,y)$. Also ist $f\left(\overline{(x,y)}\right) = f'\left(\overline{(x,y)}\right)$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Doch $\left\{\overline{(x,y)} \mid x \in X \text{ und } y \in Y\right\}$ ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$-Moduls T (denn $T = F \diagup N = \mathbb{Z}^{(X\times Y)} \diagup N$). Also sind die Abbildungen f und f' auf einem Erzeugendensystem von T identisch. Da beide Abbildungen f und f' außerdem $\mathbb{Z}$-linear sind, folgt hieraus, daß $f = f'$ überall ist. Damit ist die Eindeutigkeit von f gezeigt.

Wir haben also nachgewiesen, daß eine die Aussage **(*)** erfüllende Abbildung f existiert und eindeutig ist. Damit ist Satz 1.3. bewiesen.

Definition: Sei R ein Ring, sei X ein R-Rechtsmodul, und sei Y ein R-Linksmodul. Die in Satz 1.3. definierte abelsche Gruppe T wird $X \otimes_R Y$ genannt und als das *Tensorprodukt* der Moduln X und Y bezeichnet. Die Moduln X und Y heißen *Tensoranden* dieses Tensorproduktes; Elemente von $X \otimes_R Y$ heißen *Tensoren.* Für alle $x \in X$ und $y \in Y$ setzt man $x \otimes y = \tau(x, y)$, wobei $\tau : X \times Y \to X \otimes_R Y$ die in Satz 1.3. eingeführte universelle R-tensorielle Abbildung ist.

Auf diese Weise ist zwar die abelsche Gruppe $T = X \otimes_R Y$ nicht eindeutig definiert! Doch nach Bemerkung 1.2. sind alle möglichen abelschen Gruppen T, die als $X \otimes_R Y$ in Frage kommen, zueinander isomorph, und die entsprechenden tensoriellen Abbildungen $\tau : X \times Y \to T$ vertragen sich mit den Isomorphismen. Deshalb können wir behaupten, wir haben das Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ "bis auf Isomorphie" eindeutig definiert. Falls wir aber doch eine eindeutige Definition der abelschen Gruppe $T = X \otimes_R Y$ und der Abbildung $\tau : X \times Y \to X \otimes_R Y$ (und nicht nur ihrer Isomorphieklasse) nötig haben, definieren wir T und τ so, wie wir sie *im Beweis von Satz 1.3* definiert haben - also durch $T = F \diagup N$, wobei $F = \mathbb{Z}^{(X \times Y)}$ ist und $N \subseteq F$ von allen Elementen der Form (1.0) erzeugt ist, und durch $\tau(x, y) = \overline{(x, y)}$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Das Bilden eines Tensorproduktes heißt auch *Tensorieren.*

Bemerkung: Der Operator $\otimes$ soll schwächer binden als Multiplikation; das heißt, wenn wir $xr \otimes y$ schreiben, meinen wir $(xr) \otimes y$ und nicht $x(r \otimes y)$. Auch soll der Operator $\otimes$ schwächer binden als Anwendung von Abbildungen; das heißt, wenn wir $f(x) \otimes g(y)$ schreiben, meinen wir $(f(x)) \otimes (g(y))$ und nicht etwa $f(x \otimes g(y))$.

1.4. Bemerkung: Sei R ein Ring, sei X ein R-Rechtsmodul und Y ein R-Linksmodul.

1) In $X \otimes_R Y$ gilt

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \qquad \text{für alle } x, x' \in X \text{ und } y \in Y;$$
$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y' \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } y, y' \in Y;$$
$$xr \otimes y = x \otimes ry \qquad \text{für alle } x \in X,\ y \in Y \text{ und } r \in R.$$

Beweis: Dies folgt daraus, daß die Abbildung

$$X \times Y \to X \otimes_R Y, \qquad (x, y) \mapsto x \otimes y$$

eine R-tensorielle Abbildung ist. In der Tat ist diese Abbildung einfach τ (denn $\tau(x, y) = x \otimes y$), also eine universelle R-tensorielle Abbildung.

2) a) Aus dem Beweis von Satz 1.3. folgt: Die Menge $\{x \otimes y \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$ ist ein $\mathbb{Z}$-Erzeugendensystem von $X \otimes_R Y$. Das heißt, jedes Element von $X \otimes_R Y$ hat eine Darstellung in der Form $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i (x_i \otimes y_i)$, wobei $z_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$ und $y_i \in Y$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ist. (So eine Darstellung ist natürlich nicht eindeutig.)

Man bezeichnet Elemente von $X \otimes_R Y$ der Form $x \otimes y$ für $x \in X$ und $y \in Y$ als *reine Tensoren.* Jeder Tensor in $X \otimes_R Y$ ist also eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von reinen Tensoren (also auch eine Summe von reinen Tensoren). Hieraus folgt:

b) Ist M ein $\mathbb{Z}$-Modul, und sind $m : X \otimes_R Y \to M$ und $n : X \otimes_R Y \to M$ zwei $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen, die $m(x \otimes y) = n(x \otimes y)$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ erfüllen, dann ist $m = n$.

Bemerkung: Diese Aussage wird meistens folgendermaßen in Worte gefasst: "Wenn zwei lineare Abbildungen aus einem Tensorprodukt in einen Modul auf allen reinen Tensoren übereinstimmen, dann sind sie identisch."

3) Tensorprodukte von Vektorräumen sind recht intuitiv. Tensorprodukte von Moduln über Ringen können sich dagegen sehr unerwartet verhalten, auch wenn die Ringe kommutativ sind. So kann das Tensorprodukt zweier von 0 verschiedener Moduln 0 sein. Hier ist ein Beispiel:

Sei n eine positive ganze Zahl. Dann ist $\mathbb{Z}\diagup(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ und jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist $\overline{x} \otimes q = \overline{x} \otimes n \cdot \dfrac{q}{n} = \underbrace{\overline{x}n}_{=0} \otimes \dfrac{q}{n} = 0$ (wobei $\overline{x}$ die Restklasse von x modulo n bezeichnet). Also sind alle reinen Tensoren in $\mathbb{Z}\diagup(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ gleich 0. Da $\mathbb{Z}\diagup(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ von reinen Tensoren erzeugt wird, ist also $\mathbb{Z}\diagup(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, was zu beweisen war.

4) Laut ihrer Definition haben das Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ zweier Moduln X und Y und die in Satz 1.3. eingeführte universelle R-tensorielle Abbildung $\tau : X \times Y \to X \otimes_R Y$ die folgende Eigenschaft:

Für jede abelsche Gruppe M und für jede R-tensorielle Abbildung $\varphi : X \times Y \to M$ gilt: Es gibt genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung[11] $f : X \otimes_R Y \to M$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & M \\ X \otimes_R Y \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. (Das heißt, es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $f : X \otimes_R Y \to M$ so, daß $\varphi = f\tau$ ist.)

Diese Eigenschaft heißt die *universelle Eigenschaft des Tensorproduktes.*

Bemerkung: Der Nutzen des Tensorproduktes besteht oft darin, daß man dadurch R-tensorielle Abbildungen in einen Zusammenhang mit $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen bringen kann. Und zwar: Ist R ein Ring, ist X ein R-Rechtsmodul und ist Y ein R-Linksmodul, dann ist die abelsche Gruppe aller R-tensoriellen Abbildungen $X \times Y \to M$ isomorph zur abelschen Gruppe aller $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen $X \otimes_R Y \to M$. Der Isomorphismus ist dadurch gegeben, daß man jede $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f : X \otimes_R Y \to M$ auf die R-tensorielle Abbildung $f\tau : X \times Y \to M$ sendet. Diese Zuordnung $f \mapsto f\tau$ ist injektiv und surjektiv wegen der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes.

Zusatzstruktur auf Tensorprodukten

Wir haben bislang das Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ von einem R-Rechtsmodul X und einem R-Linksmodul Y betrachtet; dieses Tensorprodukt hat nur die Struktur einer abelschen Gruppe. Wenn allerdings X und Y zusätzliche Links- bzw. Rechtsmodulstrukturen tragen, so können wir auch auf $X \otimes_R Y$ solche Strukturen definieren:

1.5. Satz: 1) a) Seien R und S Ringe. Sei X ein (S, R)-Bimodul, und sei Y ein R-Linksmodul. Auf dem Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ ist dann kanonisch eine S-Linksmodulstruktur definiert durch

$$s\,(x \otimes y) = sx \otimes y \qquad \text{für alle } s \in S,\ x \in X \text{ und } y \in Y.$$

[11] d. h. Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen

b) Seien R und T Ringe. Sei X ein R-Rechtsmodul, und sei Y ein (R,T)-Bimodul. Auf dem Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ ist dann kanonisch eine T-Rechtsmodulstruktur definiert durch

$$(x \otimes y)\, t = x \otimes yt \qquad \text{für alle } t \in T,\ x \in X \text{ und } y \in Y.$$

c) Seien R, S und T Ringe. Sei X ein (S,R)-Bimodul, und sei Y ein (R,T)-Bimodul. Laut Satz 1.5 **1) a)** und **b)** sind auf dem Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ eine S-Linksmodulstruktur und eine T-Rechtsmodulstruktur gegeben. Diese zwei Strukturen ergeben zusammen eine (S,T)-Bimodulstruktur.

(Diese Aussage kann man sich folgendermaßen veranschaulichen: Da X ein (S,R)-Bimodul ist, können wir X als ${}_S X_R$ schreiben. Analog ist $Y = {}_R Y_T$. Nun definiert Satz 1.5 **1) c)** auf $X \otimes_R Y$ die Struktur eines (S,T)-Bimoduls; wir können also ${}_S\left(X \otimes_R Y\right)_T$ schreiben. Satz 1.5 **1) c)** besagt also, anschaulich gesprochen,

$$({}_S X_R) \otimes_R ({}_R Y_T) = {}_S\left(X \otimes_R Y\right)_T .$$

Wir können uns also vorstellen, beim Tensorieren von ${}_S X_R$ und ${}_R Y_T$ gehen die zwei inneren R's verloren, aber das S ganz links und das T ganz rechts bleiben erhalten.)

2) Seien R und T Ringe. Sei X ein R-Rechtsmodul, sei Y ein (R,T)-Bimodul, und sei Z ein T-Linksmodul. Auf dem Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ ist laut Satz 1.5 **1) b)** dann eine T-Rechtsmodulstruktur definiert, und auf dem Tensorprodukt $Y \otimes_T Z$ laut Satz 1.5 **1) a)** eine R-Linksmodulstruktur.

Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus von abelschen Gruppen

$$\operatorname{kan} : (X \otimes_R Y) \otimes_T Z \to X \otimes_R (Y \otimes_T Z)\,,$$

der durch

$$\operatorname{kan}\left((x \otimes y) \otimes z\right) = x \otimes (y \otimes z) \qquad \text{für alle } x \in X,\ y \in Y \text{ und } z \in Z$$

festgelegt ist.

3) a) Sei R ein Ring, und X ein R-Rechtsmodul. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von R-Rechtsmoduln $\operatorname{kan} : X \otimes_R R \to X$, der durch $\operatorname{kan}(x \otimes r) = xr$ für alle $x \in X$ und $r \in R$ festgelegt ist. (Dabei wird R als (R,R)-Bimodul angesehen.)

b) Sei R ein Ring, und X ein R-Linksmodul. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von R-Linksmoduln $\operatorname{kan} : R \otimes_R X \to X$, der durch $\operatorname{kan}(r \otimes x) = rx$ für alle $x \in X$ und $r \in R$ festgelegt ist. (Dabei wird R als (R,R)-Bimodul angesehen.)

4) Sei R ein kommutativer Ring. Unter einem *R-Modul* verstehen wir eine abelsche Gruppe X, die sowohl die Struktur eines R-Linksmoduls, als auch die Struktur eines R-Rechtsmoduls trägt, und die $rx = xr$ für alle $x \in X$ und $r \in R$ erfüllt. Dann können wir jeden R-Linksmodul X kanonisch auch als R-Modul betrachten, indem wir $rx = xr$ für alle $x \in X$ und $r \in R$ setzen. Analog können wir jeden R-Rechtsmodul X auch als R-Modul betrachten.

Seien nun M und N zwei R-Moduln. Dann wird durch Satz 1.5 **1) c)** auf $M \otimes_R N$ die Struktur eines R-Moduls definiert. Analog ergibt sich auf $N \otimes_R M$ die Struktur eines R-Moduls. Es gibt einen Isomorphismus von R-Moduln $\operatorname{kan} : M \otimes_R N \to N \otimes_R M$, der durch $\operatorname{kan}(m \otimes n) = n \otimes m$ für alle $m \in M$ und $n \in N$ festgelegt ist.

Wir lassen den *Beweis* von Satz 1.5. aus (er ist nicht schwer; Homomorphismen zwischen Tensorprodukten lassen sich aus tensoriellen Abbildungen konstruieren).

Eine wichtige *Schreibweise:* In der Situation von Satz 1.5. **2)** sind die Tensorprodukte $(X \otimes_R Y) \otimes_T Z$ und $X \otimes_R (Y \otimes_T Z)$ zueinander kanonisch isomorph (nach Satz 1.5. **2)**). Der Isomorphismus kan ist "dermaßen kanonisch", daß wir im Folgenden diese beiden Tensorprodukte $(X \otimes_R Y) \otimes_T Z$ und $X \otimes_R (Y \otimes_T Z)$ einfach identifizieren werden, d. h. wir bezeichnen sie beide mit $X \otimes_R Y \otimes_T Z$ (ohne Klammern). Statt $(x \otimes y) \otimes z$ oder $x \otimes (y \otimes z)$ schreiben wir dann einfach $x \otimes y \otimes z$.

Wir haben im Obigen gelernt, zwei Moduln zu tensorieren. Auch Homomorphismen zwischen Moduln können tensoriert werden:

Definition: Sei R ein Ring, seien X und X' zwei R-Rechtsmoduln, und seien Y und Y' zwei R-Linksmoduln. Sei $f : X \to X'$ eine R-lineare Abbildung, und sei $g : Y \to Y'$ eine R-lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f \otimes g : X \otimes_R Y \to X' \otimes_R Y'$, die

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } y \in Y$$

erfüllt.

1.6. Bemerkung: 1) Dies war eigentlich ein Satz, d. h. die Existenz und Eindeutigkeit der $\mathbb{Z}$-linearen Abbildung $f \otimes g$ müssen wir eigentlich noch beweisen. Allerdings folgt sie schnell aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes, da

$$X \times Y \to X' \otimes Y', \qquad (x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$$

eine R-tensorielle Abbildung ist.

2) Die Abbildung $f \otimes g$ ist zwar laut obiger Definition nur $\mathbb{Z}$-linear (d. h. ein Homomorphismus abelscher Gruppen), doch wenn die Moduln zusätzliche Struktur tragen, erhält auch $f \otimes g$ diese Struktur. Dies bedeutet:

Ist S ein Ring, sind X und X' zwei (S, R)-Bimoduln, und ist f gleichzeitig R-linear und S-linear, dann ist $f \otimes g$ ein S-Linksmodulhomomorphismus.

Ist T ein Ring, sind Y und Y' zwei (R, T)-Bimoduln, und ist g gleichzeitig R-linear und T-linear, dann ist $f \otimes g$ ein T-Rechtsmodulhomomorphismus.

Hier noch einige weitere nützliche Eigenschaften des Tensorproduktes:

1.7. Satz: Sei I eine Menge, und sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Rechtsmoduln. Sei Y ein R-Linksmodul. Dann gibt es einen kanonischen $\mathbb{Z}$-linearen Isomorphismus $\phi : \coprod\limits_{i \in I} (X_i \otimes_R Y) \to \left(\coprod\limits_{i \in I} X_i \right) \otimes_R Y$, der für jedes $j \in I$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_j \otimes_R Y \arrow[r, "\mathrm{in}_j"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{in}_j \otimes \mathrm{id}"'] & \coprod\limits_{i \in I} (X_i \otimes_R Y) \arrow[r, "\phi"] & \left(\coprod\limits_{i \in I} X_i \right) \otimes_R Y \end{tikzcd}$$

induziert. (Hierbei bedeuten die zwei in_j verschiedene - aber auf gleiche Weise konstruierte - Abbildungen! Es sind beidesmal die kanonischen Injektionen eines Moduls in ein Coprodukt dieses Moduls mit anderen Moduln.)

Beweis: Nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes existiert eine kanonische $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\phi : \coprod\limits_{i \in I} (X_i \otimes_R Y) \to \left(\coprod\limits_{i \in I} X_i \right) \otimes_R Y$, für welche für jedes $j \in I$

das obige Diagramm kommutiert. Wir müssen nur noch beweisen, daß diese Abbildung ϕ ein Isomorphismus ist.

Diese Abbildung ϕ erfüllt $\phi \circ \operatorname{in}_j = \operatorname{in}_j \otimes \operatorname{id}$ für jedes $j \in I$ (nach der Definition von ϕ). Das heißt, $\phi \circ \operatorname{in}_i = \operatorname{in}_i \otimes \operatorname{id}$ für jedes $i \in I$.

Definiere eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\psi : \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) \otimes_R Y \to \coprod_{i \in I} (X_i \otimes_R Y) \qquad \text{durch}$$

$$\psi \left((x_i)_{i \in I} \otimes y \right) = (x_i \otimes y)_{i \in I} \qquad \text{für alle } (x_i)_{i \in I} \in \coprod_{i \in I} X_i \text{ und } y \in Y.$$

So eine Abbildung ψ existiert nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes. Dann ist $\phi\psi = \operatorname{id}$, denn für alle $(x_i)_{i \in I} \in \coprod_{i \in I} X_i$ und $y \in Y$ ist

$$\begin{aligned}
(\phi\psi) \left((x_i)_{i \in I} \otimes y \right) &= \phi \left(\underbrace{\psi \left((x_i)_{i \in I} \otimes y \right)}_{= (x_i \otimes y)_{i \in I}} \right) = \phi \left((x_i \otimes y)_{i \in I} \right) = \phi \left(\sum_{i \in I} \operatorname{in}_i (x_i \otimes y) \right) \\
&= \sum_{i \in I} \underbrace{\phi \left(\operatorname{in}_i (x_i \otimes y) \right)}_{= (\phi \circ \operatorname{in}_i)(x_i \otimes y)} = \sum_{i \in I} \underbrace{(\phi \circ \operatorname{in}_i)}_{= \operatorname{in}_i \otimes \operatorname{id}} (x_i \otimes y) = \sum_{i \in I} \underbrace{(\operatorname{in}_i \otimes \operatorname{id}) (x_i \otimes y)}_{= \operatorname{in}_i (x_i) \otimes y} \\
&= \sum_{i \in I} \operatorname{in}_i (x_i) \otimes y = \left(\sum_{i \in I} \operatorname{in}_i (x_i) \right) \otimes y = (x_i)_{i \in I} \otimes y.
\end{aligned}$$

Ferner gilt für jedes $i \in I$, für jedes $x_i \in X_i$ und für jedes $y \in Y$ erstmal

$$\begin{aligned}
(\psi\phi \operatorname{in}_i) (x_i \otimes y) &= \psi \left(\underbrace{(\phi \operatorname{in}_i)}_{= \operatorname{in}_i \otimes \operatorname{id}} (x_i \otimes y) \right) = \psi \left((\operatorname{in}_i \otimes \operatorname{id}) (x_i \otimes y) \right) \\
&= \psi \left(\operatorname{in}_i (x_i) \otimes y \right) = \psi \left(\left(\begin{cases} x_i, & \text{wenn } j = i; \\ 0, & \text{wenn } j \neq i \end{cases} \right)_{j \in I} \otimes y \right) \\
&= \left(\begin{cases} x_i, & \text{wenn } j = i; \\ 0, & \text{wenn } j \neq i \end{cases} \otimes y \right)_{j \in I} = \left(\begin{cases} x_i \otimes y, & \text{wenn } j = i; \\ 0, & \text{wenn } j \neq i \end{cases} \right)_{j \in I} \\
&= \operatorname{in}_i (x_i \otimes y).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß $\psi\phi \operatorname{in}_i = \operatorname{in}_i$ auf allen reinen Tensoren in $X_i \otimes_R Y$ gilt (für jedes $i \in I$). Folglich gilt $\psi\phi \operatorname{in}_i = \operatorname{in}_i$ auf allen Elementen von $X_i \otimes_R Y$ (denn jedes Element von $X_i \otimes_R Y$ ist eine Summe von reinen Tensoren). Das heißt, $\psi\phi \mid_{\operatorname{in}_i(X_i \otimes_R Y)} = \operatorname{id} \mid_{\operatorname{in}_i(X_i \otimes_R Y)}$ für jedes $i \in I$. Daher ist $\psi\phi = \operatorname{id}$ auf allen Elementen von $\coprod_{i \in I} (X_i \otimes_R Y)$ (denn jedes Element von $\coprod_{i \in I} (X_i \otimes_R Y)$ ist Summe von Bildern von Elementen von $X_i \otimes_R Y$ unter den jeweiligen Abbildungen in_i).

Wegen $\phi\psi = \operatorname{id}$ und $\psi\phi = \operatorname{id}$ ist ϕ ein Isomorphismus, was zu beweisen war.

1.8. Folgerung: 1) Sei R ein Ring. Sei X ein freier R-Rechtsmodul mit Basis $(x_i)_{i \in I}$, und sei Y ein R-Linksmodul. Dann besitzt jedes Element von $X \otimes_R Y$ eine eindeutige Darstellung in der Form $\sum\limits_{i\in I} x_i \otimes y_i$, wobei $y_i \in Y$ für jedes $i \in I$ gilt, und $y_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist.

Analog können wir alle Elemente von $X \otimes_R Y$ als Summen darstellen, wenn Y eine Basis hat:

2) Sei R ein Ring. Sei X ein R-Rechtsmodul, und sei Y ein freier R-Linksmodul mit Basis $(y_i)_{i\in I}$. Dann besitzt jedes Element von $X \otimes_R Y$ eine eindeutige Darstellung in der Form $\sum\limits_{i\in I} x_i \otimes y_i$, wobei $x_i \in X$ für jedes $i \in I$ gilt, und $x_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist.

3) Ist k ein Körper, ist V ein k-Vektorraum mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, und ist W ein k-Vektorraum mit Basis $(w_j)_{j\in J}$, dann ist $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine k-Basis von $V \otimes_k W$. Insbesondere gilt $\dim (V \otimes_k W) = \dim V \cdot \dim W$, falls $\dim V < \infty$ und $\dim W < \infty$ ist.

Beweis: **1)** Zuerst ein Lemma:

Lemma 1: Angenommen, für jedes $i \in I$ sei ein Element y_i von Y so gewählt, daß $y_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist, und daß $\sum\limits_{i\in I} x_i \otimes y_i = 0$ gilt. Dann ist $y_i = 0$ für alle $i \in I$.

Beweis des Lemmas 1: Für jedes $i \in I$ sei $\mathrm{pr}_i : X \to R$ die R-lineare Abbildung, die x_j auf $\delta_{i,j}$ für alle $j \in I$ schickt.[12] Dann ist $\sum\limits_{j\in I} x_j \otimes y_j = \sum\limits_{i\in I} x_i \otimes y_i = 0$, also

$$0 = (\mathrm{pr}_i \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{j\in I} x_j \otimes y_j \right) = \sum_{j\in I} \underbrace{\mathrm{pr}_i (x_j)}_{=\delta_{i,j}} \otimes y_j = 1 \otimes y_i.$$

Doch das Element $1 \otimes y_i \in R \otimes_R Y$ ist das Bild des Elementes $y_i \in Y$ beim kanonischen Isomorphismus $Y \to R \otimes_R Y$. Aus $1 \otimes y_i = 0$ folgt also $y_i = 0$. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Nun werden wir beweisen, daß jedes Element von $X \otimes_R Y$ eine eindeutige Darstellung in der Form $\sum\limits_{i\in I} x_i \otimes y_i$ hat, wobei $y_i \in Y$ für jedes $i \in I$ gilt, und $y_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist.

Beweis der Existenz der Darstellung: Wir wollen zeigen, daß jedes Element von $X \otimes_R Y$ eine Darstellung in der Form $\sum\limits_{i\in I} x_i \otimes y_i$ besitzt, wobei $y_i \in Y$ für jedes $i \in I$ gilt, und $y_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist.

Sei also $v \in X \otimes_R Y$. Da jeder Tensor in $X \otimes_R Y$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von reinen Tensoren ist, gibt es also endlich viele Elemente u_1, u_2, ..., u_n von X und genausoviele Elemente v_1, v_2, ..., v_n von Y sowie ganze Zahlen λ_1, λ_2, ..., λ_n so, daß $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \otimes v_j$ ist. Da $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis von X ist, gibt es für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ eine Familie $(r_{j,i})_{i\in I}$ von Elementen $r_{j,i} \in R$ so, daß $r_{j,i} \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$

[12] So eine Abbildung pr_i existiert und ist eindeutig, weil $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis des R-Rechtsmoduls X ist.

gilt, und daß $u_j = \sum\limits_{i \in I} x_i \cdot r_{j,i}$ ist. Somit ist

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{u_j}_{= \sum\limits_{i \in I} x_i \cdot r_{j,i}} \otimes v_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i \in I} x_i \cdot r_{j,i}}_{= \sum\limits_{i \in I} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i \cdot \lambda_j r_{j,i}} \otimes v_j = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_i \cdot \lambda_j r_{j,i} \otimes v_j}_{= x_i \otimes \lambda_j r_{j,i} v_j}$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n} x_i \otimes \lambda_j r_{j,i} v_j = \sum_{i \in I} x_i \otimes \sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_{j,i} v_j.$$

Somit hat das Element v eine Darstellung in der Form $\sum\limits_{i \in I} x_i \otimes y_i$, wobei $y_i \in Y$ für jedes $i \in I$ gilt, und $y_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist. (Und zwar mit $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j r_{j,i} v_j$ für jedes $i \in I$.) Damit ist die Existenz der Darstellung gezeigt.

Beweis der Eindeutigkeit der Darstellung: Nun wollen wir zeigen, daß jedes Element von $X \otimes_R Y$ *höchstens eine* Darstellung in der Form $\sum\limits_{i \in I} x_i \otimes y_i$ besitzt, wobei $y_i \in Y$ für jedes $i \in I$ gilt, und $y_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist.

In der Tat nehmen wir an, daß ein gewisses Element $v \in X \otimes_R Y$ zwei solche Darstellungen hat: $v = \sum\limits_{i \in I} x_i \otimes y_{1,i}$ für irgendwelche $y_{1,i} \in Y$ (so, daß $y_{1,i} \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist) und $v = \sum\limits_{i \in I} x_i \otimes y_{2,i}$ für irgendwelche $y_{2,i} \in Y$ (so, daß $y_{2,i} \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist). Wir wollen zeigen, daß beide Darstellungen gleich sind, also daß $y_{1,i} = y_{2,i}$ für alle $i \in I$ gilt. In der Tat ist $\sum\limits_{i \in I} x_i \otimes (y_{1,i} - y_{2,i}) = \underbrace{\sum_{i \in I} x_i \otimes y_{1,i}}_{=v} - \underbrace{\sum_{i \in I} x_i \otimes y_{2,i}}_{=v} = 0$. Nach Lemma 1 folgt hieraus $y_{1,i} - y_{2,i} = 0$ für alle $i \in I$, also $y_{1,i} = y_{2,i}$ für alle $i \in I$, und damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung bewiesen.

2) Analog zu **1)**.

3) Sei k ein Körper. Sei V ein k-Vektorraum mit Basis $(v_i)_{i \in I}$. Sei W ein k-Vektorraum mit Basis $(w_j)_{j \in J}$.

Schritt 1: Wir beweisen zuerst, daß $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ein Erzeugendensystem des k-Vektorraumes $V \otimes_k W$ ist.

Beweis: Da jeder Tensor in $V \otimes_k W$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination (und somit auch eine k-Linearkombination) von reinen Tensoren ist[13], reicht es aus, zu beweisen, daß jeder reine Tensor in $V \otimes_k W$ in dem von der Familie $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ erzeugten k-Untervektorraum von $V \otimes_k W$ liegt.

Dies werden wir nun beweisen. Jeder reine Tensor in $V \otimes_k W$ hat die Form $x \otimes y$ für ein $x \in V$ und ein $y \in W$. Seien also $x \in V$ und $y \in W$ beliebig gegeben. Wir wollen dann beweisen, daß der Tensor $x \otimes y$ in dem von der Familie $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ erzeugten k-Untervektorraum von $V \otimes_k W$ liegt.

Da $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis des k-Vektorraumes V ist, gibt es eine Familie $(\alpha_i)_{i \in I}$ von Elementen $\alpha_i \in k$ so, daß $\alpha_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt, und daß $x = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i v_i$

[13] Dies folgt daraus, daß für jeden Ring R, jeden R-Rechtsmodul X und jeden R-Linksmodul Y jeder Tensor in $X \otimes_R Y$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von reinen Tensoren ist.

ist. Da $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis des k-Vektorraumes W ist, gibt es eine Familie $(\beta_j)_{j\in J}$ von Elementen $\beta_j \in k$ so, daß $\beta_j \neq 0$ nur für endlich viele $j \in J$ gilt, und daß $y = \sum\limits_{j\in J} \beta_j w_j$ ist. Damit ist

$$x \otimes y = \left(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j\in J} \beta_j w_j\right) = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \underbrace{\alpha_i v_i \otimes \beta_j w_j}_{=\alpha_i\beta_j v_i \otimes w_j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \alpha_i \beta_j v_i \otimes w_j.$$

Somit liegt $x\otimes y$ in dem von der Familie $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ erzeugten k-Untervektorraum von $V \otimes_k W$. Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2: Jetzt werden wir beweisen, daß die Familie $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ linear unabhängig ist.

Beweis: Sei $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ eine Familie von Elementen $\alpha_{i,j} \in k$ so, daß $\alpha_{i,j} \neq 0$ nur für endlich viele Paare $(i,j) \in I \times J$ gilt, und daß $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{i,j} v_i \otimes w_j = 0$ ist. Wir müssen nun zeigen, daß $\alpha_{u,v} = 0$ für alle $(u,v) \in I \times J$ gilt.

Für jedes $u \in I$ sei $\mathrm{pr}_u : V \to k$ die k-lineare Abbildung, die v_i auf $\delta_{u,i}$ für alle $i \in I$ schickt.[14] Für jedes $v \in J$ sei $\mathrm{pr}'_v : W \to k$ die k-lineare Abbildung, die w_j auf $\delta_{v,j}$ für alle $j \in J$ schickt.[15] Für alle $u \in I$ und $v \in J$ ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{pr}_u \otimes \mathrm{pr}'_v)(0) \\ &= (\mathrm{pr}_u \otimes \mathrm{pr}'_v)\left(\sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{i,j} v_i \otimes w_j\right) \qquad \left(\text{denn } 0 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{i,j} v_i \otimes w_j\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{i,j} \underbrace{\mathrm{pr}_u(v_i)}_{=\delta_{u,i}} \otimes \underbrace{\mathrm{pr}'_v(w_j)}_{=\delta_{v,j}} = \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{i,j} \underbrace{\delta_{u,i}\delta_{v,j}}_{=\delta_{(u,v),(i,j)}} 1 \otimes 1 = \alpha_{u,v} 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

in $k \otimes_k k$, also $\alpha_{u,v} = 0$. Damit ist gezeigt, daß die Familie $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ linear unabhängig ist; das heißt, Schritt 2 ist bewiesen.

Schritt 3: Aus den Schritten 1 und 2 folgt, daß $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine k-Basis von $V \otimes_k W$ ist. Also ist $\dim(V \otimes_k W) = |I \times J| = |I| \cdot |J|$, während $|I| = \dim V$ und $|J| = \dim W$ ist. Das heißt, $\dim(V \otimes_k W) = \dim V \cdot \dim W$. Damit ist der Beweis von 1.8. vollständig.

1.9. Satz (Rechtsexaktheit von $\otimes$): 1) Sei R ein Ring, und sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von R-Linksmoduln (das heißt, A, B und C sind R-Linksmoduln, und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ sind R-lineare Abbildungen mit $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, und g ist ein Epimorphismus). Sei X ein R-Rechtsmodul. Dann ist

$$X \otimes_R A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} X \otimes_R B \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} X \otimes_R C \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von abelschen Gruppen.

[14] So eine Abbildung pr_u existiert und ist eindeutig, weil $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis des k-Vektorraums V ist.

[15] So eine Abbildung pr'_v existiert und ist eindeutig, weil $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis des k-Vektorraums W ist.

2) Analoges gilt für den anderen Tensoranden (also für $A \otimes_R X$ statt $X \otimes_R A$ usw.).

Satz 1.9 fasst man oft folgendermaßen in Worte: "Tensorieren erhält die rechten Endstücke von exakten Sequenzen", oder auch "Tensorieren ist rechtsexakt".

Tensorprodukte über einem Körper

Wir haben damit die Grundlagen der Theorie der Tensorprodukte von Moduln über einem (allgemeinen) Ring kennengelernt. Wenn der Ring kommutativ oder gar ein Körper ist, erfüllen Tensorprodukte viele neue Eigenschaften, die über allgemeinen Ringen nicht gelten.

Zuerst einmal kann man, wenn k ein kommutativer Ring ist, jeden k-Modul gleichzeitig als k-Linksmodul und als k-Rechtsmodul und als (k, k)-Bimodul betrachten. Dies ermöglicht es uns, das Tensorprodukt zweier k-Moduln wieder als einen k-Modul anzusehen (man vergleiche dies mit der Situation über allgemeinen Ringen: dort ist das Tensorprodukt eines R-Rechtsmoduls mit einem R-Linksmodul einfach nur eine abelsche Gruppe, ohne zusätzliche R-Modulstruktur). Im Fall, daß k ein Körper ist, erhält man auf diese Weise den klassischen (aus der Linearen Algebra bekannten) Begriff des Tensorproduktes zweier Vektorräume.

Wir erinnern uns an einige grundlegende Eigenschaften dieses Begriffes:

1.9$\frac{1}{20}$. Satz (Exaktheit von $\otimes$): 1) Sei k ein Körper, und sei $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ eine exakte Folge von k-Vektorräumen (das heißt, A, B und C sind k-Vektorräume, und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ sind k-lineare Abbildungen mit $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, aber im Gegensatz zu Satz 1.9 braucht g nicht notwendigerweise ein Epimorphismus zu sein). Sei X ein k-Vektorraum. Dann ist

$$X \otimes_k A \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes f} X \otimes_k B \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes g} X \otimes_k C$$

eine exakte Folge von k-Vektorräumen.

2) Analoges gilt für den anderen Tensoranden (also für $A \otimes_k X$ statt $X \otimes_k A$ usw.).

Satz 1.9$\frac{1}{20}$ fasst man oft folgendermaßen in Worte: "Tensorieren über einem Körper erhält exakte Sequenzen", oder auch "Tensorieren über einem Körper ist exakt".

Eine weitere Eigenschaft von Tensorprodukten ist folgendes Lemma, das wir vielfach verwenden werden:

1.9$\frac{2}{20}$. Lemma: Sei k ein Körper, und seien V und W zwei k-Vektorräume. Seien α und β zwei Elemente von $V \otimes_k W$. Angenommen, für jedes $g \in W^*$ ist $(\operatorname{id} \otimes g)(\alpha) = (\operatorname{id} \otimes g)(\beta)$ in $V \otimes_k k$. Dann gilt $\alpha = \beta$ in $V \otimes_k W$.

Beweis von Lemma 1.9$\frac{2}{20}$. Sei $\gamma = \alpha - \beta$. Dann ist

$$(\operatorname{id} \otimes g)(\gamma) = (\operatorname{id} \otimes g)(\alpha - \beta) = \underbrace{(\operatorname{id} \otimes g)(\alpha)}_{=(\operatorname{id} \otimes g)(\beta)} - (\operatorname{id} \otimes g)(\beta) = 0 \qquad \text{für jedes } g \in W^*.$$

Sei $(y_i)_{i \in I}$ eine Basis des k-Vektorraums W. Nach Folgerung 1.8. **2)** (angewandt auf k, V und W statt R, X bzw. Y) besitzt dann jedes Element von $V \otimes_k W$ eine eindeutige Darstellung in der Form $\sum_{i \in I} x_i \otimes y_i$, wobei $x_i \in V$ für jedes $i \in I$ gilt, und $x_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist. Insbesondere hat also das Element γ eine eindeutige Darstellung in dieser Form. Seien also $x_i \in V$ für jedes $i \in I$ so gewählt, daß $\gamma = \sum\limits_{i\in I} x_i \otimes y_i$ gilt, und $x_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ erfüllt ist.

Für jedes $j \in I$ können wir nun eine k-lineare Abbildung $g_j : W \to k$ definieren, indem wir

$$g_j(y_i) = \delta_{i,j} \qquad \text{für alle } i \in I$$

setzen (denn $(y_i)_{i\in I}$ ist eine Basis des k-Vektorraums W). Da $(\mathrm{id} \otimes g)(\gamma) = 0$ für jedes $g \in W^*$ gilt, ist also insbesondere $(\mathrm{id} \otimes g_j)(\gamma) = 0$ für jedes $j \in I$. Für jedes $j \in I$ ist also

$$\begin{aligned} 0 = (\mathrm{id} \otimes g_j)(\gamma) &= (\mathrm{id} \otimes g_j)\left(\sum_{i\in I} x_i \otimes y_i\right) \qquad \left(\text{denn } \gamma = \sum_{i\in I} x_i \otimes y_i\right) \\ &= \sum_{i\in I} \underbrace{\mathrm{id}(x_i)}_{=x_i} \otimes \underbrace{g_j(y_i)}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i\in I} x_i \delta_{i,j} = x_j \end{aligned}$$

(denn in der Summe $\sum\limits_{i\in I} x_i \delta_{i,j}$ sind die Summanden für $i \neq j$ alle gleich 0 (weil $\delta_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt) und können daher weggelassen werden; es bleibt daher nur der Summand $x_j \underbrace{\delta_{j,j}}_{=1} = x_j$). Das heißt, $0 = x_i$ für jedes $i \in I$. Damit gilt $\alpha - \beta = \gamma = \sum\limits_{i\in I} \underbrace{x_i}_{=0} \otimes y_i = 0$, also $\alpha = \beta$, und Lemma $1.9\frac{2}{20}$ ist bewiesen.

Tensorprodukte von n Moduln

Wenn R und T zwei Ringe sind, X ein R-Rechtsmodul ist, Y ein (R,T)-Bimodul ist, und Z ein T-Linksmodul ist, dann besagt Satz 1.5. **2)**, daß man die Tensorprodukte $(X \otimes_R Y) \otimes_T Z$ und $X \otimes_R (Y \otimes_T Z)$ im Wesentlichen miteinander gleichsetzen darf (denn die Abbildung $(X \otimes_R Y) \otimes_T Z \to X \otimes_R (Y \otimes_T Z)$ ist ein kanonischer Isomorphismus dazwischen). Eine entsprechende Regel gilt für n Moduln:

1.9$\frac{5}{10}$. Satz: Sei $n \geq 1$. Seien R_1, R_2, ..., R_{n-1} beliebige Ringe. Sei X_1 ein R_1-Rechtsmodul. Für jedes $i \in \{2, 3, ..., n-1\}$ sei X_i ein (R_{i-1}, R_i)-Bimodul. Schließlich sei X_n ein R_{n-1}-Linksmodul. Dann sind alle Tensorprodukte, die man durch Setzen von Klammern im Term $X_1 \otimes_{R_1} X_2 \otimes_{R_2} X_3 \otimes_{R_3} ... \otimes_{R_{n-1}} X_n$ erhält, zueinander isomorph.[16] Sind zusätzlich R_0 und R_n zwei weitere Ringe, und ist X_1 ein (R_0, R_1)-Bimodul und ist X_n ein (R_{n-1}, R_n)-Bimodul, dann sind diese Tensorprodukte sogar als (R_0, R_n)-Bimoduln zueinander isomorph.

Dieser Satz ist unschwer zu beweisen (genauso, wie man ausgehend von der Assoziativität der Multiplikation in einer Algebra zeigt, daß man ein Produkt von n Elementen einer Algebra beliebig klammern kann und der Wert immer der gleiche ist). Jedoch wird er selten in voller Allgemeinheit verwendet. Meistens benötigt man ihn nur für den Fall, in dem alle beteiligten Ringe einander gleich und kommutativ sind. In diesem Fall nimmt er folgende Form an:

[16] Für den Fall $n = 4$ bedeutet dies beispielsweise

$$\begin{aligned} ((X_1 \otimes_{R_1} X_2) \otimes_{R_2} X_3) \otimes_{R_3} X_4 &\cong (X_1 \otimes_{R_1} X_2) \otimes_{R_2} (X_3 \otimes_{R_3} X_4) \cong X_1 \otimes_{R_1} (X_2 \otimes_{R_2} (X_3 \otimes_{R_3} X_4)) \\ &\cong (X_1 \otimes_{R_1} (X_2 \otimes_{R_2} X_3)) \otimes_{R_3} X_4 \cong X_1 \otimes_{R_1} ((X_2 \otimes_{R_2} X_3) \otimes_{R_3} X_4). \end{aligned}$$

1.9$\frac{6}{10}$. Satz: Sei k ein kommutativer Ring. Sei $n \geq 1$. Seien X_1, X_2, ..., X_n beliebige k-Moduln. Dann sind alle Tensorprodukte, die man durch Setzen von Klammern im Term $X_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes ... \otimes X_n$ erhält (wobei das Zeichen $\otimes$ immer für $\otimes_k$ steht), zueinander isomorph als k-Moduln.

Definition: Sei k ein kommutativer Ring. Sei $n \geq 1$. Seien X_1, X_2, ..., X_n beliebige k-Moduln. Unter dem *Tensorprodukt* dieser k-Moduln X_1, X_2, ..., X_n versteht man den k-Modul T, der auf eine der folgenden drei Weisen definiert wird:

Erste Definition von T: Man klammere den Term $X_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes ... \otimes X_n$ irgendwie, z. B. linksassoziativ: $(((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes ...) \otimes X_n$. Der so entstandene k-Modul ist (bis auf kanonische Isomorphie) von der Klammerung unabhängig (nach Satz 1.9$\frac{6}{10}$), und wird als k-Modul T gewählt.

Zweite Definition von T: [17] Sei $F = \mathbb{Z}^{(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)}$ die freie abelsche Gruppe mit Basis $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Sei $N \subseteq F$ die Untergruppe, die erzeugt wird von allen Elementen der Form

$$\left.\begin{array}{l} (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_\ell + x'_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) - (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) \\ \qquad - (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x'_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) \\ \qquad \text{mit } \ell \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und} \\ \qquad (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_\ell, x'_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_{\ell-1} \times X_\ell \times X_\ell \times X_{\ell+1} \times ... \times X_n; \\ (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, r x_\ell, x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, ..., x_n) - (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_\ell, r x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, ..., x_n) \\ \qquad \text{mit } \ell \in \{1, 2, ..., n-1\}, \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \text{ und } r \in k. \end{array}\right\}$$

Dann sei $T = F \diagup N$. Damit ist eine abelsche Gruppe T definiert. Diese Gruppe wird zum k-Modul, indem man

$$r \cdot \overline{(x_1, x_2, ..., x_n)} = \overline{(r x_1, x_2, x_3, ..., x_n)} \qquad \text{für alle } r \in k \text{ und } (x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$$

setzt. (Hierbei bedeutet für jedes $y \in F$ der Term $\overline{y}$ die Restklasse von y modulo N.)

Dritte Definition von T: [18] Sei $F_k = k^{(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)}$ der freie k-Modul mit Basis $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Sei $N_k \subseteq F_k$ der k-Untermodul von F_k, der erzeugt wird von allen Elementen der Form

$$\left.\begin{array}{l} (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_\ell + x'_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) - (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) \\ \qquad - (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x'_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) \\ \qquad \text{mit } \ell \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und} \\ \qquad (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_\ell, x'_\ell, x_{\ell+1}, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_{\ell-1} \times X_\ell \times X_\ell \times X_{\ell+1} \times ... \times X_n; \\ (x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, r x_\ell, x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, ..., x_n) - r\,(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \qquad \text{mit } \ell \in \{1, 2, ..., n\}, \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \text{ und } r \in k. \end{array}\right\}$$

Dann sei $T = F_k \diagup N_k$. Damit ist ein k-Modul T definiert.

Diese drei Definitionen von T führen auf drei (technisch gesehen) verschiedene k-Moduln T, die aber zueinander kanonisch isomorph sind. Somit können wir sie gleichsetzen und mit $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ (ohne Klammern) bezeichnen. Wir nennen $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ das Tensorprodukt der k-Moduln X_1, X_2, ..., X_n.

---

[17] Diese Definition von T ist angelehnt an die Definition des Tensorproduktes $X \otimes Y$ von *zwei* Moduln X und Y, die wir in Satz 1.3 gegeben haben.

[18] Diese Definition von T ist eine Variation der vorhin gegebenen Zweiten Definition von T.

Für jedes $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ können wir ein Element $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n$ von $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ definieren. Die Definition hängt davon ab, wie genau wir das Tensorprodukt $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ definiert haben (wir haben ja drei verschiedene Definitionen von $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n = T$ gegeben):

- Wenn wir $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ nach der ersten Definition von T definiert haben, dann verstehen wir unter diesem Element $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n$ das Element, das man erhält, wenn man den Term $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes ... \otimes x_n$ so klammert wie man den Term $X_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes ... \otimes X_n$ geklammert hat[19].

- Wenn wir $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ nach der zweiten Definition von T definiert haben, dann verstehen wir unter diesem Element $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n$ die Projektion des Elementes $(x_1, x_2, ..., x_n) \in F$ auf $F \diagup N = T$.

- Wenn wir $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ nach der dritten Definition von T definiert haben, dann verstehen wir unter diesem Element $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n$ die Projektion des Elementes $(x_1, x_2, ..., x_n) \in F_k$ auf $F_k \diagup N_k = T$.

Bemerkung: Die obige Definition des Tensorproduktes $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ von n beliebigen k-Moduln X_1, X_2, ..., X_n wurde nur für den Fall $n \geq 1$ formuliert. Doch man kann auch das Tensorprodukt von null k-Moduln (also das leere Tensorprodukt von k-Moduln) definieren; und zwar definiert man dieses Tensorprodukt als den k-Modul k selber. Genauso gut könnte man dieses Tensorprodukt gemäß der (obigen) Dritten Definition von T für $n = 0$ definieren (dann würde $F_k = k^{(\text{leeres Produkt})} = k^{\{()\}} \cong k$ und $N_k = 0$, also $T = F_k \diagup N_k \cong k \diagup 0 = k$ herauskommen). Jedoch ergeben die (oben gegebenen) Erste und Zweite Definition von T im Fall $n = 0$ keinen Sinn.

Das Tensorprodukt von null Elementen (also das leere Tensorprodukt von Elementen von k-Moduln) ist definiert als das Element 1 von k.

Damit sind sowohl das Tensorprodukt von n beliebigen k-Moduln, als auch das Tensorprodukt von n Elementen dieser k-Moduln auch im Fall $n = 0$ definiert. Natürlich ist dies kein besonders interessanter Fall und gewiss nicht der Fall, für den der Begriff des Tensorproduktes ursprünglich erfunden wurde. Doch es ist oft hilfreich, eine sinnvolle Definition von Tensorprodukten für diesen Fall zu kennen (unter anderem weil er sich in vielen Induktionsbeweisen als Induktionsanfang gebrauchen läßt, der einfacher zu behandeln ist als der Fall $n = 1$).

Mehr gibt es über den Fall $n = 0$ nicht zu sagen; also zurück zum Fall von allgemeinem $n \geq 0$:

Das Tensorprodukt von n Moduln hat folgende universelle Eigenschaft (in Analogie zu der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes von zwei Moduln, die wir in Bemerkung 1.4 **4)** gezeigt haben):

1.9$\frac{7}{10}$. Satz (universelle Eigenschaft des Tensorproduktes vieler Moduln): Sei k ein kommutativer Ring. Sei $n \geq 0$. Seien X_1, X_2, ..., X_n beliebige k-Moduln.

[19] Dies bedeutet beispielsweise $(x_1 \otimes x_2) \otimes (x_3 \otimes (x_4 \otimes x_5))$ in dem Fall, wenn $n = 5$ ist und wir den Term $X_1 \otimes X_2 \otimes X_3 \otimes ... \otimes X_n$ zu $(X_1 \otimes X_2) \otimes (X_3 \otimes (X_4 \otimes X_5))$ geklammert haben.

1) Sei $\tau : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$ die Abbildung, die jedes $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ überführt in $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n \in X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n$. Dann ist τ eine k-multilineare Abbildung.[20]

2) Für jeden k-Modul M und jede k-multilineare Abbildung $\varphi : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to M$ gibt es genau eine k-lineare Abbildung $f : X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n \to M$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & M \\ X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Man kann diesen Satz auch etwas allgemeiner formulieren (statt dem kommutativen Ring k kann man auch mehrere verschiedene nichtkommutative Ringe zulassen), aber wir werden solche Allgemeinheit nicht nötig haben.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist k ein kommutativer Ring, und X ein k-Modul, so bezeichnen wir das Tensorprodukt $\underbrace{X \otimes X \otimes ... \otimes X}_{n \text{ mal}}$ mit $X^{\otimes n}$ oder auch mit $\otimes^n X$. Für $n = 0$ ist dabei das Tensorprodukt $\underbrace{X \otimes X \otimes ... \otimes X}_{n \text{ mal}}$ (und genauso jedes Tensorprodukt von null k-Moduln) als der k-Modul k zu deuten; das heißt, $X^{\otimes 0} = \otimes^0 X = k$.

Es ist anzumerken, daß diese Definition die Folge hat, daß die Relation $(\otimes^a X) \otimes \left(\otimes^b X\right) = \otimes^{a+b} X$ für jeden k-Modul X und je zwei natürliche Zahlen a und b gilt. Das Gleichheitszeichen ist in dieser Relation allerdings nicht als eine echte, mathematisch strenge Gleichheit zu deuten, sondern als eine kanonische Isomorphie zwischen den k-Moduln $(\otimes^a X) \otimes \left(\otimes^b X\right)$ und $\otimes^{a+b} X$, die "dermaßen kanonisch ist", daß man diese beiden k-Moduln miteinander gleichsetzen kann, ohne daß man auf Schwierigkeiten stößt. Deshalb werden wir diese beiden k-Moduln auch miteinander gleichsetzen.

Zusatzstruktur auf Hom

Doch nun zurück zu der Situation über allgemeinen Ringen.

Wir haben oben für einen Ring R, einen R-Rechtsmodul X_R und einen R-Linksmodul ${}_RY$ das Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ eingeführt - dieses Tensorprodukt war zuerst nur eine abelsche Gruppe, doch wenn wir auf X und Y zusätzliche Strukturen voraussetzen, können wir laut 1.5. auch das Tensorprodukt $X \otimes_R Y$ mit mehr Struktur ausstatten.

Etwas ähnliches läßt sich mit dem Hom zweier Moduln machen. Ist R ein Ring, und sind ${}_RX$ und ${}_RY$ zwei R-Linksmoduln, dann ist $\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ (die Menge aller R-Linksmodulhomomorphismen von X nach Y) kanonisch nur mit der Struktur einer abelschen Gruppe ausgestattet. Doch wenn auf X und Y weitere Strukturen bekannt sind, lassen sie sich auch auf $\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ übertragen:

1.9$\frac{1}{2}$. Satz: a) Seien R und S Ringe. Sei X ein (R, S)-Bimodul, und sei Y ein R-Linksmodul. Auf der abelschen Gruppe $\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ ist dann kanonisch eine

[20] Hierbei heißt eine Abbildung $F : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to M$ (wobei M ein k-Modul ist) genau dann *k-multilinear*, wenn sie k-linear in jeder der Variablen ist, d. h. wenn für jedes $\ell \in \{1, 2, ..., n\}$ und für beliebige $(x_1, x_2, ..., x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_{\ell-1} \times X_{\ell+1} \times ... \times X_n$ die Abbildung

$$X_\ell \to M, \qquad x_\ell \mapsto F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

eine k-lineare Abbildung ist.

S-Linksmodulstruktur definiert durch

$$(sf)(x) = f(xs) \qquad \text{für alle } s \in S,\ f \in \operatorname{Hom}_R(X,Y) \text{ und } x \in X.$$

b) Seien R und T Ringe. Sei X ein R-Linksmodul, und sei Y ein (R,T)-Bimodul. Auf der abelschen Gruppe $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ ist dann kanonisch eine T-Rechtsmodulstruktur definiert durch

$$(ft)(x) = f(x)\,t \qquad \text{für alle } t \in T,\ f \in \operatorname{Hom}_R(X,Y) \text{ und } x \in X.$$

c) Seien R, S und T Ringe. Sei X ein (R,S)-Bimodul, und sei Y ein (R,T)-Bimodul. Laut Satz $1.9\frac{1}{2}$ **a)** und **b)** sind auf der abelschen Gruppe $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ eine S-Linksmodulstruktur und eine T-Rechtsmodulstruktur gegeben. Diese zwei Strukturen ergeben zusammen eine (S,T)-Bimodulstruktur.

(Diese Aussage kann man sich folgendermaßen veranschaulichen: Da X ein (R,S)-Bimodul ist, können wir X als ${}_RX_S$ schreiben. Analog ist $Y = {}_RY_T$. Nun definiert Satz $1.9\frac{1}{2}$ **c)** auf $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ die Struktur eines (S,T)-Bimoduls; wir können also ${}_S(\operatorname{Hom}_R(X,Y))_T$ schreiben. Satz $1.9\frac{1}{2}$ **c)** besagt also, anschaulich gesprochen,

$$\operatorname{Hom}_R({}_RX_S\ ,\ {}_RY_T) = {}_S(\operatorname{Hom}_R(X,Y))_T\ .$$

Wir können uns also vorstellen, Hom nehme bei den zwei Argumenten ${}_RX_S$ und ${}_RY_T$ die zwei linken R's weg, aber das S und das T bleiben erhalten, und zwar bleibt das S links und das T rechts.)

Auf diese Weise können wir auf $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ für zwei R-Linksmoduln ${}_RX$ und ${}_RY$ Zusatzstrukturen einführen, wenn wir auf ${}_RX$ und ${}_RY$ welche kennen. Analog können wir auch für zwei R-Rechtsmoduln X_R und Y_R mit Zusatzstrukturen auch eine neue Struktur auf $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ einführen. So behauptet das Analogon von Satz $1.9\frac{1}{2}$ **c)** für R-Rechtsmoduln, daß für je drei Ringe R, S und T, jeden (S,R)-Bimodul X und jeden (T,R)-Bimodul Y eine kanonische (T,S)-Bimodulstruktur auf der abelschen Gruppe $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ existiert. Anschaulich ausgedrückt heißt dies $\operatorname{Hom}_R({}_SX_R\ ,\ {}_TY_R) = {}_T(\operatorname{Hom}_R(X,Y))_S$.

Bemerkung: Strenggenommen müssten wir verschiedene Notationen für "die Menge aller R-Linksmodulhomomorphismen aus einem R-Linksmodul X in einen R-Linksmodul Y" und "die Menge aller R-Rechtsmodulhomomorphismen aus einem R-Rechtsmodul X in einen R-Rechtsmodul Y" benutzen (anstatt beide Mengen mit $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ zu bezeichnen, wie wir es hier getan haben), denn sonst kann es in gewissen Situationen passieren, daß die Notation $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ zweideutig ist (und zwar ist sie dies genau dann, wenn X und Y beides (R,R)-Bimoduln sind - dann kann nämlich $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ sowohl die Menge aller R-Linksmodulhomomorphismen von X nach Y, als auch die Menge aller R-Rechtsmodulhomomorphismen von X nach Y bedeuten). Doch wir wollen hier darauf verzichten, da diese Art Situationen bei uns meistens nicht auftreten (außer im Falle, wenn R kommutativ ist, und die (R,R)-Bimoduln symmetrisch sind[21] - aber in diesem Falle sind R-Linksmodulhomomorphismen und R-Rechtsmodulhomomorphismen das gleiche, und die zwei verschiedenen Bedeutungen von $\operatorname{Hom}_R(X,Y)$ sind gleich).

[21] Ein (R,R)-Bimodul M (für einen kommutativen Ring R) heißt *symmetrisch*, wenn er $rm = mr$ für alle $m \in M$ und $r \in R$ erfüllt.

$\boxed{\textbf{Algebren}}$

Nun kommen wir zum Begriff einer Algebra über einem kommutativen Ring. Wir stellen drei verschiedene Definitionen dieses Begriffes gegenüber, die im Wesentlichen äquivalent sind - d. h. sie definieren isomorphe Kategorien. Um diese Begriffe dennoch voneinander zu unterscheiden, bezeichnen wir sie vorläufig mit k-Algebra$_1$, k-Algebra$_2$ und k-Algebra$_3$ (auch wenn wir später sie wieder alle einfach als Algebren bezeichnen werden):

Definition (Algebra$_1$): Sei k ein kommutativer Ring. Unter einer k-*Algebra*$_1$ verstehen wir eine Menge A mit einer k-Modulstruktur und gleichzeitig mit einer Ringstruktur, wobei die Addition im k-Modul A und die Addition im Ring A identisch sein sollen, und für alle $\alpha \in k$ und $a, b \in A$ gelten soll: $\alpha (ab) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$.

Definition (Algebra$_2$): Sei k ein kommutativer Ring. Unter einer k-*Algebra*$_2$ verstehen wir ein Paar (A, η), wobei A ein Ring und $\eta : k \to A$ ein Ringhomomorphismus ist, welcher $\operatorname{Im} \eta \subseteq Z(A)$ erfüllt. Dabei bezeichnen wir mit $Z(A)$ das sogenannte *Zentrum* des Ringes A, definiert durch $Z(A) = \{a \in A \mid \text{für alle } x \in A \text{ ist } xa = ax\}$.

Definition (Algebra$_3$): Sei k ein kommutativer Ring. Wir schreiben kurz $\otimes$ für $\otimes_k$. Unter einer k-*Algebra*$_3$ verstehen wir ein Tripel (A, μ, η), wobei A ein k-Modul ist, und $\mu : A \otimes A \to A$ und $\eta : k \to A$ zwei k-lineare Abbildungen sind, für die folgende drei Eigenschaften gelten:

- *Assoziativität:* Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \tag{1.1}$$
ist kommutativ, wobei $(A \otimes A) \otimes A$ mit $A \otimes (A \otimes A)$ identifiziert wird (wegen der kanonischen Isomorphie $(A \otimes A) \otimes A \cong A \otimes (A \otimes A)$).

- *Linke Eins:* Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ A & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$
ist kommutativ, wobei $\mathrm{kan} : k \otimes A \to A$ der durch $\mathrm{kan}(\lambda \otimes a) = \lambda a$ für alle $\lambda \in k$ und $a \in A$ definierte kanonische k-Modulisomorphismus ist.

- *Rechte Eins:* Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \otimes k \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \eta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ A & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$
ist kommutativ, wobei $\mathrm{kan} : A \otimes k \to A$ der durch $\mathrm{kan}(a \otimes \lambda) = \lambda a$ für alle $\lambda \in k$ und $a \in A$ definierte kanonische k-Modulisomorphismus ist.

In den meisten elementaren Algebrakursen wird eine k-Algebra als eine k-Algebra$_1$ definiert. Wir werden allerdings später sehen, daß der Begriff der k-Algebra$_3$ eine "natürlichere" Definition des k-Algebrabegriffes darstellt[22]. Nun zeigen wir erstmal, daß die drei Begriffe k-Algebra$_1$, k-Algebra$_2$ und k-Algebra$_3$ im Wesentlichen äquivalent sind; dies bedeutet folgendes: Für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ kann man jede k-Algebra$_i$ kanonisch als k-Algebra$_j$ auffassen (d. h. die notwendige Struktur für eine k-Algebra$_j$ kanonisch hinzudefinieren); wenn man diese k-Algebra$_j$ dann wieder als k-Algebra$_i$ betrachtet, kommt wieder die ursprüngliche k-Algebra$_i$ heraus.

Beweis: **1)** Für jede k-Algebra$_1$ A gibt es einen Ringhomomorphismus $\eta : k \to A$, so daß (A, η) eine k-Algebra$_2$ ist, und zusätzlich eine k-lineare Abbildung $\mu : A \otimes A \to A$, so daß (A, μ, η) eine k-Algebra$_3$ ist. In der Tat definiere man $\eta : k \to A$ durch $\eta(\alpha) = \alpha \cdot 1_A$ für alle $\alpha \in k$, und $\mu : A \otimes A \to A$ auf den reinen Tensoren durch $\mu(a \otimes b) = ab$ für alle $a, b \in A$ [23]. (Tatsächlich ist dann η ein Ringhomomorphismus[24] und erfüllt $\operatorname{Im} \eta \subseteq Z(A)$ [25], und ferner sind η und μ zwei k-lineare Abbildungen, und die

[22] Und zwar werden wir den Begriff einer *Coalgebra* kennenlernen, dessen Definition genau die Definition einer Algebra$_3$, nur mit umgedrehten Pfeilen, ist.

[23] Dadurch ergibt sich tatsächlich eine wohldefinierte k-lineare Abbildung μ, weil die Abbildung

$$A \times A \to A, \qquad (a, b) \mapsto ab$$

tensoriell ist.

[24] denn $\eta(1_k) = 1_k \cdot 1_A = 1_A$, und für alle $\alpha \in k$ und $\beta \in k$ gilt

$$\begin{aligned} \eta(\alpha\beta) &= \alpha\beta \cdot 1_A = \alpha \underbrace{\beta \cdot (1_A \cdot 1_A)}_{\substack{= 1_A \cdot (\beta 1_A), \\ \text{denn } A \text{ ist } k\text{-Algebra}_1}} = \alpha (1_A \cdot (\beta 1_A)) = \underbrace{(\alpha 1_A)}_{= \eta(\alpha)} \cdot \underbrace{(\beta 1_A)}_{= \eta(\beta)} \qquad (\text{denn } A \text{ ist } k\text{-Algebra}_1) \\ &= \eta(\alpha) \cdot \eta(\beta) \end{aligned}$$

[25] denn für alle $\alpha \in k$ und $a \in A$ ist

$$\begin{aligned} \eta(\alpha) \cdot a &= (\alpha \cdot 1_A) \cdot a = \alpha (1_A \cdot a) \qquad (\text{denn } A \text{ ist eine } k\text{-Algebra}_1) \\ &= \alpha a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a \cdot \eta(\alpha) &= a \cdot (\alpha \cdot 1_A) = \alpha (a \cdot 1_A) \qquad (\text{denn } A \text{ ist eine } k\text{-Algebra}_1) \\ &= \alpha a, \end{aligned}$$

also $\eta(\alpha) \cdot a = a \cdot \eta(\alpha)$

Diagramme (1.1), (1.2) und (1.3) kommutieren[26].)

2) Für jede k-Algebra$_2$ (A, η) gibt es eine k-Modulstruktur auf A, sodaß A zusammen mit der gegebenen Ringstruktur und dieser k-Modulstruktur eine k-Algebra$_1$ ist, und eine k-lineare Abbildung $\mu : A \otimes A \to A$, so daß (A, μ, η) eine k-Algebra$_3$ ist.

In der Tat definiert man die k-Modulstruktur auf A durch $\alpha a = \eta(\alpha) a$ für alle $\alpha \in k$ und $a \in A$ [27], und man definiert die k-lineare Abbildung $\mu : A \otimes A \to A$ auf den reinen Tensoren durch $\mu(a \otimes b) = ab$ für alle $a, b \in A$ [28]. (Tatsächlich gilt dann $\alpha(ab) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ für alle $\alpha \in k$ und $a, b \in A$ [29], und ferner kommutieren die Diagramme (1.1), (1.2) und (1.3) [30].)

3) Jede k-Algebra$_3$ (A, μ, η) induziert eine Ringstruktur auf A so, daß A zusammen mit dieser Ringstruktur und der gegebenen k-Modulstruktur eine k-Algebra$_1$ ist; ferner ist (A, η) zusammen mit dieser Ringstruktur eine k-Algebra$_2$.

In der Tat definiert man die Ringstruktur auf A wie folgt: Die Multiplikation ist dabei durch

$$A \times A \to A, \qquad (a, b) \mapsto \mu(a \otimes b) \tag{1.4}$$

gegeben, und die multiplikative Eins ist $\eta(1)$. Dann ist A mit der Multiplikation (1.4)

[26]Denn die Kommutativität des Diagramms (1.1) ist äquivalent zur Assoziativität der Multiplikation im Ring A (denn die Kommutativität des Diagramms (1.1) ist äquivalent dazu, daß $\mu((\mu \otimes \mathrm{id})(v)) = \mu((\mathrm{id} \otimes \mu)(v))$ für jeden Tensor $v \in A \otimes A \otimes A$ gilt; offensichtlich reicht es aus, diese Gleichheit nur auf reinen Tensoren zu überprüfen, also nur auf Tensoren v der Form $v = a \otimes b \otimes c$ mit $a, b, c \in A$; doch in diesem Fall ist

$$\mu((\mu \otimes \mathrm{id})(v)) = \mu((\mu \otimes \mathrm{id})(a \otimes b \otimes c)) = \mu(\mu(a \otimes b) \otimes c) = \mu(ab \otimes c) = (ab) c$$

und

$$\mu((\mathrm{id} \otimes \mu)(v)) = \mu((\mathrm{id} \otimes \mu)(a \otimes b \otimes c)) = \mu(a \otimes \mu(b \otimes c)) = \mu(a \otimes bc) = a(bc)$$

), die Kommutativität des Diagramms (1.2) ist äquivalent zu $(\eta(1_k) \cdot a = a$ für alle $a \in A)$ (was aus $\eta(1_k) = 1_A$ folgt), und die Kommutativität des Diagramms (1.3) ist äquivalent zu $(a \cdot \eta(1_k) = a$ für alle $a \in A)$ (was wiederum aus $\eta(1_k) = 1_A$ folgt).

[27]Dies ist tatsächlich eine k-Modulstruktur auf A, denn dies ist einfach diejenige k-Modulstruktur auf A, die sich vermöge dem Ringhomomorphismus $\eta : k \to A$ aus der kanonischen A-Modulstruktur auf A ergibt.

[28]Dadurch ergibt sich tatsächlich eine wohldefinierte k-lineare Abbildung μ, weil die Abbildung

$$A \times A \to A, \qquad (a, b) \mapsto ab$$

tensoriell ist.

[29]denn

$$\begin{aligned} \alpha(ab) &= \eta(\alpha) ab; \\ (\alpha a) \cdot b &= (\eta(\alpha) a) \cdot b = \eta(\alpha) ab; \\ a \cdot (\alpha b) &= a \cdot (\eta(\alpha) b) = \underbrace{a\eta(\alpha)}_{\substack{=\eta(\alpha)a, \text{ da} \\ \operatorname{Im}\eta \subseteq Z(A)}} b = \eta(\alpha) ab \end{aligned}$$

[30]Dies beweist man wie in **1)**.

tatsächlich ein Ring[31]. Ferner ist η ein Ringhomomorphismus[32], und es gilt $\operatorname{Im}\eta \subseteq Z(A)$ [33]. Somit ist (A,η) tatsächlich eine k-Algebra$_2$. Man zeigt ebenfalls leicht, daß A zusammen mit der Ringstruktur und der gegebenen k-Modulstruktur eine k-Algebra$_1$ ist (dafür muß man nur noch nachrechnen, daß $\alpha(ab) = (\alpha a)\cdot b = a\cdot(\alpha b)$ für alle $\alpha \in k$ und $a, b \in A$ ist).

Damit haben wir nachgewiesen, daß man für alle $i, j \in \{1,2,3\}$ aus jeder k-Algebra$_i$ kanonisch eine k-Algebra$_j$ erhält. Aus dem Beweis folgt relativ schnell, daß man, wenn man aus dieser k-Algebra$_j$ dann wieder eine k-Algebra$_i$ erhält, damit die ursprüngliche k-Algebra$_i$ zurückgewinnt (der genauere Beweis wird dem Leser überlassen). ■

Definition: Nachdem wir jetzt gezeigt haben, daß k-Algebra$_1$, k-Algebra$_2$ und k-Algebra$_3$ eigentlich äquivalente Begriffe sind, können wir in der Zukunft einfach von einer *k-Algebra* sprechen. Dabei definieren wir eine *k-Algebra A* als eine k-Algebra$_i$ für irgendein $i \in \{1,2,3\}$. Wir können diese k-Algebra A dann automatisch als k-Algebra$_j$ für jedes $j \in \{1,2,3\}$ auffassen: Wenn wir z. B. von der Multiplikation zweier Elemente von A sprechen, fassen wir A als k-Algebra$_1$ oder k-Algebra$_2$ auf; wenn wir aber von der Abbildung $\mu_A : A \otimes A \to A$ sprechen, betrachten wir A als k-Algebra$_3$.

Die Abbildung $\mu_A : A \otimes A \to A$ heißt im Übrigen die *Multiplikationsabbildung* der k-Algebra A, und die Abbildung $\eta_A : k \to A$ heißt die *Einsabbildung* der k-Algebra A.

1.10. Bemerkung: Standardbeispiele für k-Algebren sind $\mathrm{M}_n(k)$ für $n \in \mathbb{N}$ und, allgemeiner, $\operatorname{End}_k V$, wobei V ein k-Modul ist. (Siehe dazu Lineare Algebra.)

Auf dem kommutativen Ring k selber ist eine kanonische k-Algebrastruktur festgelegt: Als k-Algebra$_1$ ergibt sich diese Struktur aus der kanonischen k-Modulstruktur

---

[31] In der Tat ist die Multiplikation (1.4) assoziativ (denn für alle $a, b, c \in A$ ist

$$(ab)c = \mu(ab \otimes c) = \mu(\mu(a\otimes b)\otimes c) = \mu((\mu\otimes \mathrm{id})(a\otimes b\otimes c)) = \underbrace{(\mu\circ(\mu\otimes\mathrm{id}))}_{\substack{=\mu\circ(\mathrm{id}\otimes\mu),\text{ da das}\\ \text{Diagramm (1.1) kommutiert}}}(a\otimes b\otimes c)$$
$$= (\mu\circ(\mathrm{id}\otimes\mu))(a\otimes b\otimes c) = \mu((\mathrm{id}\otimes\mu)(a\otimes b\otimes c)) = \mu(a\otimes\mu(b\otimes c))$$
$$= \mu(a\otimes bc) = a(bc)$$

) und distributiv (denn für alle $a, b, c \in A$ ist

$$(a+b)c = \mu((a+b)\otimes c) = \mu(a\otimes c + b\otimes c) = \mu(a\otimes c) + \mu(b\otimes c) \qquad (\text{da } \mu \text{ linear ist})$$
$$= ac + bc$$

und analog $c(a+b) = ca + cb$), und $\eta(1)$ ist tatsächlich das neutrale Element dieser Multiplikation (denn für alle $a \in A$ gilt

$$\eta(1)a = \mu(\eta(1)\otimes a) = \mu((\eta\otimes\mathrm{id})(1\otimes a)) = \underbrace{(\mu\circ(\eta\otimes\mathrm{id}))}_{\substack{=\mathrm{kan}\text{, da das Diagramm}\\ \text{(1.2) kommutiert}}}(1\otimes a) = \mathrm{kan}(1\otimes a) = a$$

und

$$a\eta(1) = \mu(a\otimes\eta(1)) = \mu((\mathrm{id}\otimes\eta)(a\otimes 1)) = \underbrace{(\mu\circ(\mathrm{id}\otimes\eta))}_{\substack{=\mathrm{kan}\text{, da das Diagramm}\\ \text{(1.3) kommutiert}}}(a\otimes 1) = \mathrm{kan}(a\otimes 1) = a$$

).

[32] Dies zeigt man genauso wie in **1)**, nachdem man festgestellt hat, daß $\eta(\alpha) = \alpha\cdot 1_A$ für alle $\alpha \in k$ gilt (denn da η eine k-lineare Abbildung ist, gilt $\eta(\alpha) = \eta(\alpha\cdot 1) = \alpha\eta(1)$, und wir wissen $\eta(1) = 1_A$).

[33] Dies zeigt man genauso wie in **1)** unter Benutzung von $\eta(\alpha) = \alpha\cdot 1_A$ für alle $\alpha \in k$.

auf k und der vorgegebenen Ringstruktur auf k.

Definition: Sei k ein kommutativer Ring, und seien A und B zwei k-Algebren. Wir schreiben wieder $\otimes$ für $\otimes_k$. Dann gibt es auf dem k-Modul $A \otimes B$ genau eine Struktur einer k-Algebra, welche

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \qquad \text{für alle } a, a' \in A \text{ und } b, b' \in B$$

erfüllt. Mit anderen Worten, der k-Modul $A \otimes B$ wird durch komponentenweise Multiplikation eindeutig zur k-Algebra. Das Einselement dieser k-Algebra ist $1_A \otimes 1_B$.

1.11. Proposition: Obige Definition ist korrekt, d. h. es gibt tatsächlich genau eine Struktur einer k-Algebra auf $A \otimes B$, welche

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \qquad \text{für alle } a, a' \in A \text{ und } b, b' \in B$$

erfüllt, und das Einselement dieser k-Algebra ist $1_A \otimes 1_B$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist offensichtlich (denn durch Festlegung der Multiplikation auf reinen Tensoren ist sie auf allen Tensoren festgelegt, weil sich jeder Tensor als k-Linearkombination reiner Tensoren schreiben läßt). Die Existenz der k-Algebrastruktur zeigen wir wie folgt:

Seien $\mu_A : A \otimes A \to A$ und $\mu_B : B \otimes B \to B$ die kanonischen k-linearen Abbildungen, die entstehen, wenn man die Algebren A und B als k-Algebren$_3$ auffasst (also $\mu_A(a \otimes a') = aa'$ für alle $a, a' \in A$ und $\mu_B(b \otimes b') = bb'$ für alle $b, b' \in B$). Sei $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ der kanonische k-Modulhomomorphismus, der durch $\tau(b \otimes a) = a \otimes b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ definiert ist (dieses τ existiert nur dank der Kommutativität von k !). Wir definieren eine k-lineare Abbildung $\mu : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B$ durch folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \arrow[r, "="] \arrow[drr, "\mu"'] & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}", "\cong"'] & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[d, "\mu_A \otimes \mu_B"] \\
& & A \otimes B
\end{tikzcd}.$$

Dann sieht man leicht ein, daß

$$\mu((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')) = (aa') \otimes (bb') \qquad \text{für alle } a, a' \in A \text{ und } b, b' \in B$$

ist[34]. Ferner legen wir eine k-lineare Abbildung $\eta : k \to A \otimes B$ durch $\eta(1) = 1_A \otimes 1_B$ fest. Dann läßt sich unschwer nachrechnen, daß der $(A \otimes B, \mu, \eta)$ eine k-Algebra$_3$ ist. Damit wird $A \otimes B$ zu einer k-Algebra$_1$ mit der Multiplikation

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \qquad \text{für alle } a, a' \in A \text{ und } b, b' \in B.$$

[34] denn wegen $\mu = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})$ ist

$$\mu((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')) = (\mu_A \otimes \mu_B)\left(\underbrace{(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b'))}_{= a \otimes \tau(b \otimes a') \otimes b'}\right) = (\mu_A \otimes \mu_B)\left(a \otimes \underbrace{\tau(b \otimes a')}_{= a' \otimes b} \otimes b'\right)$$
$$= (\mu_A \otimes \mu_B)(a \otimes a' \otimes b \otimes b') = \underbrace{\mu_A(a \otimes a')}_{= aa'} \otimes \underbrace{\mu_B(b \otimes b')}_{= bb'} = (aa') \otimes (bb')$$

Damit ist die Existenz der gewünschten k-Algebrastruktur gezeigt; aus diesem Argument folgt gleichzeitig, daß das Einselement dieser k-Algebra $1_A \otimes 1_B$ ist.

1.11$\frac{1}{2}$. Nachdem wir oben drei verschiedene, aber äquivalente Begriffe einer k-Algebra definiert haben, können wir für jeden dieser Begriffe eine entsprechende Definition eines *k-Algebrahomomorphismus* geben:

Definition (Algebrahomomorphismus): Sei k ein kommutativer Ring, und A und B zwei k-Algebren. Sei $\varphi : A \to B$ eine Abbildung (von Mengen).

a) Angenommen, die Algebren A und B sind als k-Algebren$_1$ gegeben, d. h. als Ringe und k-Moduln. Dann heißt φ genau dann ein *k-Algebrahomomorphismus*, wenn φ ein Ringhomomorphismus zwischen den Ringen A und B und gleichzeitig ein k-linearer Homomorphismus zwischen den k-Moduln A und B ist.

b) Angenommen, die Algebren A und B sind als k-Algebren$_2$ gegeben, also als Ringe zusammen mit Ringhomomorphismen $\eta_A : k \to A$ und $\eta_B : k \to B$. Dann heißt φ genau dann ein *k-Algebrahomomorphismus*, wenn φ ein Ringhomomorphismus zwischen den Ringen A und B ist, und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] & B \\ k \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

c) Angenommen, die Algebren A und B sind als k-Algebren$_3$ gegeben, also als k-Moduln zusammen mit k-Modulhomomorphismen $\mu_A : A \otimes A \to A$, $\eta_A : k \to A$, $\mu_B : B \otimes B \to B$ und $\eta_B : k \to B$. Dann heißt φ genau dann ein *k-Algebrahomomorphismus*, wenn φ ein k-linearer Homomorphismus zwischen den k-Moduln A und B ist, und folgende zwei Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] & B \\ k \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

Diese drei Definitionen von k-Algebrahomomorphismus sind äquivalent, wie man leicht einsieht.

1.12. Bemerkung: Seien A, A', B, B' vier k-Algebren und $\varphi : A \to A'$ und $\psi : B \to B'$ zwei k-Algebrahomomorphismen. Dann ist $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to A' \otimes B'$ ebenfalls ein k-Algebrahomomorphismus.

Nun werden wir sogenannte *Monoidalgebren* einführen, eine Verallgemeinerung des bekannten Begriffes einer *Gruppenalgebra*. Wir werden dabei Monoide immer multiplikativ schreiben, wenn nicht explizit anders gesagt. Monoide haben bei uns außerdem immer eine Eins.

Definition: Sei k ein kommutativer Ring, und sei G ein Monoid (d. h. eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung mit einem neutralen Element). Sei kG der freie k-Modul mit Basis G. (Wir haben diesen freien k-Modul früher mit $k^{(G)}$ bezeichnet, aber hier nennen wir ihn kG.) Wir bezeichnen mit $k[G]$ die k-Algebra, die entsteht, wenn wir auf kG eine Multiplikation durch $g \cdot_{k[G]} h = g \cdot_G h$ für alle $g, h \in G$ definieren (das heißt, wir definieren die Multiplikationsabbildung $\mu : (kG) \otimes_k (kG) \to kG$ durch

$\mu(g \otimes h) = g \cdot_G h$ auf der Basis $\{g \otimes h \mid g, h \in G\}$ von $(kG) \otimes_k (kG)$, und setzen sie k-linear fort), und eine multiplikative Eins durch $1_{k[G]} = 1_G$ definieren (das heißt, die Eins von $k[G]$ soll einfach die Eins des Monoids G sein). Diese k-Algebra auf kG heißt *k-Monoidalgebra von G* und wird mit $k[G]$ bezeichnet.[35] Falls G eine Gruppe ist, nennt man $k[G]$ auch die *k-Gruppenalgebra von G*.

Warnung: Ist das Monoid G additiv und nicht multiplikativ geschrieben, dann gilt $g \cdot_{k[G]} h = g +_G h$ statt $g \cdot_{k[G]} h = g \cdot_G h$. Die Addition auf G ist also die Multiplikation in $k[G]$, nicht zu verwechseln mit der Addition in $k[G]$! (Aus diesem Grund ist es ratsam, additive Monoide erst multiplikativ umzuschreiben, bevor man ihre k-Monoidalgebra bildet.)

1.13. Bemerkung: Sei k ein kommutativer Ring, und sei G ein Monoid. Dann erfüllen die Monoidalgebra $k[G]$ und die kanonische Inklusion $i : G \to k[G]$ (gegeben durch $i(g) = g$ für alle $g \in G$) die sogenannte *universelle Eigenschaft der Monoidalgebra*:

Für jede k-Algebra A und für jeden Monoidhomomorphismus $\varphi : G \to A$ (wobei die Multiplikation auf A kanonisch A zu einem Monoid mit Einselement 1_A macht) gibt es genau einen k-Algebrahomomorphismus $f : k[G] \to A$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & A \\ k[G] \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis: Existenz von f: Da $k[G]$ als k-Modul einfach der freie k-Modul mit Basis G ist, läßt sich jedes Element von $k[G]$ eindeutig in der Form $\sum\limits_{g \in G} \alpha_g g$ schreiben, wobei $(\alpha_g)_{g \in G} \in k^G$ ist, und $\alpha_g \neq 0$ nur für endlich viele $g \in G$ gilt.

Wir definieren eine Abbildung $f : k[G] \to A$ durch $f\left(\sum\limits_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g \varphi(g)$ für jedes $(\alpha_g)_{g \in G} \in k^G$, für welches $\alpha_g \neq 0$ nur für endlich viele $g \in G$ gilt. Es ist klar, daß diese Abbildung f ein k-Modulhomomorphismus ist. Ferner ist

$$f\left(1_{k[G]}\right) = f(1_G) = f(1 \cdot 1_G) = 1 \cdot \varphi(1_G) = \varphi(1_G) = 1_A$$

(denn φ ist ein Monoidhomomorphismus), und für alle $\sum\limits_{g \in G} \alpha_g g \in k[G]$ und $\sum\limits_{g \in G} \beta_g g \in k[G]$ ist

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{g \in G} \beta_g g\right) &= \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} \beta_h h\right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \alpha_g \beta_h g h \\ &= \sum_{n \in G} \left(\sum_{\substack{(g,h) \in G^2; \\ gh = n}} \alpha_g \beta_h\right) n = \sum_{g \in G} \left(\sum_{\substack{(u,v) \in G^2; \\ uv = g}} \alpha_u \beta_v\right) g \end{aligned}$$

[35] Manchmal schreibt man auch kG statt $k[G]$.

und somit

$$f\left(\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G}\beta_g g\right)\right)$$

$$= f\left(\sum_{g\in G}\left(\sum_{\substack{(u,v)\in G^2;\\ uv=g}}\alpha_u\beta_v\right)g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{\substack{(u,v)\in G^2;\\ uv=g}}\alpha_u\beta_v\right)\varphi(g)$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{\substack{(u,v)\in G^2;\\ uv=g}}\left(\alpha_u\beta_v\varphi\left(\underbrace{g}_{\substack{=uv,\\ \text{denn } uv=g}}\right)\right) = \sum_{g\in G}\sum_{\substack{(u,v)\in G^2;\\ uv=g}}\left(\alpha_u\beta_v\underbrace{\varphi(uv)}_{\substack{=\varphi(u)\varphi(v),\text{ denn }\varphi\text{ ist}\\ \text{ein Monoidhomomorphismus}}}\right)$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{\substack{(u,v)\in G^2;\\ uv=g}}\left(\alpha_u\beta_v\varphi(u)\varphi(v)\right) = \sum_{(u,v)\in G^2}\alpha_u\beta_v\varphi(u)\varphi(v)$$

$$= \left(\sum_{u\in G}\alpha_u\varphi(u)\right)\cdot\left(\sum_{v\in G}\beta_v\varphi(v)\right) = \left(\sum_{g\in G}\alpha_g\varphi(g)\right)\cdot\left(\sum_{g\in G}\beta_g\varphi(g)\right)$$

$$= f\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\cdot f\left(\sum_{g\in G}\beta_g g\right).$$

Daher ist f ein k-Algebrahomomorphismus. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & A \\ k[G] \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, da $f(i(g)) = f(g) = f(1g) = 1\varphi(g) = \varphi(g)$ für jedes $g \in G$ ist. Somit ist die Existenz von f bewiesen.

Eindeutigkeit von f: Jeder k-Algebrahomomorphismus $f : k[G] \to A$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & A \\ k[G] \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, erfüllt $f\left(\sum\limits_{g\in G}\alpha_g g\right) = \sum\limits_{g\in G}\alpha_g\varphi(g)$ für jedes $(\alpha_g)_{g\in G} \in k^G$, für welches $\alpha_g \neq 0$ nur für endlich viele $g \in G$ gilt[36]. Somit ist der Wert von f auf jedem Element von $k[G]$ eindeutig gegeben, und damit ist die Eindeutigkeit von f gezeigt.

[36]Denn da f eine k-lineare Abbildung ist, ist

$$f\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right) = \sum_{g\in G}\alpha_g f\left(\underbrace{g}_{=i(g)}\right) = \sum_{g\in G}\alpha_g\underbrace{f(i(g))}_{\substack{=\varphi(g),\text{ wegen dem}\\ \text{kommutativen Diagramm}}} = \sum_{g\in G}\alpha_g\varphi(g).$$

Damit ist Bemerkung 1.13. bewiesen.

Beispiele: Wir wollen kurz zwei bekannte Spezialfälle von Monoidalgebren erwähnen, nämlich Polynomalgebren und freie Algebren:

1) Sei G das *additive* Monoid $\mathbb{N}^n$. Dann ist die k-Monoidalgebra $k[G]$ kanonisch isomorph (als k-Algebra) zu $k[X_1, X_2, ..., X_n]$, der (kommutativen) Polynomalgebra über k in n Unbestimmten X_1, X_2, ..., X_n. Bei dieser Isomorphie geht jedes $(i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$ in $X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_n^{i_n}$ über.

2) Sei $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ eine Menge, wobei x_1, x_2, ..., x_n paarweise verschiedene Elemente sein sollen. Ein *formales Wort im Alphabet* X bedeutet schlichtweg ein (endliches) Tupel von Elementen von X; wir schreiben ein solches Wort $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ gerne kurz als $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$, solange keine Verwechslungsgefahr mit echten Produkten besteht.

Nun können wir das sogenannte *freie Monoid der Menge* X definieren als

$$\{\text{alle formalen Wörter } x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m} \text{ im Alphabet } X \text{ mit } m \geq 0 \text{ und } i_1, i_2, ..., i_m \in \{1, 2, ..., n\}\};$$

die Multiplikation auf diesem Monoid werde durch Hintereinanderschreiben von Wörtern gegeben, und die Eins soll das leere Wort () sein. Dieses Monoid nennen wir $\langle X \rangle$.

Die Monoidalgebra $k[\langle X \rangle]$ ist die sogenannte *freie k-Algebra in den Unbestimmen* $x_1, x_2, ..., x_n$; man bezeichnet diese k-Algebra auch mit $k\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ oder mit $k\langle X \rangle$. Diese freie k-Algebra $k[\langle X \rangle]$ hat folgende universelle Eigenschaft:

Für jede k-Algebra A und beliebige Elemente $a_1, a_2, ..., a_n$ von A gibt es genau einen k-Algebrahomomorphismus $f : k[\langle X \rangle] \to A$, der $f(x_i) = a_i$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ erfüllt.

Mit anderen Worten: Für jede k-Algebra A und jede Abbildung $\varphi : X \to A$ gibt es genau einen k-Algebrahomomorphismus $f : k[\langle X \rangle] \to A$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & A \\
k[\langle X \rangle] \arrow[ur, dotted, "f"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei $i : X \to k[\langle X \rangle]$ die kanonische Inklusion (gegeben durch $i(x) = x$ für alle $x \in X$) ist.

Dies alles läßt sich auch auf unendliche Mengen X erweitern.

1.14. Bemerkung: Sei k ein kommutativer Ring, und sei A eine k-Algebra. Unter einem *Ideal* (oder auch *zweiseitigen Ideal*) von A verstehen wir eine Teilmenge $I \subseteq A$, die $0 \in I$ sowie $x + y \in I$, $ax \in I$ und $xa \in I$ für alle $x, y \in I$ und $a \in A$ erfüllt.[37] Offensichtlich ist jedes Ideal von A auch ein k-Untermodul von A.

Sei I ein Ideal von A. Dann ist auf der Menge $A \diagup I$ kanonisch eine k-Algebrastruktur definiert (durch $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ für alle $a, b \in A$, ferner $\lambda \overline{a} = \overline{\lambda a}$ für alle $\lambda \in k$ und $a \in A$, und $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$ für alle $a, b \in A$). Diese k-Algebra $A \diagup I$ heißt die *Faktoralgebra* (oder auch *Quotientenalgebra*) der k-Algebra A modulo dem Ideal I.

Die kanonische Abbildung kan : $A \to A \diagup I$, $a \mapsto \overline{a}$ ist dann ein k-Algebrahomomorphismus und hat folgende universelle Eigenschaft (die sogenannte *universelle Eigenschaft der Faktoralgebra*):

[37] Wir benutzen hier und im Folgenden das Wort "Ideal" als Synonym für "zweiseitiges Ideal". Linksideale sind daher im Allgemeinen keine Ideale, und Rechtsideale genausowenig.

Für jede k-Algebra B und jeden k-Algebrahomomorphismus $\varphi : A \to B$ mit $\varphi(I) = 0$ gibt es genau einen k-Algebrahomomorphismus $f : A \diagup I \to B$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"'] & B \\ A/I \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel: Oft interessieren uns nicht freie k-Algebren selber, sondern ihre Quotienten. Für solche hat sich die Bezeichnung "*Algebren mit Erzeugern und Relationen*" etabliert. Wir definieren sie (nicht ganz formal) wie folgt:

Sei $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ eine Menge. Seien u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_k Elemente von $k\langle X\rangle$ (siehe 1.13., Beispiel **2)** für die Definition der k-Algebra $k\langle X\rangle$). Dann bezeichnen wir die Faktor-k-Algebra $k\langle X\rangle \diagup (u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_k - v_k)$ auch als

$$k\langle x_1, x_2, ..., x_n \mid u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ ...,\ u_k = v_k\rangle,$$

und nennen sie die *k-Algebra mit den Erzeugern x_1, x_2, ..., x_n und den Relationen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ..., $u_k = v_k$*. Dabei werden wir oft unsauber arbeiten, und die Elemente $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, ..., $\overline{x_n}$ der k-Algebra

$$k\langle x_1, x_2, ..., x_n \mid u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ ...,\ u_k = v_k\rangle = k\langle X\rangle \diagup (u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_k - v_k)$$

mit x_1, x_2, ..., x_n bezeichnen (genauso wie die Elemente x_1, x_2, ..., x_n der k-Algebra $k\langle X\rangle$). Der Vorteil dieser Notation ist, daß dann die Relationen $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ..., $u_k = v_k$ wirklich *gelten*, zumindest wenn man u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_k als Terme mit Variablen x_1, x_2, ..., x_n deutet und diese Variablen x_1, x_2, ..., x_n als "Abkürzungen" für $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, ..., $\overline{x_n}$ versteht. Der Nachteil dieser Notation ist, daß sie uneindeutig ist - entweder dürfen wir dann nicht mehr von $k\langle X\rangle$ sprechen und müssen nur noch in der Faktor-k-Algebra $k\langle x_1, x_2, ..., x_n \mid u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ ...,\ u_k = v_k\rangle$ rechnen, oder wir müssen bei jeder Formel, in der auch nur einer der Terme x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_k vorkommt, spezifizieren, ob sie in $k\langle X\rangle$ oder in $k\langle x_1, x_2, ..., x_n \mid u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ ...,\ u_k = v_k\rangle$ gemeint ist.

Kategorien und Funktoren

Wir werden jetzt eine kurze Einführung in die Sprache der Kategorientheorie geben. Dabei halten wir uns nicht lange mit technischen Details auf (und Kategorientheorie besteht zum größten Teil aus Technik), sondern führen nur die Begriffe ein, die wir im Folgenden auch gebrauchen werden.

Definition (Kategorie): Angenommen, wir haben folgende Daten gegeben:

1. Eine Klasse[38], genannt $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

2. Für je zwei Elemente $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ eine Menge, genannt $\mathcal{C}(X, Y)$.

[38] "Klasse" ist eine Verallgemeinerung des Begriffes "Menge". So können wir von der "Klasse aller Mengen" oder der "Klasse aller Vektorräume" sprechen, während es keine Menge aller Mengen oder Menge aller Vektorräume gibt. Wir werden uns allerdings nicht mit mengentheoretischen Details beschäftigen; in den *meisten* Fällen, wo wir Kategorien verwenden werden, können wir unsere Resultate und Beweise so umformulieren, daß wir keine Klassen mehr nötig haben.

3. Für je drei Elemente $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ eine Abbildung $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$. Das Bild von (f,g) unter dieser Abbildung nennen wir im Folgenden einfach gf oder $g \circ f$.

Dann sagen wir, diese Daten bilden eine *Kategorie* $\mathcal{C}$, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) Die Mengen $\mathcal{C}(X,Y)$ sind paarweise disjunkt; das heißt: Sind $X, Y, X', Y' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, dann kann $\mathcal{C}(X,Y) \cap \mathcal{C}(X',Y') \neq \varnothing$ nur für $(X,Y) = (X',Y')$ gelten. Ferner gilt $\mathcal{C}(X,Y) \cap \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \varnothing$ für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. [39]

b) Für jedes $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gibt es ein Element $i \in \mathcal{C}(X,X)$, so daß für jedes $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und jedes $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ die Relation $f = f \circ i$ gilt und für jedes $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ die Relation $g = i \circ g$ gilt. Dieses Element $i \in \mathcal{C}(X,X)$ bezeichnen wir mit id_X (dieses Element i ist nämlich auch eindeutig, was man leicht aus den anderen Axiomen herleiten kann).

c) Für beliebige $X, Y, Z, U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ und $h \in \mathcal{C}(Z,U)$ gilt: $(hg)\,f = h\,(gf)$.

Einige mit der obigen Definition verbundene *Notationen:*

- Die Elemente von $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ heißen die *Objekte* der Kategorie $\mathcal{C}$. Für $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ bezeichnet man die Elemente von $\mathcal{C}(X,Y)$ als *Morphismen* von X nach Y in $\mathcal{C}$. Die in der Definition geforderte Abbildung $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$, die (f,g) in gf überführt, heißt *Verkettung* von Morphismen. Einen Morphismus $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ bezeichnet man auch mit $f : X \to Y$ oder mit $X \xrightarrow{f} Y$. Für jedes $X \in \mathcal{C}$ bezeichnet man den Morphismus id_X als *Identität* auf X. Für $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ bezeichnet man den Morphismus f als *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ gibt mit $fg = \mathrm{id}_Y$ und $gf = \mathrm{id}_X$. [40]
  Diese Schreibweisen haben alle den Vorteil, daß sie die Intuition vermitteln, daß eine Kategorie so etwas wie "eine Ansammlung von Mengen und von Abbildungen zwischen ihnen, die man verketten kann" ist (wobei, grob gesagt, die Objekte der Kategorie die Mengen sind, und die Morphismen die Abbildungen). Diese Intuition ist recht nützlich, da viele Kategorien tatsächlich Ansammlungen von

[39] Wie sich der Leser wohl denken kann, ist dies eine rein technische Voraussetzung. Der Sinn dieser Voraussetzung ist folgender: Wir werden später oftmals die Elemente $\mathcal{C}(X,Y)$ als bestimmte Abbildungen von einem Objekt X in ein Objekt Y deuten können (ein Objekt ist meist eine Menge mit bestimmter Zusatzstruktur), und die Disjunktheit der Mengen $\mathcal{C}(X,Y)$ bedeutet, daß für uns Abbildungen immer "wissen", aus welcher Menge in welche Menge sie gehen. Genau das haben wir in Kapitel 0 gefordert. Die Bedingung $\mathcal{C}(X,Y) \cap \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \varnothing$ sorgt dafür, daß wir Abbildungen nicht mit Objekten verwechseln.

[40] Eine *Warnung* an dieser Stelle: Der gerade definierte Begriff eines "Isomorphismus" ist im Allgemeinen *nicht* äquivalent zu dem Begriff eines "bijektiven Morphismus". Zum einen ist er dies schon deshalb nicht, weil die Morphismen einer Kategorie nicht notwendigerweise Abbildungen sein müssen (und die Objekte nicht notwendigerweise Mengen), und somit man nicht immer von einem "bijektiven Morphismus" sprechen kann. Zum anderen gibt es Kategorien, in denen Objekte Mengen sind und Morphismen Abbildungen (mit bestimmten Eigenschaften) sind, und *trotzdem* nicht jeder bijektive Morphismus ein Isomorphismus ist! Ein Beispiel einer solchen Kategorie ist die Kategorie, deren Objekte die topologischen Räume sind und deren Morphismen die stetigen Abbildungen sind. Die Isomorphismen in dieser Kategorie werden als *Homöomorphismen* bezeichnet; nicht jeder bijektive Morphismus ist ein Homöomorphismus! (*Beispiel:* Die Abbildung

$$[0, 2\pi[\to S^1, \qquad \varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

ist bijektiv und stetig (d. h. ein Morphismus in dieser Kategorie), aber kein Homöomorphismus.)

Mengen und Abbildungen sind (siehe Beispiele 1.15. **a)-c)** für einige Kategorien, die wirklich solche Ansammlungen sind), aber im Allgemeinen ist eine Kategorie nicht notwendigerweise so eine Ansammlung.

- Wir schreiben kurz $X \in \mathcal{C}$ für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

1.15. Beispiele: a) Die "einfachste" Kategorie ist die Kategorie Me, die wie folgt definiert ist:

Die Klasse Ob (Me) ist die Klasse aller Mengen. Für je zwei $X, Y \in \mathrm{Me}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Me}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Die Verkettung von Morphismen soll einfach Verkettung von Abbildungen im üblichen Sinne sein.

Diese Kategorie Me heißt *Kategorie der Mengen*.

b) Wir können auch eine *Kategorie der Gruppen* Gr konstruieren. Die Klasse Ob (Gr) ist dabei die Klasse aller Gruppen, die Morphismen (also die Elemente von $\mathrm{Gr}(X, Y)$ für $X, Y \in \mathrm{Gr}$) sind Gruppenhomomorphismen, und Verkettung von Morphismen ist wieder klassische Verkettung von Gruppenhomomorphismen.

c) Sei R ein Ring. Dann können wir eine *Kategorie der R-Linksmoduln* definieren, genannt ${}_R\mathcal{M}$. Die Klasse $\operatorname{Ob}({}_R\mathcal{M})$ ist dabei die Klasse aller R-Linksmoduln; die Morphismen sind R-Linksmodulhomomorphismen (also R-lineare Abbildungen zwischen R-Linksmoduln), und Verkettung von Morphismen ist wieder einfach nur Verkettung von Abbildungen. Entsprechend können wir eine *Kategorie der R-Rechtsmoduln* $\mathcal{M}_R$ definieren, und für zwei Ringe R und S eine *Kategorie der (R, S)-Bimoduln* ${}_R\mathcal{M}_S$.

Ist k ein Körper, dann können wir jede der beiden Kategorien ${}_k\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_k$ einfach als Kategorie der k-Vektorräume ansehen (aber ${}_k\mathcal{M}_k$ nicht!).

d) Die vorherigen drei Beispiele für Kategorien waren "große Kategorien" (sie haben viele Objekte, sogar so viele, daß sie echte Klassen und keine Mengen bilden). Hier ist ein Beispiel für eine "kleine Kategorie":

Sei M ein Monoid. Dann können wir eine Kategorie $\widetilde{M}$ wie folgt definieren: Sei $\operatorname{Ob} \widetilde{M} = \{\varnothing\}$, sei $\widetilde{M}(\varnothing, \varnothing) = M$, und sei die Verkettung von Morphismen als Multiplikation der entsprechenden Elemente von M definiert.[41] Damit haben wir eine Kategorie mit nur einem Objekt eingeführt, die aber trotzdem die gesamte Struktur des Monoids M repräsentiert.

Wir werden nun den Begriff eines *Funktors* definieren, genauer gesagt die Begriffe *kovarianter* und *kontravarianter Funktor*. In der Praxis meint man einen kovarianten Funktor, wenn man einfach nur "Funktor" sagt; kontravariante Funktoren führt man entweder auf kovariante zurück (indem man duale Kategorien bildet - auch dies werden wir definieren), oder spricht explizit von "kontravarianten Funktoren". Wir beginnen mit der Definition eines kovarianten Funktors:

Definition (kovarianter Funktor): Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus den folgenden Daten:

1. einer Abbildung $\operatorname{Ob} F : \operatorname{Ob} \mathcal{C} \to \operatorname{Ob} \mathcal{D}$;

2. für jede $X, Y \in \mathcal{C}$ einer Abbildung $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y))$,

die folgende Axiome erfüllen:

a) Für jedes $X \in \mathcal{C}$ ist $F_{X,X}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$. [42]

[41] Bei der Setzung $\operatorname{Ob} \widetilde{M} = \{\varnothing\}$ war nur entscheidend, daß $\operatorname{Ob} \widetilde{M}$ eine einelementige Menge ist. Ob das Element 0, π, $\mathbb{Q}$ oder, wie bei uns, $\varnothing$ ist, ist egal.

[42] Dabei ist $F(X)$ eine abkürzende Schreibweise für $(\operatorname{Ob} F)(X)$. (Diese Schreibweise werden wir in Kürze noch einmal einführen.)

b) Für beliebige $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ gilt $F_{X,Z}(gf) = F_{Y,Z}(g) F_{X,Y}(f)$.

Nach dieser Definition können wir wieder eine *vereinfachende Notation* geben:

- Für jedes $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir $F(X)$ statt $(\operatorname{Ob}F)(X)$. Für jedes $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ schreiben wir $F(f)$ statt $F_{X,Y}(f)$. (Diese Notation ist widerspruchsfrei, da alle $\mathcal{C}(X, Y)$ untereinander und mit $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ disjunkt sind.)

Insofern können wir sagen, daß ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ durch die Werte von $F(X)$ auf jedem Objekt $X \in \mathcal{C}$ und die Werte $F(f)$ für jeden Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ festgelegt ist (falls diese Daten die Axiome *a)* und *b)* erfüllen).

Somit haben wir kovariante Funktoren definiert. Kontravariante Funktoren definieren sich fast genauso; und zwar erhält man die Definition eines kontravarianten Funktors, indem man in der obigen Definition eines kovarianten Funktors den Term $\mathcal{D}(F(X), F(Y))$ durch $\mathcal{D}(F(Y), F(X))$ (in Datum *2.*) ersetzt und die Gleichung $F_{X,Z}(gf) = F_{Y,Z}(g) F_{X,Y}(f)$ durch $F_{X,Z}(gf) = F_{X,Y}(f) F_{Y,Z}(g)$ (in Axiom *b)*) ersetzt. Das heißt, die Definition eines kontravarianten Funktors sieht folgendermaßen aus:

Definition (kontravarianter Funktor): Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus den folgenden Daten:

1. einer Abbildung $\operatorname{Ob}F : \operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$;

2. für jede $X, Y \in \mathcal{C}$ einer Abbildung $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(F(Y), F(X))$,

die folgende Axiome erfüllen:

a) Für jedes $X \in \mathcal{C}$ ist $F_{X,X}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

b) Für beliebige $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ gilt $F_{X,Z}(gf) = F_{X,Y}(f) F_{Y,Z}(g)$.

Wie schon gesagt, können wir kontravariante Funktoren auf kovariante Funktoren zurückführen, indem wir *duale Kategorien* definieren:

Definition (duale Kategorie): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Die *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ von $\mathcal{C}$ ist die wie folgt definierte Kategorie: Die Klasse $\operatorname{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ soll einfach $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ sein; für jede $X, Y \in \mathcal{C}$ setzen wir $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$, und Verkettung von Morphismen $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Y, Z)$ im Sinne der Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ definieren wir durch $gf = fg$ (wobei fg die Verkettung der Morphismen g und f im Sinne der Kategorie $\mathcal{C}$ bedeutet, denn $g \in \mathcal{C}(Z, Y)$ und $f \in \mathcal{C}(Y, X)$).

Da man Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ gerne auch in der Form $X \xrightarrow{f} Y$ schreibt, sagt man oft, die *duale Kategorie* einer Kategorie erhält man, indem man "alle Pfeile umdreht".

Nun können wir jeden kontravarianten Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ für zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ auch als kovarianten Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ deuten, und umgekehrt. (Und wir können jeden kontravarianten Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ auch als kovarianten Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ deuten, und umgekehrt.) Deshalb gelten viele Eigenschaften kovarianter Funktoren auch leicht abgewandelt für kontravariante Funktoren, und dies ist der Grund, warum man Sätze meist nur für kovariante Funktoren formuliert und bei "Funktoren" gewöhnlich an kovariante Funktoren denkt.

Definition: a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Unter dem *Identitätsfunktor* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

verstehen wir den durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(C) &= C && \text{für jedes Objekt } C \in \mathcal{C}, && \text{und}\\
\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) &= f && \text{für jeden Morphismus } f \in \mathcal{C}(X,Y) \text{ für jede } X,Y \in \mathcal{C}
\end{aligned}$$

definierten Funktor.

b) Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ drei Kategorien, und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ zwei Funktoren. Dann wird die *Verkettung* $G \circ F$ der Funktoren G und F definiert als der Funktor $H : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, der durch

$$\begin{aligned}
H(C) &= G(F(C)) && \text{für jedes Objekt } C \in \mathcal{C}, && \text{und}\\
H(f) &= G(F(f)) && \text{für jeden Morphismus } f \in \mathcal{C}(X,Y) \text{ für jede } X,Y \in \mathcal{C}
\end{aligned}$$

definiert ist. Statt $G \circ F$ schreiben wir auch GF.

Wir werden nun einige Beispiele für Funktoren (kovariante und kontravariante) sehen:

1.16. Beispiele: 1) Sei k ein Körper. Wie schon gesagt, ist ${}_k\mathcal{M}$ die Kategorie der k-Vektorräume. Wir können einen kontravarianten Funktor $\mathrm{dual} : {}_k\mathcal{M} \to {}_k\mathcal{M}$ (oder, was hierzu äquivalent ist, einen kovarianten Funktor $\mathrm{dual} : ({}_k\mathcal{M})^{\mathrm{op}} \to {}_k\mathcal{M}$) definieren, indem wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{dual}(V) &= V^* && \text{für jeden } k\text{-Vektorraum } V, && \text{und}\\
\mathrm{dual}(f) &= f^* && \text{für jedes } f \in \mathrm{Hom}_k(X,Y) \text{ für jede } X,Y \in {}_k\mathcal{M}
\end{aligned}$$

setzen (dabei bezeichnet V^* den Dualraum von V, und die Abbildung f^* ist definiert als die k-lineare Abbildung von Y^* nach X^*, die jedes $g \in Y^*$ auf $g \circ f$ abbildet).

2) Seien R und S Ringe, und sei ${}_SX_R$ ein (S,R)-Bimodul. Dann definieren wir einen (kovarianten) Funktor $X \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ [43] durch

$$\begin{aligned}
(X \otimes_R -)(Y) &= X \otimes_R Y && \text{für jedes } Y \in {}_R\mathcal{M}, && \text{und}\\
(X \otimes_R -)(f) &= \mathrm{id} \otimes f \in \mathrm{Hom}_S(X \otimes_R Y, X \otimes_R Y')\\
&&& \text{für jedes } f \in \mathrm{Hom}_R(Y,Y') \text{ für jede } Y,Y' \in {}_R\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Ebenso definieren wir einen (kovarianten) Funktor $- \otimes_S X : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$ durch

$$\begin{aligned}
(- \otimes_S X)(Y) &= Y \otimes_S X && \text{für jedes } Y \in \mathcal{M}_S, && \text{und}\\
(- \otimes_S X)(f) &= f \otimes \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_R(Y \otimes_S X, Y' \otimes_S X)\\
&&& \text{für jedes } f \in \mathrm{Hom}_S(Y,Y') \text{ für jede } Y,Y' \in \mathcal{M}_S.
\end{aligned}$$

Diese beiden Funktoren sind meistens gemeint, wenn Algebraiker von "Tensorieren als Funktor" oder kurz vom $\otimes$-Funktor sprechen (es sind natürlich zwei verschiedene Funktoren, aber sie sind zueinander sehr ähnlich[44]). Grob gesprochen machen diese

[43] Ja, der Funktor heißt wirklich $X \otimes_R -$. Der Strich soll kein Minus sein, sondern bedeutet "hier einen R-Modul einsetzen".

[44] Im Falle, wenn R und S beide der gleiche kommutative Ring sind, sind die beiden Funktoren $X \otimes_R -$ und $- \otimes_S X$ sogar "mehr oder weniger gleich", d. h. isomorph (auch wenn wir erst später definieren werden, was eine Isomorphie von Funktoren ist), wenn man R-Linksmoduln mit R-Rechtsmoduln identifiziert.

Funktoren nichts anderes, als alle Moduln mit einem festen Modul X zu tensorieren, und Abbildungen zwischen Moduln durch Tensorieren mit der Identitätsabbildung id_X in Abbildungen zwischen den Tensorprodukten zu überführen.

3) Sei R ein Ring, und sei $X \in {}_R\mathcal{M}$. Dann definieren wir einen (kovarianten) Funktor $\mathrm{Hom}_R(X,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ durch

$$(\mathrm{Hom}_R(X,-))(Y) = \mathrm{Hom}_R(X,Y) \qquad \text{für jedes } Y \in {}_R\mathcal{M}\,, \qquad \text{und}$$
$$(\mathrm{Hom}_R(X,-))(f) = (g \mapsto f \circ g) \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathrm{Hom}_R(X,Y), \mathrm{Hom}_R(X,Y'))$$
$$\text{für jedes } f \in \mathrm{Hom}_R(Y,Y') \text{ für jede } Y, Y' \in {}_R\mathcal{M}\,.$$

Ferner definieren wir einen kontravarianten Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,X) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ durch

$$(\mathrm{Hom}_R(-,X))(Y) = \mathrm{Hom}_R(Y,X) \qquad \text{für jedes } Y \in {}_R\mathcal{M}\,, \qquad \text{und}$$
$$(\mathrm{Hom}_R(-,X))(f) = (g \mapsto g \circ f) \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathrm{Hom}_R(Y',X), \mathrm{Hom}_R(Y,X))$$
$$\text{für jedes } f \in \mathrm{Hom}_R(Y,Y') \text{ für jede } Y, Y' \in {}_R\mathcal{M}\,.$$

Diese beiden Funktoren heißen die Hom-*Funktoren*. (Im Gegensatz zu den zwei $\otimes$-Funktoren sind diese zwei Hom-Funktoren nicht sehr ähnlich zueinander - einer von ihnen ist kovariant, und der andere kontravariant, und auch sonst haben sie unterschiedliche Eigenschaften.)

Auch für R-Rechtsmoduln lassen sich analog zwei Hom-Funktoren definieren.

4) Die gerade definierten Hom-Funktoren führen von ${}_R\mathcal{M}$ nach ${}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$; sie überführen also R-Linksmoduln in $\mathbb{Z}$-Linksmoduln (also abelsche Gruppen). In Satz $1.9\frac{1}{2}$ haben wir gezeigt, wie wir aus zusätzlichen Strukturen auf X und Y eine zusätzliche Struktur auf $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ erhalten; damit können wir *neue, "reichhaltigere"* Hom-*Funktoren* definieren. Aus Platzgründen führen wir hier nur einen solchen Hom-Funktor ein:

Seien R und S Ringe, und sei $X \in {}_R\mathcal{M}_S$. Dann definieren wir einen (kovarianten) Funktor $\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ durch

$$(\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-))(Y) = \mathrm{Hom}_R({}_RX_S, {}_RY) \text{ mit } S\text{-Linksmodulstruktur nach Satz } 1.9\frac{1}{2}\ \mathbf{a)}$$
$$\text{für jedes } Y \in {}_R\mathcal{M}\,, \text{ und}$$
$$(\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-))(f) = (g \mapsto f \circ g) \in \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(X,Y), \mathrm{Hom}_R(X,Y'))$$
$$\text{für jedes } f \in \mathrm{Hom}_R(Y,Y') \text{ für jede } Y, Y' \in {}_R\mathcal{M}\,.$$

Dieser Funktor $\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ ist etwas anderes als der in Beispiel **3)** definierte Funktor $\mathrm{Hom}_R(X,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$, auch wenn X beidesmal der gleiche (R,S)-Bimodul ist. Denn für jedes $Y \in {}_R\mathcal{M}$ ist $(\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-))(Y)$ ein S-Linksmodul, während $(\mathrm{Hom}_R(X,-))(Y)$ nur eine abelsche Gruppe ist. Insofern ist der Funktor $\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ "reichhaltiger" als der Funktor $\mathrm{Hom}_R(X,-) :$ ${}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ - allerdings um den Preis, daß der erstere Funktor nur für (R,S)-Bimoduln X definiert ist, während der letztere für alle R-Linksmoduln X existiert.

Analog können wir für je zwei Ringe R und T und jedes $X \in {}_R\mathcal{M}_T$ einen kontravarianten Funktor $\mathrm{Hom}_R(-, {}_RX_T) : {}_R\mathcal{M} \to \mathcal{M}_T$, und noch weitere Hom-Funktoren konstruieren.

Wie schon gesagt, muss man diese neuen, "reichhaltigen" Hom-Funktoren von den Hom-Funktoren aus Beispiel **3)** unterscheiden. Unter Algebraikern herrscht jedoch eine stillschweigende Vereinbarung, daß man beispielsweise in dem Fall, wenn X ein (R,S)-Bimodul ist, den Funktor $\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ auch abkürzend mit $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ bezeichnet, obwohl $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ *eigentlich* für einen anderen Funktor (nämlich den Funktor $\mathrm{Hom}_R(X,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ aus Beispiel **3)**) stehen *sollte*. Das liegt daran, daß man in dem Fall, daß X ein (R,S)-Bimodul ist, den Funktor $\mathrm{Hom}_R(X,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ aus Beispiel **3)** einfach nicht mehr benutzt, weil es den "besseren" Funktor $\mathrm{Hom}_R({}_RX_S,-) : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ gibt. Wenn "reichhaltigere" Funktoren existieren, benutzt man also die alten Funktoren aus Beispiel **3)** nicht mehr, und verwendet ihre Namen für die "reichhaltigeren" Funktoren.

Insbesondere in dem Fall, wenn k ein kommutativer Ring ist, und X ein k-Modul ist, bedeutet also $\mathrm{Hom}_k(X,-)$ immer den Funktor $\mathrm{Hom}_k({}_kX_k,-) : {}_k\mathcal{M} \to {}_k\mathcal{M}$, wobei sowohl die k-Linksmodulstruktur als auch die k-Rechtsmodulstruktur auf X einfach die gegebene k-Modulstruktur sind.

Natürliche Transformationen zwischen Funktoren

Der Begriff einer natürlichen Transformation ist vermutlich der erste Begriff der Kategorientheorie, für den man nicht sofort eine Anschauung hat. Natürliche Transformationen kommen aber sehr früh in der Mathematik vor: Jedesmal, wenn man von einer "kanonischen Abbildung" spricht, meint man eine natürliche Transformation (also strenggenommen keine Abbildung, sondern eine Familie von Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften).

Definition: Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, und seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\varphi : F \to G$ ist eine Familie $\varphi = (\varphi_C)_{C\in\mathcal{C}}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

a) Für jedes $C \in \mathcal{C}$ ist $\varphi_C \in \mathcal{D}(F(C), G(C))$ (das heißt, φ_C ist ein Morphismus von $F(C)$ nach $G(C)$ in der Kategorie $\mathcal{D}$, also $\varphi_C : F(C) \to G(C)$).

b) Für jede $C, C' \in \mathcal{C}$ und für jeden Morphismus $f \in \mathcal{C}(C, C')$ ist folgendes Diagramm von Morphismen in $\mathcal{D}$ kommutativ:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\varphi_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\varphi_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd} \quad . \tag{1.5}$$

Einige *Bemerkungen* zu dieser Definition:

- Diese Definition ist für kovariante Funktoren F und G geschrieben worden; man kann allerdings auch natürliche Transformationen zwischen beliebigen (kovarianten oder kontravarianten) Funktoren F und G definieren, indem man in dieser Definition das Diagramm (1.5) entsprechend anpasst. So muss beispielsweise in dem Fall, wenn F ein kovarianter und G ein kontravarianter Funktor ist, das Diagramm (1.5) durch folgendes Diagramm ersetzt werden:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\varphi_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \\ F(C') \arrow[r, "\varphi_{C'}"'] & G(C') \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd} \quad .$$

- Statt "natürliche Transformation $\varphi : F \to G$ " wird oft auch der Begriff "*natürliche Transformation von F nach G* " oder der Begriff "*Morphismus von F nach G* " verwendet.[45]

- Der Begriff einer natürlichen Transformation ist die Formalisierung des (von uns bislang nur intuitiv benutzten) Begriffes eines "kanonischen (oder natürlichen) Morphismus". In der Tat ist es in der Algebra so, daß wenn man sagt, ein Morphismus $\varphi_C : F(C) \to G(C)$ sei *kanonisch* (oder auch *natürlich*, oder auch *funktoriell*), man immer meint, daß die Familie $(\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}$ eine natürliche Transformation $F \to G$ ist. Insofern ist die Sprechweise, ein Morphismus sei kanonisch, strenggenommen inkorrekt: Kanonisch-Sein ist *keine Eigenschaft des konkreten Morphismus $\varphi_C : F(C) \to G(C)$ für ein bestimmtes $C \in \mathcal{C}$, sondern eine Eigenschaft der gesamten Familie $(\varphi_C)_{C \in \mathcal{C}}$*.

- Eine natürliche Transformation $\varphi : F \to G$ wird als *natürlicher Isomorphismus* bezeichnet, wenn für jedes $C \in \mathcal{C}$ der Morphismus $\varphi_C : F(C) \to G(C)$ ein Isomorphismus ist.[46]

Man macht sich den Begriff einer natürlichen Transformation am besten an Beispielen klar:

1.17. Beispiele: 1) Sei k ein Körper. Auf der Kategorie ${}_k\mathcal{M}$ der k-Vektorräume betrachten wir den Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{{}_k\mathcal{M}} : {}_k\mathcal{M} \to {}_k\mathcal{M}$ und den Funktor $\mathrm{dual} \circ \mathrm{dual} : {}_k\mathcal{M} \to {}_k\mathcal{M}$, wobei der kontravariante Funktor dual wie in Beispiel 1.16. **1)** definiert ist.[47] Dann können wir eine natürliche Transformation $\varphi : \mathrm{id}_{{}_k\mathcal{M}} \to \mathrm{dual} \circ \mathrm{dual}$ definieren, indem wir für jeden Vektorraum $V \in {}_k\mathcal{M}$ den Morphismus $\varphi_V \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{id}_{{}_k\mathcal{M}}(V), (\mathrm{dual} \circ \mathrm{dual})(V))$ (das heißt, $\varphi_V \in \mathrm{Hom}_k(V, V^{**})$) wie folgt definieren:

$$\varphi_V(v) = (x \mapsto x(v)) \qquad \text{für alle } v \in V.$$

[48] Um zu zeigen, daß φ wirklich eine natürliche Transformation ist, müssen wir beweisen, daß für je zwei k-Vektorräume V und W und jedes $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ folgendes

---

[45]Letzterer Begriff ist ein Hinweis darauf, daß man Funktoren als Objekte und natürliche Transformationen zwischen diesen Funktoren als Morphismen in einer bestimmten Kategorie auffassen kann; und zwar kann man für je zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ eine Kategorie $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ einführen mit

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})) = \{F \mid F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \text{ ist Funktor}\}, \qquad \text{und}$$
$$(\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))(F, G) = \{\varphi \mid \varphi : F \to G \text{ ist natürliche Transformation}\} \text{ für alle } F, G \in \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

Die Verkettung von Morphismen in dieser Kategorie wird als die Verkettung natürlicher Transformationen definiert. (Dabei verstehen wir unter der *Verkettung zweier natürlicher Transformationen* $\varphi : F \to G$ und $\psi : G \to H$ (wobei F, G und H drei Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ sind) die natürliche Transformation $\psi \circ \varphi : F \to H$, die durch

$$(\psi \circ \varphi)_C = \psi_C \circ \varphi_C \text{ für alle } C \in \mathcal{C}$$

definiert ist.)

[46]Dabei erinnern wir uns noch einmal: Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ (wobei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \mathcal{C}$ zwei Objekte sind) heißt ein *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $fg = \mathrm{id}_Y$ und $gf = \mathrm{id}_X$.

[47]Diese Funktoren $\mathrm{id}_{{}_k\mathcal{M}}$ und $\mathrm{dual} \circ \mathrm{dual}$ sind beide kovariant, obwohl dual selber ein kontravarianter Funktor ist.

[48]Wie bereits in den Vorbemerkungen erklärt, bezeichnen wir mit $x \mapsto x(v)$ diejenige k-lineare Abbildung $V^* \to k$, die jedes $x \in V^*$ auf $x(v) \in k$ abbildet.

Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\varphi_W"'] & W^{**} \end{tikzcd} .$$

Dies ist aber eine Übungsaufgabe in Linearer Algebra.

Die (gerade bewiesene) Tatsache, daß die (oben definierten) Morphismen $\varphi_V \in \operatorname{Hom}_k(V, V^{**})$ für alle $V \in {}_k\mathcal{M}$ eine natürliche Transformation φ induzieren, wird in der Algebra oftmals unformal wie folgt formuliert: Der k-Vektorraumhomomorphismus $\varphi_V : V \to V^{**}$, der durch

$$\varphi_V(v) = (x \mapsto x(v)) \qquad \text{für alle } v \in V$$

definiert ist, ist kanonisch. In dieser Form liest man die Aussage in verschiedenen Texten, aber bevor man den Begriff einer natürlichen Transformation kennt, weiß man in der Regel nicht genau, was das Wort "kanonisch" eigentlich bedeutet. Und, wie schon gesagt, ist die Formulierung mit dem Wort "kanonisch" nicht ganz korrekt, denn Kanonisch-Sein ist keine Eigenschaft der Abbildung φ_V für einen bestimmten Vektorraum V, sondern eine Eigenschaft der Familie $(\varphi_V)_{V \in {}_k\mathcal{M}}$ in ihrer Gesamtheit. Kanonisch ist also eigentlich nicht die konkrete Abbildung φ_V, sondern *die Art, wie diese Abbildung φ_V in Abhängigkeit vom Vektorraum V konstruiert wurde*. Aber in der Algebra hat es sich eingebürgert, die Abbildung φ_V als kanonisch zu bezeichnen, und dabei stillschweigend an die Art, wie sie konstruiert wurde, zu denken.

Übrigens: Die natürliche Transformation φ ist *kein* natürlicher Isomorphismus, denn für einige (unendlich-dimensionale) Vektorräume V ist $\varphi_V : V \to V^{**}$ kein Isomorphismus. Doch *eingeschränkt auf die endlichdimensionalen k-Vektorräume* ist φ ein natürlicher Isomorphismus; genauer gesagt gilt folgendes: Bezeichnen wir mit ${}_k^{\text{fin}}\mathcal{M}$ die Kategorie aller endlichdimensionalen k-Vektorräume, und konstruieren wir einen kontravarianten Funktor $\operatorname{dual}^{\text{fin}} : {}_k^{\text{fin}}\mathcal{M} \to {}_k^{\text{fin}}\mathcal{M}$ genau so wie $\operatorname{dual} : {}_k\mathcal{M} \to {}_k\mathcal{M}$ (aber eben auf ${}_k^{\text{fin}}\mathcal{M}$ statt auf ${}_k\mathcal{M}$) und eine natürliche Transformation $\varphi^{\text{fin}} : \operatorname{id}_{{}_k^{\text{fin}}\mathcal{M}} \to \operatorname{dual}^{\text{fin}} \circ \operatorname{dual}^{\text{fin}}$ genau so wie $\varphi : \operatorname{id}_{{}_k\mathcal{M}} \to \operatorname{dual} \circ \operatorname{dual}$ (aber wieder auf ${}_k^{\text{fin}}\mathcal{M}$ anstelle von ${}_k\mathcal{M}$), dann ist φ^{fin} ein natürlicher Isomorphismus. (Denn für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V ist $\varphi_V^{\text{fin}} = \varphi_V : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus.)

2) Sei k ein kommutativer Ring und X ein k-Modul. Dann können wir eine natürliche Transformation $\rho_X : (X \otimes_k -) \circ \operatorname{dual} \to \operatorname{Hom}_k(-, X)$ (gemäß der Vereinbarung in Beispiel 1.16. **4)** steht hier $\operatorname{Hom}_k(-, X)$ für den "reichhaltigeren" Funktor $\operatorname{Hom}_k(-, {}_kX_k)$) definieren, indem wir für jeden k-Modul $Y \in {}_k\mathcal{M}$ den Morphismus

$$(\rho_X)_Y \in \operatorname{Hom}_k(((X \otimes_k -) \circ \operatorname{dual})(Y), (\operatorname{Hom}_k(-, X))(Y))$$
$$(\text{also } (\rho_X)_Y \in \operatorname{Hom}_k(X \otimes_k Y^*, \operatorname{Hom}_k(Y, X)))$$
$$\text{definieren durch}$$
$$(\rho_X)_Y(x \otimes f) = (y \mapsto xf(y)) \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } f \in Y^*$$
$$(\text{und durch lineare Fortsetzung auf ganz } X \otimes_k Y^* \text{ erweitern}).$$

Sei k ein kommutativer Ring und Y ein k-Modul. Dann können wir eine natürliche Transformation $\rho'_Y : (- \otimes_k Y^*) \to \operatorname{Hom}_k(Y, -)$ (wieder steht $\operatorname{Hom}_k(Y, -)$ für den "reichhaltigeren" Funktor $\operatorname{Hom}_k({}_kY_k, -))$ definieren, indem wir für jeden k-Modul $X \in {}_k\mathcal{M}$ den Morphismus

$$(\rho'_Y)_X \in \operatorname{Hom}_k((- \otimes_k Y^*)(X), (\operatorname{Hom}_k(Y,-))(X))$$
$$\text{(also } (\rho_X)_Y \in \operatorname{Hom}_k(X \otimes_k Y^*, \operatorname{Hom}_k(Y,X)))$$
$$\text{definieren durch}$$
$$(\rho'_Y)_X(x \otimes f) = (y \mapsto xf(y)) \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } f \in Y^*$$
$$\text{(und durch lineare Fortsetzung auf ganz } X \otimes_k Y^* \text{ erweitern)}.$$

Die Tatsache, daß ρ_X und ρ'_Y natürliche Transformationen sind, wird von Algebraikern gerne folgendermaßen - unformal, aber prägnant - ausgedrückt: Für jeden kommutativen Ring k ist der für alle $X, Y \in {}_k\mathcal{M}$ definierte k-Modulhomomorphismus

$$X \otimes_k Y^* \to \operatorname{Hom}_k(Y,X),$$
$$\text{der } x \otimes f \text{ auf } (y \mapsto xf(y)) \text{ abbildet für alle } x \in X \text{ und } f \in Y^*,$$

kanonisch in X für festes Y und kanonisch in Y für festes X, oder (kurz ausgedrückt) *kanonisch in beiden Variablen X und Y*. (Die Aussage, daß er kanonisch in X für festes Y ist, entspricht der natürlichen Transformation ρ'_Y, und die Aussage, daß er kanonisch in Y für festes X ist, entspricht der natürlichen Transformation ρ_X.)

Adjungierte Funktoren

Als nächstes definieren wir die Begriffe von *linksadjungierten bzw. rechtsadjungierten Funktoren.* Zuerst eine Notation:

Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, seien $X, X', Y, Y' \in \mathcal{C}$ vier Objekte, und seien $f \in \mathcal{C}(X', X)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, Y')$ zwei Morphismen[49]. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(f,g)$ die Abbildung von $\mathcal{C}(X,Y)$ nach $\mathcal{C}(X',Y')$, die jeden Morphismus $h \in \mathcal{C}(X,Y)$ in den Morphismus $ghf \in \mathcal{C}(X',Y')$ überführt.

Nun zu der Definition links- bzw. rechtsadjungierter Funktoren:

Definition: Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren. Dann heißt der Funktor F *linksadjungiert* zu dem Funktor G, wenn man für jedes $C \in \mathcal{C}$ und jedes $D \in \mathcal{D}$ eine bijektive Abbildung $\varphi_{C,D} : \mathcal{D}(F(C), D) \to \mathcal{C}(C, G(D))$ finden kann mit der Eigenschaft, daß für beliebige Objekte $C, C' \in \mathcal{C}$ und $D, D' \in \mathcal{D}$ und für beliebige Morphismen $f \in \mathcal{C}(C, C')$ und $g \in \mathcal{D}(D, D')$ die zwei Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(C), D) \arrow[r, "\text{Bijektion}", "\varphi_{C,D}"'] \arrow[d, "\mathcal{D}(\mathrm{id},g)"'] & \mathcal{C}(C, G(D)) \arrow[d, "\mathcal{C}(\mathrm{id},G(g))"] \\
\mathcal{D}(F(C), D') \arrow[r, "\text{Bijektion}", "\varphi_{C,D'}"'] & \mathcal{C}(C, G(D'))
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(C'), D) \arrow[r, "\text{Bijektion}", "\varphi_{C',D}"'] \arrow[d, "\mathcal{D}(F(f),\mathrm{id})"'] & \mathcal{C}(C', G(D)) \arrow[d, "\mathcal{C}(f,\mathrm{id})"] \\
\mathcal{D}(F(C), D) \arrow[r, "\text{Bijektion}", "\varphi_{C,D}"'] & \mathcal{C}(C, G(D))
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

[49] Man beachte die Reihenfolge: $f \in \mathcal{C}(X', X)$, nicht $f \in \mathcal{C}(X, X')$!

kommutativ sind.

Statt zu sagen, daß der Funktor F linksadjungiert zu dem Funktor G ist, kann man auch eine der zwei folgenden äquivalenten Sprechweisen verwenden:

- Der Funktor G ist *rechtsadjungiert* zu dem Funktor F.

- Es gilt $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$.

Bemerkung: Die Bedingung, daß für beliebige Objekte $C, C' \in \mathcal{C}$ und $D, D' \in \mathcal{D}$ und für beliebige Morphismen $f \in \mathcal{C}(C, C')$ und $g \in \mathcal{D}(D, D')$ die zwei Diagramme (1.6) und (1.7) kommutativ sind, könnte man auch unformal wie folgt in Worte fassen: Die für alle $C \in \mathcal{C}$ und für alle $D \in \mathcal{D}$ definierte Abbildung $\varphi_{C,D}$ ist kanonisch in beiden Variablen C und D. (Der Begriff "kanonisch in beiden Variablen C und D " ist dabei genauso zu verstehen wie in Beispiel 1.17. **2)**; wir werden aber hier keine formale Definition für diesen Begriff geben.) Somit läßt sich obige Definition wie folgt umformulieren: Für zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ und zwei Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ heißt der Funktor F *linksadjungiert* zu dem Funktor G, wenn man eine für alle $C \in \mathcal{C}$ und alle $D \in \mathcal{D}$ definierte bijektive Abbildung $\varphi_{C,D} : \mathcal{D}(F(C), D) \to \mathcal{C}(C, G(D))$ angeben kann, die kanonisch in beiden Variablen ist.

1.18. Satz: Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, und seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren so, daß F linksadjungiert zu G ist.

Für jedes $C \in \mathcal{C}$ sei ein Morphismus $\eta_C : C \to G(F(C))$ definiert als $\eta_C = \varphi_{C,F(C)}\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right)$ (wobei die Abbildung $\varphi_{C,D} : \mathcal{D}(F(C), D) \to \mathcal{C}(C, G(D))$ für alle $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$ genauso definiert ist wie in der Definition linksadjungierter Funktoren). Sei $\eta = (\eta_C)_{C \in \mathcal{C}}$.

a) Dann ist η eine natürliche Transformation von $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ nach GF.

b) Für jedes $C \in \mathcal{C}$, jedes $D \in \mathcal{D}$ und jeden Morphismus $\varphi : C \to G(D)$ gibt es genau einen Morphismus $f : F(C) \to D$ so, daß $\varphi_{C,D}(f) = \varphi$ gilt und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\eta_C"'] & G(D) \\ & G(F(C)) \arrow[u, dotted, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis: **a)** Wir müssen zeigen, daß für je zwei $C, C' \in \mathcal{C}$ und für jeden Morphismus $u : C \to C'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "u"'] & G(F(C)) \arrow[d, "G(F(u))"] \\ C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & G(F(C')) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Doch dies folgt aus

$$\begin{aligned}
G(F(u)) \circ \eta_C &= (\mathcal{C}(\mathrm{id}, G(F(u))))(\eta_C) = (\mathcal{C}(\mathrm{id}, G(F(u))))\left(\varphi_{C,F(C)}\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right)\right) \\
&= \left(\mathcal{C}(\mathrm{id}, G(F(u))) \circ \varphi_{C,F(C)}\right)\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right) = \left(\varphi_{C,F(C')} \circ \mathcal{D}(\mathrm{id}, F(u))\right)\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{nach dem kommutativen Diagramm (1.6)} \\ \text{für } D = F(C),\ D' = F(C') \text{ und } g = F(u)\end{array}\right) \\
&= \varphi_{C,F(C')}\left(\underbrace{\mathcal{D}(\mathrm{id}, F(u))\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right)}_{=F(u)=\mathcal{D}(F(u),\mathrm{id})\left(\mathrm{id}_{F(C')}\right)}\right) = \varphi_{C,F(C')}\left(\mathcal{D}(F(u), \mathrm{id})\left(\mathrm{id}_{F(C')}\right)\right) \\
&= \left(\varphi_{C,F(C')} \circ \mathcal{D}(F(u), \mathrm{id})\right)\left(\mathrm{id}_{F(C')}\right) = \left(\mathcal{C}(u, \mathrm{id}) \circ \varphi_{C',F(C')}\right)\left(\mathrm{id}_{F(C')}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{nach dem kommutativen Diagramm (1.7)} \\ \text{für } D = F(C') \text{ und } f = u\end{array}\right) \\
&= \mathcal{C}(u, \mathrm{id})\left(\varphi_{C',F(C')}\left(\mathrm{id}_{F(C')}\right)\right) = \mathcal{C}(u, \mathrm{id})(\eta_{C'}) = \eta_{C'} \circ u.
\end{aligned}$$

b) Da $\varphi_{C,D}$ bijektiv ist, gibt es genau einen Morphismus $f : F(C) \to D$ so, daß $\varphi_{C,D}(f) = \varphi$ gilt. Wir müssen also nur noch zeigen, daß für diesen Morphismus f das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\eta_C"'] & G(D) \\
& G(F(C)) \arrow[u, dotted, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, also daß $G(f) \circ \eta_C = \varphi$ ist.

Da der Funktor F zum Funktor G linksadjungiert ist, ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(C), F(C)) \arrow[r, "\text{Bijektion}", "\varphi_{C,F(C)}"'] \arrow[d, "\mathcal{D}(\mathrm{id},f)"'] & \mathcal{C}(C, G(F(C))) \arrow[d, "\mathcal{C}(\mathrm{id},G(f))"] \\
\mathcal{D}(F(C), D) \arrow[r, "\text{Bijektion}", "\varphi_{C,D}"'] & \mathcal{C}(C, G(D))
\end{tikzcd}$$

kommutativ[50] (dies folgt aus dem kommutativen Diagramm (1.6), angewandt auf f, $F(C)$ und D statt g, D bzw. D'). Verfolgen wir den Weg des Elementes $\mathrm{id}_{F(C)} \in \mathcal{D}(F(C), F(C))$ durch dieses Diagramm, dann erhalten wir
$\left(\mathcal{C}(\mathrm{id}, G(f)) \circ \varphi_{C,F(C)}\right)\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right) = (\varphi_{C,D} \circ \mathcal{D}(\mathrm{id}, f))\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right)$. Doch wegen

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{C}(\mathrm{id}, G(f)) \circ \varphi_{C,F(C)}\right)\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right) &= \mathcal{C}(\mathrm{id}, G(f))\left(\underbrace{\varphi_{C,F(C)}\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right)}_{=\eta_C}\right) \\
&= \mathcal{C}(\mathrm{id}, G(f))(\eta_C) = G(f) \circ \eta_C
\end{aligned}$$

und

$$(\varphi_{C,D} \circ \mathcal{D}(\mathrm{id}, f))\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right) = \varphi_{C,D}\left((\mathcal{D}(\mathrm{id}, f))\left(\mathrm{id}_{F(C)}\right)\right) = \varphi_{C,D}(f) = \varphi,$$

[50] Die Abbildung $\mathcal{D}(\mathrm{id}, f) : \mathcal{D}(F(C), F(C)) \to \mathcal{D}(F(C), D)$ überführt dabei jeden Morphismus $g \in \mathcal{D}(F(C), F(C))$ in fg, und die Abbildung $\mathcal{C}(\mathrm{id}, G(f)) : \mathcal{C}(C, G(F(C))) \to \mathcal{C}(C, G(D))$ überführt jeden Morphismus $h \in \mathcal{C}(C, G(F(C)))$ in $G(f)\,h$.

vereinfacht sich dies zu $G(f) \circ \eta_C = \varphi$, was zu beweisen war.

Nun werden wir mehrere Aussagen zeigen, die Algebraiker in der Formulierung "der $\otimes$-Funktor ist linksadjungiert zum Hom-Funktor" subsumieren. Die genauen Formulierungen dieser Aussagen werden wir unten sehen ($1.19\frac{1}{2}$. und $1.20\frac{1}{2}$.); zuerst einige Vorbereitungen:

1.19. Satz: Sei R ein Ring, seien $X \in \mathcal{M}_R$ und $Y \in {}_R\mathcal{M}$, und sei $M \in {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ (das heißt, sei M eine abelsche Gruppe).

a) Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(X \otimes_R Y, M) &\to \operatorname{Hom}_R(X, \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(Y, M)), \\ f &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x \otimes y))) \end{aligned}$$

ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln (das heißt, ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln, der in jeder der drei Variablen X, Y und M natürlich ist).

b) Ebenso ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(X \otimes_R Y, M) &\to \operatorname{Hom}_R(Y, \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(X, M)), \\ f &\mapsto (y \mapsto (x \mapsto f(x \otimes y))) \end{aligned}$$

ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln (das heißt, ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln, der in jeder der drei Variablen X, Y und M natürlich ist).

Beweis: **a)** Die Umkehrabbildung φ^{-1} von φ läßt sich wie folgt angeben: Sei $F \in \operatorname{Hom}_R(X, \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(Y, M))$. Dann ist

$$X \times Y \to M, \qquad (x, y) \mapsto (F(x))(y)$$

eine R-tensorielle Abbildung, und faktorisiert daher (nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes) über das Tensorprodukt $X \otimes_R Y$; die so entstandene $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $X \otimes_R Y \to M$ sei dann $\varphi^{-1}(F)$.

Die Details des Beweises sind dem Leser überlassen (es sind im Wesentlichen nur Rechnungen).[51]

b) ist analog zu **a)** zu zeigen.

$1.19\frac{1}{2}$. Folgerung: Sei R ein Ring.

a) Sei $X \in \mathcal{M}_R$. Dann ist der Funktor $X \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ linksadjungiert zu dem Funktor $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}({}_\mathbb{Z}X_R, -) : {}_\mathbb{Z}\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$.

b) Sei $Y \in {}_R\mathcal{M}$. Dann ist der Funktor $- \otimes_R Y : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_\mathbb{Z}$ linksadjungiert zu dem Funktor $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}({}_RY_\mathbb{Z}, -) : \mathcal{M}_\mathbb{Z} \to \mathcal{M}_R$.

Beweis: **a)** Für jedes $Y \in {}_R\mathcal{M}$ und jedes $M \in {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ gibt es gemäß 1.19. **b)** eine in beiden Variablen kanonische bijektive Abbildung

$$\widetilde{\varphi}_{Y,M} : \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(X \otimes_R Y, M) \to \operatorname{Hom}_R(Y, \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(X, M)),$$

[51] Die Idee hinter dem Beweis ist die folgende: $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen von $X \otimes_R Y$ nach M entsprechen R-tensoriellen Abbildungen von $X \times Y$ nach M, und diese wiederum kann man durch "Currying" in R-lineare Abbildungen von X nach $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(Y, M)$ verwandeln. Unter *Currying* verstehen wir dabei die Umwandlung einer R-tensoriellen Abbildung $f : X \times Y \to M$ in eine R-lineare Abbildung $g : X \to \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(Y, M)$, die durch $g(x) = (y \mapsto f(x, y))$ für alle $x \in X$ definiert wird.

also eine in beiden Variablen kanonische bijektive Abbildung

$$\widetilde{\varphi}_{Y,M} : ({}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M})\left(\left(X \otimes_R -\right)(Y), M\right) \to ({}_R\mathcal{M})\left(Y, \left(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left({}_{\mathbb{Z}}X_R, -\right)\right)(M)\right).$$

Doch dies besagt (laut der Definition von Linksadjungiertheit), daß der Funktor $X\otimes_R -$ linksadjungiert zu dem Funktor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left({}_{\mathbb{Z}}X_R, -\right)$ ist.

b) zeigt man analog zu **a)** mithilfe von 1.19. **a)** statt 1.19. **b)**.

Wir können die Resultate von 1.19. und $1.19\frac{1}{2}$. verallgemeinern, indem wir zusätzlich zur gegebenen R-Linksmodul- bzw. R-Rechtsmodulstruktur zusätzliche Strukturen auf der anderen Seite fordern. So verallgemeinert sich 1.19. zu:

1.20. Satz: a) Seien R und S Ringe, seien $X \in \mathcal{M}_R$ und $Y \in {}_R\mathcal{M}_S$, und sei $Z \in \mathcal{M}_S$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \operatorname{Hom}_S\left(X \otimes_R Y, Z\right) &\to \operatorname{Hom}_R\left(X, \operatorname{Hom}_S\left(Y, Z\right)\right), \\ f &\mapsto \left(x \mapsto \left(y \mapsto f\left(x \otimes y\right)\right)\right) \end{aligned}$$

ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln (das heißt, ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln, der in jeder der drei Variablen X, Y und Z natürlich ist).

b) Seien R und S Ringe, seien $X \in {}_S\mathcal{M}_R$ und $Y \in {}_R\mathcal{M}$, und sei $Z \in {}_S\mathcal{M}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \operatorname{Hom}_S\left(X \otimes_R Y, Z\right) &\to \operatorname{Hom}_R\left(Y, \operatorname{Hom}_S\left(X, Z\right)\right), \\ f &\mapsto \left(y \mapsto \left(x \mapsto f\left(x \otimes y\right)\right)\right) \end{aligned}$$

ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln (das heißt, ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln, der in jeder der drei Variablen X, Y und Z natürlich ist).

Entsprechend läßt sich $1.19\frac{1}{2}$. verallgemeinern zu:

$1.20\frac{1}{2}$. Folgerung: Seien R und S zwei Ringe.

a) Sei $X \in {}_S\mathcal{M}_R$. Dann ist der Funktor ${}_SX \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ linksadjungiert zu dem Funktor $\operatorname{Hom}_S\left({}_SX_R, -\right) : {}_S\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$.

b) Sei $Y \in {}_R\mathcal{M}_S$. Dann ist der Funktor $- \otimes_R Y_S : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ linksadjungiert zu dem Funktor $\operatorname{Hom}_S\left({}_RY_S, -\right) : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$.

Die Resultate 1.19. und $1.19\frac{1}{2}$. sind Sonderfälle der Resultate 1.20. bzw. $1.20\frac{1}{2}$., die man erhält, wenn man $S = \mathbb{Z}$ setzt (denn ${}_R\mathcal{M}_{\mathbb{Z}} = {}_R\mathcal{M}$ und ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_R$, oder, um ganz pedantisch zu sein, ${}_R\mathcal{M}_{\mathbb{Z}} \cong {}_R\mathcal{M}$ und ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}_R \cong \mathcal{M}_R$). Die Beweise von 1.20. bzw. $1.20\frac{1}{2}$. verlaufen völlig analog zu den Beweisen von 1.19. und $1.19\frac{1}{2}$.

1.21. Folgerung: Sind R und S zwei Ringe, und ist $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus[52], dann wird S kanonisch zu einem (S, R)-Bimodul (die S-Linksmodulstruktur ist trivial, und die R-Rechtsmodulstruktur ist durch $sr = s \cdot f(r)$ für alle $s \in S$ und $r \in R$ gegeben). Somit haben wir einen Funktor ${}_SS \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$, der jedes $M \in {}_R\mathcal{M}$ in $S \otimes_R M$ überführt.

Andererseits erhält wegen dem Homomorphismus f jeder S-Linksmodul auch eine kanonische R-Linksmodulstruktur; das heißt, es gibt einen Funktor $\Phi : {}_S\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$,

[52]Dieser Homomorphismus kann z. B. die kanonische Einbettung sein, wenn R ein Unterring von S ist. Dieser Fall ist einer der häufigsten Anwendungsfälle von 1.21.

der jeden S-Linksmodul X in einen R-Linksmodul $\Phi(X)$ überführt (und zwar ist dieser R-Linksmodul $\Phi(X)$ als abelsche Gruppe identisch mit X, während die R-Linksmodulstruktur auf $\Phi(X)$ definiert ist durch $rx = f(r)\,x$ für jedes $r \in R$ und jedes $x \in \Phi(X)$). [53] Dieser R-Linksmodul $\Phi(X)$ heißt die *Restriktion* (oder *Einschränkung*) des S-Linksmoduls X vermöge des Homomorphismus $f : R \to S$.

Der Funktor ${}_S S \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ ist dann linksadjungiert zum Funktor $\Phi : {}_S\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$.

Beweis: Dies folgt aus $1.20\frac{1}{2}$. **a)**, denn der Funktor Φ ist isomorph zum Funktor $\mathrm{Hom}_S({}_S S_R, -) : {}_S\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$. Letzteres wird klar, wenn man folgenden natürlichen Isomorphismus $\nu : \Phi \to \mathrm{Hom}_S({}_S S_R, -)$ einführt:

Für jeden S-Linksmodul X sei der R-Linksmodulhomomorphismus $\nu_X : \Phi(X) \to (\mathrm{Hom}_S({}_S S_R, -))(X)$ gegeben durch $\nu_X(a) = (s \mapsto sa)$ für alle $a \in \Phi(X)$. (Um diese Definition zu verstehen, sollte man sich klar machen, daß $\Phi(X)$ einfach der Modul X als R-Linksmodul ist, und $(\mathrm{Hom}_S({}_S S_R, -))(X) = \mathrm{Hom}_S({}_S S_R, X)$ ist.) Bezeichnet man dann $\nu = (\nu_X)_{X \in {}_S\mathcal{M}}$, dann kann man leicht zeigen, daß ν ein natürlicher Isomorphismus ist.

Quasiinverse Äquivalenzen

Wir werden nun den Begriff von *äquivalenten Kategorien* einführen. Dieser Begriff ist eine schwächere Form der Isomorphie zweier Kategorien: Zwei zueinander äquivalente Kategorien müssen nicht unbedingt zueinander isomorph sein, aber intuitiv gesehen gilt alles, was für eine dieser Kategorien gilt, auch für die andere.

Definition: Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien.

1) Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren. Diese Funktoren F und G heißen zueinander *quasiinverse Äquivalenzen*, wenn $FG \cong \mathrm{id}_\mathcal{D}$ und $GF \cong \mathrm{id}_\mathcal{C}$ gilt, d. h. wenn es natürliche Isomorphismen $FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$ und $GF \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$ gibt.

2) Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *Äquivalenz* zwischen den Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt so, daß F und G zueinander quasiinverse Äquivalenzen sind.

3) Die zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen zueinander *äquivalent*, wenn es zwei Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt so, daß F und G zueinander quasiinverse Äquivalenzen sind.

1.22. Bemerkung: 1) Zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen zueinander *isomorph*, wenn es zwei Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt mit $FG = \mathrm{id}_\mathcal{D}$ und $GF = \mathrm{id}_\mathcal{C}$. Es ist klar, daß zwei zueinander isomorphe Kategorien stets zueinander äquivalent sind, aber die Umkehrung gilt nicht.

2) Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren so, daß F und G zueinander quasiinverse Äquivalenzen sind. Dann gilt $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ und $\mathcal{D} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$.

Beweis: Da F und G zueinander quasiinverse Äquivalenzen sind, gibt es einen Isomorphismus von Funktoren $u : \mathrm{id}_\mathcal{C} \to GF$ und einen Isomorphismus von Funktoren $v : FG \to \mathrm{id}_\mathcal{D}$. Für jedes $C \in \mathcal{C}$ und jedes $D \in \mathcal{D}$ definieren wir eine Abbildung

[53] Meist bezeichnet man den R-Linksmodul $\Phi(X)$ einfach mit ${}_R X$; dieser Modul ist sozusagen "X, als R-Linksmodul gesehen".

$\varphi_{C,D} : \mathcal{D}(F(C), D) \to \mathcal{C}(C, G(D))$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(C), D) \arrow[r, "\varphi_{C,D}"] \arrow[d, "G_{F(C),D}"'] & \mathcal{C}(C, G(D)) . \\
\mathcal{C}(G(F(C)), G(D)) \arrow[ur, "\mathcal{C}\left(u_C, \mathrm{id}_{G(D)}\right)"'] &
\end{tikzcd}$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion, denn definieren wir zusätzlich eine Abbildung $\psi_{C,D}$: $\mathcal{C}(C, G(D)) \to \mathcal{D}(F(C), D)$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(F(C), F(G(D))) , \arrow[dl, "\mathcal{D}\left(\mathrm{id}_{F(C)}, v_D\right)"'] \\
\mathcal{D}(F(C), D) & \mathcal{C}(C, G(D)) \arrow[l, "\psi_{C,D}"] \arrow[u, "F_{C,G(D)}"']
\end{tikzcd}$$

dann ist $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D} : \mathcal{D}(F(C), D) \to \mathcal{D}(F(C), D)$ eine Bijektion (denn für alle $x \in \mathcal{D}(F(C), D)$ ist

$$\begin{aligned}
(\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D})(x) &= \left(\mathcal{D}\left(\mathrm{id}_{F(C)}, v_D\right) \circ F_{C,G(D)} \circ \mathcal{C}\left(u_C, \mathrm{id}_{G(D)}\right) \circ G_{F(C),D}\right)(x) \\
&= \left(\mathcal{D}\left(\mathrm{id}_{F(C)}, v_D\right) \circ F_{C,G(D)} \circ \mathcal{C}\left(u_C, \mathrm{id}_{G(D)}\right)\right)(G(x)) \\
&= \left(\mathcal{D}\left(\mathrm{id}_{F(C)}, v_D\right) \circ F_{C,G(D)}\right)(G(x) \circ u_C) \\
&= \left(\mathcal{D}\left(\mathrm{id}_{F(C)}, v_D\right)\right)(F(G(x) \circ u_C)) = v_D \circ (F(G(x) \circ u_C)) \\
&= v_D \circ F(G(x)) \circ F(u_C) = \underbrace{v_D \circ (FG)(x)}_{\substack{= x \circ v_{F(C)},\text{ da } v \\ \text{eine natürliche} \\ \text{Transformation ist}}} \circ F(u_C) \\
&= x \circ v_{F(C)} \circ F(u_C) = \left(\mathcal{D}\left(v_{F(C)} \circ F(u_C), \mathrm{id}_D\right)\right)(x) ,
\end{aligned}$$

also $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D} = \mathcal{D}\left(v_{F(C)} \circ F(u_C), \mathrm{id}_D\right)$, und somit ist $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D}$ eine Bijektion - die Umkehrabbildung ist nämlich $\mathcal{D}\left(F\left(u_C^{-1}\right) \circ v_{F(C)}^{-1}, \mathrm{id}_D\right)$), und $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D}$: $\mathcal{C}(C, G(D)) \to \mathcal{C}(C, G(D))$ ist eine Bijektion (denn für alle $x \in \mathcal{C}(C, G(D))$ ist

$$\begin{aligned}
(\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D})(x) &= \left(\mathcal{C}\left(u_C, \mathrm{id}_{G(D)}\right) \circ G_{F(C),D} \circ \mathcal{D}\left(\mathrm{id}_{F(C)}, v_D\right) \circ F_{C,G(D)}\right)(x) \\
&= \left(\mathcal{C}\left(u_C, \mathrm{id}_{G(D)}\right) \circ G_{F(C),D} \circ \mathcal{D}\left(\mathrm{id}_{F(C)}, v_D\right)\right)(F(x)) \\
&= \left(\mathcal{C}\left(u_C, \mathrm{id}_{G(D)}\right) \circ G_{F(C),D}\right)(v_D \circ F(x)) \\
&= \left(\mathcal{C}\left(u_C, \mathrm{id}_{G(D)}\right)\right)(G(v_D \circ F(x))) = G(v_D \circ F(x)) \circ u_C \\
&= G(v_D) \circ G(F(x)) \circ u_C = G(v_D) \circ \underbrace{(GF)(x) \circ u_C}_{\substack{= u_{G(D)} \circ x,\text{ da } u \\ \text{eine natürliche} \\ \text{Transformation ist}}} \\
&= G(v_D) \circ u_{G(D)} \circ x = \left(\mathcal{C}\left(\mathrm{id}_C, G(v_D) \circ u_{G(D)}\right)\right)(x) ,
\end{aligned}$$

also $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D} = \mathcal{C}\left(\mathrm{id}_C, G(v_D) \circ u_{G(D)}\right)$, und somit ist $\varphi_{C,D} \circ \psi_{C,D}$ eine Bijektion - die Umkehrabbildung ist nämlich $\mathcal{C}\left(\mathrm{id}_C, u_{G(D)}^{-1} \circ G\left(v_D^{-1}\right)\right)$). Hieraus folgt $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ (denn die Kommutativität der nötigen Diagramme ist leicht nachzurechnen[54]); analog beweist man $\mathcal{D} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$.

1.23. Beispiele: 1) Sei k ein Körper. Wir haben früher die Kategorie der endlichdimensionalen k-Vektorräume mit ${}_k^{\mathrm{fin}}\mathcal{M}$ bezeichnet (man kann sie natürlich auch mit $\mathcal{M}_k^{\mathrm{fin}}$ bezeichnen). Dann können wir einen Funktor ${}^{\mathrm{fin}}\mathrm{dual} : \left({}_k^{\mathrm{fin}}\mathcal{M}\right)^{\mathrm{op}} \to {}_k^{\mathrm{fin}}\mathcal{M}$ definieren durch

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{fin}}\mathrm{dual}(V) &= V^* && \text{für jeden } k\text{-Vektorraum } V, \qquad \text{und} \\
{}^{\mathrm{fin}}\mathrm{dual}(f) &= f^* && \text{für jedes } f \in \mathrm{Hom}_k(X, Y) \text{ für jede } X, Y \in {}_k\mathcal{M}
\end{aligned}
$$

(dabei bezeichnet V^* den Dualraum von V, und die Abbildung f^* ist definiert als die k-lineare Abbildung von Y^* nach X^*, die jedes $g \in Y^*$ auf $g \circ f$ abbildet).[55] Dann ist ${}^{\mathrm{fin}}\mathrm{dual} : \left({}_k^{\mathrm{fin}}\mathcal{M}\right)^{\mathrm{op}} \to {}_k^{\mathrm{fin}}\mathcal{M}$ eine Äquivalenz von Kategorien.[56]

2) Seien R und S zwei Ringe, und seien $P \in {}_R\mathcal{M}_S$ und $Q \in {}_S\mathcal{M}_R$ so, daß

$$
P \otimes_S Q \cong R \text{ in } {}_R\mathcal{M}_R \qquad \text{und} \qquad Q \otimes_R P \cong S \text{ in } {}_S\mathcal{M}_S
$$

gilt. Dann sind die Funktoren $Q \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ und $P \otimes_S - : {}_S\mathcal{M} \to {}_R\mathcal{M}$ zueinander quasiinverse Äquivalenzen.

Beweis:[57] Wir definieren eine natürliche Transformation $\varphi : (Q \otimes_R -)(P \otimes_S -) \to \mathrm{id}_{{}_S\mathcal{M}}$ durch $\varphi = (\varphi_M)_{M \in {}_S\mathcal{M}}$, wobei für jedes $M \in {}_S\mathcal{M}$ der S-Linksmodulisomorphismus $\varphi_M : ((Q \otimes_R -)(P \otimes_S -))(M) \to M$ definiert ist als Resultat der folgenden Kette von Isomorphien:

$$
\begin{aligned}
&((Q \otimes_R -)(P \otimes_S -))(M) = (Q \otimes_R -)(P \otimes_S M) = Q \otimes_R (P \otimes_S M) \\
&\cong (Q \otimes_R P) \otimes_S M \qquad \text{(dies ist eine kanonische Isomorphie)} \\
&\cong S \otimes_S M \qquad (\text{wegen } Q \otimes_R P \cong S;\ \text{diese Isomorphie ist in } M \text{ kanonisch}) \\
&\cong M \qquad \text{(dies ist ebenfalls eine kanonische Isomorphie)}.
\end{aligned}
$$

Da dieser Isomorphismus φ_M kanonisch ist, haben wir damit einen natürlichen Isomorphismus $(Q \otimes_R -)(P \otimes_S -) \cong \mathrm{id}_{{}_S\mathcal{M}}$ gefunden. Analog ergibt sich ein natürlicher Isomorphismus $(P \otimes_S -)(Q \otimes_R -) \cong \mathrm{id}_{{}_R\mathcal{M}}$, und der Beweis ist fertig.

2. Coalgebren, Bialgebren, Hopfalgebren

[54] In der Tat ist das Diagramm (1.6) offensichtlicherweise kommutativ, während die Kommutativität des Diagramms (1.7) aus der Relation $u_{C'} \circ f = G(F(f)) \circ u_C$ für alle $f \in \mathcal{C}(C, C')$ folgt (die wiederum klar ist, da u eine natürliche Transformation ist).

[55] Dieser Funktor ${}^{\mathrm{fin}}\mathrm{dual}$ ist die Einschränkung des in Beispiel 1.16. **1)** definierten Funktors $\mathrm{dual} : ({}_k\mathcal{M})^{\mathrm{op}} \to {}_k\mathcal{M}$ auf die endlichdimensionalen Vektorräume.

[56] Um dies zu zeigen, konstruiert man einen natürlichen Isomorphismus $\varphi_{\mathrm{fin}} : \mathrm{id}_{{}_k^{\mathrm{fin}}\mathcal{M}} \to {}^{\mathrm{fin}}\mathrm{dual} \circ {}^{\mathrm{fin}}\mathrm{dual}$ analog zu dem in Beispiel 1.17. **1)** definierten natürlichen Homomorphismus $\varphi : \mathrm{id}_{{}_k\mathcal{M}} \to \mathrm{dual} \circ \mathrm{dual}$ (aber nur für endlichdimensionale Vektorräume).

[57] Dies war Gegenstand von Aufgabe 1 auf dem Übungsblatt 3.

In diesem und den nächsten Kapiteln werden wir Algebren und Coalgebren immer *über einem Körper* k betrachten.[58] Der Körper k bleibt dabei fest; deshalb werden wir ihn (der Kürze halber) nicht mehr explizit angeben. Das heißt, wir werden statt "k-linear" öfters einfach "linear" schreiben, genauso "bilinear" statt "k-bilinear", "Monoidalgebra" statt "k-Monoidalgebra", "Vektorraum" statt "k-Vektorraum", und "Algebra" statt "k-Algebra", ferner $\otimes$ statt $\otimes_k$, und Hom statt Hom_k . Mit $\operatorname{Hom}(A, B)$ ist immer der Vektorraum der Homomorphismen zwischen den k-Vektorräumen A und B gemeint (also der k-linearen Abbildungen von A nach B), auch wenn A und B zusätzlich zu der Vektorraumstruktur noch z. B. eine Algebrastruktur tragen. In letzterem Fall werden wir die Menge der *Algebrahomomorphismen* von A nach B mit $\operatorname{Alg}(A, B)$ bezeichnen.

Da k ein Körper und damit insbesondere ein kommutativer Ring ist, können wir die Kategorie $\mathcal{M}_k$ der k-Rechtsmoduln und die Kategorie ${}_k\mathcal{M}$ der k-Linksmoduln miteinander identifizieren, denn jeder k-Linksmodul M wird zu einem k-Rechtsmodul M durch die Setzung $v\lambda = \lambda v$ für alle $v \in M$ und $\lambda \in k$, und analog umgekehrt. Beide Kategorien $\mathcal{M}_k$ und ${}_k\mathcal{M}$ sind einfach die Kategorie der k-Vektorräume.

Man beachte allerdings, daß ${}_k\mathcal{M}_k$ eine andere Kategorie als ${}_k\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_k$ ist. Denn ein (k, k)-Bimodul ist eine abelsche Gruppe mit *zwei* k-Vektorraumstrukturen, und diese zwei k-Vektorraumstrukturen müssen nicht gleich sein (sie müssen allerdings miteinander kommutieren). Doch jeder k-Vektorraum ist kanonischerweise ein (k, k)-Bimodul. Somit können wir k-Vektorräume auffassen als spezielle (k, k)-Bimoduln - nämlich als diejenigen (k, k)-Bimoduln, auf welchen die k-Linksmodulstruktur und die k-Rechtsmodulstruktur identisch sind. Diese Sichtweise macht klar, wieso man das Tensorprodukt zweier k-Vektorräume auch wieder kanonisch als k-Vektorraum auffassen kann (denn das Tensorprodukt zweier (k, k)-Bimoduln ist wieder ein (k, k)-Bimodul, und daß die k-Linksmodulstruktur und die k-Rechtsmodulstruktur auf diesem identisch sind, ist leicht nachzuprüfen).

Die Isomorphie $(X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z)$ für je drei Vektorräume X, Y, Z ist "dermaßen kanonisch", daß wir die zwei Vektorräume $(X \otimes Y) \otimes Z$ und $X \otimes (Y \otimes Z)$ im Folgenden miteinander identifizieren werden, und einfach beide mit $X \otimes Y \otimes Z$ bezeichnen werden. Gleichfalls identifizieren wir $k \otimes X$, $X \otimes k$ und X wegen den kanonischen Isomorphien $k \otimes X \cong X \cong X \otimes k$.

Coalgebren

In Kapitel 1 haben wir den Begriff einer k-Algebra auf drei verschiedene (aber äquivalente) Weisen definiert. Von diesen drei Definitionen hat die Definition der k-Algebra$_3$ den Vorteil, daß sie nur den Begriff eines k-Moduls und des Tensorproduktes von k-Moduln verwendet, und alle Axiome als kommutative Diagramme formuliert. Wir können also versuchen, diese Definition zu "dualisieren", indem wir in diesen kommutativen Diagrammen alle Pfeile umkehren. Tun wir dieses, erhalten wir das Konzept einer *Coalgebra*:

Definition (Coalgebra): Unter einer *k-Coalgebra* - oder kurz *Coalgebra* - verstehen wir ein Tripel (C, Δ, ε) , wobei C ein k-Vektorraum ist, und $\Delta : C \to C \otimes C$ und $\varepsilon : C \to k$ zwei k-lineare Abbildungen sind, für die folgende drei Eigenschaften gelten:

[58] Die Anfänge der Theorie würden auch für kommutative Ringe k Sinn ergeben, doch im Weiteren ergäben sich größere Schwierigkeiten.

- *Coassoziativität:* Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

  ist kommutativ, wobei $(C \otimes C) \otimes C$ mit $C \otimes (C \otimes C)$ identifiziert wird (wegen der kanonischen Isomorphie $(C \otimes C) \otimes C \cong C \otimes (C \otimes C)$).

- *Linke Coeins:* Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] \\ k \otimes C & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

  ist kommutativ.

- *Rechte Coeins:* Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & C \otimes C \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ C \otimes k & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

  ist kommutativ.

Diese Definition einer k-Coalgebra ist, wie schon gesagt, nichts anderes als die Definition einer k-Algebra als k-Algebra$_3$ mit umgedrehten Pfeilen[59].

Die Abbildung Δ in der obigen Definition bezeichnen wir als *Comultplikation* der Coalgebra C, und die Abbildung ε bezeichnet man als die *Coeins* der Coalgebra C.

Bemerkung: Für jede Coalgebra (C, Δ, ε) ist die Abbildung Δ injektiv (denn $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ ist der kanonische Isomorphismus $C \to k \otimes C$).

Genauso wie wir die Definition einer Coalgebra durch Umdrehen aller Pfeile aus der Definition einer Algebra$_3$ erhalten haben, können wir einen Coalgebrahomomorphismus definieren, indem wir in der Definition eines Algebrahomomorphismus für Algebren$_3$ (das ist Definition $1.11\frac{1}{2}$. **c)**) alle Pfeile umdrehen:

Definition: 1) Seien C und D Coalgebren, und sei $f : C \to D$ eine k-lineare Abbildung. Dann heißt f ein *Coalgebrahomomorphismus*, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & k \end{tikzcd}$$

kommutieren.

[59] Wir haben hier Coalgebren nur für Körper k definiert, aber wir hätten sie genauso gut auch für beliebige kommutative Ringe k definieren können.

Die Menge aller Coalgebrahomomorphismen von C nach D wird als $\operatorname{Coalg}(C, D)$ bezeichnet.

2) Sei C eine Coalgebra, und C' ein Untervektorraum von C. Dann heißt C' eine *Untercoalgebra* von C, wenn $\Delta(C') \subseteq C' \otimes C'$ ist (wobei $C' \otimes C'$ als Untervektorraum von $C \otimes C$ aufgefasst wird).

Bemerkung: Ist C ein Vektorraum und ist $\Delta : C \to C \otimes C$ eine k-lineare Abbildung, so heißt die Abbildung Δ *coassoziativ*, wenn das Diagramm (2.1) kommutativ ist. Ist C ein Vektorraum und sind $\Delta : C \to C \otimes C$ und $\varepsilon : C \to k$ zwei k-lineare Abbildungen, so heißt die Abbildung Δ *counitär* bezüglich ε, wenn die Diagramme (2.2) und (2.3) kommutativ sind. Insofern kann man die Definition einer Coalgebra auch wie folgt formulieren: Eine *Coalgebra* wird definiert als ein Tripel (C, Δ, ε), wobei C ein Vektorraum ist, $\Delta : C \to C \otimes C$ eine coassoziative Abbildung ist, und $\varepsilon : C \to k$ eine Abbildung ist, bezüglich welcher Δ counitär ist.

2.1. Beispiele: Hier einige einfache Beispiele für Coalgebren:

-1) Der triviale Vektorraum 0 wird zu einer Coalgebra, wenn man die Abbildungen $\Delta : 0 \to 0 \otimes 0$ und $\varepsilon : 0 \to k$ als die Nullabbildungen definiert (eine andere Wahl hat man sowieso nicht).

Beweis: Wir müssen nachweisen, daß die Diagramme (2.1), (2.2) und (2.3) kommutieren, wenn man $C = 0$ setzt und die Abbildungen Δ und ε als Nullabbildungen definiert. Aber dies ist trivial.

0) Auf dem Körper k selber ist eine kanonische Coalgebrastruktur festgelegt: Man definiere eine Abbildung $\Delta : k \to k \otimes k$ als die kanonische k-lineare Abbildung von k nach $k \otimes k$ (also die Abbildung $x \mapsto 1 \otimes x$, oder, äquivalent dazu, $x \mapsto x \otimes 1$), und eine Abbildung $\varepsilon : k \to k$ als die Identitätsabbildung. Dann ist der Vektorraum k zusammen mit diesen zwei Abbildungen Δ und ε eine Coalgebra.

Beweis: Wir müssen nachweisen, daß die Diagramme (2.1), (2.2) und (2.3) kommutieren, wenn man $C = k$ setzt und die Abbildungen Δ und ε wie oben definiert. Aber dies ist beinahe trivial.

1) Sei G eine Menge, und sei $C = k[G]$ der freie k-Modul mit Basis G. (Wir haben diesen freien k-Modul früher $k^{(G)}$ genannt, aber hier wollen wir ihn $k[G]$ nennen. Dieser k-Modul ist ein Vektorraum mit Basis $\{E_g \mid g \in G\}$, wobei E_g für jedes $g \in G$ ein Element von dem Vektorraum ist; aber wir identifizieren E_g mit g für jedes $g \in G$.) Dann können wir auf C eine Coalgebrastruktur konstruieren, indem wir die k-lineare Abbildung $\Delta : C \to C \otimes C$ durch

$$\Delta(g) = g \otimes g \qquad \text{für alle } g \in G$$

definieren, und die k-lineare Abbildung $\varepsilon : C \to k$ durch

$$\varepsilon(g) = 1 \qquad \text{für alle } g \in G$$

definieren.

Beweis: Für jedes $g \in G$ ist

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta)(g) &= (\Delta \otimes \operatorname{id})(\Delta(g)) = (\Delta \otimes \operatorname{id})(g \otimes g) = \Delta(g) \otimes g = (g \otimes g) \otimes g \\ &= g \otimes g \otimes g \end{aligned}$$

und analog $((\operatorname{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(g) = g \otimes g \otimes g$, also $((\Delta \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta)(g) = ((\operatorname{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(g)$. Da G eine Basis von C ist, ist also $(\Delta \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta = (\operatorname{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$. Das heißt, das Diagramm (2.1) ist kommutativ.

Entsprechend zeigt man, daß das Diagramm (2.2) kommutativ ist, weil für jedes $g \in G$ gilt:

$$((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(g) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(g)) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(g \otimes g) = \varepsilon(g) \otimes g = 1 \otimes g = \mathrm{kan}\, g.$$

Analog zeigt man die Kommutativität des Diagramms (2.3). Nachdem alle drei Diagramme (2.1), (2.2) und (2.3) kommutativ sind, folgt nun, daß (C, Δ, ε) eine Coalgebra ist.

2) Sei C der freie k-Modul mit Basis $\{x_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ fest ist, und die $x_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$ lauter verschiedene Symbole sind. Dann wird C zu einer Coalgebra, wenn man die k-linearen Abbildungen $\Delta : C \to C \otimes C$ und $\varepsilon : C \to k$ durch

$$\begin{aligned} \Delta(x_{i,j}) &= \sum_{l=1}^{n} x_{i,l} \otimes x_{l,j} && \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n; \\ \varepsilon(x_{i,j}) &= \delta_{i,j} && \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n \end{aligned}$$

definiert.

Beweis: Für jede $1 \leq i, j \leq n$ ist

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x_{i,j}) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x_{i,j})) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\left(\sum_{l=1}^{n} x_{i,l} \otimes x_{l,j}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \Delta(x_{i,l}) \otimes x_{l,j} = \sum_{k=1}^{n} \Delta(x_{i,k}) \otimes x_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} x_{i,l} \otimes x_{l,k}\right) \otimes x_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_{i,l} \otimes x_{l,k} \otimes x_{k,j} \end{aligned}$$

und analog

$$((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_{i,l} \otimes x_{l,k} \otimes x_{k,j},$$

also $((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x_{i,j}) = ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x_{i,j})$. Damit gilt $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ (denn $\{x_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ist eine Basis von C), und somit kommutiert das Diagramm (2.1).

Entsprechend zeigt man, daß das Diagramm (2.2) kommutiert, denn für jede $1 \leq i, j \leq n$ ist

$$\begin{aligned} ((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x_{i,j}) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(x_{i,j})) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\left(\sum_{l=1}^{n} x_{i,l} \otimes x_{l,j}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \varepsilon(x_{i,l}) \otimes x_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l} \otimes x_{l,j} = 1 \otimes x_{i,j} = \mathrm{kan}(x_{i,j}). \end{aligned}$$

Aus einem ähnlichen Grund kommutiert das Diagramm (2.3). Somit kommutieren alle drei Diagramme (2.1), (2.2) und (2.3), und unser C ist daher eine Coalgebra.

3) Sei C der freie k-Modul mit Basis $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei die X_i lauter verschiedene Symbole sind. Dann kann man C zu einer Coalgebra machen, indem man k-lineare

Abbildungen $\Delta : C \to C \otimes C$ und $\varepsilon : C \to k$ durch

$$\Delta(X_n) = \sum_{i=0}^{n} X_i \otimes X_{n-i} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(X_n) = \delta_{0,n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definiert.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(X_n) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(X_n)) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\left(\sum_{i=0}^{n} X_i \otimes X_{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \Delta(X_i) \otimes X_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \Delta(X_j) \otimes X_{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} X_i \otimes X_{j-i}\right) \otimes X_{n-j} = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} X_i \otimes X_{j-i} \otimes X_{n-j}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(X_n) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(X_n)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\left(\sum_{i=0}^{n} X_i \otimes X_{n-i}\right) = \sum_{i=0}^{n} X_i \otimes \Delta(X_{n-i}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} X_k \otimes \Delta(X_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} X_k \otimes \left(\sum_{i=0}^{n-k} X_i \otimes X_{n-k-i}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} X_k \otimes \left(\sum_{j=k}^{n} X_{j-k} \otimes X_{n-j}\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir } j = k+i \text{ gesetzt,} \\ \text{und } i \text{ als Summationsindex} \\ \text{durch } j \text{ ersetzt}\end{array}\right) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} X_k \otimes X_{j-k} \otimes X_{n-j} = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} X_i \otimes X_{j-i} \otimes X_{n-j},
\end{aligned}$$

also $((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(X_n) = ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(X_n)$. Da $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von C ist, gilt also $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$, und somit kommutiert das Diagramm (2.1).

Das Diagramm (2.2) kommutiert ebenfalls, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(X_n) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(X_n)) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\left(\sum_{i=0}^{n} X_i \otimes X_{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon(X_i) \otimes X_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \delta_{0,i} \otimes X_{n-i} = 1 \otimes X_{n-0} = 1 \otimes X_n = \mathrm{kan}(X_n).
\end{aligned}$$

Analog kommutiert das Diagramm (2.3). Daher kommutieren alle drei Diagramme (2.1), (2.2) und (2.3), und es folgt, daß C eine Coalgebra ist.

4) Sei C der freie k-Modul mit Basis $\{x, g, h\}$, wobei x, g und h drei Symbole sind. Dann können wir C mit einer Coalgebrastruktur ausstatten, indem wir zwei k-lineare Abbildungen $\Delta : C \to C \otimes C$ und $\varepsilon : C \to k$ durch

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= g \otimes g; & \varepsilon(g) &= 1; \\
\Delta(h) &= h \otimes h; & \varepsilon(h) &= 1; \\
\Delta(x) &= g \otimes x + x \otimes h; & \varepsilon(x) &= 0
\end{aligned}$$

festlegen.

Beweis: Um zu beweisen, daß das Diagramm (2.1) kommutiert, müssen wir beweisen, daß $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ ist. Dazu reicht es aus, zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(g) &= ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(g); \\
((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(h) &= ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(h); \\
((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) &= ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x)
\end{aligned}$$

gilt (denn $\{x, g, h\}$ ist eine Basis des Vektorraumes C). Doch die erste dieser drei Gleichungen ergibt sich genauso wie in Beispiel **1)**, die zweite ergibt sich völlig analog dazu, und die dritte folgt aus

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = (\Delta \otimes \mathrm{id})(g \otimes x + x \otimes h) \\
&= \Delta(g) \otimes x + \Delta(x) \otimes h = (g \otimes g) \otimes x + (g \otimes x + x \otimes h) \otimes h \\
&= g \otimes g \otimes x + g \otimes x \otimes h + x \otimes h \otimes h \\
&= g \otimes (g \otimes x + x \otimes h) + x \otimes (h \otimes h) = g \otimes \Delta(x) + x \otimes \Delta(h) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(g \otimes x + x \otimes h) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(x)) = ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x).
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß das Diagramm (2.1) kommutiert.

Jetzt werden wir zeigen, daß das Diagramm (2.2) kommutiert. Dazu müssen wir zeigen, daß $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{kan}$ ist; hierzu reicht es wiederum aus, nachzuweisen, daß

$$\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(g) &= \mathrm{kan}\, g; \\
((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(h) &= \mathrm{kan}\, h; \\
((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) &= \mathrm{kan}\, x
\end{aligned}$$

ist. Wieder läßt sich die erste dieser drei Gleichungen wie in Beispiel **1)** und die zweite völlig analog beweisen; die dritte Gleichung folgt aus

$$\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(g \otimes x + x \otimes h) = \varepsilon(g) \otimes x + \varepsilon(x) \otimes h \\
&= 1 \otimes x + 0 \otimes h = 1 \otimes x = \mathrm{kan}\, x.
\end{aligned}$$

Also kommutiert das Diagramm (2.2). Analog kommutiert das Diagramm (2.3). Zusammen mit dem kommutierenden Diagramm (2.1) ergibt sich also, daß C eine Coalgebra ist.

5) Sei V ein beliebiger Vektorraum. Unter dem *Tensormodul* des Vektorraums V verstehen wir den Vektorraum TV, der durch

$$TV = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ...$$

definiert ist, wobei $V^{\otimes i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ durch $V^{\otimes i} = \underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{i \text{ mal}}$ definiert ist. (Hierbei ist das Tensorprodukt $\underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{i \text{ mal}}$ als k zu verstehen, wenn $i = 0$ ist.)

Dann läßt sich auf dem Tensormodul TV genau eine Coalgebrastruktur definieren, die

$$\Delta(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n) \tag{2.6}$$

und

$$\varepsilon(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \delta_{n,0} \tag{2.7}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt.

Die so erhaltene Coalgebra TV heißt die *Tensorcoalgebra* von V oder die *Dekonkatenationscoalgebra* von V.

Beweis: Wir wollen beweisen, daß man auf dem Tensormodul TV genau eine Coalgebrastruktur definieren kann, die (2.6) und (2.7) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt. Daß es höchstens eine solche Coalgebrastruktur $(TV, \Delta, \varepsilon)$ gibt, ist klar (denn die Abbildungen Δ und ε sind eindeutig bestimmt durch die Vorgabe, daß sie k-linear zu sein und (2.6) und (2.7) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ zu erfüllen haben[60]). Somit bleibt es also nur noch zu zeigen, daß es mindestens eine solche Coalgebrastruktur gibt. Wir werden dies dadurch erreichen, daß wir

- zuerst eine k-lineare Abbildung $\Delta : TV \to (TV) \otimes (TV)$ konstruieren,
- dann zeigen, daß diese Abbildung Δ die Gleichung (2.6) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt,
- dann eine k-lineare Abbildung $\varepsilon : TV \to k$ konstruieren,
- dann zeigen, daß diese Abbildung ε die Gleichung (2.7) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt,
- dann zeigen, daß $(TV, \Delta, \varepsilon)$ eine Coalgebra ist (für diese Abbildungen).

Hier sind die Details dieses Procederes:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir definieren eine Abbildung $d_n : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{n \text{ mal}} \to (TV) \otimes (TV)$ durch

$$d_n (v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n)$$
$$\text{für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V.$$

Diese Abbildung d_n ist multilinear, und somit gibt es (nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes mehrerer Vektorräume) eine lineare Abbildung $\Delta_n : \underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{n \text{ mal}} \to (TV) \otimes (TV)$ mit

$$\Delta_n (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = d_n (v_1, v_2, ..., v_n) \text{ für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V.$$

Wegen $\underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{n \text{ mal}} = V^{\otimes n}$ ist Δ_n also eine Abbildung von $V^{\otimes n}$ nach $(TV) \otimes (TV)$. Wir können die linearen Abbildungen $\Delta_n : V^{\otimes n} \to (TV) \otimes (TV)$ (für verschiedene $n \in \mathbb{N}$) zu einer linearen Abbildung $\Delta : TV \to (TV) \otimes (TV)$ zusammenfassen (denn $TV = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ...$). Diese Abbildung Δ erfüllt

$$\Delta (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \Delta_n (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) \qquad \left(\text{denn } v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \in V^{\otimes n}\right)$$
$$= d_n (v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n)$$
$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V.$$

[60] weil der Vektorraum TV von Elementen der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und mit $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ aufgespannt ist

Das heißt, die Abbildung Δ erfüllt die Gleichung (2.6) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

Sei $\varepsilon : TV \to k$ die Projektionsabbildung aus der direkten Summe $TV = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ...$ auf den direkten Summanden $V^{\otimes 0} = k$. Dann ist $\varepsilon(1) = 1$ (denn $1 \in k$) und $\varepsilon(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = 0$ für alle $n > 0$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ (denn $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ liegt im Summanden $V^{\otimes n}$ der direkten Summe $TV = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ...$, während ε die Projektion auf den Summanden $V^{\otimes 0}$ ist, und das sind zwei verschiedene Summanden). Das heißt,

$$\varepsilon(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \delta_{n,0} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V.$$

Das heißt, die Abbildung ε erfüllt die Gleichung (2.7) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß die gerade definierten Abbildungen Δ und ε den Vektorraum TV zu einer Coalgebra machen. Das heißt, wir müssen zeigen, daß die Diagramme (2.1), (2.2) und (2.3) kommutativ sind, wobei $C = TV$ gesetzt wird. Setzen wir also $C = TV$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\left(\sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n)\right) \qquad \text{(nach (2.6))} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes \underbrace{\Delta(v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n)}_{\substack{= \sum_{j=0}^{n-i} (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_{i+j}) \otimes (v_{i+j+1} \otimes v_{i+j+2} \otimes ... \otimes v_n) \\ \text{(nach (2.6))}}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_{i+j}) \otimes (v_{i+j+1} \otimes v_{i+j+2} \otimes ... \otimes v_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes v_{k+2} \otimes ... \otimes v_{k+j}) \otimes (v_{k+j+1} \otimes v_{k+j+2} \otimes ... \otimes v_n) \\
&\qquad \text{(hier haben wir in der ersten Summe } i \text{ in } k \text{ umbenannt)}
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
&((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) \\
&= (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n)) \\
&= (\Delta \otimes \mathrm{id})\left(\sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n)\right) \qquad \text{(nach (2.6))} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\Delta(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i)}_{\substack{= \sum_{k=0}^{i} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes v_{k+2} \otimes ... \otimes v_i) \\ \text{(nach (2.6))}}} \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes v_{k+2} \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes v_{k+2} \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes v_{k+2} \otimes ... \otimes v_{k+j}) \otimes (v_{k+j+1} \otimes v_{k+j+2} \otimes ... \otimes v_n) \\
&\qquad \text{(hier haben wir in der zweiten Summe } i \text{ durch } k+j \text{ substituiert)},
\end{aligned}
$$

also $((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Da Tensoren der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, ..., v_n \in V$) ein Erzeugendensystem des Tensormoduls TV bilden, folgt hieraus $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$. Somit ist das Diagramm (2.1) für $C = TV$ kommutativ.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ ist

$$
\begin{aligned}
&((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\left(\sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n)\right) \qquad \text{(nach (2.6))} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes \underbrace{\varepsilon(v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n)}_{= \delta_{n-i,0} \text{ (nach (2.7))}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes \delta_{n-i,0} = (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) \otimes 1 \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn in der Summe } \sum\limits_{i=0}^{n} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes \delta_{n-i,0} \text{ sind alle Summanden bis} \\ \text{auf (höchstens) den für } n = i \text{ gleich } 0 \end{array}\right) \\
&= \mathrm{kan}(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n),
\end{aligned}
$$

wobei kan die kanonische Abbildung $TV \to TV \otimes k$ bezeichnet. Da Tensoren der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, ..., v_n \in V$) ein Erzeugendensystem des

Tensormoduls TV bilden, folgt hieraus $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{kan}$. Somit ist das Diagramm (2.3) für $C = TV$ kommutativ. Analog zeigt man, daß das Diagramm (2.2) für $C = TV$ ebenfalls kommutiert. Somit ist gezeigt, daß $(TV, \Delta, \varepsilon)$ eine Coalgebra ist, was zu beweisen war.

6) Eine Bemerkung: Ist V ein eindimensionaler Vektorraum mit Basis (v), dann ist die in Beispiel **5)** konstruierte Tensorcoalgebra $(TV, \Delta, \varepsilon)$ isomorph zur in Beispiel **3)** definierten Coalgebra C. Ein Isomorphismus $C \to TV$ wird gegeben durch

$$X_n \mapsto \underbrace{v \otimes v \otimes ... \otimes v}_{n \text{ mal } v} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

7) Die in Beispiel **5)** eingeführte Coalgebra $(TV, \Delta, \varepsilon)$ ist aber nicht die einzige sinnvolle Coalgebrastruktur auf TV. Hier ist eine zweite:

Für je zwei Zahlen $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Menge $\mathrm{Sh}(p, q)$ durch

$$\mathrm{Sh}(p, q) = \{\sigma \in S_{p+q} \mid \sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(p) \text{ und } \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < ... < \sigma(p+q)\}.$$

Die Elemente dieser Menge $\mathrm{Sh}(p, q)$ heißen (p, q)-*Shuffles*.[61]

Sei V ein beliebiger Vektorraum. Dann läßt sich der Tensormodul TV zu einer Coalgebra $(TV, \Delta', \varepsilon)$ machen[62], die

$$\Delta'(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i, n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right) \tag{2.8}$$

und

$$\varepsilon(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \delta_{n,0} \tag{2.9}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt.

Die so erhaltene Coalgebra TV heißt die *Shufflecoalgebra* von V.

Beweis: Wir wollen beweisen, daß man auf dem Tensormodul TV genau eine Coalgebrastruktur $(TV, \Delta', \varepsilon)$ definieren kann, die (2.8) und (2.9) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt. Daß es höchstens eine solche Coalgebrastruktur gibt, ist klar (denn die Abbildungen Δ' und ε sind eindeutig bestimmt durch die Vorgabe, daß sie k-linear zu sein und (2.8) und (2.9) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ zu erfüllen haben[63]). Somit bleibt es also nur noch zu zeigen, daß es mindestens eine solche Coalgebrastruktur gibt. Wir werden dies dadurch erreichen, daß wir

- zuerst eine k-lineare Abbildung $\Delta' : TV \to (TV) \otimes (TV)$ konstruieren,
- dann zeigen, daß diese Abbildung Δ' die Gleichung (2.8) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt,

[61] Man beachte, daß wir 0 als Element von $\mathbb{N}$ ansehen, d. h. die Zahlen p und q können auch 0 sein. Die Ungleichungskette $\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(p)$ wird im Falle von $p = 0$ einfach als eine Tautologie (d. h. eine wahre Aussage) verstanden, und genauso die Ungleichungskette $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < ... < \sigma(p+q)$ im Falle von $q = 0$.

[62] Wir bezeichnen hierbei die Comultiplikation mit Δ', um sie nicht mit der (anderen!) Comultiplikation Δ zu verwechseln, welche in Beispiel **5)** eingeführt wurde. Die Coeins ε allerdings bezeichnen wir mit ε, weil sie identisch mit der Coeins ε aus Beispiel **5)** ist.

[63] weil der Vektorraum TV von Elementen der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und mit $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ aufgespannt ist

- dann eine k-lineare Abbildung $\varepsilon : TV \to k$ konstruieren,

- dann zeigen, daß diese Abbildung ε die Gleichung (2.9) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllt,

- dann zeigen, daß $(TV, \Delta', \varepsilon)$ eine Coalgebra ist (für diese Abbildungen).

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir definieren eine Abbildung $d'_n : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{n \text{ mal}} \to (TV) \otimes (TV)$ durch

$$d'_n (v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right)$$
$$\text{für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V.$$

Diese Abbildung d'_n ist multilinear, und somit gibt es (nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes mehrerer Vektorräume) eine lineare Abbildung $\Delta'_n : \underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{n \text{ mal}} \to (TV) \otimes (TV)$ mit

$$\Delta'_n (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = d'_n (v_1, v_2, ..., v_n) \text{ für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V.$$

Wegen $\underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{n \text{ mal}} = V^{\otimes n}$ ist Δ'_n also eine Abbildung von $V^{\otimes n}$ nach $(TV) \otimes (TV)$. Wir können die linearen Abbildungen $\Delta'_n : V^{\otimes n} \to (TV) \otimes (TV)$ (für verschiedene $n \in \mathbb{N}$) zu einer linearen Abbildung $\Delta' : TV \to (TV) \otimes (TV)$ zusammenfassen (denn $TV = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ...$). Diese Abbildung Δ' erfüllt

$$\Delta' (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \Delta'_n (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) \qquad \left(\text{denn } v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \in V^{\otimes n}\right)$$
$$= d'_n (v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right)$$
$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V.$$

Mit anderen Worten: Die Abbildung Δ' erfüllt die Gleichung (2.8) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

Sei ferner die Abbildung $\varepsilon : TV \to k$ genauso definiert wie im Beweis von Beispiel **5)**. Wie in jenem Beweis zeigen wir dann, daß

$$\varepsilon (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = \delta_{n,0} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } v_1, v_2, ..., v_n \in V$$

ist. Das heißt, die Abbildung ε erfüllt die Gleichung (2.9) für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß die gerade definierten Abbildungen Δ' und ε den Vektorraum TV zu einer Coalgebra machen. Das heißt, wir müssen zeigen, daß die Diagramme (2.1), (2.2) und (2.3) kommutativ sind, wenn man in ihnen C und Δ durch TV bzw. Δ' ersetzt.

Bevor wir das zeigen, leiten wir eine alternative Formel für die Abbildung Δ' her. Zuerst vereinbaren wir eine Notation:

- Sei T eine endliche Menge natürlicher Zahlen. Unter einer *aufsteigenden Auflistung* der Menge T verstehen wir dann eine Liste $(t_1, t_2, ..., t_k)$ von Elementen von T, die $t_1 < t_2 < ... < t_k$ und $\{t_1, t_2, ..., t_k\} = T$ erfüllt. Es ist klar, daß jede endliche Menge T natürlicher Zahlen genau eine aufsteigende Auflistung hat; deshalb können wir von "*der* aufsteigenden Auflistung von T" sprechen.

- Ist T eine endliche Menge natürlicher Zahlen, und ist $(u_t)_{t\in T}$ eine Familie von Vektoren in V, dann bezeichnen wir mit $\overrightarrow{u}_T$ den Tensor $u_{t_1} \otimes u_{t_2} \otimes ... \otimes u_{t_k}$, wobei $(t_1, t_2, ..., t_k)$ die aufsteigende Auflistung der Menge T ist. Der Tensor $\overrightarrow{u}_T$ heißt *aufsteigendes Tensorprodukt* der Vektoren u_t für $t \in T$ (und wird auch $\overrightarrow{\bigotimes\limits_{t\in T}} u_t$ genannt).

Beispielsweise ist also $\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,n\}} = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

Jetzt behaupten wir: Ist T eine endliche Menge natürlicher Zahlen, und ist $(u_t)_{t\in T}$ eine Familie von Vektoren in V, dann ist

$$\Delta' \left(\overrightarrow{u}_T\right) = \sum_{I\in\mathcal{P}(T)} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_{T\setminus I}. \tag{2.10}$$

Wir beweisen zuerst einmal diese Formel:

Beweis von (2.10): Sei $(t_1, t_2, ..., t_k)$ die aufsteigende Auflistung der Menge T. Dann ist $\overrightarrow{u}_T = u_{t_1} \otimes u_{t_2} \otimes ... \otimes u_{t_k}$ (nach Definition) und $t_1 < t_2 < ... < t_k$ (denn $(t_1, t_2, ..., t_k)$ ist eine aufsteigende Auflistung). Betrachten wir nun die Abbildung

$$\Phi : \bigcup_{j=0}^{k} \left(\{j\} \times \operatorname{Sh}(j, k-j)\right) \to \mathcal{P}\left(\{1, 2, ..., k\}\right);$$
$$(i, \sigma) \mapsto \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\} \text{ (wobei } \sigma \in \operatorname{Sh}(i, k-i)\text{)}.$$

Diese Abbildung ist bijektiv[64]. Wir definieren nun k Vektoren $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ durch

---

[64] *Beweis:* Für jede Teilmenge $T \in \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$ gibt es genau ein $(i, \sigma) \in \bigcup\limits_{j=0}^{k} (\{j\} \times \operatorname{Sh}(j, k-j))$ mit $T = \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\}$. (Und zwar läßt sich das i eindeutig als $|T|$ bestimmen, und die Permutation $\sigma \in \operatorname{Sh}(i, k-i)$ ist dann eindeutig bestimmt als diejenige Permutation, die die Elemente $1, 2, ..., i$ auf die Elemente von T (in aufsteigender Reihenfolge) abbildet und die Elemente $i+1, i+2, ..., k$ auf die Elemente von $\{1, 2, ..., k\} \setminus T$ (ebenfalls in aufsteigender Reihenfolge) abbildet.) Das heißt, für jede Teilmenge $T \in \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\})$ gibt es genau ein $(i, \sigma) \in \bigcup\limits_{j=0}^{k} (\{j\} \times \operatorname{Sh}(j, k-j))$ mit $T = \Phi(i, \sigma)$. Folglich ist Φ bijektiv, qed.

$\left(v_j = u_{t_j} \text{ für alle } j \in \{1,2,...,k\}\right)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\Delta'\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k} \sum_{\sigma\in \operatorname{Sh}(i,k-i)} \underbrace{\left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right)}_{\substack{=\overrightarrow{v}_{\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}} \\ \text{(denn } (\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)) \\ \text{ist die aufsteigende Auflistung} \\ \text{der Menge } \{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}, \\ \text{weil } \sigma(1)<\sigma(2)<...<\sigma(i) \\ \text{(denn } \sigma\in\operatorname{Sh}(i,k-i)\text{) ist)}}} \otimes \underbrace{\left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(k)}\right)}_{\substack{=\overrightarrow{v}_{\{\sigma(i+1),\sigma(i+2),...,\sigma(k)\}} \\ \text{(denn } (\sigma(i+1),\sigma(i+2),...,\sigma(k)) \\ \text{ist die aufsteigende Auflistung} \\ \text{der Menge } \{\sigma(i+1),\sigma(i+2),...,\sigma(k)\}, \\ \text{weil } \sigma(i+1)<\sigma(i+2)<...<\sigma(k) \\ \text{(denn } \sigma\in\operatorname{Sh}(i,k-i)\text{) ist)}}}\\
&\qquad \text{(nach (2.8), angewandt auf } n = k\text{)}\\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \sum_{\sigma\in \operatorname{Sh}(i,k-i)}}_{= \sum\limits_{(i,\sigma)\in \bigcup\limits_{j=0}^{k} (\{j\}\times \operatorname{Sh}(j,k-j))}} \overrightarrow{v}_{\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}} \otimes \underbrace{\overrightarrow{v}_{\{\sigma(i+1),\sigma(i+2),...,\sigma(k)\}}}_{\substack{=\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\}\setminus\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}} \\ \text{(denn da } \sigma \text{ eine Permutation von } \{1,2,...,k\} \text{ ist, gilt} \\ \{\sigma(i+1),\sigma(i+2),...,\sigma(k)\}=\{1,2,...,k\}\setminus\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\})}}\\
&= \sum_{(i,\sigma)\in \bigcup\limits_{j=0}^{k} (\{j\}\times \operatorname{Sh}(j,k-j))} \underbrace{\overrightarrow{v}_{\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}}}_{\substack{=\overrightarrow{v}_{\Phi(i,\sigma)} \\ \text{(denn } \{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}=\Phi(i,\sigma))}} \otimes \underbrace{\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\}\setminus\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}}}_{\substack{=\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\}\setminus\Phi(i,\sigma)} \\ \text{(denn } \{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(i)\}=\Phi(i,\sigma))}}\\
&= \sum_{(i,\sigma)\in \bigcup\limits_{j=0}^{k} (\{j\}\times \operatorname{Sh}(j,k-j))} \overrightarrow{v}_{\Phi(i,\sigma)} \otimes \overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\}\setminus\Phi(i,\sigma)} = \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,k\})} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\}\setminus I}\\
&\qquad \text{(hier haben wir } \Phi(i,\sigma) \text{ durch } I \text{ substituiert, da } \Phi \text{ bijektiv ist)}.
\end{aligned}$$

Sei nun $\Psi : \{1,2,...,k\} \to T$ die Abbildung, die jedes $i \in \{1,2,...,k\}$ auf $t_i \in T$ abbildet. Dann ist Ψ eine Bijektion (denn $(t_1,t_2,...,t_k)$ ist die aufsteigende Auflistung der Menge T) und streng monoton steigend (denn da $\Psi(i) = t_i$ für jedes $i \in \{1,2,...,k\}$ ist, läßt sich $t_1 < t_2 < ... < t_k$ als $\Psi(1) < \Psi(2) < ... < \Psi(k)$ umschreiben). Die Abbildung Ψ induziert eine Abbildung $\mathcal{P}(\Psi) : \mathcal{P}(\{1,2,...,k\}) \to \mathcal{P}(T)$, die jede Teilmenge $I \subseteq \{1,2,...,k\}$ auf die Teilmenge $\{\Psi(i) \mid i \in I\}$ von T abbildet. Für jede Teilmenge I von $\{1,2,...,k\}$ gilt $\overrightarrow{v}_I = \overrightarrow{u}_{(\mathcal{P}(\Psi))(I)}$ [65]. Wenden wir dies auf $\{1,2,...,k\}\setminus I$ statt I an, so erhalten wir: Für jede Teilmenge I von $\{1,2,...,k\}$ gilt $\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\}\setminus I} = \overrightarrow{u}_{(\mathcal{P}(\Psi))(\{1,2,...,k\}\setminus I)}$. Da $(\mathcal{P}(\Psi))(\{1,2,...,k\}\setminus I) = T\setminus(\mathcal{P}(\Psi))(I)$ ist (da Ψ eine Bijektion ist), vereinfacht sich dies zu $\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\}\setminus I} = \overrightarrow{u}_{T\setminus(\mathcal{P}(\Psi))(I)}$.

Da Ψ eine Bijektion ist, ist auch $\mathcal{P}(\Psi)$ eine Bijektion.

[65] *Beweis:* Sei $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i)$ die aufsteigende Auflistung der Menge I. Dann ist $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_i$ und $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i\} = I$. Aus $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i\} = I$ folgt $\{\Psi(\alpha_1),\Psi(\alpha_2),...,\Psi(\alpha_i)\} = \{\Psi(i) \mid i \in I\} = (\mathcal{P}(\Psi))(I)$, und zusammen mit $\Psi(\alpha_1) < \Psi(\alpha_2) < ... < \Psi(\alpha_i)$ (denn $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_i$ und Ψ ist streng monoton steigend) ergibt dies, daß $(\Psi(\alpha_1),\Psi(\alpha_2),...,\Psi(\alpha_i))$ die aufsteigende Auflistung der Menge $(\mathcal{P}(\Psi))(I)$ ist. Nach der Definition von $\overrightarrow{u}_{(\mathcal{P}(\Psi))(I)}$ gilt somit $\overrightarrow{u}_{(\mathcal{P}(\Psi))(I)} = u_{\Psi(\alpha_1)} \otimes u_{\Psi(\alpha_2)} \otimes ... \otimes u_{\Psi(\alpha_i)}$. Wir haben nunmehr

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}_I &= v_{\alpha_1} \otimes v_{\alpha_2} \otimes ... \otimes v_{\alpha_i} = u_{\Psi(\alpha_1)} \otimes u_{\Psi(\alpha_2)} \otimes ... \otimes u_{\Psi(\alpha_i)} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn für jedes } j \in \{1,2,...,k\} \text{ ist} \\ v_j = u_{t_j} = u_{\Psi(j)} \text{ wegen } t_j = \Psi(j)\end{array}\right)\\
&= \overrightarrow{u}_{(\mathcal{P}(\Psi))(I)},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Wir haben nun

$$\begin{aligned}
&\Delta'\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k\right) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,...,k\})} \underbrace{\overrightarrow{v}_I}_{=\overrightarrow{u}_{(\mathcal{P}(\Psi))(I)}} \otimes \underbrace{\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,k\} \diagdown I}}_{=\overrightarrow{u}_{T \diagdown (\mathcal{P}(\Psi))(I)}} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,...,k\})} \overrightarrow{u}_{(\mathcal{P}(\Psi))(I)} \otimes \overrightarrow{u}_{T \diagdown (\mathcal{P}(\Psi))(I)} \\
&= \sum_{I \in \mathcal{P}(T)} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_{T \diagdown I} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir } I \text{ für } \left(\mathcal{P}\left(\Psi\right)\right)\left(I\right) \text{ substituiert,} \\ \text{da } \mathcal{P}\left(\Psi\right) \text{ eine Bijektion ist}\end{array}\right).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k &= u_{t_1} \otimes u_{t_2} \otimes ... \otimes u_{t_k} \qquad \left(\text{denn } v_j = u_{t_j} \text{ für alle } j \in \{1,2,...,k\}\right) \\
&= \overrightarrow{u}_T
\end{aligned}$$

vereinfacht sich dies zu $\Delta'\left(\overrightarrow{u}_T\right) = \sum\limits_{I \in \mathcal{P}(T)} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_{T \diagdown I}$, und damit ist (2.10) bewiesen.

Wir können (2.10) folgendermaßen umschreiben: Ist T eine endliche Menge natürlicher Zahlen, und ist $(u_t)_{t \in T}$ eine Familie von Vektoren in V, dann ist

$$\Delta'\left(\overrightarrow{u}_T\right) = \sum_{I \in \mathcal{P}(T)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(T); \\ I \cup J = T; \\ I \cap J = \varnothing}} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_J. \tag{2.11}$$

[66]

Jetzt wollen wir nachweisen, daß das Diagramm (2.1) kommutativ ist, wenn man darin C und Δ durch TV bzw. Δ' ersetzt.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Seien $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ beliebig gewählt. Sei $N = \{1,2,...,n\}$. Dann ist $(1,2,...,n)$ eine aufsteigende Auflistung von N, und somit ist

[66] *Beweis:* Sei $I \in \mathcal{P}(T)$ beliebig gewählt. Für dieses I gibt es genau eine Teilmenge $J \in \mathcal{P}(T)$, welche $I \cup J = T$ und $I \cap J = \varnothing$ erfüllt - und zwar ist diese Teilmenge $T \diagdown I$. Somit besteht für dieses I die Summe $\sum\limits_{\substack{J \in \mathcal{P}(T); \\ I \cup J = T; \\ I \cap J = \varnothing}} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_J$ aus genau einem Summanden - nämlich aus dem Summanden $\overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_{T \diagdown I}$. Wir haben also $\sum\limits_{\substack{J \in \mathcal{P}(T); \\ I \cup J = T; \\ I \cap J = \varnothing}} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_J = \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_{T \diagdown I}$ für jedes $I \in \mathcal{P}(T)$. Also ist

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(T)} \underbrace{\sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(T); \\ I \cup J = T; \\ I \cap J = \varnothing}} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_J}_{=\overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_{T \diagdown I}} = \sum_{I \in \mathcal{P}(T)} \overrightarrow{u}_I \otimes \overrightarrow{u}_{T \diagdown I} = \Delta'\left(\overrightarrow{u}_T\right) \qquad (\text{nach } (2.10)).$$

Damit ist (2.11) gezeigt.

$\overrightarrow{v}_N = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ nach der Definition von $\overrightarrow{v}_N$. Damit gilt

$$((\mathrm{id} \otimes \Delta') \circ \Delta')(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = ((\mathrm{id} \otimes \Delta') \circ \Delta')(\overrightarrow{v}_N)$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \Delta') \left(\underbrace{\Delta'(\overrightarrow{v}_N)}_{\substack{= \sum\limits_{I \in \mathcal{P}(N)} \sum\limits_{\substack{J \in \mathcal{P}(N); \\ I \cup J = N; \\ I \cap J = \varnothing}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \\ \text{(nach (2.11))}}} \right) = (\mathrm{id} \otimes \Delta') \left(\sum_{I \in \mathcal{P}(N)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(N); \\ I \cup J = N; \\ I \cap J = \varnothing}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \right)$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{P}(N)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(N); \\ I \cup J = N; \\ I \cap J = \varnothing}} \overrightarrow{v}_I \otimes \Delta'(\overrightarrow{v}_J) = \sum_{I \in \mathcal{P}(N)} \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N); \\ I \cup L = N; \\ I \cap L = \varnothing}} \overrightarrow{v}_I \otimes \underbrace{\Delta'(\overrightarrow{v}_L)}_{\substack{= \sum\limits_{J \in \mathcal{P}(L)} \sum\limits_{\substack{K \in \mathcal{P}(L); \\ J \cup K = L; \\ J \cap K = \varnothing}} \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K \\ \text{(nach (2.11))}}}$$

(hier haben wir J in der zweiten Summe in L umbenannt)

$$= \sum_{I \in \mathcal{P}(N)} \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N); \\ I \cup L = N; \\ I \cap L = \varnothing}} \underbrace{\sum_{J \in \mathcal{P}(L)}}_{= \sum\limits_{\substack{J \in \mathcal{P}(N); \\ J \subseteq L}}} \underbrace{\sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(L); \\ J \cup K = L; \\ J \cap K = \varnothing}}}_{= \sum\limits_{\substack{K \in \mathcal{P}(N); \\ K \subseteq L; \\ J \cup K = L; \\ J \cap K = \varnothing}}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{P}(N)} \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N); \\ I \cup L = N; \\ I \cap L = \varnothing}} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(N); \\ J \subseteq L}} \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}(N); \\ K \subseteq L; \\ J \cup K = L; \\ J \cap K = \varnothing}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K$$

$$= \sum_{\substack{(I,L,J,K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N); \\ I \cup L = N;\ I \cap L = \varnothing;\ J \cup K = L;\ J \cap K = \varnothing;\ J \subseteq L;\ K \subseteq L}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K$$

$$= \sum_{\substack{(I,L,J,K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N); \\ I \cap J = \varnothing;\ J \cap K = \varnothing;\ K \cap I = \varnothing;\ I \cup J \cup K = N;\ L = J \cup K}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{denn für jedes Quadrupel } (I, L, J, K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \\ \text{ist die Aussage} \\ (I \cup L = N \text{ und } I \cap L = \varnothing \text{ und } J \cup K = L \text{ und } J \cap K = \varnothing \text{ und } J \subseteq L \text{ und } K \subseteq L) \\ \text{äquivalent zu der Aussage} \\ (I \cap J = \varnothing \text{ und } J \cap K = \varnothing \text{ und } K \cap I = \varnothing \text{ und } I \cup J \cup K = N \text{ und } L = J \cup K), \\ \text{wie man sich schnell überlegt} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{\substack{(I,J,K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N); \\ I \cap J = \varnothing;\ J \cap K = \varnothing;\ K \cap I = \varnothing;\ I \cup J \cup K = N}} \sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N); \\ L = J \cup K}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K.$$

Doch für jedes feste Tripel $(I, J, K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N)$ gilt $\sum\limits_{\substack{L \in \mathcal{P}(N); \\ L = J \cup K}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes$

$\overrightarrow{v}_K = \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K$ [67]. Somit ist

$$\begin{aligned}
\left(\left(\mathrm{id} \otimes \Delta'\right) \circ \Delta'\right)\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n\right) &= \sum_{\substack{(I,J,K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N); \\ I \cap J = \varnothing;\ J \cap K = \varnothing;\ K \cap I = \varnothing;\ I \cup J \cup K = N}} \underbrace{\sum_{\substack{L \in \mathcal{P}(N); \\ L = J \cup K}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K}_{= \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K} \\
&= \sum_{\substack{(I,J,K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N); \\ I \cap J = \varnothing;\ J \cap K = \varnothing;\ K \cap I = \varnothing;\ I \cup J \cup K = N}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K .
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\left(\left(\Delta' \otimes \mathrm{id}\right) \circ \Delta'\right)\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n\right) = \sum_{\substack{(I,J,K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N); \\ I \cap J = \varnothing;\ J \cap K = \varnothing;\ K \cap I = \varnothing;\ I \cup J \cup K = N}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K .$$

Somit haben wir $\left(\left(\mathrm{id} \otimes \Delta'\right) \circ \Delta'\right)\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n\right) = \left(\left(\Delta' \otimes \mathrm{id}\right) \circ \Delta'\right)\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Da Tensoren der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, ..., v_n \in V$) ein Erzeugendensystem des Tensormoduls TV bilden, folgt hieraus $\left(\mathrm{id} \otimes \Delta'\right) \circ \Delta' = \left(\Delta' \otimes \mathrm{id}\right) \circ \Delta'$. Somit ist das Diagramm (2.1) kommutativ, wenn man darin C und Δ durch TV bzw. Δ' ersetzt.

[67] Denn für jedes feste Tripel $(I, J, K) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N)$ gibt es genau ein $L \in \mathcal{P}(N)$, welches $L = J \cup K$ erfüllt, und somit besteht die Summe $\sum\limits_{\substack{L \in \mathcal{P}(N); \\ L = J \cup K}} \overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K$ aus genau einem Summanden, und dieser ist gleich $\overrightarrow{v}_I \otimes \overrightarrow{v}_J \otimes \overrightarrow{v}_K$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ ist

$$((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta')\,(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n)$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\,(\Delta'\,(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n))$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right) \right)$$
$$\text{(nach (2.8))}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \underbrace{\varepsilon\left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right)}_{=\delta_{n-i,0} \text{ (nach (2.9))}}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \delta_{n-i,0}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)} \right) \otimes \delta_{n-i,0} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(n,0)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right) \otimes 1$$
$$\left(\begin{array}{c} \text{denn in der Summe } \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)} \right) \otimes \delta_{n-i,0} \text{ sind} \\ \text{alle Summanden bis auf (höchstens) den für } n = i \text{ gleich } 0 \end{array} \right)$$
$$= \left(v_{\mathrm{id}(1)} \otimes v_{\mathrm{id}(2)} \otimes ... \otimes v_{\mathrm{id}(n)}\right) \otimes 1$$
$$\left(\begin{array}{l} \text{denn } \mathrm{Sh}\,(n,0) = \{\mathrm{id}\}\text{, weil jede Permutation } \sigma \in \mathrm{Sh}\,(n,0) \text{ die Relation} \\ \sigma\,(1) < \sigma\,(2) < ... < \sigma\,(n) \text{ erfüllen muß und deshalb gleich id sein muß} \end{array} \right)$$
$$= (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) \otimes 1 = \mathrm{kan}\,(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n)\,,$$

wobei kan die kanonische Abbildung $TV \to TV \otimes k$ bezeichnet. Da Tensoren der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, ..., v_n \in V$) ein Erzeugendensystem des Tensormoduls TV bilden, folgt hieraus $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta' = \mathrm{kan}$. Somit ist das Diagramm (2.3) kommutativ, wenn man darin C und Δ durch TV bzw. Δ' ersetzt. Analog beweist man selbiges für das Diagramm (2.2). Somit ist gezeigt, daß $(TV, \Delta', \varepsilon)$ eine Coalgebra ist, was zu beweisen war.

2.1$\frac{1}{2}$. Bemerkung: Eine wichtige Konsequenz der Coassoziativität in einer Coalgebra ist folgende: Für jede Coalgebra C und jedes ganze $n \geq 0$ können wir eine k-lineare Abbildung $\Delta^{n-1} : C \to \otimes^n C$ definieren[68]. Und zwar gehen wir dazu rekursiv vor:

Für $n = 0$ sei $\Delta^{-1} : C \to \otimes^0 C$ einfach die Abbildung ε (denn $\otimes^0 C$ ist nichts anderes als k). Wenn wir für ein ganzes $n \geq 0$ die Abbildung $\Delta^{n-1} : C \to \otimes^n C$ definiert haben, dann definieren wir eine Abbildung $\Delta^n : C \to \otimes^{n+1} C$ als Verkettung $\mathrm{kan} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ der Abbildungen $\Delta : C \to C \otimes C$, $\Delta^{n-1} \otimes \mathrm{id} : C \otimes C \to (\otimes^n C) \otimes C$ und $\mathrm{kan} : (\otimes^n C) \otimes C \to \otimes^{n+1} C$ (letztere Abbildung ist einfach die kanonische

[68] Dabei ist der Exponent $n-1$ in der Schreibweise Δ^{n-1} nicht als "$(n-1)$-fache Hintereinanderausführung" zu lesen, denn die Abbildung Δ kann man (im Allgemeinen) nicht mit sich selbst hintereinanderausführen (da sie von C nach $C \otimes C$ führt, und $C \neq C \otimes C$ im Allgemeinen ist). Doch die Idee hinter der folgenden Definition von Δ^{n-1} ist eine Abwandlung der $(n-1)$-fachen Hintereinanderausführung.

Identifikation von $(\otimes^n C) \otimes C$ mit $\otimes^{n+1} C$). Die gerade definierte Abbildung Δ^n ist natürlich k-linear.

Diese Abbildungen Δ^{n-1} haben folgende Eigenschaften:

1) Es gilt $\Delta^0 = \mathrm{id} : C \to C$ (man beachte $\otimes^1 C = C$) und $\Delta^1 = \Delta$.

2) Ferner ist $\Delta^2 = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ (wobei wir die kanonische Abbildung kan nicht mehr hinschreiben, sondern $(\otimes^n C) \otimes C$ einfach mit $\otimes^{n+1} C$ gleichsetzen).

3) Für jedes ganze $n \geq 0$ kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[ddrr, bend right, "\Delta^n"'] & & \\
& C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta^{n-1}"] \arrow[d, "\Delta^{n-1} \otimes \mathrm{id}"] & C \otimes (\otimes^n C) \arrow[d, "\mathrm{kan}", "\cong"'] \\
& (\otimes^n C) \otimes C \arrow[r, "\mathrm{kan}", "\cong"'] & \otimes^{n+1} C
\end{tikzcd} \quad . \tag{2.4}$$

Dieses Resultat bedeutet, daß man bei der rekursiven Definition von Δ^n die Abbildung $\Delta^{n-1} \otimes \mathrm{id}$ durch $\mathrm{id} \otimes \Delta^{n-1}$ ersetzen könnte, ohne daß sich die Abbildung Δ^n dabei ändern würde.

4) Seien $n \geq 0$ und $\ell \in \{0, 1, ..., n-1\}$ beliebig. Dann ist $\Delta^n = (\mathrm{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{\otimes^{n-\ell-1} C}) \circ \Delta^{n-1}$. [69] Hierbei betrachten wir die Abbildung

$$\mathrm{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{\otimes^{n-\ell-1} C} : \left(\otimes^\ell C\right) \otimes C \otimes \left(\otimes^{n-\ell-1} C\right) \to \left(\otimes^\ell C\right) \otimes (C \otimes C) \otimes \left(\otimes^{n-\ell-1} C\right)$$

als eine Abbildung von $\otimes^n C$ nach $\otimes^{n+1} C$, indem wir $(\otimes^a C) \otimes \left(\otimes^b C\right)$ mit $\otimes^{a+b} C$ gleichsetzen für beliebige natürliche a und b [70].

5) Seien $u \geq -1$ und $v \geq -1$ beliebig. Dann ist $(\Delta^u \otimes \Delta^v) \circ \Delta = \Delta^{u+v+1}$. Hierbei betrachten wir

$$\Delta^u \otimes \Delta^v : C \otimes C \to \left(\otimes^{u+1} C\right) \otimes \left(\otimes^{v+1} C\right)$$

als eine Abbildung von $C \otimes C$ nach $\otimes^{u+v+2} C$, indem wir $(\otimes^a C) \otimes \left(\otimes^b C\right)$ mit $\otimes^{a+b} C$ gleichsetzen für beliebige natürliche a und b [71].

Bemerkung: Folgendes kommutatives Diagramm (in dem die Moduln der Übersicht halber in Kästchen gesetzt wurden) zeigt sechs Ketten von Abbildungen, von denen jede Δ^3 ergibt (gemäß Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **4)**):

[69] Insbesondere folgt hieraus: Die Abbildung $(\mathrm{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{\otimes^{n-\ell-1} C}) \circ \Delta^{n-1} : C \to \otimes^{n+1} C$ hängt nicht von der Wahl von ℓ ab.

[70] Dies bedeutet insbesondere, daß wir $\left(\otimes^\ell C\right) \otimes C \otimes \left(\otimes^{n-\ell-1} C\right)$ mit $\otimes^{\ell+1+(n-\ell-1)} C = \otimes^n C$ gleichsetzen, und $\left(\otimes^\ell C\right) \otimes (C \otimes C) \otimes \left(\otimes^{n-\ell-1} C\right)$ mit $\otimes^{\ell+1+1+(n-\ell-1)} C = \otimes^{n+1} C$ gleichsetzen.

[71] Dies bedeutet insbesondere, daß wir $\left(\otimes^{u+1} C\right) \otimes \left(\otimes^{v+1} C\right)$ mit $\otimes^{u+v+2} C$ gleichsetzen.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \boxed{C} \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dddd, bend left, "\Delta^3"] & & & \\
 & & & \boxed{C \otimes C} \arrow[dll, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[drr, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & & & \\
 & \boxed{(C \otimes C) \otimes C} \arrow[dl, "(\Delta \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes \Delta) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \otimes \Delta"] & & & & \boxed{C \otimes (C \otimes C)} \arrow[dl, "\Delta \otimes (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes (\Delta \otimes \mathrm{id})"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes \Delta)"] & \\
\boxed{((C \otimes C) \otimes C) \otimes C} \arrow[drrr, "\text{kan}", "\cong"'] & \boxed{(C \otimes (C \otimes C)) \otimes C} \arrow[drr, "\text{kan}", "\cong"'] & \boxed{(C \otimes C) \otimes (C \otimes C)} \arrow[dr, "\text{kan}", "\cong"'] & & \boxed{(C \otimes C) \otimes (C \otimes C)} \arrow[dl, "\cong", "\text{kan}"'] & \boxed{C \otimes ((C \otimes C) \otimes C)} \arrow[dll, "\cong", "\text{kan}"'] & \boxed{C \otimes (C \otimes (C \otimes C))} \arrow[dlll, "\cong", "\text{kan}"'] \\
 & & & \boxed{\otimes^4 C} & & &
\end{tikzcd}
$$

Beweis von Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$: **1)** und **2)** sind leicht nachzurechnen.

5) Wir bemerken zuerst, daß wir $C \otimes k$ mit C gleichsetzen (denn wir setzen $(\otimes^a C) \otimes \left(\otimes^b C\right)$ mit $\otimes^{a+b} C$ gleich für beliebige natürliche a und b). Somit ist die Abbildung $\operatorname{kan} : C \otimes k \to C$, die im kommutativen Diagramm (2.3) auftritt, für uns einfach die Identitätsabbildung $\operatorname{id} : C \to C$. Da C eine Coalgebra ist, gilt aber $(\operatorname{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \operatorname{kan}$, also $(\operatorname{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \operatorname{id}$ (wegen $\operatorname{kan} = \operatorname{id}$).

Wir werden Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$ **5)** durch vollständige Induktion nach v beweisen:

Induktionsanfang: Für $v = -1$ ist

$$\begin{aligned}
(\Delta^u \otimes \Delta^v) \circ \Delta &= \left(\Delta^u \otimes \underbrace{\Delta^{-1}}_{=\varepsilon}\right) \circ \Delta = \underbrace{(\Delta^u \otimes \varepsilon)}_{=(\Delta^u \otimes \operatorname{id}) \circ (\operatorname{id} \otimes \varepsilon)} \circ \Delta \\
&= \underbrace{(\Delta^u \otimes \operatorname{id})}_{\substack{=\Delta^u \text{ (denn wir setzen} \\ C \otimes k \text{ mit } C \text{ gleich)}}} \circ \underbrace{(\operatorname{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta}_{=\operatorname{id}} = \Delta^u \circ \operatorname{id} = \Delta^u = \Delta^{u+v+1}
\end{aligned}$$

(denn wegen $v = -1$ ist $u = u + v + 1$). Somit gilt Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$ **5)** für $v = -1$. Damit ist der Induktionsanfang erledigt.

Induktionsschritt: Sei $w \in \mathbb{N}$. Angenommen, Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$ **5)** gilt für $v = w-1$. Wir müssen nun zeigen, daß Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$ **5)** auch für $v = w$ gilt.

Da Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$ **5)** für $v = w - 1$ gilt, ist $(\Delta^u \otimes \Delta^{w-1}) \circ \Delta = \Delta^{u+(w-1)+1}$, also $(\Delta^u \otimes \Delta^{w-1}) \circ \Delta = \Delta^{u+w}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$, wobei kan der kanonische Isomorphismus $(\otimes^n C) \otimes C \to \otimes^{n+1} C$ ist. Da wir $(\otimes^n C) \otimes C$ mit $\otimes^{n+1} C$ gleichsetzen (denn wir setzen $(\otimes^a C) \otimes \left(\otimes^b C\right)$ mit $\otimes^{a+b} C$ gleich für beliebige natürliche a und b), ist für uns dieser kanonische Isomorphismus kan gleich der Identitätsabbildung $\operatorname{id} : \otimes^{n+1} C \to \otimes^{n+1} C$. Somit wird $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$ zu $\Delta^n = \operatorname{id} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta = (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$. Wenden wir dies auf $n = w$ an, so erhalten wir $\Delta^w = (\Delta^{w-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$. Wenden wir aber $\Delta^n = (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$ auf $n = u + w + 1$ an, so erhalten wir $\Delta^{u+w+1} = (\Delta^{u+w+1-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$.

Nun ist

$$\left(\underbrace{\Delta^u}_{=\Delta^u\circ\mathrm{id}} \otimes \underbrace{\Delta^w}_{=(\Delta^{w-1}\otimes\mathrm{id})\circ\Delta}\right)\circ\Delta$$

$$= \left(\underbrace{(\Delta^u\circ\mathrm{id})\otimes\left(\left(\Delta^{w-1}\otimes\mathrm{id}\right)\circ\Delta\right)}_{=(\Delta^u\otimes(\Delta^{w-1}\otimes\mathrm{id}))\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta)}\right)\circ\Delta$$

$$= \underbrace{\left(\Delta^u\otimes\left(\Delta^{w-1}\otimes\mathrm{id}\right)\right)}_{=(\Delta^u\otimes\Delta^{w-1})\otimes\mathrm{id}}\circ \underbrace{(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta}_{\substack{=(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta \\ \text{(denn das Diagramm (2.1) kommutiert)}}}$$

$$= \underbrace{\left(\left(\Delta^u\otimes\Delta^{w-1}\right)\otimes\mathrm{id}\right)\circ(\Delta\otimes\mathrm{id})}_{=((\Delta^u\otimes\Delta^{w-1})\circ\Delta)\otimes(\mathrm{id}\circ\mathrm{id})}\circ\Delta$$

$$= \left(\underbrace{\left(\left(\Delta^u\otimes\Delta^{w-1}\right)\circ\Delta\right)}_{=\Delta^{u+w}=\Delta^{u+w+1-1}}\otimes\underbrace{(\mathrm{id}\circ\mathrm{id})}_{=\mathrm{id}}\right)\circ\Delta = \left(\Delta^{u+w+1-1}\otimes\mathrm{id}\right)\circ\Delta = \Delta^{u+w+1}.$$

Somit ist Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **5)** auch für $v = w$ gezeigt. Damit ist der Induktionsschritt komplett. Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **5)** ist somit bewiesen.

4) *Erster Beweis von Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$ **4)**:* Seien $n \geq 0$ und $\ell \in \{0, 1, ..., n-1\}$ beliebig.

Nach Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **5)** (angewandt auf $u = \ell - 1$ und $v = n - \ell$) ist $\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\Delta^{n-\ell}\right)\circ\Delta = \Delta^{(\ell-1)+(n-\ell)+1} = \Delta^n$ (denn $(\ell-1)+(n-\ell)+1 = n$).

Nach Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **5)** (angewandt auf $u = \ell - 1$ und $v = n - \ell - 1$) ist $\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\Delta^{n-\ell-1}\right)\circ\Delta = \Delta^{(\ell-1)+(n-\ell-1)+1} = \Delta^{n-1}$ (denn $(\ell-1)+(n-\ell-1)+1 = n-1$).

Nach Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **5)** (angewandt auf $u = 0$ und $v = n-\ell-2$) ist $\left(\Delta^0\otimes\Delta^{n-\ell-2}\right)\circ\Delta = \Delta^{0+(n-\ell-2)+1} = \Delta^{n-\ell-1}$ (denn $0+(n-\ell-2)+1 = n-\ell-1$). Wegen $\Delta^0 = \mathrm{id}$ vereinfacht sich dies zu $\left(\mathrm{id}\otimes\Delta^{n-\ell-2}\right)\circ\Delta = \Delta^{n-\ell-1}$.

Nach Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **5)** (angewandt auf $u = 1$ und $v = n-\ell-2$) ist $\left(\Delta^1\otimes\Delta^{n-\ell-2}\right)\circ\Delta = \Delta^{1+(n-\ell-2)+1} = \Delta^{n-\ell}$ (denn $1+(n-\ell-2)+1 = n-\ell$). Wegen $\Delta^1 = \Delta$ vereinfacht sich dies zu $\left(\Delta\otimes\Delta^{n-\ell-2}\right)\circ\Delta = \Delta^{n-\ell}$.

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\otimes\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\right)}_{=\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\otimes\left(\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\right)}\circ\underbrace{\Delta^{n-1}}_{=\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\Delta^{n-\ell-1}\right)\circ\Delta}\\
&=\underbrace{\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\otimes\left(\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\right)\right)\circ\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\Delta^{n-\ell-1}\right)}_{=\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\circ\Delta^{\ell-1}\right)\otimes\left(\left(\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\right)\circ\Delta^{n-\ell-1}\right)}\circ\Delta\\
&=\left(\underbrace{\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\circ\Delta^{\ell-1}\right)}_{=\Delta^{\ell-1}}\otimes\left(\left(\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\right)\circ\underbrace{\Delta^{n-\ell-1}}_{=\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^{n-\ell-2}\right)\circ\Delta}\right)\right)\circ\Delta\\
&=\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\left(\underbrace{\left(\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\right)\circ\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^{n-\ell-2}\right)}_{=(\Delta\circ\operatorname{id})\otimes\left(\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\circ\Delta^{n-\ell-2}\right)}\circ\Delta\right)\right)\circ\Delta\\
&=\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\left(\left(\underbrace{(\Delta\circ\operatorname{id})}_{=\Delta}\otimes\underbrace{\left(\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\circ\Delta^{n-\ell-2}\right)}_{=\Delta^{n-\ell-2}}\right)\circ\Delta\right)\right)\circ\Delta\\
&=\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\underbrace{\left(\left(\Delta\otimes\Delta^{n-\ell-2}\right)\circ\Delta\right)}_{=\Delta^{n-\ell}}\right)\circ\Delta=\left(\Delta^{\ell-1}\otimes\Delta^{n-\ell}\right)\circ\Delta=\Delta^n.
\end{aligned}$$

Damit ist Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **4)** nachgewiesen.

*Zweiter Beweis von Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **4)**:* Wir wollen zeigen, daß für jedes $n\geq 0$ gilt:

$$\left(\text{für jedes }\ell\in\{0,1,...,n-1\}\text{ gilt }\Delta^n=\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\otimes\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{n-\ell-1}C}\right)\circ\Delta^{n-1}\right).\qquad(2.5)$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion nach n:

Induktionsanfang (der Induktion nach n): Für $n=0$ ist (2.5) trivialerweise erfüllt, weil es kein $\ell\in\{0,1,...,n-1\}$ gibt. Den Induktionsanfang (der Induktion nach n) haben wir somit hinter uns.

Induktionsschritt (der Induktion nach n): Sei $N\geq 1$ beliebig. Angenommen, (2.5) gilt für $n=N-1$. Wir müssen jetzt beweisen, daß (2.5) auch für $n=N$ gilt. Das heißt, wir müssen beweisen, daß $\Delta^N=\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\otimes\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1}C}\right)\circ\Delta^{N-1}$ für alle $\ell\in\{0,1,...,N-1\}$ gilt.

Dies beweisen wir wiederum durch vollständige Induktion - diesmal nach ℓ:

Induktionsanfang (der Induktion nach ℓ): Für $\ell=0$ ist $\Delta^N=\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C}\otimes\Delta\otimes\operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1}C}\right)\circ$

Δ^{N-1} trivialerweise erfüllt, denn für $\ell = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta^N &= \operatorname{kan} \circ \left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta \qquad\qquad \text{(nach der rekursiven Definition von } \Delta^n\text{)} \\
&= \left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta \\
&\qquad\qquad \left(\text{denn da wir } \left(\otimes^N C\right) \otimes C \text{ mit } \otimes^{N+1} C \text{ gleichsetzen, ist } \operatorname{kan} = \operatorname{id}\right) \\
&= \left(\underbrace{\left(\left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-2} C}\right) \circ \Delta^{N-2}\right) \otimes \operatorname{id}}_{=\left(\left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-2} C}\right) \otimes \operatorname{id}\right) \circ \left(\Delta^{N-2} \otimes \operatorname{id}\right)} \right) \circ \Delta \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn da (2.5) für } n = N-1 \text{ gilt, können wir (2.5)} \\ \text{auf } N-1 \text{ und } 0 \text{ statt } n \text{ bzw. } \ell \text{ anwenden, und erhalten} \\ \text{dadurch } \Delta^{N-1} = \left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-2} C}\right) \circ \Delta^{N-2} \end{array} \right) \\
&= \left(\underbrace{\left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-2} C}\right) \otimes \operatorname{id}}_{=\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-2} C} \otimes \operatorname{id}} \right) \circ \left(\Delta^{N-2} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta \\
&= \left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \underbrace{\operatorname{id}_{\otimes^{N-2} C} \otimes \operatorname{id}}_{\substack{=\operatorname{id}_{\otimes^{N-1} C} \text{ (da wir } \left(\otimes^{N-2} C\right) \otimes C \\ \text{mit } \otimes^{N-1} C \text{ gleichsetzen)}}} \right) \circ \left(\Delta^{N-2} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta \\
&= \left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-1} C}\right) \circ \left(\Delta^{N-2} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1} \\
&= \left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1} = \left(\operatorname{id}_{\otimes^0 C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-1} C}\right) \circ \left(\Delta^{N-2} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn nach der rekursiven Definition von } \Delta^n \text{ ist} \\ \Delta^{N-1} = \operatorname{kan} \circ \left(\Delta^{N-2} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta = \left(\Delta^{N-2} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta, \text{ weil} \\ \operatorname{kan} = \operatorname{id} \text{ ist (da wir } \left(\otimes^N C\right) \otimes C \text{ mit } \otimes^{N+1} C \text{ gleichsetzen)} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Somit ist der Induktionsanfang (der Induktion nach ℓ) geschafft.

Induktionsschritt (der Induktion nach ℓ): Sei $\lambda \in \{1, 2, ..., N-1\}$ beliebig. Angenommen, $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$ gilt für $\ell = \lambda - 1$. Wir müssen dann zeigen, daß $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$ auch für $\ell = \lambda$ gilt.

Laut Annahme gilt $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$ für $\ell = \lambda - 1$. Das heißt, $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-(\lambda-1)-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$.

Doch da (2.5) für $n = N-1$ gilt, dürfen wir (2.5) auf $N-1$ und $\lambda - 1$ statt n bzw. λ anwenden. Hierdurch erhalten wir

$$\Delta^{N-1} = \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{(N-1)-(\lambda-1)-1} C}\right) \circ \Delta^{(N-1)-1} = \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \Delta^{(N-1)-1}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{id}_{\otimes^\lambda C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1} \\
&= \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \operatorname{id}_C \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \underbrace{\Delta^{N-1}}_{=\left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \Delta^{(N-1)-1}} \\
&\qquad \left(\text{denn da wir } \left(\otimes^{\lambda-1} C\right) \otimes C \text{ mit } \otimes^\lambda C \text{ gleichsetzen, gilt } \operatorname{id}_{\otimes^\lambda C} = \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \operatorname{id}_C\right) \\
&= \underbrace{\left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \operatorname{id}_C \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right)}_{\substack{=\left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \circ \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C}\right) \otimes ((\operatorname{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes \left(\operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C} \circ \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \\ \text{(dies folgt aus der Formel } (a \otimes b \otimes c) \circ (d \otimes e \otimes f) = (a \circ d) \otimes (b \circ e) \otimes (c \circ f), \\ \text{angewandt auf die Abbildungen } a = \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C},\ b = \operatorname{id}_C \otimes \Delta,\ c = \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}, \\ d = \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C},\ e = \Delta \text{ und } f = \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C})}} \circ \Delta^{(N-1)-1} \\
&= \left(\left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \circ \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C}\right) \otimes \underbrace{((\operatorname{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta)}_{\substack{=(\Delta \otimes \operatorname{id}_C) \circ \Delta \\ \text{(weil das Diagramm (2.1)} \\ \text{kommutiert)}}} \otimes \left(\operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C} \circ \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \right) \circ \Delta^{(N-1)-1} \\
&= \underbrace{\left(\left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \circ \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C}\right) \otimes ((\Delta \otimes \operatorname{id}_C) \circ \Delta) \otimes \left(\operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C} \circ \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right)\right)}_{\substack{=\left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_C \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \\ \text{(dies folgt aus der Formel } (a \circ d) \otimes (b \circ e) \otimes (c \circ f) = (a \otimes b \otimes c) \circ (d \otimes e \otimes f), \\ \text{angewandt auf die Abbildungen } a = \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C},\ b = \Delta \otimes \operatorname{id}_C,\ c = \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}, \\ d = \operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C},\ e = \Delta \text{ und } f = \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C})}} \circ \Delta^{(N-1)-1} \\
&= \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_C \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \underbrace{\left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \Delta^{(N-1)-1}}_{=\Delta^{N-1}} \\
&= \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_C \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1} \\
&= \left(\operatorname{id}_{\otimes^{\lambda-1} C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-(\lambda-1)-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn da wir } C \otimes \left(\otimes^{N-\lambda-1} C\right) \text{ mit } \otimes^{1+(N-\lambda-1)} C = \otimes^{N-(\lambda-1)-1} C \\ \text{gleichsetzen, gilt } \operatorname{id}_C \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C} = \operatorname{id}_{\otimes^{N-(\lambda-1)-1} C} \end{array} \right) \\
&= \Delta^N.
\end{aligned}$$

Wir haben also $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^\lambda C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\lambda-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$ gezeigt. Mit anderen Worten: Die Gleichung $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$ gilt auch für $\ell = \lambda$. Damit ist der Induktionsschritt (der Induktion nach ℓ) fertig, und der Induktionsbeweis von $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$ vollständig.

Wir haben also gezeigt, daß $\Delta^N = \left(\operatorname{id}_{\otimes^\ell C} \otimes \Delta \otimes \operatorname{id}_{\otimes^{N-\ell-1} C}\right) \circ \Delta^{N-1}$ für alle $\ell \in \{0, 1, ..., N-1\}$ gilt. Das heißt, (2.5) gilt für $n = N$. Somit ist der Induktionsschritt (der Induktion nach n) erledigt, und (2.5) ist daher für alle $n \geq 0$ gezeigt. Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **4)** ist damit bewiesen.

3) *Erster Beweis von Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **3)**:* Um Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **3)** zu beweisen, müssen wir zeigen, daß für jedes $n \geq 0$ das Diagramm (2.4) kommutiert. Mit anderen Worten: Wir müssen zeigen, daß für jedes $n \geq 0$ die Gleichungskette $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ gilt. Da $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$ sofort aus der Definition von Δ^n folgt, müssen wir also nur noch beweisen, daß für jedes $n \geq 0$ die Gleichung $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ gilt.

Wir setzen im Folgenden $(\otimes^a C) \otimes \left(\otimes^b C\right)$ mit $\otimes^{a+b} C$ gleich für beliebige natürliche a und b. Dann ist die Abbildung $\operatorname{kan} : C \otimes (\otimes^n C) \to \otimes^{n+1} C$ für uns nichts anderes als die Abbildung $\operatorname{id} : \otimes^{n+1} C \to \otimes^{n+1} C$. Statt $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ zu zeigen, reicht es also aus, $\Delta^n = \operatorname{id} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ zu zeigen.

Nach Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **4)** (angewandt auf $u = 0$ und $v = n-1$) ist nun $(\Delta^0 \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta = \Delta^{0+(n-1)+1} = \Delta^n$. Damit ist $\Delta^n = \left(\underbrace{\Delta^0}_{=\operatorname{id}} \otimes \Delta^{n-1}\right) \circ \Delta = (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta = \operatorname{id} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$. Damit ist Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **3)** bewiesen.

*Zweiter Beweis von Bemerkung 2.1$\frac{1}{2}$ **3)**:* Um Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **3)** zu beweisen, müssen wir zeigen, daß für jedes $n \geq 0$ das Diagramm (2.4) kommutiert. Mit anderen Worten: Wir müssen zeigen, daß für jedes $n \geq 0$ die Gleichungskette $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ gilt. Da $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\Delta^{n-1} \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta$ sofort aus der Definition von Δ^n folgt, müssen wir also nur noch beweisen, daß für jedes $n \geq 0$ die Gleichung $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ gilt.

Wir werden dies nun durch vollständige Induktion nach n beweisen:

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ erfüllt, wie man sehr leicht einsieht (denn für $n = 0$ ist $(\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta = \left(\operatorname{id} \otimes \underbrace{\Delta^{-1}}_{=\varepsilon}\right) \circ \Delta = (\operatorname{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \operatorname{kan}^{-1}$ gemäß dem Diagramm (2.3), wobei man bedenken muß, daß unsere Abbildung kan und die Abbildung kan aus dem Diagramm (2.3) zueinander invers sind). Damit ist der Induktionsanfang fertig.

Induktionsschritt: Sei $N \geq 0$ beliebig. Angenommen, $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ gelte für $n = N$. Wir wollen nun beweisen, daß $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ auch für $n = N + 1$ gilt.

Da $\Delta^n = \operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta$ für $n = N$ gilt, ist $\Delta^N = \operatorname{kan} \circ \left(\operatorname{id} \otimes \Delta^{N-1}\right) \circ \Delta$. Andererseits gilt $\Delta^N = \operatorname{kan} \circ \left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta$ (nach der rekursiven Definition von Δ^n) und $\Delta^{N+1} = \operatorname{kan} \circ \left(\Delta^N \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta$ (aus selbigem Grund).

Wir setzen fortan $(\otimes^a C) \otimes \left(\otimes^b C\right)$ mit $\otimes^{a+b} C$ gleich für beliebige natürliche a und b. Dadurch werden die Abbildungen $\operatorname{kan} : (\otimes^n C) \otimes C \to \otimes^{n+1} C$ und $\operatorname{kan} : C \otimes (\otimes^n C) \to \otimes^{n+1} C$ zu Identitätsabbildungen. Somit vereinfacht sich $\Delta^N = \operatorname{kan} \circ \left(\operatorname{id} \otimes \Delta^{N-1}\right) \circ \Delta$ zu $\Delta^N = \left(\operatorname{id} \otimes \Delta^{N-1}\right) \circ \Delta$. Genauso vereinfachen sich $\Delta^N = \operatorname{kan} \circ \left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta$ und $\Delta^{N+1} = \operatorname{kan} \circ \left(\Delta^N \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta$ zu $\Delta^N = \left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta$ bzw. $\Delta^{N+1} = \left(\Delta^N \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta$.

Aus $\Delta^N = \left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta$ folgt[72]

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{id} \otimes \Delta^N\right) \circ \Delta \\
&= \left(\underbrace{\operatorname{id}}_{=\operatorname{id}\circ\operatorname{id}} \otimes \left(\left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta\right)\right) \circ \Delta = \underbrace{\left((\operatorname{id}\circ\operatorname{id}) \otimes \left(\left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta\right)\right)}_{\substack{=\left(\operatorname{id}\otimes\left(\Delta^{N-1}\otimes\operatorname{id}\right)\right)\circ(\operatorname{id}\otimes\Delta) \\ \text{(nach der Formel } (a\circ b)\otimes(c\circ d)=(a\otimes c)\circ(b\otimes d), \\ \text{angewandt auf die Abbildungen} \\ a=\operatorname{id},\ b=\operatorname{id},\ c=\Delta^{N-1}\otimes\operatorname{id} \text{ und } d=\Delta)}} \circ\Delta \\
&= \underbrace{\left(\operatorname{id} \otimes \left(\Delta^{N-1} \otimes \operatorname{id}\right)\right)}_{=(\operatorname{id}\otimes\Delta^{N-1})\otimes\operatorname{id}} \circ \underbrace{(\operatorname{id} \otimes \Delta) \circ \Delta}_{\substack{=(\Delta\otimes\operatorname{id})\circ\Delta \\ \text{(da das Diagramm} \\ \text{(2.1) kommutativ ist)}}} = \underbrace{\left(\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^{N-1}\right) \otimes \operatorname{id}\right) \circ (\Delta \otimes \operatorname{id})}_{\substack{=\left(\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^{N-1}\right)\circ\Delta\right)\otimes(\operatorname{id}\circ\operatorname{id}) \\ \text{(nach der Formel } (a\otimes c)\circ(b\otimes d)=(a\circ b)\otimes(c\circ d), \\ \text{angewandt auf die Abbildungen} \\ a=\operatorname{id}\otimes\Delta^{N-1},\ b=\Delta,\ c=\operatorname{id} \text{ und } d=\operatorname{id})}} \circ\Delta \\
&= \left(\underbrace{\left(\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^{N-1}\right) \circ \Delta\right)}_{=\Delta^N} \otimes \underbrace{(\operatorname{id}\circ\operatorname{id})}_{=\operatorname{id}}\right) \circ \Delta = \left(\Delta^N \otimes \operatorname{id}\right) \circ \Delta = \Delta^{N+1}.
\end{aligned}$$

Wir haben damit $\Delta^{N+1} = \left(\operatorname{id}\otimes\Delta^N\right) \circ \Delta$ bewiesen. Dies läßt sich umschreiben als $\Delta^{N+1} = \operatorname{kan}\circ\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^N\right) \circ \Delta$ (denn für uns ist kan die Identitäsabbildung). Somit haben wir gezeigt, daß $\Delta^n = \operatorname{kan}\circ\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^{n-1}\right) \circ \Delta$ für $n = N+1$ gilt. Damit ist der Induktionsschritt fertig, und wir haben mithilfe vollständiger Induktion gezeigt, daß für jedes $n \geq 0$ die Gleichung $\Delta^n = \operatorname{kan}\circ\left(\operatorname{id}\otimes\Delta^{n-1}\right) \circ \Delta$ gilt. Wie bereits gesagt, folgt hieraus Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **3)**.

Bemerkung: Die rekursive Definition der Abbildungen Δ^{n-1} ist recht unanschaulich. Um eine Intuition für ihre Bedeutung zu erlangen, kann man sich (ausgehend von der Analogie zwischen Algebren und Coalgebren) fragen, was das Analogon der Abbildung Δ^{n-1} für Algebren statt Coalgebren ist. Dieses Analogon ist für eine Algebra A die Abbildung

$$\otimes^n A \to A, \qquad x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto ((((x_1 x_2)\, x_3)\, x_4) \ldots)\, x_n,$$

also die Abbildung, die einem reinen n-Tensor das Produkt seiner Tensoranden (von links geklammert) zuordnet. Nun besagt ein bekanntes und elementares Resultat, daß in einer Algebra das Produkt von n Elementen nicht von der Klammerung abhängt (da bei uns Algebren immer assoziativ sein müssen). Wenn wir die Abbildung

$$\otimes^n A \to A, \qquad x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto ((((x_1 x_2)\, x_3)\, x_4) \ldots)\, x_n$$

mit μ^{n-1} bezeichnen, dann gilt insbesondere

$$\mu^n (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = \mu^{n-1} (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) \cdot x_{n+1} = x_1 \cdot \mu^{n-1} (x_2 \otimes x_3 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in A$$

und

$$\mu^{n-1} (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_{\ell-1} \otimes (x_\ell x_{\ell+1}) \otimes x_{\ell+2} \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = \mu^n (x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}, \text{ alle } x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in A \text{ und jedes } \ell \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

[72]In der folgenden Rechnung bedeutet id stets die Identität id_C.

und schließlich

$$\mu^a (x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_{a+1}) \cdot \mu^b (x_{a+2} \otimes x_{a+3} \otimes ... \otimes x_{a+b+2}) = \mu^{a+b+1} (x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_{a+b+2})$$
$$\text{für alle } a \geq -1,\ b \geq -1 \text{ und } x_1, x_2, ..., x_{a+b+2} \in A.$$

Diese drei Gleichungen sind genau die Algebren-Analoga der Aussagen von Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **3)**, **4)** und **5)**.

Summenlose Sweedler-Notation[73]

$2.1\frac{3}{4}$. Bemerkung: Man kann in einer Algebra problemlos mit Elementen rechnen: Das Produkt zweier Elemente einer Algebra ist wieder ein Element. In Coalgebren ist dies nicht mehr so einfach: Die Comultiplikation Δ überführt ein Element einer Coalgebra (in der Regel) nicht in "zwei Elemente", sondern in einen Tensor (der nicht unbedingt ein reiner Tensor ist), und allgemeine Tensoren sind sehr unhandlich zu bedienen. Wir wollen jetzt eine Notation einführen, die es uns erlaubt, "so zu tun", als wären diese Tensoren allesamt reine Tensoren. Diese Notation (die eine gewisse Ähnlichkeit zur Einstein-Notation aufweist) wird anfangs für Kopfschmerzen sorgen, aber auf Dauer viel Schreibarbeit ersparen. Es ist die sogenannte *summenlose Sweedler-Notation*. Wir werden dabei erst einmal heuristisch vorgehen, und die Notation Schritt für Schritt einführen. Am Ende werden wir dann eine genaue Regel aufstellen, wie ein in summenloser Sweedler-Notation geschriebener Term zu entziffern ist. Wer der Heuristik nicht folgen kann (oder will), sollte zuerst diese Regel und dann erst die Heuristik durchlesen.

Wir entsinnen uns, daß für jedes Element x einer Coalgebra C das Bild $\Delta(x)$ ein Element von $C \otimes C$ ist, also die Form $\Delta(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}$ für irgendwelche r, x_{1i} und x_{2i} hat. Jetzt wollen wir $\sum\limits_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}$ symbolisch mit $\sum\limits_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ abkürzen; dies ist die sogenannte *Sweedler-Notation*. Bei der *summenlosen Sweedler-Notation* gehen wir einen Schritt weiter und lassen das Summenzeichen weg; d. h. wir schreiben nur noch $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Diese Notation werden wir im Folgenden des öfteren verwenden. (Wie gesagt, werden wir später genauer ausführen, wie diese Notation zu lesen ist.) [74].

Man beachte zweierlei:

- Bei $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ handelt es sich um eine Summe von Tensoren und nicht um einen reinen Tensor! Die Zeichen $x_{(1)}$ und $x_{(2)}$ sind nur Symbole, keine konkreten Vektoren, und ergeben nur gemeinsam Sinn! (Dies stimmt nur fast, denn $x_{(1)}$ allein ergibt auch Sinn, wie wir noch sehen werden, wenn wir die summenlose

[73] Dieser Abschnitt stützt sich weniger auf den Kurs, als auf den Wikipedia-Artikel

`http://de.wikipedia.org/wiki/Koalgebra#Sweedlernotation`

Achtung: Die Interpretationsregel für Sweedler-Notation am Ende des Abschnittes stammt von mir und mag falsch sein!

[74] Man kann noch weitergehen und $x_1 \otimes x_2$ statt $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ schreiben; dies wird in der Vorlesung auch getan. Hier im Skript allerdings versuche ich, die Klammern in Frieden zu lassen - wenn Sie in diesem Skript ungeklammerte Indizes bei Sweedler-Notation vorfinden, melden Sie es mir bitte als Fehler!

Sweedler-Notation ausweiten ($x_{(2)}$ ergibt wiederum alleine keinen Sinn). Doch $x_{(1)}$ allein bedeutet einfach x und hat nichts mit dem $x_{(1)}$ in $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ zu tun.)

- Zwar ist die summenlose Sweedler-Notation $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ als eine Abkürzung für die Summe $\sum_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}$ zu lesen, doch die Tensoren $x_{1i} \otimes x_{2i}$, die in dieser Summe vorkommen, sind nicht eindeutig bestimmt (und auch die Anzahl r von diesen Tensoren ist nicht eindeutig bestimmt). Im Allgemeinen kann man diese Tensoren auch nicht "kanonisch" wählen.

Die summenlose Sweedler-Notation beschränkt sich nicht auf Terme der Form $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, sondern erlaubt auch andere Terme, in denen die "virtuellen" Tensoranden $x_{(1)}$ und $x_{(2)}$ vorkommen:

Ist C eine Coalgebra, sind D und E zwei k-Moduln, und sind $f : C \to D$ und $g : C \to E$ zwei k-lineare Abbildungen, dann wollen wir $(f \otimes g)(\Delta(x))$ mit $f\left(x_{(1)}\right) \otimes g\left(x_{(2)}\right)$ abkürzen.[75] Daß diese Notation nicht zu Widersprüchen führt, liegt daran, daß $f \otimes g$ eine lineare Abbildung ist, und man lineare Abbildungen aus Summen "ausklammern" kann.

Als Beispiel für die Anwendung der summenlosen Sweedler-Notation wollen wir die beiden kommutativen Diagramme (2.2) und (2.3) mithilfe der Sweedler-Notation umschreiben:

Das kommutative Diagramm (2.2) besagt, daß $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{kan} : C \to k \otimes C$ ist, also daß $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) = 1 \otimes x$ für alle $x \in C$ ist. In der Tat können wir in der summenlosen Sweedler-Notation schreiben:

$$((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}.$$

Daher wird $((\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) = 1 \otimes x$ zu $\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} = 1 \otimes x$. Wendet man auf diese Gleichung den Isomorphismus $\mathrm{kan}^{-1} : k \otimes C \to C$ an, erhält man $\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \cdot x_{(2)} = 1 \cdot x$, also $\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \cdot x_{(2)} = x$.

Das kommutative Diagramm (2.2) besagt also nichts anderes als $\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \cdot x_{(2)} = x$ für alle $x \in C$. Analog besagt das kommutative Diagramm (2.3), daß $x_{(1)} \cdot \varepsilon\left(x_{(2)}\right) = x$ für alle $x \in C$ gilt.

Wir haben oben den Begriff eines Coalgebrahomomorphismus zwischen zwei Coalgebren C und D definiert als eine k-lineare Abbildung $f : C \to D$, für welche die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & k \end{tikzcd}$$

kommutieren. Mithilfe der summenlosen Sweedler-Notation sehen wir: Das erste Diagramm kommutiert genau dann, wenn $\Delta(f(x)) = f\left(x_{(1)}\right) \otimes f\left(x_{(2)}\right)$ für alle $x \in C$ ist;

[75] Diese Notation ist zwar nicht wirklich kürzer als $(f \otimes g)(\Delta(x))$, jedoch in einem gewissen Sinne "anschaulicher": man sieht dem Term $f\left(x_{(1)}\right) \otimes g\left(x_{(2)}\right)$ sofort an, daß er ein 2-Tensor ist, und daß f immer auf die linke Tensorhälfte und g immer auf die zweite Tensorhälfte angewandt wird. Natürlich darf man aus der Schreibweise $f\left(x_{(1)}\right) \otimes g\left(x_{(2)}\right)$ nicht schließen, daß $f\left(x_{(1)}\right) \otimes g\left(x_{(2)}\right)$ ein *reiner* Tensor wäre.

das zweite Diagramm kommutiert genau dann, wenn $\varepsilon(f(x)) = \varepsilon(x)$ für alle $x \in C$ ist. Wir fassen zusammen:

Proposition: Seien C und D Coalgebren, und sei $f : C \to D$ eine k-lineare Abbildung. Dann ist f genau dann ein Coalgebrahomomorphismus, wenn

$$\Delta(f(x)) = f\left(x_{(1)}\right) \otimes f\left(x_{(2)}\right) \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(f(x)) = \varepsilon(x) \qquad \text{für alle } x \in C$$

gilt.

Der größte Vorteil der summenlosen Sweedler-Notation wird deutlich, wenn man diese Notation weiter ausdehnt. Wir können erstmal versuchen, das kommutative Diagramm (2.1) umzudeuten. Dieses Diagramm besagt, daß $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta : C \to C \otimes C \otimes C$ ist, also daß $((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x) = ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x)$ für alle $x \in C$ ist. Nun können wir schreiben:

$$((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(x) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(x)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) = x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right).$$

Analog ist $((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)(x) = \Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}$. Das kommutative Diagramm (2.1) besagt also $x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right) = \Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}$ für alle $x \in C$. Nun wäre es sehr naheliegend, in dieser Gleichung jeden von den zwei Termen $\Delta\left(x_{(2)}\right)$ und $\Delta\left(x_{(1)}\right)$ selber in zwei Teile aufzuspalten. Wir stellen fest, daß wir dies machen können, indem wir sowohl den Term $x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right)$, als auch den Term $\Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}$ in der "symmetrischen" Form $x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$ umschreiben. Und dies wird vor allem dadurch noch plausibler gemacht, daß dieser Term gleich $\Delta^2(x)$ ist!

Um dies alles zu präzisieren, können wir wie folgt vorgehen:

Für jedes ganze $n \geq 0$ ist $\Delta^{n-1}(x)$ ein Element von $\otimes^n C$; daher gibt es ein ganzes r sowie Elemente $x_{ki} \in C$ für alle $k \in \{1, 2, ..., n\}$ und $i \in \{1, 2, ..., r\}$, so daß $\Delta^{n-1}(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i} \otimes ... \otimes x_{ni}$ ist. Jetzt kürzen wir einfach $\sum\limits_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i} \otimes ... \otimes x_{ni}$ symbolisch zu $x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes ... \otimes x_{(n)}$ ab.

Nach dem kommutativen Diagramm (2.4) gilt dann

$$\Delta^n\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes \Delta^n\left(x_{(2)}\right) = \Delta^{n+1}(x) \qquad \text{für alle } x \in C.$$

Aus Bemerkung $2.1\frac{1}{2}$ **4)** folgt ferner, daß für jedes $\ell \in \{0, 1, ..., n-1\}$ gilt:

$$x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes ... \otimes x_{(\ell)} \otimes \Delta\left(x_{(\ell+1)}\right) \otimes x_{(\ell+2)} \otimes ... \otimes x_{(n)} = x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes ... \otimes x_{(n+1)} \qquad \text{für alle } x \in C.$$

[76] Hieraus folgt insbesondere: Sind $f_1, f_2, ..., f_\ell, f_{\ell+2}, ..., f_n$ lineare Abbildungen von C in andere k-Vektorräume, so ist

$$\begin{aligned} & f_1\left(x_{(1)}\right) \otimes f_2\left(x_{(2)}\right) \otimes ... \otimes f_\ell\left(x_{(\ell)}\right) \otimes \Delta\left(x_{(\ell+1)}\right) \otimes f_{\ell+2}\left(x_{(\ell+2)}\right) \otimes ... \otimes f_n\left(x_{(n)}\right) \\ & = f_1\left(x_{(1)}\right) \otimes f_2\left(x_{(2)}\right) \otimes ... \otimes f_\ell\left(x_{(\ell)}\right) \otimes x_{(\ell+1)} \otimes x_{(\ell+2)} \otimes f_{\ell+2}\left(x_{(\ell+3)}\right) \otimes ... \otimes f_n\left(x_{(n+1)}\right) \\ & \qquad \text{für alle } x \in C. \end{aligned}$$

Diese Formel besagt im wesentlichen, daß wir ein in der summenlosen Sweedler-Notation auftretendes $\Delta\left(x_{(\ell+1)}\right)$ zu einem $x_{(\ell+1)} \otimes x_{(\ell+2)}$ "expandieren" können, aber dann alle

[76] Dabei soll man nicht meinen, die $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ auf der linken Seite hätten irgendetwas mit den $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ auf der rechten zu tun - es sind die gleichen Symbole in verschiedenen Bedeutungen!

eingeklammerten Indizes, die größer als $\ell + 2$ sind, um 1 vergrößern ("nach rechts verschieben") müssen. Entsprechend können wir ein in der summenlosen Sweedler-Notation auftretendes $\varepsilon\left(x_{(\ell)}\right)$ mit einem rechts von ihm stehenden $x_{(\ell+1)}$ zu einem $x_{(\ell)}$ "kürzen" (dank $\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} = x$), müssen aber dann alle eingeklammerten Indizes, die größer als ℓ sind, um 1 verkleinern ("nach links verschieben"); das heißt: Sind f_1, f_2, ..., $f_{\ell-1}$, $f_{\ell+2}$, ..., f_{n+1} lineare Abbildungen von C in andere k-Vektorräume, so ist

$$f_1\left(x_{(1)}\right) \otimes f_2\left(x_{(2)}\right) \otimes ... \otimes f_{\ell-1}\left(x_{(\ell-1)}\right) \otimes \varepsilon\left(x_{(\ell)}\right) \otimes x_{(\ell+1)} \otimes f_{\ell+2}\left(x_{(\ell+2)}\right) \otimes ... \otimes f_{n+1}\left(x_{(n+1)}\right)$$
$$= f_1\left(x_{(1)}\right) \otimes f_2\left(x_{(2)}\right) \otimes ... \otimes f_{\ell-1}\left(x_{(\ell-1)}\right) \otimes x_{(\ell)} \otimes f_{\ell+2}\left(x_{(\ell+1)}\right) \otimes ... \otimes f_{n+1}\left(x_{(n)}\right)$$
$$\text{für alle } x \in C\ .$$

Noch eine kleine Erweiterung der summenlosen Sweedler-Notation:

Sei $f : \underbrace{C \times C \times ... \times C}_{n \text{ mal}} \to X$ eine n-fach multilineare Abbildung, und sei $x \in C$. Sei $\overline{f} : \otimes^n C \to X$ die lineare Abbildung, die man aus f durch die universelle Eigenschaft der n-ten Tensorpotenz erhält, also die Abbildung, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{kan}"'] & X \\ \otimes^n C \arrow[ru, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann definieren wir $f\left(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right)$ als $\overline{f}\left(\Delta^{n-1}(x)\right)$.

Schließlich, um das Obige formaler zu machen, eine *exakte Erklärung, wie ein Term T auszuwerten ist, in dem summenlose Sweedler-Notation vorkommt*:

Definition: Angenommen, ein Term T enthalte die Unterterme $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, ..., $x_{(n)}$ (und kein $x_{(\ell)}$ für $\ell > n$), wobei x irgendein Term ist[77]. Dann wird der Term T wie folgt ausgewertet:

Werte zuerst den Term x aus. Berechne dann den Tensor $\Delta^{n-1}(x) \in \otimes^n C$. Schreibe diesen Tensor $\Delta^{n-1}(x) \in \otimes^n C$ in der Form $\sum\limits_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i} \otimes ... \otimes x_{ni}$ für ein natürliches r und irgendwelche Elemente $x_{ji} \in C$ (mit $i \in \{1, 2, ..., r\}$ und $j \in \{1, 2, ..., n\}$) (so eine Darstellung existiert, ist aber im Allgemeinen nicht eindeutig). Für jedes $i \in \{1, 2, ..., r\}$ sei T_i der Term, der entsteht, wenn man in T jedes Vorkommen des Unterterms $x_{(\ell)}$ durch $x_{\ell i}$ ersetzt. Werte jetzt die Summe $\sum\limits_{i=1}^{r} T_i$ aus. Das Ergebnis sollte nicht von der konkreten Darstellung von $\Delta^{n-1}(x)$ als $\sum\limits_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i} \otimes ... \otimes x_{ni}$ abhängen, sondern nur von x (wenn es doch von der konkreten Darstellung abhängt, ist der Term T ungültig[78]). Dieses Ergebnis ist dann das Resultat der Auswertung des Termes T.

[*Beispiel:* Beispielsweise besagt diese Regel im Fall einer n-fach multilinearen Abbildung $f : \underbrace{C \times C \times ... \times C}_{n \text{ mal}} \to X$, daß der Term $f\left(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right)$ als $\sum\limits_{i=1}^{r} f\left(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}\right)$

[77] Dieses x muss nicht notwendigerweise eine einzelne Variable sein - es kann auch ein komplizierterer Term sein (z. B. kann $T = (ab)_{(1)}\, \varepsilon\left((ab)_{(2)}\right)$ sein; in diesem Fall ist $x = ab$).

[78] So eine Ungültigkeit kann z. B. dann entstehen, wenn im Term T eine Anwendung einer nichtlinearen Abbildung auf ein $x_{(i)}$ vorkommt.

auszuwerten ist, wobei $\Delta^{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i} \otimes ... \otimes x_{ni}$ sein soll. Und tatsächlich ist diese Summe $\sum_{i=1}^{r} f(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni})$ unabhängig von der konkreten Wahl der Darstellung von $\Delta^{n-1}(x)$ als $\sum_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i} \otimes ... \otimes x_{ni}$, sondern nur abhängig von x, und ihr Wert ist $\overline{f}(\Delta^{n-1}(x))$ (wie schon in der Heuristik weiter oben definiert).]

Wenn im Term T mehrere Unterterme x, y, z, ... mit eingeklammerten Indizes vorkommen (wie $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, ..., $y_{(1)}$, $y_{(2)}$, ..., $z_{(1)}$, $z_{(2)}$, ...), wendet man obige Regel der Reihe nach für jeden dieser Unterterme an; dann entstehen bei der Auswertung von T natürlich mehrere Summenzeichen.

Eindeutigkeit der Coeins

Folgende einfache Bemerkung ist ein Beispiel für die Anwendung der Sweedler-Notation:

2.1$\frac{7}{8}$. Proposition: Sei C ein k-Vektorraum, und seien $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon_1 : C \to k$ und $\varepsilon_2 : C \to k$ drei Abbildungen, für die gilt, daß $(C, \Delta, \varepsilon_1)$ eine Coalgebra ist und daß $(C, \Delta, \varepsilon_2)$ eine Coalgebra ist. Dann ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Bemerkung: Diese Proposition 2.1$\frac{7}{8}$ sagt aus, daß in einer Coalgebra die Coeins durch die Comultiplikation eindeutig bestimmt ist. Dies ist ein Analogon zum bekannten Satz, daß in einer Algebra die Eins durch die Multiplikation eindeutig bestimmt ist (d. h. daß eine Multiplikation immer nur eine Eins haben kann).

Wir werden drei Beweise von Proposition 2.1$\frac{7}{8}$ zeigen: einen Ersten Beweis mithilfe der Sweedler-Notation, und einen Zweiten und einen Dritten Beweis ohne Sweedler-Notation. Im Wesentlichen sind diese drei Beweise aber äquivalent.

Erster Beweis von Proposition 2.1$\frac{7}{8}$: Um Proposition 2.1$\frac{7}{8}$ nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ gilt. Dazu müssen wir für jedes $x \in C$ beweisen, daß $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ gilt. Wir werden dies nun durch eine Rechnung erledigen, in der wir die Sweedler-Notation verwenden. Einige Schritte in dieser Rechnung sind nicht ganz trivial; ich werde sie nach der Rechnung kommentieren.

Hier erst einmal die Rechnung:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\left(\underbrace{x}_{\substack{=x_{(1)}\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)\\ \text{(denn } (C,\Delta,\varepsilon_2) \text{ ist}\\ \text{eine Coalgebra)}}}\right) &= \varepsilon_1\left(x_{(1)}\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)\right) \\
&= \varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right) && \left(\text{denn } \varepsilon_2\left(x_{(2)}\right) \text{ ist ein Skalar}\right) \\
&= \varepsilon_2\left(\underbrace{\varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}}_{\substack{=x\\ \text{(denn } (C,\Delta,\varepsilon_1) \text{ ist}\\ \text{eine Coalgebra)}}}\right) && \left(\text{denn } \varepsilon_1\left(x_{(1)}\right) \text{ ist ein Skalar}\right) \\
&= \varepsilon_2\left(x\right).
\end{aligned}$$

Nun erläutern wir einige Schritte in dieser Rechnung:

- Wir haben in dieser Rechnung Sweedler-Notation verwendet. Sweedler-Notation ist immer in Bezug auf eine bestimmte Coalgebra definiert. Hier haben wir es mit zwei Coalgebren zu tun - nämlich (C,Δ,ε_1) und (C,Δ,ε_2). Daher müßten wir bei einem Term der Form $x_{(1)}\otimes x_{(2)}\otimes ...\otimes x_{(n)}$ immer mit angeben, in bezug auf welche Coalgebra er ausgewertet sind, weil er sonst doppeldeutig sein könnte. Zum Glück sind unsere Terme in der obigen Rechnung alle eindeutig, denn es kommen nur $x_{(1)}$ und $x_{(2)}$ darin vor, und $x_{(1)}\otimes x_{(2)}=\Delta\left(x\right)$ ist unabhängig davon, in welcher Coalgebra wir rechnen (denn die beiden Coalgebren (C,Δ,ε_1) und (C,Δ,ε_2) haben die gleiche Comultiplikation). Aber in anderen Fällen könnten wir Doppeldeutigkeiten haben!

- Die Begründung "$\left(\text{denn } \varepsilon_2\left(x_{(2)}\right) \text{ ist ein Skalar}\right)$" bedarf einer Erläuterung, denn natürlich ist $\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)$ strenggenommen *kein* Skalar (überhaupt hat der Term $\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)$ als alleinstehender Term keinen wohldefinierten Sinn, da er $x_{(2)}$ aber nicht $x_{(1)}$ enthält). Was mit der Begründung "$\left(\text{denn } \varepsilon_2\left(x_{(2)}\right) \text{ ist ein Skalar}\right)$" in Wirklichkeit gemeint ist, ist folgendes Argument: Wir können den Tensor $\Delta\left(x\right)=x_{(1)}\otimes x_{(2)}$ in der Form $\sum\limits_{i=1}^{r}x_{1i}\otimes x_{2i}$ für ein natürliches r und irgendwelche $x_{11},x_{12},...,x_{1r}\in C$ und $x_{21},x_{22},...,x_{2r}\in C$ schreiben. Für dieses r und diese $x_{11},x_{12},...,x_{1r}\in C$ und $x_{21},x_{22},...,x_{2r}\in C$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\left(x_{(1)}\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)\right) &= \varepsilon_1\left(\sum_{i=1}^{r}x_{1i}\varepsilon_2\left(x_{2i}\right)\right) && \left(\text{denn } x_{(1)}\otimes x_{(2)}=\sum_{i=1}^{r}x_{1i}\otimes x_{2i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\varepsilon_1\left(x_{1i}\right)\varepsilon_2\left(x_{2i}\right) && \left(\begin{array}{c}\text{denn } \varepsilon_1 \text{ ist } k\text{-linear, und für jedes}\\ i\in\{1,2,...,r\} \text{ ist } \varepsilon_2\left(x_{2i}\right) \text{ ein Skalar}\end{array}\right) \\
&= \varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right) && \left(\text{denn } \sum_{i=1}^{r}x_{1i}\otimes x_{2i}=x_{(1)}\otimes x_{(2)}\right).
\end{aligned}$$

Dies ist also die eigentliche Begründung für den Rechenschritt $\varepsilon_1\left(x_{(1)}\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)\right) = \varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)$. Aber da diese Begründung langwierig und umständlich ist, ziehen wir es vor, sie mit den Worten "$\big($denn $\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)$ ist ein Skalar$\big)$" abzukürzen. Genauso ist die Begründung "$\big($denn $\varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)$ ist ein Skalar$\big)$" eine Abkürzung für eine längere Begründung. (In diesem Fall hat der Term $\varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)$ zwar auch als alleinstehender Term einen wohldefinierten Sinn (nämlich bedeutet er dann einfach $\varepsilon_1(x)$, weil er außer $x_{(1)}$ kein weiteres $x_{(n)}$ enthält), *doch er ist in diesem Kontext hier* ***nicht*** *als alleinstehender Term zu lesen*, sondern als Teil der Terme $\varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)\varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)$ und $\varepsilon_2\left(\varepsilon_1\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}\right)$ (und somit bedeutet er **nicht** $\varepsilon_1(x)$).)

Wir haben also durch die obige Rechnung gezeigt, daß $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ für jedes $x \in C$ gilt. Also ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, und Proposition $2.1\frac{7}{8}$ ist gezeigt.

Zweiter Beweis von Proposition $2.1\frac{7}{8}$*:* Um Proposition $2.1\frac{7}{8}$ nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ gilt. Dazu müssen wir für jedes $x \in C$ beweisen, daß $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ gilt.

Sei $\operatorname{kan}_1 : C \to k \otimes C$ die naheliegende Abbildung von C nach $k \otimes C$ (also $x \mapsto 1 \otimes x$). Sei $\operatorname{kan}_2 : C \to C \otimes k$ die naheliegende Abbildung von C nach $C \otimes k$ (also $x \mapsto x \otimes 1$). Es sei angemerkt, daß kan_1 genau die Abbildung ist, die im Diagramm (2.2) mit kan bezeichnet wurde, während kan_2 genau die Abbildung ist, die im Diagramm (2.3) mit kan bezeichnet wurde.

Sei $x \in C$ beliebig. Wir können den Tensor $\Delta(x) \in C \otimes C$ in der Form $\sum\limits_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}$ für ein natürliches r und irgendwelche $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1r} \in C$ und $x_{21}, x_{22}, ..., x_{2r} \in C$ schreiben. Betrachten wir dieses r und diese $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1r} \in C$ und $x_{21}, x_{22}, ..., x_{2r} \in C$.

Das Diagramm (2.2), mit ε und kan ersetzt durch ε_1 bzw. kan_1, ist kommutativ (da $(C, \Delta, \varepsilon_1)$ eine Coalgebra ist)[79]. Somit ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{kan}_1 x &= (\varepsilon_1 \otimes \operatorname{id})(\Delta(x)) = (\varepsilon_1 \otimes \operatorname{id})\left(\sum_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}\right) \qquad \left(\text{denn } \Delta(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\varepsilon_1(x_{1i}) \otimes x_{2i}}_{\substack{= 1 \otimes \varepsilon_1(x_{1i}) x_{2i} \\ (\text{denn } \varepsilon_1(x_{1i}) \text{ ist ein Skalar})}} = \sum_{i=1}^{r} 1 \otimes \varepsilon_1(x_{1i}) x_{2i} \\
&= 1 \otimes \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_1(x_{1i}) x_{2i} = \operatorname{kan}_1\left(\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_1(x_{1i}) x_{2i}\right),
\end{aligned}$$

also $x = \sum\limits_{i=1}^{r} \varepsilon_1(x_{1i}) x_{2i}$ (denn kan_1 ist ein Isomorphismus und daher injektiv).

Andererseits ist das Diagramm (2.3), mit ε und kan ersetzt durch ε_2 bzw. kan_2,

[79] Denn kan_1 ist genau die Abbildung, die im Diagramm (2.2) mit kan bezeichnet wurde.

auch kommutativ (da $(C, \Delta, \varepsilon_2)$ eine Coalgebra ist). Folglich ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{kan}_2 x &= (\operatorname{id} \otimes \varepsilon_2)(\Delta(x)) = (\operatorname{id} \otimes \varepsilon_2)\left(\sum_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}\right) \qquad \left(\text{denn } \Delta(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{1i} \otimes x_{2i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \underbrace{x_{1i} \otimes \varepsilon_2(x_{2i})}_{\substack{= x_{1i}\varepsilon_2(x_{2i}) \otimes 1 \\ (\text{denn } \varepsilon_2(x_{2i}) \text{ ist ein Skalar})}} = \sum_{i=1}^{r} x_{1i}\varepsilon_2(x_{2i}) \otimes 1 = \left(\sum_{i=1}^{r} x_{1i}\varepsilon_2(x_{2i})\right) \otimes 1 \\
&= \operatorname{kan}_2\left(\sum_{i=1}^{r} x_{1i}\varepsilon_2(x_{2i})\right),
\end{aligned}$$

also $x = \sum_{i=1}^{r} x_{1i}\varepsilon_2(x_{2i})$ (denn kan_2 ist ein Isomorphismus und daher injektiv).

Nun ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\left(\underbrace{x}_{= \sum_{i=1}^{r} x_{1i}\varepsilon_2(x_{2i})}\right) &= \varepsilon_1\left(\sum_{i=1}^{r} x_{1i}\varepsilon_2(x_{2i})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_1(x_{1i})\,\varepsilon_2(x_{2i}) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } \varepsilon_1 \text{ ist } k\text{-linear, und für jedes} \\ i \in \{1,2,...,r\} \text{ ist } \varepsilon_2(x_{2i}) \text{ ein Skalar}\end{array}\right) \\
&= \varepsilon_2\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_1(x_{1i})\,x_{2i}}_{=x}\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } \varepsilon_2 \text{ ist } k\text{-linear, und für jedes} \\ i \in \{1,2,...,r\} \text{ ist } \varepsilon_1(x_{1i}) \text{ ein Skalar}\end{array}\right) \\
&= \varepsilon_2(x).
\end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in C$ gilt, ist also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Damit ist Proposition $2.1\frac{7}{8}$ nachgewiesen.

Dritter Beweis von Proposition $2.1\frac{7}{8}$: Sei $\operatorname{kan}_1 : C \to k \otimes C$ die naheliegende Abbildung von C nach $k \otimes C$ (also $x \mapsto 1 \otimes x$). Sei $\operatorname{kan}_2 : C \to C \otimes k$ die naheliegende Abbildung von C nach $C \otimes k$ (also $x \mapsto x \otimes 1$). Es sei angemerkt, daß kan_1 genau die Abbildung ist, die im Diagramm (2.2) mit kan bezeichnet wurde, während kan_2 genau die Abbildung ist, die im Diagramm (2.3) mit kan bezeichnet wurde.

Das Diagramm (2.2), mit ε und kan ersetzt durch ε_1 bzw. kan_1, ist kommutativ (da $(C, \Delta, \varepsilon_1)$ eine Coalgebra ist)[80]. Das heißt, das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\operatorname{kan}_1"', "\cong"] & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon_1 \otimes \operatorname{id}"] \\
k \otimes C &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Mit anderen Worten: $(\varepsilon_1 \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta = \operatorname{kan}_1$.

[80] Denn kan_1 ist genau die Abbildung, die im Diagramm (2.2) mit kan bezeichnet wurde.

Das Diagramm (2.3), mit ε und kan ersetzt durch ε_2 bzw. kan_2, ist kommutativ (da $(C, \Delta, \varepsilon_2)$ eine Coalgebra ist)[81]. Das heißt, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}_2"', "\cong"] & C \otimes C \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2"] \\ C \otimes k & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Mit anderen Worten: $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \Delta = \mathrm{kan}_2$.

Sei andererseits kan_k die kanonische Abbildung $k \to k \otimes k$ (die jedes $\lambda \in k$ auf $\lambda \otimes 1 = 1 \otimes \lambda = \lambda \cdot (1 \otimes 1)$ abbildet). Aus den elementaren Eigenschaften des Tensorproduktes folgt dann, daß $(\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \mathrm{kan}_2 = \mathrm{kan}_k \circ \phi = (\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \mathrm{kan}_1$ für jede k-lineare Abbildung $\phi : C \to k$ ist. Angewandt auf $\phi = \varepsilon_1$ ergibt dies $(\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \mathrm{kan}_2 = \mathrm{kan}_k \circ \varepsilon_1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_1) \circ \mathrm{kan}_1$. Andererseits können wir $(\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \mathrm{kan}_2 = \mathrm{kan}_k \circ \phi = (\mathrm{id} \otimes \phi) \circ \mathrm{kan}_1$ auf $\phi = \varepsilon_2$ anwenden und erhalten $(\varepsilon_2 \otimes \mathrm{id}) \circ \mathrm{kan}_2 = \mathrm{kan}_k \circ \varepsilon_2 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \mathrm{kan}_1$.

Bekanntlich sind kan_1, kan_2 und kan_k allesamt k-Vektorraumisomorphismen. Aus $(\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \mathrm{kan}_2 = \mathrm{kan}_k \circ \varepsilon_1$ folgt also $\varepsilon_1 \circ \mathrm{kan}_2^{-1} = \mathrm{kan}_k^{-1} \circ (\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id})$. Nun machen wir folgende Rechnung:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \circ \mathrm{kan}_2^{-1} \circ \underbrace{\mathrm{kan}_2}_{=(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \Delta} = \underbrace{\varepsilon_1 \circ \mathrm{kan}_2^{-1}}_{=\mathrm{kan}_k^{-1} \circ (\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id})} \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \Delta = \mathrm{kan}_k^{-1} \circ \underbrace{(\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2)}_{\substack{=\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \\ =(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ (\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id})}} \circ \Delta$$

$$= \mathrm{kan}_k^{-1} \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \underbrace{(\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta}_{=\mathrm{kan}_1} = \mathrm{kan}_k^{-1} \circ \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \mathrm{kan}_1}_{=\mathrm{kan}_k \circ \varepsilon_2} = \underbrace{\mathrm{kan}_k^{-1} \circ \mathrm{kan}_k}_{=\mathrm{id}} \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2.$$

Damit ist Proposition $2.1\frac{7}{8}$ nachgewiesen.

Bemerkung: Die drei Beweise von Proposition $2.1\frac{7}{8}$, die wir oben gegeben haben, sind im Wesentlichen einer und derselbe Beweis in drei Varianten: Der Erste Beweis und der Zweite Beweis unterscheiden sich nur hinsichtlich der Verwendung der Sweedler-Notation (der Erste Beweis verwendet sie, der Zweite nicht). Der Kern der ersten beiden Beweise (die Rechnung, die $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$ beweist) und der Kern des Dritten Beweises (die Rechnung, die $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ beweist) sind im Grunde genommen die gleiche Rechnung; der einzige Unterschied (bis auf einige technische Details) ist, daß im Dritten Beweis direkt mit Abbildungen gerechnet wurde, während in den ersten beiden Beweisen mit den Bildern eines beliebigen Elementes unter den Abbildungen gerechnet wurde. Aber wenn man in die Rechnung im Dritten Beweis ein Element $x \in C$ einsetzt, erhält man sehr genau die Rechnung aus dem Ersten Beweis (zum Beispiel ist $\left(\varepsilon_1 \circ \mathrm{kan}_2^{-1} \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \Delta\right)(x) = \varepsilon_1\left(x_{(1)} \varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)\right)$ und $\left(\mathrm{kan}_k^{-1} \circ (\varepsilon_1 \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_2) \circ \Delta\right)(x) = \varepsilon_1\left(x_{(1)}\right) \varepsilon_2\left(x_{(2)}\right)$) oder die aus dem Zweiten (wenn man keine Sweedler-Notation verwendet).

Faltung und Algebrastruktur auf $\mathrm{Hom}(C, A)$

Definition: Sei A eine Algebra und C eine Coalgebra. Seien $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ (hierbei verstehen wir unter $\mathrm{Hom}(C, A)$ die Menge aller k-Modulhomomorphismen von C nach A, also aller k-linearen Abbildungen $C \to A$). Wir definieren die sogenannte

[81] Denn kan_2 ist genau die Abbildung, die im Diagramm (2.3) mit kan bezeichnet wurde.

Faltung (auch *Konvolution* genannt) $f * g \in \operatorname{Hom}(C, A)$ von f und g durch $f * g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$.

Mit anderen Worten: Die Faltung $f*g$ von f und g ist diejenige k-lineare Abbildung von C nach A, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rrr, bend right, "f*g"'] & C \otimes C \arrow[r, "f\otimes g"] & A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Mit der summenlosen Sweedler-Notation läßt sich dies noch einmal umformulieren: Die Faltung $f * g$ von f und g wird durch

$$(f * g)(x) = f\left(x_{(1)}\right) g\left(x_{(2)}\right) \qquad \text{für alle } x \in C$$

definiert.

2.2. Satz: 1) Ist A eine Algebra und C eine Coalgebra, dann ist $\operatorname{Hom}(C, A)$ eine Algebra mit Produkt $*$ und 1-Element $\eta\varepsilon$.

2) Seien A und B Algebren und C und D Coalgebren, sei $\varphi : A \to B$ ein Algebrahomomorphismus, und sei $\psi : C \to D$ ein Coalgebrahomomorphismus. Dann ist die induzierte Abbildung

$$\operatorname{Hom}(\mathrm{id}, \varphi) : \operatorname{Hom}(C, A) \to \operatorname{Hom}(C, B), \qquad f \mapsto \varphi f$$

ein Algebrahomomorphismus, und

$$\operatorname{Hom}(\psi, \mathrm{id}) : \operatorname{Hom}(D, A) \to \operatorname{Hom}(C, A), \qquad f \mapsto f\psi$$

ein Algebrahomomorphismus.

Beweis: **1)** Offenbar ist $* : \operatorname{Hom}(C, A) \times \operatorname{Hom}(C, A) \to \operatorname{Hom}(C, A)$ bilinear. Die Assoziativität von $*$ ergibt sich folgendermaßen: Für $f, g, h \in \operatorname{Hom}(C, A)$ und $x \in C$ gilt, zumindest wenn man der summenlosen Sweedler-Notation vertraut:

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= (f * g)\left(x_{(1)}\right) h\left(x_{(2)}\right) = \left(f\left(x_{(1)}\right) g\left(x_{(2)}\right)\right) h\left(x_{(3)}\right) \\ &= f\left(x_{(1)}\right)\left(g\left(x_{(2)}\right) h\left(x_{(3)}\right)\right) = f\left(x_{(1)}\right)(g * h)\left(x_{(2)}\right) = (f * (g * h))(x).\end{aligned}$$

Somit gilt die Gleichung $(f * g) * h = f * (g * h)$ für alle $f, g, h \in \operatorname{Hom}(C, A)$. Hier ist ein alternativer Beweis dieser Gleichung ohne Verwendung der Sweedler-Notation:

$$\begin{aligned}(f * g) * h &= \mu \circ ((f * g) \otimes h) \circ \Delta = \mu \circ ((\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta) \otimes h) \circ \Delta \\ &= \mu \circ ((\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta) \otimes (\mathrm{id} \circ h \circ \mathrm{id})) \circ \Delta \\ &= \mu \circ ((\mu \otimes \mathrm{id}) \circ ((f \otimes g) \otimes h) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})) \circ \Delta \\ &\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } (\alpha \otimes \alpha') \circ (\beta \otimes \beta') \circ (\gamma \otimes \gamma') = (\alpha \circ \beta \circ \gamma) \otimes (\alpha' \circ \beta' \circ \gamma') \\ \text{für beliebige } k\text{-lineare Abbildungen } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma' \text{ (für die} \\ \text{diese Verkettungen einen Sinn ergeben)}\end{array}\right) \\ &= (\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id})) \circ ((f \otimes g) \otimes h) \circ ((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)\end{aligned}$$

und analog

$$f * (g * h) = (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu)) \circ ((f \otimes g) \otimes h) \circ ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta),$$

also $(f*g)*h = f*(g*h)$ (denn $\mu\circ(\mu\otimes\mathrm{id}) = \mu\circ(\mathrm{id}\otimes\mu)$, $(f\otimes g)\otimes h = f\otimes(g\otimes h)$ und $(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta$).

Daß $\eta\varepsilon$ das 1-Element ist, ist klar: Für alle $f\in\mathrm{Hom}(C,A)$ und alle $x\in C$ ist[82]

$$(\eta\varepsilon * f)(x) = \varepsilon\left(x_{(1)}\right)\cdot 1\cdot f\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) f\left(x_{(2)}\right) = f\left(\underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}}_{=x}\right) = f(x),$$

also $\eta\varepsilon * f = f$, und ebenso $f*\eta\varepsilon = f$. (Auch hier kommt man auch ohne Sweedler-Notation durch, wenn man will.)

2) Für alle $f,g\in\mathrm{Hom}(C,A)$ und $x\in C$ ist

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi)(f*g))(x)\\
&=\varphi((f*g)(x)) = \varphi\left(f\left(x_{(1)}\right)g\left(x_{(2)}\right)\right)\\
&=\varphi\left(f\left(x_{(1)}\right)\right)\cdot\varphi\left(g\left(x_{(2)}\right)\right) \qquad \text{(da } \varphi \text{ ein Algebrahomomorphismus ist)}\\
&=(\varphi f)\left(x_{(1)}\right)\cdot(\varphi g)\left(x_{(2)}\right) = (\varphi f * \varphi g)(x).
\end{aligned}$$

Das heißt, für alle $f,g\in\mathrm{Hom}(C,A)$ ist

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi)(f*g) = \varphi f * \varphi g = (\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi))(f) * (\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi))(g).$$

Da außerdem $\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi)(\eta\varepsilon) = \eta\varepsilon$ gilt (denn für jedes $x\in C$ ist

$$(\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi)(\eta\varepsilon))(x) = \varphi\left(\underbrace{\eta\varepsilon(x)}_{=\varepsilon x\cdot 1}\right) = \varepsilon(x)\underbrace{\varphi(1)}_{=1} = \eta(\varepsilon(x)) = (\eta\varepsilon)(x)$$

), folgt hieraus, daß $\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi)$ ein Algebrahomomorphismus ist. Daß $\mathrm{Hom}(\psi,\mathrm{id})$ ein Algebrahomomorphismus ist, ergibt sich ähnlich: Für alle $f,g\in\mathrm{Hom}(D,A)$ und $x\in C$ gilt

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Hom}(\psi,\mathrm{id})(f*g))(x)\\
&=(f*g)(\psi(x)) = f\left((\psi(x))_{(1)}\right)g\left((\psi(x))_{(2)}\right)\\
&=f\left(\psi\left(x_{(1)}\right)\right)g\left(\psi\left(x_{(2)}\right)\right) \qquad \text{(da } \psi \text{ ein Coalgebrahomomorphismus ist)}\\
&=(f\psi * g\psi)(x),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Hom}(\psi,\mathrm{id})(\eta\varepsilon))(x)\\
&=(\eta\varepsilon)(\psi(x)) = \eta(\varepsilon(\psi(x))) = \eta(\varepsilon(x))\\
&\qquad \text{(denn } \psi \text{ ist ein Coalgebrahomomorphismus, und somit ist } \varepsilon(\psi(x)) = \varepsilon(x))\\
&=(\eta\varepsilon)(x).
\end{aligned}$$

"Fast"-Dualität zwischen Algebren und Coalgebren

[82] Hier und im Folgenden genießt Verkettung von Abbildungen eine höhere Operatorenpriorität als Konvolution. Das heißt, ein Term wie $\eta\varepsilon * f$ ist nicht als $\eta(\varepsilon * f)$ zu lesen, sondern als $(\eta\varepsilon)*f$.

2.3. Folgerung: Ist C eine Coalgebra, dann ist ihr Dualraum $C^* = \operatorname{Hom}(C, k)$ eine Algebra mit Produkt $*$.

Beweis: Spezialfall von 2.2 mit $A = k$.

2.4. Beispiele: 1) Sei C die Coalgebra mit der Basis $\{x_0, x_1, ...\}$ und

$$\Delta(x_n) = \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes x_{n-i} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(x_n) = \delta_{n,0} \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Dann ist $C^* \cong k[[T]]$. Hierbei bezeichnet $k[[T]]$ den Potenzreihenring über k in einer Unbestimmten T. Ein Algebraisomorphismus $\Phi : C^* \to k[[T]]$ ist gegeben durch $\Phi(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(x_n) T^n$ für alle $f \in C^*$.

Beweis: Diese Abbildung Φ ist offenbar ein Isomorphismus von k-Vektorräumen. Ferner ist Φ ein Algebrahomomorphismus, denn für alle $f, g \in C^*$ ist

$$\Phi(f)\Phi(g) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n) T^n \sum_{m=0}^{\infty} g(x_m) T^m = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}}_{=\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} f(x_n) g(x_m) \underbrace{T^n T^m}_{=T^{n+m}}$$

$$= \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(x_n) g(x_m) T^{n+m} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\\ n+m=r}} f(x_n) g(x_m) \right) T^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{r} f(x_n) g(x_{r-n}) T^r$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{hier haben wir } (n,m) \text{ in der zweiten Summe durch } (n, r-n) \\ \text{substituiert, da an } (n,m) \text{ die Bedingung } n+m=r \text{ gestellt wurde} \end{array} \right)$$

und

$$\Phi(f * g) = \sum_{r=0}^{\infty} (f*g)(x_r) T^r = \sum_{r=0}^{\infty} \mu(f \otimes g) \Delta(x_r) T^r = \sum_{r=0}^{\infty} \mu(f \otimes g) \left(\sum_{n=0}^{r} x_n \otimes x_{r-n} \right) T^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu \left(\sum_{n=0}^{r} f(x_n) \otimes g(x_{r-n}) \right) T^r = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{r} f(x_n) g(x_{r-n}) T^r,$$

also $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(f * g)$. Die Invarianz des 1-Elementes ist noch einfacher zu zeigen (was aber nicht einmal notwendig ist, da wir sie auch aus $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(f*g)$ und der Bijektivität von Φ herleiten können).

2) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere eine Coalgebra C mit der Basis $(x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ durch

$$\Delta(x_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} x_{i,l} \otimes x_{l,j} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(x_{i,j}) = \delta_{i,j}.$$

Definiere einen k-Vektorraumisomorphismus $\Phi : C^* \to \mathrm{M}_n(k)$ (hier ist $\mathrm{M}_n(k)$ die Algebra der $n \times n$-Matrizen über k) durch $\Phi(f) = (f(x_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ für alle $f \in C^*$. Dann ist Φ ein Algebraisomorphismus mit $\Phi\left(x_{i,j}^*\right) = e_{i,j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, wobei wir mit $\left(x_{i,j}^*\right)_{1\leq i,j\leq n}$ die duale Basis zu der Basis $(x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ von C bezeichnen, und mit $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ die Standardbasis von $\mathrm{M}_n(k)$ bezeichnen (das heißt, $e_{i,j}\in\mathrm{M}_n(k)$ ist die Matrix, deren Eintrag in Zeile i und Spalte j gleich 1 ist, und deren andere Einträge alle 0 sind).

Beweis: Wieder ist klar, daß Φ ein k-Vektorraumisomorphismus ist. Jetzt zeigen wir, daß Φ ein Algebraisomorphismus ist: Für $f,g\in C^*$ ist $\Phi(f*g)$ eine $n\times n$-Matrix, die an der Stelle (i,j) den Eintrag

$$\begin{aligned}(f*g)(x_{i,j})&=\mu(f\otimes g)\Delta(x_{i,j})=\mu(f\otimes g)\left(\sum_{l=1}^n x_{i,l}\otimes x_{l,j}\right)\\&=\mu\left(\sum_{l=1}^n f(x_{i,l})\otimes g(x_{l,j})\right)=\sum_{l=1}^n f(x_{i,l})\,g(x_{l,j})\end{aligned}$$

hat - dies ist aber genau der Eintrag der Matrix $\Phi(f)\Phi(g)$ an der Stelle (i,j) (denn $\Phi(f)=(f(x_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$ und $\Phi(g)=(g(x_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}$). Also ist $\Phi(f*g)=\Phi(f)\Phi(g)$. Daß Φ das 1-Element von C^* auf das 1-Element von $\mathrm{M}_n(k)$ sendet, überprüft man auch leicht. Somit ist Φ ein Algebraisomorphismus.

Daß $\Phi\left(x_{i,j}^*\right)=e_{i,j}$ für alle $1\leq i,j\leq n$ gilt, ist leicht nachzuprüfen:

$$\Phi\left(x_{i,j}^*\right)=\left(x_{i,j}^*(x_{u,v})\right)_{1\leq u,v\leq n}=(\delta_{i,u}\delta_{j,v})_{1\leq u,v\leq n}=e_{i,j}.$$

3) Sei G eine endliche Menge, sei $C=k[G]$ die Coalgebra mit Basis G und

$$\Delta(g)=g\otimes g\qquad\text{und}\qquad\varepsilon(g)=1\qquad\text{für alle }g\in G.$$

Dann ist $C^*\cong k^G$ als Algebren, wie man leicht nachweist.

2.5. Bemerkung: 1) a) Seien X und Y Vektorräume. Dann ist die kanonische Abbildung $\mathrm{kan}:X^*\otimes Y^*\to(X\otimes Y)^*$, die auf reinen Tensoren durch $\mathrm{kan}(f\otimes g)=(x\otimes y\mapsto f(x)\cdot g(y))$ definiert ist, injektiv.

b) Ist $\dim X<\infty$ oder $\dim Y<\infty$, dann ist kan auch bijektiv.

Beweis: **a)** Sei $\left\{(f_i)_{i\in I}\right\}$ eine Basis des Vektorraums X^*.

Seien $g_i\in Y^*$ für alle $i\in I$ mit $g_i\neq 0$ nur für endlich viele $i\in I$ so, daß $\mathrm{kan}\left(\sum_{i\in I}f_i\otimes g_i\right)=0$. Um zu beweisen, daß kan ein Monomorphismus ist, müssen wir jetzt zeigen, daß $\sum_{i\in I}f_i\otimes g_i=0$ ist[83].

Für alle $x\in X$ und $y\in Y$ ist $\sum_{i\in I}f_i(x)\,g_i(y)=0$ (denn

$$\sum_{i\in I}f_i(x)\,g_i(y)=\left(\underbrace{\mathrm{kan}\left(\sum_{i\in I}f_i\otimes g_i\right)}_{=0}\right)(x\otimes y)=0$$

[83]Denn jedes Element von $X^*\otimes Y^*$ hat die Form $\sum_{i\in I}f_i\otimes g_i$ für irgendwelche $g_i\in Y^*$ mit $g_i\neq 0$ nur für endlich viele $i\in I$.

). Für alle $y \in Y$ ist also $\sum_{i\in I} f_i \cdot g_i(y) = 0$. Da $\left\{(f_i)_{i\in I}\right\}$ eine Basis von X^* ist, folgt hieraus für alle $y \in Y$ und alle $i \in I$, daß $g_i(y) = 0$ ist. Also ist $g_i = 0$ für alle $i \in I$, also auch $\sum_{i\in I} f_i \otimes g_i = 0$. Also ist gezeigt, daß kan ein Monomorphismus ist.

b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\dim X < \infty$ (der Fall $\dim Y < \infty$ ist analog).

Erstmal ist kan ein Isomorphismus, falls $X = k$ ist (nach dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} k^* \otimes Y^* \arrow[r, "\mathrm{kan}"] \arrow[d, "\cong"] & (k \otimes Y)^* \\ k \otimes Y^* \arrow[r, "\cong"] & Y^* \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

).

Sind X_1 und X_2 zwei Vektorräume, und sind die entsprechenden kanonischen Abbildungen $\mathrm{kan}_{X_1} : X_1^* \otimes Y^* \to (X_1 \otimes Y)^*$ und $\mathrm{kan}_{X_2} : X_2^* \otimes Y^* \to (X_2 \otimes Y)^*$ Isomorphismen, dann ist auch $\mathrm{kan}_{X_1 \oplus X_2} : (X_1 \oplus X_2)^* \otimes Y^* \to ((X_1 \oplus X_2) \otimes Y)^*$ ein Isomorphismus, denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (X_1 \oplus X_2)^* \otimes Y^* \arrow[rr, "\mathrm{kan}_{X_1 \oplus X_2}"] \arrow[d, "\cong"] & & ((X_1 \oplus X_2) \otimes Y)^* \\ (X_1^* \oplus X_2^*) \otimes Y^* \arrow[d, "\cong"] & & ((X_1 \otimes Y) \oplus (X_2 \otimes Y))^* \arrow[u, "\cong"'] \\ (X_1^* \otimes Y^*) \oplus (X_2^* \otimes Y^*) \arrow[rr, "\cong", "\mathrm{kan}_{X_1} \oplus \mathrm{kan}_{X_2}"'] & & (X_1 \otimes Y)^* \oplus (X_2 \otimes Y)^* \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Jetzt kann man durch vollständige Induktion nach $\dim X$ zeigen, daß kan ein Isomorphismus für $\dim X < \infty$ ist, was zu beweisen war.

2) Sei C eine Coalgebra, und sei $\mathrm{kan} : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ die kanonische Abbildung aus Bemerkung 2.5. **1) a)**. Sei ferner $\mathrm{kan}' : k \to k^*$ die kanonische k-lineare Abbildung von k nach k^*.

Laut Folgerung 2.3. hat C^* eine kanonische Algebrastruktur. Fasst man diese Algebra C^* als Algebra$_3$ auf, dann ist $\mu_{C^*} = \Delta^* \circ \mathrm{kan}$ und $\eta_{C^*} = \varepsilon^* \circ \mathrm{kan}'$. Mit anderen Worten: Die Multiplikationsabbildung dieser Algebra C^* ist $C^* \otimes C^* \overset{\mathrm{kan}}{\hookrightarrow} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$, und ihre Einsabbildung ist $k \xrightarrow{\mathrm{kan}'} k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*$.

Beweis: Für alle $f, g \in C^*$ ist $(\Delta^* \circ \mathrm{kan})(f \otimes g) = \left(x \mapsto \underbrace{f\left(x_{(1)}\right) g\left(x_{(2)}\right)}_{=(f*g)(x)} \right) = f * g = \mu_{C^*}(f \otimes g)$. Also ist $\mu_{C^*} = \Delta^* \circ \mathrm{kan}$. Daß $\eta_{C^*} = \varepsilon^* \circ \mathrm{kan}'$ ist, ist klar (denn $\eta_{C^*}(1) = 1_{C^*} = \eta_k \varepsilon = \mathrm{id}_k\, \varepsilon = \varepsilon = (\varepsilon^* \circ \mathrm{kan}')(1)$).

2.6. Satz: Sei A eine Algebra mit $\dim A < \infty$. Dann ist ihr Dualraum A^* eine Coalgebra, wobei die dazugehörigen Abbildungen $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ und $\varepsilon : A^* \to k$ wie folgt definiert sind:

Die Abbildung $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ definieren wir als $\Delta = \mathrm{kan}^{-1} \circ \mu^*$, wobei $\mathrm{kan} : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ der gemäß Bemerkung 2.5 **1)** konstruierte kanonische Isomorphismus ist[84]. Das heißt, die Abbildung Δ ist so definiert, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\mu^*"'] & A^* \otimes A^* \arrow[d, "\mathrm{kan}"] \\ & (A \otimes A)^* \end{tikzcd} .$$

Mithilfe summenloser Sweedler-Notation (hier in der Form $\Delta(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$) kann man dies wie folgt umformulieren: Für jedes $f \in A^*$ und alle $x, y \in A$ gilt: $f_{(1)}(x) f_{(2)}(y) = f(xy)$.

Die Abbildung $\varepsilon : A^* \to k$ definiert man durch $\varepsilon(f) = f(1)$ für jedes $f \in A^*$. (Dies ist äquivalent zu $\varepsilon = (\mathrm{kan}')^{-1} \circ \eta^*$, wobei $\mathrm{kan}' : k \to k^*$ die kanonische k-lineare Abbildung von k nach k^* ist.)

Beweis: Die Coalgebraaxiome lassen sich unschwer nachprüfen.

Während Folgerung 2.3. eine Möglichkeit liefert, zu einer Coalgebra eine "duale" Algebra zu finden, liefert Satz 2.6. die rückwärtige Richtung - allerdings nur für endlichdimensionale Algebren.

2.7. Beispiel: Sei G ein endliches Monoid, und $A = k[G]$ die Monoidalgebra. Die Basis G von A hat im Dualraum A^* die duale Basis $\{e_g \in A^* \mid g \in G\}$, und für diese duale Basis gilt

$$\Delta(e_g) = \sum_{\substack{a,b \in G; \\ ab = g}} e_a \otimes e_b, \qquad \varepsilon(e_g) = \delta_{g,1}$$

(wobei 1 das 1-Element von G ist).

Beweis: Für alle $u, v \in G$ gilt $\sum\limits_{\substack{a,b \in G; \\ ab = g}} e_a(u) e_b(v) = e_g(uv)$, wie man leicht sieht.

Wir haben in Kapitel 1 das Tensorprodukt zweier Algebren eingeführt; auch für Coalgebren läßt sich ein Tensorprodukt definieren:

Definition (Tensorprodukt zweier Coalgebren): Seien C und D zwei Coalgebren. Dann ist das *Tensorprodukt* $C \otimes D$ der Coalgebren C und D definiert als der k-Modul $C \otimes D$, ausgestattet mit den linearen Abbildungen $\Delta : C \otimes D \to (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)$ und $\varepsilon : C \otimes D \to k$, die mit summenloser Sweedler-Notation wie folgt definiert sind:

$$\Delta(c \otimes d) = c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}; \qquad \varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon(c)\,\varepsilon(d) \qquad \text{für alle } c \in C \text{ und } d \in D.$$

Bemerkung: Man kann diese Definition auch folgendermaßen umformulieren:

Seien C und D zwei Coalgebren. Dann ist das *Tensorprodukt* $C \otimes D$ der Coalgebren C und D definiert als der k-Modul $C \otimes D$, ausgestattet mit den linearen Abbildungen $\Delta_{C \otimes D} : C \otimes D \to (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)$ und $\varepsilon_{C \otimes D} : C \otimes D \to k$, welche so definiert sind,

[84] Er ist ein Isomorphismus laut Bemerkung 2.5 **1) b)**, denn $\dim A < \infty$.

daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
C \otimes D \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[drr, "\Delta_{C\otimes D}"'] & C \otimes C \otimes D \otimes D \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}", "\cong"'] & C \otimes D \otimes C \otimes D \arrow[d, "="] \\
& & (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)
\end{tikzcd}$$

und
$$\begin{tikzcd}
C \otimes D \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon_{C\otimes D}"'] & k \otimes k \arrow[d, "\mathrm{kan}", "\cong"'] \\
& k
\end{tikzcd}$$

kommutativ sind, wobei die lineare Abbildung $\tau : C\otimes D \to D\otimes C$ durch $\tau\,(c \otimes d) = d\otimes c$ für alle $c \in C$ und $d \in D$ definiert ist, und die lineare Abbildung $\mathrm{kan} : k \otimes k \to k$ durch $\mathrm{kan}\,(1 \otimes 1) = 1$ definiert ist.

In dieser Form ist die Definition des Tensorproduktes zweier Coalgebren sehr ähnlich zu der im Beweis von Proposition 1.11 gegebenen Definition des Tensorproduktes zweier Algebren (es sind einmal wieder alle Pfeile umgedreht worden).

2.8. Folgerung: Es gibt quasiinverse Äquivalenzen zwischen den Kategorien

$$\{C \mid C \text{ endlichdimensionale Coalgebra}\}^{\mathrm{op}} \rightleftarrows \{A \mid A \text{ endlichdimensionale Algebra}\},$$

gegeben durch $C \mapsto C^*$ (von links nach rechts) und $A \mapsto A^*$ (von rechts nach links). Diese Äquivalenzen erhalten das Tensorprodukt $\otimes$.

Beweis: Für jede endlichdimensionale Coalgebra C existiert ein kanonischer Isomorphismus $\mathrm{kan}_{\mathrm{Coalg}} : C \to C^{**}$, definiert durch

$$\mathrm{kan}_{\mathrm{Coalg}}\,(x) = (f \mapsto f\,(x)) \qquad \text{für jedes } x \in C.$$

Für jede endlichdimensionale Algebra A existiert ein kanonischer Isomorphismus $\mathrm{kan}_{\mathrm{Alg}} : A \to A^{**}$, definiert durch

$$\mathrm{kan}_{\mathrm{Alg}}\,(x) = (f \mapsto f\,(x)) \qquad \text{für jedes } x \in A.$$

Außerdem gibt es nach Bemerkung 2.5 **1) b)** einen kanonischen Isomorphismus $X^* \otimes Y^* \cong (X \otimes Y)^*$ für beliebige endlichdimensionale Vektorräume X und Y. Wenn X und Y Algebren sind, ist dieser Isomorphismus ein Coalgebrahomomorphismus; wenn X und Y Coalgebren sind, ist er ein Algebrahomomorphismus.

Gruppenähnliche und primitive Elemente

Definition: Sei C eine Coalgebra.

1) Ein Element $g \in C$ heißt *gruppenähnlich* oder *Gruppenelement*, wenn $\Delta\,(g) = g \otimes g$ und $\varepsilon\,(g) = 1$ ist.

2) Wir setzen $G\,(C) = \{g \in C \mid g \text{ ist gruppenähnlich}\}$.

3) Sei $x \in C$ und seien $g, h \in G\,(C)$. Das Element x heißt (g, h)-*primitiv* oder (g, h)-*schiefprimitiv*, wenn $\Delta\,(x) = g \otimes x + x \otimes h$ ist.

Bemerkung: Sei C eine Coalgebra.

1) Sei $g \in C$ mit $\Delta\,(g) = g \otimes g$. Dann gilt $\varepsilon\,(g) = 1$ genau dann, wenn $\varepsilon\,(g) \neq 0$ ist.

2) Seien $g, h \in G\,(C)$, und sei x ein (g, h)-primitives Element. Dann ist $\varepsilon\,(x) = 0$.

Beweis: **1)** Es ist $g \otimes g = \Delta(g)$, also $\varepsilon(g)\, g = g$ (nach (2.2)), also $\varepsilon(\varepsilon(g)\, g) = \varepsilon(g)$, also $\varepsilon(g) \cdot \varepsilon(g) = \varepsilon(g)$ (denn ε ist linear) und damit $\varepsilon(g) \in \{0, 1\}$.

2) Nach (2.2) ist $1 \otimes x = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(x)) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(g \otimes x + x \otimes h) = \underbrace{\varepsilon(g)}_{=1} \otimes x + \varepsilon(x) \otimes h$, also $\varepsilon(x) \otimes h = 0$, also $\varepsilon(x) = 0$ (denn $h \neq 0$, weil sonst $\varepsilon(h)$ nicht 1 wäre).

2.9. Satz: Sei C eine Coalgebra. Dann ist die Menge $G(C)$ linear unabhängig.

Beweis: Angenommen, $G(C)$ sei linear abhängig. Dann gibt es Koeffizienten α_1, α_2, ..., α_n aus $k \setminus \{0\}$ und paarweise verschiedene Gruppenelemente g_1, g_2, ..., g_n aus $G(C)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_i = 0$, und mit n minimal.

Offensichtlich muß dabei $n \geq 2$ gelten (denn $0 \notin G(C)$). Dann können wir $g_1 = \sum\limits_{i=2}^{n} \beta_i g_i$ schreiben, wobei $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}$ für alle $i \in \{2, 3, ..., n\}$ ist. Anwendung von Δ ergibt

$$\Delta(g_1) = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \Delta(g_i), \qquad \text{also} \qquad g_1 \otimes g_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i, \qquad \text{also}$$

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \right) \otimes \left(\sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \right) = \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i, \qquad \text{also}$$

$$\sum_{2 \leq i,j \leq n} \beta_i \beta_j g_i \otimes g_j = \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i.$$

Wegen der Minimalität von n sind aber die Vektoren g_2, g_3, ..., g_n linear unabhängig, und somit ist $\{g_i \otimes g_j \mid 2 \leq i, j \leq n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $C \otimes C$. Aus obiger Gleichung folgt also schnell, daß $\beta_i \beta_j = 0$ für alle $i, j \in \{2, 3, ..., n\}$ mit $i \neq j$ gilt[85]. Doch da alle β_i von 0 verschieden sind (denn alle α_i sind von 0 verschieden),

---

[85] *Beweis:* Für jedes $i \in \{2, 3, ..., n\}$ sind alle Summanden der Summe $\sum\limits_{j=2}^{n} \delta_{i,j} \beta_i g_i \otimes g_j$ gleich Null bis auf höchstens den Summanden für $j = i$ (denn für alle $j \neq i$ gilt $\underbrace{\delta_{i,j}}_{=0} \beta_i g_i \otimes g_j = 0$). Für jedes $i \in \{2, 3, ..., n\}$ vereinfacht sich also die Summe $\sum\limits_{j=2}^{n} \delta_{i,j} \beta_i g_i \otimes g_j$ zu $\delta_{i,i} \beta_i g_i \otimes g_i$. Wir haben damit $\sum\limits_{j=2}^{n} \delta_{i,j} \beta_i g_i \otimes g_j = \underbrace{\delta_{i,i}}_{=1} \beta_i g_i \otimes g_i = \beta_i g_i \otimes g_i$ für jedes $i \in \{2, 3, ..., n\}$. Nun ist

$$\sum_{2 \leq i,j \leq n} \delta_{i,j} \beta_i g_i \otimes g_j = \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \delta_{i,j} \beta_i g_i \otimes g_j}_{= \beta_i g_i \otimes g_i} = \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i.$$

Somit ist

$$\sum_{2 \leq i,j \leq n} (\beta_i \beta_j - \delta_{i,j} \beta_i)\, g_i \otimes g_j = \underbrace{\sum_{2 \leq i,j \leq n} \beta_i \beta_j g_i \otimes g_j}_{= \sum\limits_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i} - \underbrace{\sum_{2 \leq i,j \leq n} \delta_{i,j} \beta_i g_i \otimes g_j}_{= \sum\limits_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i} = \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i - \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i \otimes g_i = 0.$$

Da $\{g_i \otimes g_j \mid 2 \leq i, j \leq n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $C \otimes C$ ist, folgt hieraus, daß $\beta_i \beta_j - \delta_{i,j} \beta_i = 0$ für alle $i, j \in \{2, 3, ..., n\}$ gilt. Für alle $i, j \in \{2, 3, ..., n\}$ mit $i \neq j$ muß daher $\beta_i \beta_j = 0$

kann dies nur für $n = 2$ gelten. Also wird $g_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i$ zu $g_1 = \beta_2 g_2$. Anwendung von ε ergibt $\underbrace{\varepsilon(g_1)}_{=1} = \beta_2 \underbrace{\varepsilon(g_2)}_{=1}$, also $\beta_2 = 1$. Also wird $g_1 = \beta_2 g_2$ zu $g_1 = g_2$, im Widerspruch zur paarweisen Verschiedenheit der g_i.

Definition: Sei C eine Coalgebra, und $I \subseteq C$ ein Untervektorraum. Dann heißt I ein *Coideal* von C, wenn $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ und $\varepsilon(I) = 0$ ist.

Bei dieser Definition wird (wie stets) das Tensorprodukt von Untervektorräumen mit einem Untervektorraum des Tensorproduktes identifiziert. Das heißt, wenn X und Y Vektorräume sind und $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ Untervektorräume sind, dann betrachten wir die Tensorprodukte $U \otimes Y$ und $X \otimes V$ als Untervektorräume von $X \otimes Y$ (da die kanonischen Inklusionen $U \otimes Y \to X \otimes Y$ und $X \otimes V \to X \otimes Y$ injektiv sind).

2.10. Bemerkung: Viele Eigenschaften von Coidealen in Coalgebren sind Analoga bekannter Eigenschaften von Idealen in Algebren. So kann man eine Faktorcoalgebra einer Coalgebra bilden, indem man sie durch ein Coideal teilt[86] (genauso wie man eine Faktoralgebra einer Algebra bilden kann, indem man sie durch ein Ideal teilt), und der Kern eines Coalgebrahomomorphismus ist ein Coideal[87] (genauso wie der Kern eines Algebrahomomorphismus ein Ideal ist).

0) *Achtung:* Diese Analogie gilt aber nicht unbeschränkt! So sind für eine Algebra A sowohl 0, als auch A Ideale von A - aber für eine Coalgebra C ist C selber kein Coideal von C ! Auch die Schnittmenge zweier Coideale einer Coalgebra ist nicht immer ein Coideal, obwohl die Schnittmenge zweier Ideale einer Algebra immer ein Ideal ist.

1) Sind C und D zwei Coalgebren, und ist $\varphi : C \to D$ ein Coalgebrahomomorphismus, dann ist $\operatorname{Im}\varphi$ eine Untercoalgebra von D. In dieser Situation ist die Abbildung $\varphi' : C \to \operatorname{Im}\varphi$, die durch

$$\varphi'(c) = \varphi(c) \text{ für alle } c \in C$$

definiert wird (diese Abbildung unterscheidet sich von φ nur in der Zielmenge!), ein Coalgebrahomomorphismus.

Beweis: Für jedes $d \in \operatorname{Im}\varphi$ gilt $\Delta(d) \in (\operatorname{Im}\varphi) \otimes (\operatorname{Im}\varphi)$ (denn da $d \in \operatorname{Im}\varphi$ gilt, existiert ein $c \in C$ mit $d = \varphi(c)$, und für dieses c gilt dann

$$\begin{aligned}\Delta(d) = \Delta(\varphi(c)) = (\varphi \otimes \varphi)\left(\underbrace{\Delta(c)}_{\in C \otimes C}\right) \qquad & \text{(denn } \varphi \text{ ist ein Coalgebrahomomorphismus)} \\ \in (\varphi \otimes \varphi)(C \otimes C) = \underbrace{\varphi(C)}_{=\operatorname{Im}\varphi} \otimes \underbrace{\varphi(C)}_{=\operatorname{Im}\varphi} = (\operatorname{Im}\varphi) \otimes (\operatorname{Im}\varphi) &\end{aligned}$$

). Das heißt, $\Delta(\operatorname{Im}\varphi) \subseteq (\operatorname{Im}\varphi) \otimes (\operatorname{Im}\varphi)$. Somit ist $\operatorname{Im}\varphi$ eine Untercoalgebra von D. Daß φ' ein Coalgebrahomomorphismus ist, ist trivial.

2) Ist C eine Coalgebra, und $I \subseteq C$ ein Coideal, dann ist der Quotientenvektorraum $C \diagup I$ eine Coalgebra, wobei die Abbildung $\Delta_{C \diagup I} : C \diagup I \to (C \diagup I) \otimes (C \diagup I)$ gegeben

gelten (denn wegen $i \neq j$ ist $\delta_{i,j} = 0$ und somit $\beta_i \beta_j - \underbrace{\delta_{i,j}}_{=0} \beta_i = \beta_i \beta_j$, also $\beta_i \beta_j = \beta_i \beta_j - \delta_{i,j} \beta_i = 0$).

[86] siehe Bemerkung 2.10 **2)** weiter unten

[87] siehe Bemerkung 2.10 **3)** weiter unten

ist durch $\Delta_{C/I}(\overline{c}) = \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}$ für alle $c \in C$, und die Abbildung $\varepsilon_{C/I} : C/I \to k$ gegeben ist durch $\varepsilon_{C/I}(\overline{c}) = \varepsilon(c)$ für alle $c \in C$.

Beweis: Wir wollen zuerst beweisen, daß die Comultiplikation $\Delta_{C/I}$ auf C/I wohldefiniert ist. In der Tat haben wir die Comultiplikation $\Delta_{C/I}$ durch die Regel $\left(\Delta_{C/I}(\overline{c}) = \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}} \text{ für alle } c \in C\right)$ definiert; das heißt, für jedes $u \in C/I$ haben wir das Element $\Delta_{C/I}(u) \in (C/I) \otimes (C/I)$ definiert als $\Delta_{C/I}(u) = \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}$, wobei $c \in C$ ein Repräsentant der Restklasse u ist. Um zu beweisen, daß dies wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, daß der Wert von $\overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}$ nicht von der Wahl des Repräsentanten c abhängt (sondern höchstens von u). Dazu seien $y \in C$ und $z \in C$ zwei Repräsentanten der Restklasse u. Dann ist $y \equiv z \mod I$ und damit $y - z \in I$. Sei $t = y - z$. Dann ist $t = y - z \in I$ und $y = (y - z) + z = t + z$. Nun ist

$$\underbrace{y_{(1)} \otimes y_{(2)}}_{\substack{=\Delta(y)=\Delta(t+z)\\ =\Delta(t)+\Delta(z)}} - \underbrace{z_{(1)} \otimes z_{(2)}}_{=\Delta(z)} = \Delta\left(\underbrace{t}_{\in I}\right) \in \Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$$

$$\text{(denn } I \text{ ist ein Coideal von } C\text{)}.$$

Bezeichnen wir mit π die kanonische Projektion $C \to C/I$, dann folgt hieraus

$$\begin{aligned}(\pi \otimes \pi)\left(y_{(1)} \otimes y_{(2)} - z_{(1)} \otimes z_{(2)}\right) &\in (\pi \otimes \pi)(I \otimes C + C \otimes I)\\ &= \underbrace{\pi(I)}_{=0} \otimes \pi(C) + \pi(C) \otimes \underbrace{\pi(I)}_{=0} = 0,\end{aligned}$$

also $(\pi \otimes \pi)\left(y_{(1)} \otimes y_{(2)} - z_{(1)} \otimes z_{(2)}\right) = 0$ und damit $(\pi \otimes \pi)\left(y_{(1)} \otimes y_{(2)}\right) = (\pi \otimes \pi)\left(z_{(1)} \otimes z_{(2)}\right)$ (denn $\pi \otimes \pi$ ist linear). Doch wegen $(\pi \otimes \pi)\left(y_{(1)} \otimes y_{(2)}\right) = \overline{y_{(1)}} \otimes \overline{y_{(2)}}$ und $(\pi \otimes \pi)\left(z_{(1)} \otimes z_{(2)}\right) = \overline{z_{(1)}} \otimes \overline{z_{(2)}}$ wird dies zu $\overline{y_{(1)}} \otimes \overline{y_{(2)}} = \overline{z_{(1)}} \otimes \overline{z_{(2)}}$.

Wir haben also gezeigt, daß $\overline{y_{(1)}} \otimes \overline{y_{(2)}} = \overline{z_{(1)}} \otimes \overline{z_{(2)}}$ für je zwei Repräsentanten $y \in C$ und $z \in C$ der Restklasse u gilt. Daher hängt der Wert von $\overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}}$ nicht von der Wahl des Repräsentanten c ab, und somit ist die Comultiplikation $\Delta_{C/I}$ wohldefiniert. Der Beweis, daß die Coeins $\varepsilon_{C/I}$ wohldefiniert ist, verläuft ähnlich (aber noch einfacher), wobei man hier $\varepsilon(I) = 0$ verwenden muß. Um zu beweisen, daß C/I mit diesen beiden Abbildungen $\Delta_{C/I}$ und $\varepsilon_{C/I}$ eine Coalgebra ist, müssen wir jetzt noch zeigen, daß die Abbildung $\Delta_{C/I}$ coassoziativ und counitär bezüglich $\varepsilon_{C/I}$ ist. Dies folgt aber sehr schnell aus den Definitionen von $\Delta_{C/I}$ und $\varepsilon_{C/I}$ und aus der Annahme, daß C eine Coalgebra ist. Damit ist der Beweis vollständig.

3) Umgekehrt: Sind C und D zwei Coalgebren, und ist $\varphi : C \to D$ ein Coalgebrahomomorphismus, dann ist $\operatorname{Ker}\varphi$ ein Coideal in C. Bezeichnet $\pi : C \to C/(\operatorname{Ker}\varphi)$ die kanonische Projektion, und betrachten wir $C/(\operatorname{Ker}\varphi)$ als Coalgebra nach Bemerkung **2)**, dann ist der Vektorraumhomomorphismus $\varphi' : C/(\operatorname{Ker}\varphi) \to \operatorname{Im}\varphi$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im}\varphi \\ C/(\operatorname{Ker}\varphi) \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, ein Coalgebrahomomorphismus.

Beweis:[88] Für jedes $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ ist $\varphi(x) = 0$, also $(\varphi \otimes \varphi)(\Delta(x)) = 0$ (denn φ ist ein Coalgebrahomomorphismus, also $(\varphi \otimes \varphi)(\Delta(x)) = \Delta(\varphi(x))$). Damit ist $\Delta(x) \in \operatorname{Ker}(\varphi \otimes \varphi)$ für jedes $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Doch $\operatorname{Ker}(\varphi \otimes \varphi) = \operatorname{Ker}\varphi \otimes C + C \otimes \operatorname{Ker}\varphi$ (dies folgt aus Lemma 5.1 **(a)** in Kapitel II, angewandt auf C, C, D, D, φ und φ statt V, W, V', W', ϕ bzw. ψ). Daher ist $\Delta(x) \in \operatorname{Ker}\varphi \otimes C + C \otimes \operatorname{Ker}\varphi$ für jedes $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Mit anderen Worten: $\Delta(\operatorname{Ker}\varphi) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \otimes C + C \otimes \operatorname{Ker}\varphi$. Andererseits ist $\varepsilon(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$ (denn da φ ein Coalgebrahomomorphismus ist, gilt $\varepsilon = \varepsilon \circ \varphi$ und daher $\varepsilon(\operatorname{Ker}\varphi) = (\varepsilon \circ \varphi)(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$). Aus $\Delta(\operatorname{Ker}\varphi) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \otimes C + C \otimes \operatorname{Ker}\varphi$ und $\varepsilon(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$ folgt, daß $\operatorname{Ker}\varphi$ ein Coideal ist. Nach Bemerkung **2)** ist also $C \diagup (\operatorname{Ker}\varphi)$ eine Coalgebra. Daß φ' ein Coalgebrahomomorphismus ist, ist straightforward.

2.10$\frac{1}{2}$. Bemerkung:[89] **1)** Ein Lemma im Voraus: Sei C ein endlichdimensionaler Vektorraum, und sei u ein Element von $C \otimes C$. Genau dann gilt für alle $f, f' \in C^*$ die Gleichung $(\mu \circ (f \otimes f'))(u) = 0$, wenn $u = 0$ ist.

Beweis: Aus $u = 0$ folgt trivialerweise $(\mu \circ (f \otimes f'))(u) = 0$ für alle $f, f' \in C^*$. Die umgekehrte Richtung werden wir nun mithilfe der Annahme $\dim C < \infty$ beweisen[90]: In der Tat sei $(e_1, e_2, ..., e_n)$ eine Basis von C, und $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ die zu ihr duale Basis von C^*. Da $(\mu \circ (f \otimes f'))(u) = 0$ für alle $f, f' \in C^*$ gilt, ist dann insbesondere $\left(\mu \circ \left(e_i^* \otimes e_j^*\right)\right)(u) = 0$ für alle i und j. Doch wenn wir $u = \sum\limits_{k,l} \alpha_{k,l} e_k \otimes e_l$ schreiben, dann ist $\left(\mu \circ \left(e_i^* \otimes e_j^*\right)\right)(u) = \alpha_{i,j}$; somit ist $\alpha_{i,j} = 0$ für alle i und j, also $u = 0$, was zu beweisen war.

2) Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Die natürliche Abbildung $\operatorname{kan} : C \to C^{**}$ (gegeben durch $\operatorname{kan}(c) = (f \mapsto f(c)) \in C^{**}$ für alle $c \in C$) ist dann ein Isomorphismus. Somit ist $\operatorname{kan}|_{G(C)}$ injektiv, und $\operatorname{kan}(G(C)) = \operatorname{Alg}(C^*, k)$ (wobei $\operatorname{Alg}(C^*, k) \subseteq C^{**}$ ist, denn $\operatorname{Alg}(C^*, k) \subseteq \operatorname{Hom}(C^*, k) = C^{**}$). Die Restriktion $\operatorname{kan}|_{G(C)}$ induziert also eine Bijektion $G(C) \to \operatorname{Alg}(C^*, k)$. [91]

Beweis: Daß $\operatorname{kan}|_{G(C)}$ injektiv ist, ist klar (denn kan ist injektiv). Wir müssen also nur noch $\operatorname{kan}(G(C)) = \operatorname{Alg}(C^*, k)$ zeigen. Für jedes $c \in C$ gilt folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{kan}(c) \in \operatorname{Alg}(C^*, k)) \iff ((f \mapsto f(c)) \in \operatorname{Alg}(C^*, k)) \\
\iff & \left(\text{für alle } f, f' \in C^* \text{ ist } (f * f')(c) = f(c) f'(c), \text{ und } \eta\varepsilon(c) = 1\right) \\
\iff & \left(\text{für alle } f, f' \in C^* \text{ ist } (\mu \circ (f \otimes f'))(\Delta(c)) = (\mu \circ (f \otimes f'))(c \otimes c), \text{ und } \varepsilon(c) = 1\right) \\
& \left(\begin{array}{c} \text{denn } (f * f')(c) = (\mu \circ (f \otimes f'))(\Delta(c)) \text{ nach Definition von } \Delta, \\ \text{ferner } f(c) f'(c) = (\mu \circ (f \otimes f'))(c \otimes c) \text{ nach Definition von} \\ \mu, \text{ und } \eta\varepsilon = \varepsilon \text{ weil } \eta : k \to k \text{ die Identität ist} \end{array}\right) \\
\iff & \left(\text{für alle } f, f' \in C^* \text{ ist } (\mu \circ (f \otimes f'))(\Delta(c) - c \otimes c) = 0, \text{ und } \varepsilon(c) = 1\right) \\
& \quad (\text{denn } \mu \circ (f \otimes f') \text{ ist } k\text{-linear}) \\
\iff & (\Delta(c) - c \otimes c = 0, \text{ und } \varepsilon(c) = 1) \qquad \left(\text{nach Bemerkung } 2.10\tfrac{1}{2}\ \mathbf{1)}\right) \\
\iff & (\Delta(c) = c \otimes c \text{ und } \varepsilon(c) = 1) \iff (c \in G(C)),
\end{aligned}$$

[88] Dies war Gegenstand von Aufgabe 1 auf Übungsblatt 4.
[89] Dies ist ein Einschub von mir (Darij Grinberg).
[90] obwohl sie auch ohne diese Annahme gelten würde
[91] Dies war die Aussage von Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 3.

also $\operatorname{kan}^{-1}(\operatorname{Alg}(C^*,k)) = G(C)$. Da kan bijektiv ist, ist also $\operatorname{kan}(G(C)) = \operatorname{Alg}(C^*,k)$, was zu beweisen war.

3) Mithilfe von Bemerkung $2.10\frac{1}{2}$ **2)** ist Bemerkung 2.9. zumindest für endlichdimensionales C äquivalent zu folgender Aussage:

Sei C eine Coalgebra. Dann ist die Menge $\operatorname{Alg}(C^*,k)$ linear unabhängig.

Diese Aussage folgt aber aus der Tatsache, daß die Menge aller Monoidhomomorphismen von einem Monoid in die multiplikative Gruppe eines Körpers stets linear unabhängig ist (in unserem Fall ist das Monoid einfach das multiplikative Monoid von C^*, denn C^* ist eine Algebra). Diese Tatsache wiederum ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Dedekind (daß die Charaktere einer Gruppe stets linear unabhängig sind) und läßt sich genauso beweisen wie dieser Satz von Dedekind. Somit haben wir einen alternativen Beweis für Bemerkung 2.9. in dem Fall $\dim C < \infty$ erhalten.

4) Läßt man in **2)** die Voraussetzung, daß C endlichdimensional ist, weg, dann ist die kanonische Abbildung $\operatorname{kan} : C \to C^{**}$ nicht mehr notwendigerweise ein Isomorphismus, aber zumindest immer injektiv. Statt $\operatorname{kan}(G(C)) = \operatorname{Alg}(C^*,k)$ gilt dann (im Allgemeinen) nur noch $\operatorname{kan}(G(C)) \subseteq \operatorname{Alg}(C^*,k)$, und somit induziert die Restriktion $\operatorname{kan}|_{G(C)}$ eine Injektion $G(C) \to \operatorname{Alg}(C^*,k)$ (im Allgemeinen aber keine Bijektion mehr). Wenn wir jetzt (wie in **3)**) anwenden, daß die Menge aller Monoidhomomorphismen von einem Monoid in die multiplikative Gruppe eines Körpers stets linear unabhängig ist, erhalten wir einen neuen Beweis für Bemerkung 2.9. (im allgemeinen Fall, also nicht mehr wie in **3)** nur im Fall $\dim C < \infty$).

Bialgebren

Wir wollen zunächst den Begriff einer Bialgebra einführen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, deren Äquivalenz aber sehr leicht nachzuweisen ist. Allen liegt der gemeinsame Gedanke zugrunde, daß eine Bialgebra eine Menge mit einer Algebrastruktur und einer Coalgebrastruktur ist, wobei diese beiden Strukturen in einem bestimmten Sinne miteinander "verträglich sind". Was dies genau bedeutet, werden wir gleich sehen:

Definition: Sei H ein Vektorraum. Seien $\mu : H \otimes H \to H$ und $\eta : k \to H$ zwei k-lineare Abbildungen so, daß (H,μ,η) eine Algebra ist. Seien $\Delta : H \to H \otimes H$ und $\varepsilon : H \to k$ zwei k-lineare Abbildungen so, daß (H,Δ,ε) eine Coalgebra ist. Dann heißt $(H,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ eine *Bialgebra*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

a) Die Abbildungen $\Delta : H \to H \otimes H$ und $\varepsilon : H \to k$ sind Algebrahomomorphismen.

b) Die Abbildungen $\mu : H \otimes H \to H$ und $\eta : k \to H$ sind Coalgebrahomomorphismen.

c) Folgende vier Diagramme sind kommutativ:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[rrrr, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & & & & H \arrow[d, "\Delta"] \\ (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "="] & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "\mu\otimes\mu"] & H \otimes H \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Delta_k"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ k \otimes k \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] & H \otimes H \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\ k \otimes k \arrow[r, "\mu_k"] & k \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & k \end{tikzcd},$$

wobei Δ_k die kanonische k-lineare Abbildung von k nach $k \otimes k$ ist (also die Abbildung $x \mapsto 1 \otimes x$), und μ_k die kanonische k-lineare Abbildung von $k \otimes k$ nach k ist (also die Abbildung, die jedes $x \otimes y$ auf xy abbildet - übrigens die Umkehrung von Δ_k), und τ die durch $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ für alle $a, b \in H$ definierte k-lineare Abbildung von $H \otimes H$ nach $H \otimes H$ ist.

d) Für alle $x, y \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta(xy) &= x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)}; \\ \Delta(1) &= 1 \otimes 1; \\ \varepsilon(xy) &= \varepsilon(x)\varepsilon(y); \\ \varepsilon(1) &= 1 \end{aligned}$$

unter Verwendung der summenlosen Sweedler-Notation.[92]

Statt zu sagen, daß $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ eine Bialgebra ist, werden wir natürlich im Folgenden oftmals (formal gesehen unkorrekt, aber kurz und prägnant) einfach nur sagen, daß H eine Bialgebra ist - zumindest wenn aus dem Kontext klar ist, welche Abbildungen μ, η, Δ und ε sein sollen.

Ein wichtiges *Beispiel* für eine Bialgebra ist der Körper k selber: Mit den kanonischen Abbildungen

$$\begin{aligned} \mu_k &: k \otimes k \to k, && \text{definiert durch } \mu_k(x \otimes y) = xy \text{ für alle } x, y \in k; \\ \eta_k &= \mathrm{id} : k \to k; \\ \Delta_k &: k \to k \otimes k, && \text{definiert durch } \Delta_k(x) = x \cdot 1 \otimes 1 = 1 \otimes x = x \otimes 1 \text{ für alle } x \in k; \\ \varepsilon_k &= \mathrm{id} : k \to k \end{aligned}$$

ist $(k, \mu_k, \eta_k, \Delta_k, \varepsilon_k)$ eine Bialgebra. Dies ist die kanonische Bialgebrastruktur auf k.

Bemerkung: Für jede Bialgebra H ist das Einselement 1 von H gruppenähnlich (denn da Δ ein Algebrahomomorphismus ist, ist $\Delta(1) = 1_{H\otimes H} = 1 \otimes 1$, und da ε ein Algebrahomomorphismus ist, ist $\varepsilon(1) = 1$).

Wir haben weiter oben (in einer Definition zwischen Folgerung 2.8 und Satz 2.9) den Begriff "(g, h)-schiefprimitives Element von C" eingeführt, wobei C eine Coalgebra ist und g und h zwei gruppenähnliche Elemente von C sind. Wenn H eine Bialgebra ist, dann können wir also von "$(1, 1)$-schiefprimitiven Elementen von H" reden (denn 1 ist ein gruppenähnliches Element von H). Wir bezeichnen $(1, 1)$-schiefprimitive Elemente einer Bialgebra H auch einfach als *primitive* Elemente von H. Das heißt, wir definieren den Begriff eines "primitiven Elementes" folgendermaßen:

Definition: Sei H eine Bialgebra. Ein Element x von H heißt *primitiv*, wenn es $(1, 1)$-schiefprimitiv ist. Mit anderen Worten: Ein Element x von H heißt *primitiv*, wenn $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ ist.

[92] *Bemerkung:* Die ersten zwei dieser vier Gleichungen zusammen besagen, daß Δ ein Algebrahomomorphismus ist. Die letzten zwei Gleichungen zusammen besagen, daß ε ein Algebrahomomorphismus ist. Die erste und die dritte Gleichung zusammen besagen, daß μ ein Coalgebrahomomorphismus ist. Die zweite und die vierte Gleichung besagen zusammen, daß η ein Coalgebrahomomorphismus ist.

$\boxed{\textbf{Hopfalgebren}}$

Nun werden wir eine wichtige Unterklasse der Bialgebren einführen, nämlich die *Hopfalgebren*:

Definition: Sei $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ eine Bialgebra. Dann heißt H genau dann *Hopfalgebra*, wenn es eine k-lineare Abbildung $S : H \to H$ gibt, die eine der folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt:

a) Für alle $x \in H$ gilt:

$$x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon\left(x\right) \cdot 1_H = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$$

unter Verwendung der summenlosen Sweedler-Notation.

b) Die Abbildungen S und id sind zueinander invers in $\operatorname{End} H$ bezüglich $*$.

c) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& H \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[dd, "\varepsilon"] & \\
H \otimes H \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[dd, "S \otimes \mathrm{id}"] \\
& k \arrow[dd, "\eta"] & \\
H \otimes H \arrow[dr, "\mu"'] & & H \otimes H \arrow[dl, "\mu"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Falls diese Bedingungen erfüllt sind, heißt S die *Antipode* der Hopfalgebra H. Dabei können wir wirklich von "der" Antipode einer Hopfalgebra sprechen (und nicht nur von *einer* möglichen Antipode), denn aus der Bedingung **b)** ist klar, daß diese Antipode S durch $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Wir werden im Folgenden eine Reihe von Eigenschaften von Hopfalgebren ergründen; besonders im Fall von $\dim H < \infty$ gibt es einiges an nichttrivialen Resultaten zu beweisen. Zuerst wollen wir uns mit dem einfachsten Beispiel für Hopfalgebren befassen, nämlich den Gruppenalgebren. Wir wissen bereits aus Abschnitt 1, wie man eine Gruppenalgebra $k[G]$ einer Gruppe G definiert; wir werden jetzt auf dieser Gruppenalgebra eine Hopfalgebrastruktur einführen:

2.11. Beispiel: 1) Sei G eine Gruppe. Dann ist die Gruppenalgebra $k[G]$ zu G eine Hopfalgebra, wenn man die k-linearen Abbildungen $\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G]$ und $\varepsilon : k[G] \to k$ festlegt durch

$$\Delta(g) = g \otimes g \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(g) = 1 \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Die Antipode S ist dann die durch $S(g) = g^{-1}$ für alle $g \in G$ definierte lineare Abbildung.

Beweis: Das einzig Nichttriviale ist die Überprüfung, daß S wirklich eine Antipode ist, also daß $S * \mathrm{id} = \mathrm{id} * S = \eta\varepsilon$ in $\operatorname{End}(k[G])$ gilt. Es reicht aus, diese Gleichheit nur auf den Elementen einer k-Basis von $k[G]$ nachzuprüfen (d. h. für irgendeine k-Basis

$(e_i)_{i\in I}$ von $k[G]$ nachzuweisen, daß $(S * \mathrm{id})(e_i) = (\mathrm{id} * S)(e_i) = \eta\varepsilon(e_i)$ für alle $i \in I$ ist). Doch dies ist einfach: Die Menge $\{g \mid g \in G\}$ ist eine k-Basis von $k[G]$, und für alle $g \in G$ ist $\Delta(g) = g \otimes g$, also $(\mathrm{id} * S)(g) = g \underbrace{S(g)}_{=g^{-1}} = 1 = \varepsilon(g) \cdot 1 = (\eta\varepsilon)(g)$ und $(S * \mathrm{id})(g) = \underbrace{S(g)}_{=g^{-1}} g = 1 = \varepsilon(g) \cdot 1 = (\eta\varepsilon)(g)$. Damit ist gezeigt, daß S tatsächlich eine Antipode ist, und somit ist $k[G]$ (mit der Comultiplikation Δ und der Coeins ε) tatsächlich eine Hopfalgebra, was zu beweisen war.

Nun ist nicht jede Hopfalgebra H so einfach strukturiert wie eine Gruppenalgebra. Doch viele Hopfalgebren haben zumindest einen Teil, der wie eine Gruppenalgebra "aussieht". Dieser läßt sich wie folgt konstruieren[93]:

2.11$\frac{1}{2}$. Bemerkung: 1) Ist H eine Hopfalgebra, und $g \in G(H)$, dann ist $S(g) = g^{-1}$. Insbesondere ist $G(H)$ eine Gruppe, und $k[G(H)]$ (die Gruppenalgebra von $G(H)$) ist eine Unteralgebra von H (genauer gesagt: man kann die Hopfalgebra $k[G(H)]$ kanonisch mit einer Unteralgebra von H identifizieren).

Beweis: Für jedes $g \in G(H)$ ist $\Delta(g) = g \otimes g$, und somit wird die Formel $x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1_H$ (angewandt auf $x = g$) zu $gS(g) = \underbrace{\varepsilon(g)}_{=1} \cdot 1 = 1$ und analog $S(g)\, g = 1$, also $S(g) = g^{-1}$. Daß $g^{-1} \in G(H)$ ist, ist nicht schwer zu sehen: Einerseits ist $\Delta(g^{-1})$ das Inverse von $g \otimes g$ in $H \otimes H$ (denn

$$\Delta\left(g^{-1}\right) \cdot (g \otimes g) = \Delta\left(g^{-1}\right) \cdot \Delta(g) = \Delta\left(g^{-1}g\right) = \Delta(1_H) = 1_{H\otimes H} \qquad \text{und analog}$$
$$(g \otimes g) \cdot \Delta\left(g^{-1}\right) = 1_{H\otimes H}$$

), doch andererseits ist $g^{-1} \otimes g^{-1}$ das Inverse von $g \otimes g$ in $H \otimes H$ (denn

$$\left(g^{-1} \otimes g^{-1}\right) \cdot (g \otimes g) = g^{-1}g \otimes g^{-1}g = 1_H \otimes 1_H = 1_{H\otimes H} \qquad \text{und analog}$$
$$(g \otimes g) \cdot \left(g^{-1} \otimes g^{-1}\right) = 1_{H\otimes H}$$

), und somit ist $\Delta(g^{-1}) = g^{-1} \otimes g^{-1}$ (und trivialerweise auch $\varepsilon(g^{-1}) = \left(\underbrace{\varepsilon(g)}_{=1}\right)^{-1} = 1$), also $g^{-1} \in G(H)$.

Nach Satz 2.9 ist $G(H)$ außerdem linear unabhängig. Damit ist $k[G(H)] \subseteq H$.

2) Ist H eine Hopfalgebra, und sind $g, h \in G(H)$, und ist $x \in H$ ein (g,h)-schiefprimitives Element, so ist $\varepsilon(x) = 0$ und $S(x) = -g^{-1}xh^{-1}$.

Beweis: Wir haben $\varepsilon(x) = 0$ bereits gezeigt. Also ist $0 = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} = \underbrace{S(g)}_{=g^{-1}} x + S(x)\, h$ (denn $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h$), also $S(x) = -g^{-1}xh^{-1}$.

3) Ist H eine Hopfalgebra, und ist $x \in H$ ein primitives Element, so ist $\varepsilon(x) = 0$ und $S(x) = -x$.

Beweis: Dies folgt aus **2)** (angewandt auf $g = 1$ und $h = 1$).

Eigenschaften der Antipode

[93] Hier verwenden wir den Begriff eines *gruppenähnlichen Elementes einer Coalgebra.* Dieser Begriff wurde weiter oben eingeführt.

Erst einige vorbereitende Definitionen:

Definition: 1) Sei C eine Coalgebra. Sei $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ der durch

$$\tau (x \otimes y) = y \otimes x \qquad \text{für alle } x, y \in C$$

definierte Isomorphismus von Vektorräumen. Die Coalgebra C heißt *cokommutativ*, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\tau", "\cong"'] \\ & C \otimes C \end{tikzcd}$$

kommutiert.

2) Seien A und B zwei Algebren, und sei $\varphi : A \to B$ eine lineare Abbildung.

Die Abbildung φ heißt *Antialgebrahomomorphismus*, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $\varphi (xy) = \varphi (y) \varphi (x)$ und $\varphi (1) = 1$. [94] (Äquivalente Definition: Die Abbildung φ heißt *Antialgebrahomomorphismus*, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\tau", "\cong"'] \arrow[d, "\mu_A"'] & A \otimes A \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] & B \\ k \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren.)

3) Seien C und D zwei Coalgebren, und sei $f : C \to D$ eine lineare Abbildung.

Die Abbildung f heißt *Anticoalgebrahomomorphismus*, wenn für alle $x \in C$ gilt: $\Delta (f (x)) = f \left(x_{(2)}\right) \otimes f \left(x_{(1)}\right)$ und $\varepsilon (f (x)) = \varepsilon (x)$. [95] (Äquivalente Definition: Die Abbildung f heißt *Anticoalgebrahomomorphismus*, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\cong", "\tau"'] & C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & k \end{tikzcd}$$

kommutieren.)

4) Seien A und B zwei Bialgebren, und sei $\varphi : A \to B$ eine lineare Abbildung.

Die Abbildung φ heißt *Bialgebrahomomorphismus*, wenn φ ein Algebrahomomorphismus und ein Coalgebrahomomorphismus ist.

5) Seien A und B zwei Hopfalgebren, und sei $\varphi : A \to B$ eine lineare Abbildung.

Die Abbildung φ heißt *Hopfalgebrahomomorphismus*, wenn φ ein Bialgebrahomomorphismus ist.[96]

---

[94] Zum Vergleich: Die Abbildung φ ist ein Algebrahomomorphismus, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $\varphi (xy) = \varphi (x) \varphi (y)$ und $\varphi (1) = 1$.

[95] Zum Vergleich: Die Abbildung f ist ein Coalgebrahomomorphismus, wenn für alle $x \in C$ gilt: $\Delta (f (x)) = f \left(x_{(1)}\right) \otimes f \left(x_{(2)}\right)$ und $\varepsilon (f (x)) = \varepsilon (x)$.

[96] *Bemerkung:* Diese Definition erscheint merkwürdig: Warum verlangen wir von einem Hopfalgebrahomomorphismus nicht zusätzlich, daß er $\varphi S_A = S_B \varphi$ erfüllt? Die Antwort ist: Weil dies nichts ändern würde. Laut Folgerung 2.14 **1)** erfüllt jeder Bialgebrahomomorphismus $\varphi : A \to B$ zwischen zwei Hopfalgebren A und B automatisch $\varphi S_A = S_B \varphi$.

6) Für jede Algebra A können wir eine Algebra A^{op} wie folgt definieren:

Der dieser Algebra A^{op} zugrundeliegende k-Modul soll identisch mit dem der Algebra A zugrundeliegenden k-Modul (also Vektorraum) sein. Die Ringstruktur auf A^{op} wird folgendermaßen definiert: Die multiplikative Eins von A^{op} soll die von A sein (also $1_{A^{\mathrm{op}}} = 1_A$), und die Multiplikation auf A^{op} ist durch $b \cdot_{A^{\mathrm{op}}} a = a \cdot_A b$ für alle $a, b \in A$ definiert (d. h. die Multiplikation auf A^{op} ist Multiplikation auf A mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren).

Die so definierte Algebra A^{op} unterscheidet sich von A also nur in der Reihenfolge, wie Produkte geschrieben werden. Insofern ist diese Algebra A^{op} kein allzu interessantes Objekt; sie erlaubt es aber, den Begriff "Antialgebrahomomorphismus" auf den Begriff des Algebrahomomorphismus zurückzuführen. In der Tat gilt:

Bemerkung: Seien A und B zwei Algebren, und sei $\varphi : A \to B$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Die Abbildung φ ist ein Antialgebrahomomorphismus $A \to B$.

b) Die Abbildung φ ist ein Algebrahomomorphismus $A^{\mathrm{op}} \to B$.

c) Die Abbildung φ ist ein Algebrahomomorphismus $A \to B^{\mathrm{op}}$.

Eine weitere wichtige und triviale Eigenschaft der Algebra A^{op} besteht darin, daß $(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = A$ für jede Algebra A gilt.[97]

2.13. Satz: Sei H eine Hopfalgebra mit Antipode S.

1) Die Antipode S ist ein Antialgebrahomomorphismus.

2) Die Antipode S ist ein Anticoalgebrahomomorphismus.

3) Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) Es gilt $S^2 = \mathrm{id}$.

b) Für alle $x \in H$ gilt $x_{(2)} S\left(x_{(1)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1$.

c) Für alle $x \in H$ ist $S\left(x_{(2)}\right) x_{(1)} = \varepsilon(x) \cdot 1$.

Insbesondere gilt $S^2 = \mathrm{id}$, falls H kommutativ oder cokommutativ ist.

Beweis: **1)** Wir müssen zeigen: Für alle $x, y \in H$ ist $S(xy) = S(y) S(x)$ und $S(1) = 1$.

Beweis: Seien $x, y \in H$. Dann ist

$$x_{(1)} \underbrace{y_{(1)} S\left(y_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(y)\cdot 1} S\left(x_{(2)}\right) = x_{(1)} \left(\varepsilon(y) \cdot 1\right) S\left(x_{(2)}\right) = \underbrace{x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(x)\cdot 1} \cdot \varepsilon(y) \cdot 1 = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y) \cdot 1$$

und

$$S\left(y_{(1)}\right) \underbrace{S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}}_{=\varepsilon(x)\cdot 1} y_{(2)} = S\left(y_{(1)}\right) \left(\varepsilon(x) \cdot 1\right) y_{(2)} = \varepsilon(x) \cdot \underbrace{S\left(y_{(1)}\right) y_{(2)}}_{=\varepsilon(y)\cdot 1} = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y) \cdot 1.$$

Sei $f \in \mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ definiert durch

$$f(x \otimes y) = S(y) S(x) \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$

In der Algebra $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ (mit $*$ als Multiplikation) gilt also $\mu * f = \eta\varepsilon = f * \mu$,

[97] Das Gleichheitszeichen in der Gleichung $(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = A$ bedeutet echte Gleichheit; das heißt, die Algebren $(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ und A sind als Mengen gleich und haben genau die gleiche Algebrastruktur. Dies ist stärker als kanonische Isomorphie!

denn für alle $x, y \in H$ ist

$$(\mu * f)(x \otimes y) = \mu\left(\underbrace{(x \otimes y)_{(1)}}_{=x_{(1)}\otimes y_{(1)}}\right) f\left(\underbrace{(x \otimes y)_{(2)}}_{=x_{(2)}\otimes y_{(2)}}\right) = \underbrace{\mu\left(x_{(1)} \otimes y_{(1)}\right)}_{=x_{(1)}y_{(1)}} \underbrace{f\left(x_{(2)} \otimes y_{(2)}\right)}_{=S\left(y_{(2)}\right)S\left(x_{(2)}\right)}$$

$$= x_{(1)}y_{(1)}S\left(y_{(2)}\right)S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y) \cdot 1 = \varepsilon(x \otimes y) \cdot 1 = (\eta\varepsilon)(x \otimes y)$$

und analog $(f * \mu)(x \otimes y) = (\eta\varepsilon)(x \otimes y)$.

Definiere jetzt ein $g \in \operatorname{Hom}(H \otimes H, H)$ durch

$$g(x \otimes y) = S(xy) \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$

Für alle $x, y \in H$ ist dann

$$(\mu * g)(x \otimes y) = \mu\left(\underbrace{(x \otimes y)_{(1)}}_{=x_{(1)}\otimes y_{(1)}}\right) g\left(\underbrace{(x \otimes y)_{(2)}}_{=x_{(2)}\otimes y_{(2)}}\right) = \underbrace{\mu\left(x_{(1)} \otimes y_{(1)}\right)}_{=x_{(1)}y_{(1)}} \underbrace{g\left(x_{(2)} \otimes y_{(2)}\right)}_{=S\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)}$$

$$= x_{(1)}y_{(1)}S\left(x_{(2)}y_{(2)}\right) = (xy)_{(1)} S\left((xy)_{(2)}\right) = \varepsilon(xy) \cdot 1 = \underbrace{\varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y)}_{=\varepsilon(x\otimes y)} \cdot 1$$

$$= \varepsilon(x \otimes y) \cdot 1 = (\eta\varepsilon)(x \otimes y)$$

und ebenso

$$(g * \mu)(x \otimes y) = (\eta\varepsilon)(x \otimes y).$$

Also ist auch $\mu * g = \eta\varepsilon = g * \mu$. Also sind f und g beide $*$-invers zu μ. Doch wegen der Eindeutigkeit des $*$-Inversen folgt hieraus $f = g$. Damit ist $S(xy) = S(y)S(x)$ bewiesen.

Jetzt zeigen wir $S(1) = 1$: Für alle $x \in H$ ist $x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1$; für $x = 1$ impliziert dies $1S(1) = 1$, also $S(1) = 1$.

2) Wir müssen zeigen: Für alle $x \in H$ ist $\Delta(S(x)) = S\left(x_{(2)}\right) \otimes S\left(x_{(1)}\right)$ und $\varepsilon(S(x)) = \varepsilon(x)$.

Beweis: Für alle $x \in H$ ist

$$\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right)\left(S\left(x_{(4)}\right) \otimes S\left(x_{(3)}\right)\right) = x_{(1)}S\left(x_{(4)}\right) \otimes \underbrace{x_{(2)}S\left(x_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)1} = x_{(1)}S\left(x_{(3)}\right) \otimes \varepsilon\left(x_{(2)}\right)1$$

$$= x_{(1)}S\left(\underbrace{\varepsilon\left(x_{(2)}\right)x_{(3)}}_{=x_{(2)}}\right) \otimes 1 = \underbrace{x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(x)} \otimes 1 = \varepsilon(x)1 \otimes 1$$

und ebenso

$$\left(S\left(x_{(2)}\right) \otimes S\left(x_{(1)}\right)\right)\left(x_{(3)} \otimes x_{(4)}\right) = S\left(x_{(2)}\right)x_{(3)} \otimes S\left(x_{(1)}\right)x_{(4)} = \varepsilon(x)1 \otimes 1.$$

Sei eine Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(H, H \otimes H)$ definiert durch

$$f(x) = S\left(x_{(2)}\right) \otimes S\left(x_{(1)}\right) \qquad \text{für alle } x \in H.$$

In $\operatorname{Hom}(H, H \otimes H)$ ergibt sich dann $f * \Delta = \eta\varepsilon = \Delta * f$, denn für jedes $x \in H$ ist

$$\begin{aligned}
(f * \Delta)(x) &= \underbrace{f\left(x_{(1)}\right)}_{=S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right)} \underbrace{\Delta\left(x_{(2)}\right)}_{=\left(x_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)}} \\
&= \left(S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right)\right)\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) \\
&= \left(S\left(x_{(2)}\right) \otimes S\left(x_{(1)}\right)\right)\left(x_{(3)} \otimes x_{(4)}\right) = \varepsilon(x)\, 1 \otimes 1 = (\eta\varepsilon)(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\Delta * f)(x) &= \underbrace{\Delta\left(x_{(1)}\right)}_{=\left(x_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(1)}\right)_{(2)}} \underbrace{f\left(x_{(2)}\right)}_{=S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) \otimes S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right)} \\
&= \left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right)\left(S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) \otimes S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right)\right) \\
&= \left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right)\left(S\left(x_{(4)}\right) \otimes S\left(x_{(3)}\right)\right) = \varepsilon(x)\, 1 \otimes 1 = (\eta\varepsilon)(x).
\end{aligned}$$

Sei nun eine Abbildung $g \in \operatorname{Hom}(H, H \otimes H)$ definiert durch

$$g(x) = \Delta(S(x)) \qquad \text{für alle } x \in H.$$

Für alle $x \in H$ gilt dann

$$\begin{aligned}
(g * \Delta)(x) &= \underbrace{g\left(x_{(1)}\right)}_{=\Delta\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)} \Delta\left(x_{(2)}\right) = \Delta\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) \Delta\left(x_{(2)}\right) \\
&= \Delta\left(\underbrace{S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}}_{=\varepsilon(x)\cdot 1}\right) \qquad \text{(denn } \Delta \text{ ist ein Algebrahomomorphismus)} \\
&= \varepsilon(x)\, \Delta(1) = \varepsilon(x)\, 1 \otimes 1 = (\eta\varepsilon)(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\Delta * g)(x) &= \Delta\left(x_{(1)}\right) \underbrace{g\left(x_{(2)}\right)}_{=\Delta\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)} = \Delta\left(x_{(1)}\right) \Delta\left(S\left(x_{(2)}\right)\right) \\
&= \Delta\left(\underbrace{x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(x)\cdot 1}\right) \qquad \text{(denn } \Delta \text{ ist ein Algebrahomomorphismus)} \\
&= \varepsilon(x)\, \Delta(1) = \varepsilon(x)\, 1 \otimes 1 = (\eta\varepsilon)(x).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet $g * \Delta = \eta\varepsilon = \Delta * g$. Das heißt, f und g sind beide $*$-invers zu Δ. Da jedes Element von $\operatorname{Hom}(H, H \otimes H)$ höchstens ein $*$-Inverses hat, folgt hieraus $f = g$, und damit ist $\Delta(S(x)) = S\left(x_{(2)}\right) \otimes S\left(x_{(1)}\right)$ bewiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\varepsilon(S(x)) = \varepsilon(x)$ für alle $x \in H$ gilt.

In der Tat ist für alle $x \in H$ offenbar $x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1$, also (wenn wir ε auf diese Gleichung anwenden)

$$\varepsilon\left(x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right)\right) = \varepsilon(\varepsilon(x) \cdot 1).$$

Wegen

$$\varepsilon\left(x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right)\right)=\varepsilon\left(x_{(1)}\right)\varepsilon\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)=\varepsilon\left(S\left(\underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}}_{=x}\right)\right)=\varepsilon\left(S\left(x\right)\right)\qquad\text{und}$$

$$\varepsilon\left(\varepsilon\left(x\right)\cdot 1\right)=\varepsilon\left(x\right)\cdot\underbrace{\varepsilon\left(1\right)}_{=1}=\varepsilon\left(x\right)$$

ist damit $\varepsilon\left(S\left(x\right)\right)=\varepsilon\left(x\right)$ bewiesen.

3) *Beweis von* ***a)*** $\Longrightarrow$ ***c)****:* Für alle $x\in H$ ist $S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}=\varepsilon\left(x\right)1$. Nach **a)** können wir $x_{(2)}$ durch $S^2\left(x_{(2)}\right)$ ersetzen, d. h. wir erhalten

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(x\right)1&=S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}=S\left(x_{(1)}\right)S^2\left(x_{(2)}\right)\\&=S\left(S\left(x_{(2)}\right)x_{(1)}\right)\qquad\text{(denn } S \text{ ist Antialgebrahomomorphismus)}\,,\end{aligned}$$

also $S\left(\varepsilon\left(x\right)1\right)=S^2\left(S\left(x_{(2)}\right)x_{(1)}\right)$, also $\varepsilon\left(x\right)\cdot 1=S\left(x_{(2)}\right)x_{(1)}$ (wieder wegen $S^2=\mathrm{id}$), und **c)** ist gezeigt.

Beweis von ***c)*** $\Longrightarrow$ ***a)****:* Für alle $x\in H$ ist $S\left(x_{(2)}\right)x_{(1)}=\varepsilon\left(x\right)\cdot 1$ nach **c)**. Nach Anwendung von S wird dies zu $S\left(x_{(1)}\right)S^2\left(x_{(2)}\right)=\varepsilon\left(x\right)1$. Also ist S^2 rechts-$*$-invers zu S. Da id ebenfalls $*$-invers zu S ist, folgt hieraus $S^2=\mathrm{id}$.

Damit ist **a)** $\Longleftrightarrow$ **c)** gezeigt. Analog beweist man **a)** $\Longleftrightarrow$ **b)**.

Falls H kommutativ oder cokommutativ ist, gelten **b)** und **c)** trivial, und damit auch **a)**, also $S^2=\mathrm{id}$.

Definition: Sei H eine Bialgebra. Sei K ein Untervektorraum von H.

1) Dann heißt K genau dann eine *Unterbialgebra* von H, wenn K sowohl eine Unteralgebra als auch eine Untercoalgebra von H ist.

2) Angenommen, H ist ferner eine Hopfalgebra. Dann heißt K genau dann eine *Unterhopfalgebra* von H, wenn K eine Unterbialgebra von H ist und $S_K=S_H\mid_K$ erfüllt.

2.14. Folgerung: 1) Seien K und H zwei Hopfalgebren, und $\varphi:K\to H$ ein Hopfalgebrahomomorphismus (d. h. ein Bialgebrahomomorphismus). Dann ist $\varphi S=S\varphi$ (genauer gesagt, $\varphi S_K=S_H\varphi$). Das heißt, $\varphi\left(S\left(x\right)\right)=S\left(\varphi\left(x\right)\right)$ für alle $x\in K$.

2) Sei H eine Hopfalgebra, und sei $K\subseteq H$ eine Unterbialgebra. Ist K eine Hopfalgebra, dann ist $S_K=S_H\mid_K$.

Beweis: **1)** Wir werden zeigen, daß die Abbildung φ sowohl $*$-invers zu φS in $\mathrm{Hom}\left(K,H\right)$, als auch $*$-invers zu $S\varphi$ in $\mathrm{Hom}\left(K,H\right)$ ist. Hieraus wird natürlich $\varphi S=S\varphi$ folgen (denn ein Element von $\mathrm{Hom}\left(K,H\right)$ kann nur ein $*$-Inverses haben).

Für alle $x\in K$ ist

$$\varphi\left(x_{(1)}\right)\varphi\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)=\varphi\left(\underbrace{x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(x)1}\right)=\varepsilon\left(x\right)1\qquad\text{und genauso}$$

$$\varphi\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)\varphi\left(x_{(2)}\right)=\varepsilon\left(x\right)1.$$

Die Abbildung φS ist also $*$-invers zu φ. Ferner ist

$$\varphi\left(x_{(1)}\right)S\left(\varphi\left(x_{(2)}\right)\right)=\left(\varphi\left(x\right)\right)_{(1)}S\left(\left(\varphi\left(x\right)\right)_{(2)}\right)=\varepsilon\left(\varphi\left(x\right)\right)1=\varepsilon\left(x\right)1\qquad\text{und genauso}$$

$$S\left(\varphi\left(x_{(1)}\right)\right)\varphi\left(x_{(2)}\right)=\varepsilon\left(x\right)1.$$

Die Abbildung $S\varphi$ ist daher $*$-invers zu φ. Damit ist sowohl φS, als auch $S\varphi$ ein $*$-Inverses zu φ. Hieraus folgt $\varphi S = S\varphi$. Damit ist **1)** bewiesen.

2) Sei $\varphi : K \to H$ die kanonische Inklusionsabbildung. Dieses φ ist ein Bialgebrahomomorphismus; nach **1)** ist also $\varphi S = S\varphi$. Für alle $x \in K$ ist also $\varphi\left(S_K\left(x\right)\right) = S_H\left(\varphi\left(x\right)\right)$, also $S_K\left(x\right) = S_H\left(x\right)$ und damit $S_K = S_H\mid_K$.

2.14$\frac{1}{4}$. Folgerung: Sei H eine Hopfalgebra, und sei $K \subseteq H$ eine Unterbialgebra. Ist K eine Hopfalgebra, dann ist K eine Unterhopfalgebra von H.

Beweis: Folgt direkt aus 2.14. **2)**.

2.15. Folgerung: 1) a) Sei H eine Bialgebra, und A eine kommutative Algebra. Dann ist $\operatorname{Alg}\left(H,A\right) = \left\{\varphi : H \to A \mid \varphi \text{ ist ein Algebrahomomorphismus}\right\}$ ein Monoid bezüglich der Konvolution $*$ (in $\operatorname{Hom}\left(H,A\right)$).

b) Sei H eine Hopfalgebra, und A eine kommutative Algebra. Dann ist $\operatorname{Alg}\left(H,A\right) = \left\{\varphi : H \to A \mid \varphi \text{ ist ein Algebrahomomorphismus}\right\}$ eine Gruppe bezüglich der Konvolution $*$ (in $\operatorname{Hom}\left(H,A\right)$).

2) a) Sei H eine Bialgebra, und C eine cokommutative Coalgebra. Dann ist $\operatorname{Coalg}\left(C,H\right) = \left\{f : C \to H \mid f \text{ ist ein Coalgebrahomomorphismus}\right\}$ ein Monoid bezüglich der Konvolution $*$ (in $\operatorname{Hom}\left(C,H\right)$).

b) Sei H eine Hopfalgebra, und C eine cokommutative Coalgebra. Dann ist $\operatorname{Coalg}\left(C,H\right) = \left\{f : C \to H \mid f \text{ ist ein Coalgebrahomomorphismus}\right\}$ eine Gruppe bezüglich der Konvolution $*$ (in $\operatorname{Hom}\left(C,H\right)$).

Beweis: **1) a)** Das Element $\eta\varepsilon$ ist offensichtlich das Einselement von $\operatorname{Alg}\left(H,A\right)$. Es bleibt daher nur noch zu zeigen: Wenn $\varphi,\psi \in \operatorname{Alg}\left(H,A\right)$, dann ist auch $\varphi * \psi \in \operatorname{Alg}\left(H,A\right)$.

Beweis: Für alle $x,y \in H$ ist

$$
\begin{aligned}
&\left(\varphi * \psi\right)\left(xy\right) \\
&= \varphi\left(\left(xy\right)_{(1)}\right)\psi\left(\left(xy\right)_{(2)}\right) = \varphi\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)\psi\left(x_{(2)}y_{(2)}\right) = \varphi\left(x_{(1)}\right)\varphi\left(y_{(1)}\right)\psi\left(x_{(2)}\right)\psi\left(y_{(2)}\right) \\
&\qquad \text{(denn } \varphi \text{ und } \psi \text{ sind Algebrahomomorphismen)} \\
&= \underbrace{\varphi\left(x_{(1)}\right)\psi\left(x_{(2)}\right)}_{=(\varphi*\psi)(x)}\underbrace{\varphi\left(y_{(1)}\right)\psi\left(y_{(2)}\right)}_{=(\varphi*\psi)(y)} \\
&\qquad \text{(da } A \text{ kommutativ ist, konnten wir hier die mittleren zwei Terme vertauschen)} \\
&= \left(\varphi * \psi\right)\left(x\right) \cdot \left(\varphi * \psi\right)\left(y\right),
\end{aligned}
$$

und außerdem $\left(\varphi * \psi\right)\left(1\right) = \varphi\left(1\right)\psi\left(1\right) = 1$.

b) Nachdem aus **1) a)** folgt, daß $\operatorname{Alg}\left(H,A\right)$ ein Monoid bezüglich $*$ ist, müssen wir nur noch beweisen: Für jedes $f \in \operatorname{Alg}\left(H,A\right)$ ist fS ein Element von $\operatorname{Alg}\left(H,A\right)$ und $*$-invers zu f.

Beweis: Erstmal ist fS ein Algebrahomomorphismus, denn $\left(fS\right)\left(1\right) = f\left(\underbrace{S\left(1\right)}_{=1}\right) =$

1, und für alle $x, y \in H$ ist

$$\begin{aligned}
(fS)(xy) &= f\left(\underbrace{S(xy)}_{\substack{=S(y)S(x) \\ (\text{nach 2.13. } \mathbf{1}))}}\right) = f(S(y))\, f(S(x)) \\
&= f(S(x))\, f(S(y)) \qquad\qquad (\text{da } A \text{ kommutativ ist}) \\
&= (fS)(x) \cdot (fS)(y).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, daß fS das $*$-inverse Element zu f in $\mathrm{Alg}(H, A)$ ist. In der Tat ist

$$(fS * f)(x) = f\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) f\left(x_{(2)}\right) = f\left(\underbrace{S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}}_{=\varepsilon(x)\cdot 1}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1$$

und

$$(f * fS)(x) = f\left(x_{(1)}\right) f\left(S\left(x_{(2)}\right)\right) = f\left(\underbrace{x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(x)\cdot 1}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1$$

für alle $x \in H$.

2) a) Das Element $\eta\varepsilon$ ist offensichtlich das Einselement von $\mathrm{Coalg}(C, H)$. Es bleibt daher nur noch zu zeigen: Wenn $f, g \in \mathrm{Coalg}(C, H)$, dann ist auch $f * g \in \mathrm{Coalg}(C, H)$.

Beweis: Für alle $x \in C$ ist

$$\begin{aligned}
&((f * g) \otimes (f * g))(\Delta_C(x)) \\
&= ((f * g) \otimes (f * g))\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) = \underbrace{(f * g)\left(x_{(1)}\right)}_{=f\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right) g\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right)} \otimes \underbrace{(f * g)\left(x_{(2)}\right)}_{=f\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) g\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right)} \\
&= f\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right) g\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes f\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) g\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) \\
&= f\left(x_{(1)}\right) g\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) \otimes f\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) g\left(x_{(3)}\right) \\
&= f\left(x_{(1)}\right) g\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) \otimes f\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) g\left(x_{(3)}\right) \\
&\qquad \left(\text{denn da } C \text{ cokommutativ ist, gilt } \left(x_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)} = \left(x_{(2)}\right)_{(2)} \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) \\
&= f\left(x_{(1)}\right) g\left(x_{(3)}\right) \otimes f\left(x_{(2)}\right) g\left(x_{(4)}\right) = \left(f\left(x_{(1)}\right) \otimes f\left(x_{(2)}\right)\right)\left(g\left(x_{(3)}\right) \otimes g\left(x_{(4)}\right)\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\Delta_H\left((f*g)(x)\right)\\
&=\Delta_H\left(f\left(x_{(1)}\right)g\left(x_{(2)}\right)\right)\\
&=\Delta_H\left(f\left(x_{(1)}\right)\right)\cdot\Delta_H\left(g\left(x_{(2)}\right)\right) \qquad \text{(denn } \Delta_H \text{ ist ein Algebrahomomorphismus)}\\
&=(f\otimes f)\left(\underbrace{\Delta_C\left(x_{(1)}\right)}_{=\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(x_{(1)}\right)_{(2)}}\right)\cdot(g\otimes g)\left(\underbrace{\Delta_C\left(x_{(2)}\right)}_{=\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\otimes\left(x_{(2)}\right)_{(2)}}\right)\\
&\qquad \text{(denn } f \text{ und } g \text{ sind Coalgebrahomomorphismen)}\\
&=(f\otimes f)\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right)\cdot(g\otimes g)\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\otimes\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right)\\
&=(f\otimes f)\left(x_{(1)}\otimes x_{(2)}\right)\cdot(g\otimes g)\left(x_{(3)}\otimes x_{(4)}\right)=\left(f\left(x_{(1)}\right)\otimes f\left(x_{(2)}\right)\right)\left(g\left(x_{(3)}\right)\otimes g\left(x_{(4)}\right)\right),
\end{aligned}$$

also $((f*g)\otimes(f*g))(\Delta_C(x)) = \Delta_H((f*g)(x))$. Das heißt, $((f*g)\otimes(f*g))\circ\Delta_C=\Delta_H\circ(f*g)$.

Ferner ist $\varepsilon_H\circ(f*g)=\varepsilon_C$, denn jedes $x\in C$ erfüllt

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_H\left((f*g)(x)\right)\\
&=\varepsilon_H\left(f\left(x_{(1)}\right)g\left(x_{(2)}\right)\right)=\varepsilon_H\left(f\left(x_{(1)}\right)\right)\varepsilon_H\left(g\left(x_{(2)}\right)\right)\\
&\qquad \text{(denn } \varepsilon_H \text{ ist ein Algebrahomomorphismus)}\\
&=\varepsilon_C\left(x_{(1)}\right)\varepsilon_C\left(x_{(2)}\right) \qquad \text{(denn } f \text{ und } g \text{ sind Coalgebrahomomorphismen)}\\
&=\varepsilon_C\left(\underbrace{x_{(1)}\varepsilon_C\left(x_{(2)}\right)}_{=x}\right)=\varepsilon_C(x).
\end{aligned}$$

Zusammen mit $((f*g)\otimes(f*g))\circ\Delta_C=\Delta_H\circ(f*g)$ ergibt dies, daß $f*g$ ein Coalgebrahomomorphismus ist, d. h. es gilt $f*g\in\operatorname{Coalg}(C,H)$.

b) Nachdem aus **1) a)** folgt, daß $\operatorname{Coalg}(C,H)$ ein Monoid bezüglich $*$ ist, müssen wir nur noch beweisen: Für jedes $f\in\operatorname{Coalg}(C,H)$ ist Sf ein Element von $\operatorname{Coalg}(C,H)$ und $*$-invers zu f.

Beweis: Erstmal ist Sf ein Coalgebrahomomorphismus, denn für alle $x\in C$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_H\left((Sf)(x)\right)&=\Delta_H\left(S\left(f(x)\right)\right)=S\left((f(x))_{(2)}\right)\otimes S\left((f(x))_{(1)}\right)\\
&\qquad \text{(denn } S \text{ ist ein Anticoalgebrahomomorphismus laut Satz 2.13 } \mathbf{2)}\text{)}\\
&=S\left(f\left(x_{(2)}\right)\right)\otimes S\left(f\left(x_{(1)}\right)\right)\\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn da } f \text{ ein Coalgebrahomomorphismus ist, gilt}\\ (f(x))_{(1)}\otimes(f(x))_{(2)}=f\left(x_{(1)}\right)\otimes f\left(x_{(2)}\right)\end{array}\right)\\
&=S\left(f\left(x_{(1)}\right)\right)\otimes S\left(f\left(x_{(2)}\right)\right)\\
&\qquad \left(\text{denn da } C \text{ cokommutativ ist, gilt } x_{(1)}\otimes x_{(2)}=x_{(2)}\otimes x_{(1)}\right)\\
&=(Sf\otimes Sf)\left(x_{(1)}\otimes x_{(2)}\right)=(Sf\otimes Sf)\left(\Delta_C(x)\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\varepsilon_H\left(\left(Sf\right)(x)\right) &= \varepsilon_H\left(S\left(f\left(x\right)\right)\right) = \varepsilon_H\left(f\left(x\right)\right) \\ &\qquad \text{(denn } S \text{ ist ein Anticoalgebrahomomorphismus laut Satz 2.13 } \mathbf{2)}\text{)} \\ &= \varepsilon_C\left(x\right) \qquad \text{(denn } f \text{ ist ein Coalgebrahomomorphismus)}.\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, daß Sf das $*$-inverse Element zu f in $\operatorname{Coalg}(C, H)$ ist. In der Tat ist

$$\begin{aligned}\left(Sf * f\right)(x) &= S\left(f\left(x_{(1)}\right)\right) f\left(x_{(2)}\right) = S\left(\left(f\left(x\right)\right)_{(1)}\right)\left(f\left(x\right)\right)_{(2)} \\ &\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn da } f \text{ ein Coalgebrahomomorphismus ist, gilt} \\ f\left(x_{(1)}\right) \otimes f\left(x_{(2)}\right) = \left(f\left(x\right)\right)_{(1)} \otimes \left(f\left(x\right)\right)_{(2)}\end{array}\right) \\ &= \varepsilon\left(f\left(x\right)\right) \cdot 1 \qquad \text{(da } S \text{ die Antipode von } H \text{ ist)} \\ &= \varepsilon\left(x\right) \cdot 1 \qquad \text{(da } f \text{ ein Coalgebrahomomorphismus ist)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(f * Sf\right)(x) &= f\left(x_{(1)}\right) S\left(f\left(x_{(2)}\right)\right) = \left(f\left(x\right)\right)_{(1)} S\left(\left(f\left(x\right)\right)_{(2)}\right) \\ &\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn da } f \text{ ein Coalgebrahomomorphismus ist, gilt} \\ f\left(x_{(1)}\right) \otimes f\left(x_{(2)}\right) = \left(f\left(x\right)\right)_{(1)} \otimes \left(f\left(x\right)\right)_{(2)}\end{array}\right) \\ &= \varepsilon\left(f\left(x\right)\right) \cdot 1 \qquad \text{(da } S \text{ die Antipode von } H \text{ ist)} \\ &= \varepsilon\left(x\right) \cdot 1 \qquad \text{(da } f \text{ ein Coalgebrahomomorphismus ist)}\end{aligned}$$

für alle $x \in C$.

Bemerkung: Unser obiger Beweis von Folgerung 2.15 **2)** sah viel komplizierter aus als der Beweis von Folgerung 2.15 **1)**. Dies liegt aber daran, daß die Comultiplikation deutlich unhandlicher ist als die Multiplikation, wenn man mit Elementen rechnet. Würde man aber den Beweis von Folgerung 2.15 **1)** und den Beweis von Folgerung 2.15 **2)** in "punktfreier" Notation umschreiben (also nur mit Abbildungen rechnen, nicht mit konkreten Elementen von H oder von C), würde man sehen, daß diese beiden Beweise zueinander "dual" sind (d. h. sie ergeben sich auseinander durch das Umkehren der Pfeile).

Als nächstes wollen wir Kriterien angeben, wie man für eine Algebra entscheidet, ob sie eine Bialgebra und ob sie eine Hopfalgebra ist, ohne die Axiome für alle Elemente nachzuprüfen - nämlich reicht es aus, die Axiome nur auf einem Algebraerzeugendensystem nachzuweisen:

2.16. Folgerung: 1) Sei H eine Algebra, und seien $\Delta : H \to H \otimes H$ und $\varepsilon : H \to k$ zwei Algebrahomomorphismen. Sei $M \subseteq H$ eine Teilmenge, welche H als Algebra erzeugt. Für alle $x \in M$ gelte

$$\left(\operatorname{id} \otimes \Delta\right)\left(\Delta\left(x\right)\right) = \left(\Delta \otimes \operatorname{id}\right)\left(\Delta\left(x\right)\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\operatorname{id} \otimes \varepsilon\right)\left(\Delta\left(x\right)\right) = x = \left(\varepsilon \otimes \operatorname{id}\right)\left(\Delta\left(x\right)\right).$$

(Mit der summenlosen Sweedler-Notation $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ bedeutet dies

$$x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right) = \Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} \qquad \text{und} \qquad x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) = x = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}.$$

) Dann ist (H, Δ, ε) eine Bialgebra.

2) Sei H eine Bialgebra, und sei $S : H \to H$ ein Antialgebrahomomorphismus. Sei $M \subseteq H$ eine Teilmenge, welche H als Algebra erzeugt. Für alle $x \in M$ gelte

$$x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}.$$

Dann ist H eine Hopfalgebra und S die Antipode von H.

3) Sei H eine Bialgebra. Sei $M \subseteq H$ eine Teilmenge, welche H als Algebra erzeugt. Sei $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ die durch

$$\tau(x \otimes y) = y \otimes x \qquad \text{für alle } x, y \in H$$

definierte k-lineare Abbildung. Für alle $x \in M$ gelte $\tau(\Delta(x)) = \Delta(x)$. Dann ist H eine cokommutative Bialgebra.

Beweis: **1)** Wir müssen nur zeigen, daß (H, Δ, ε) eine Coalgebra ist. Dies zeigen wir wie folgt: Die Diagramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ H \otimes H \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] & H \otimes H \otimes H \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & H \otimes H \arrow[dl, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] \\ k \otimes H & \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & H \otimes H \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ H \otimes k & \end{tikzcd}$$

sind kommutativ, denn alle auftretenden Morphismen sind Algebrahomomorphismen, und Gleichheit von Algebrahomomorphismen kann man auf Algebraerzeugenden testen. Damit ist Folgerung 2.16 **1)** gezeigt.

3) Die Abbildungen Δ und τ sind Algebrahomomorphismen. Folglich sind auch $\tau \circ \Delta$ und Δ Algebrahomomorphismen. Diese Algebrahomomorphismen $\tau \circ \Delta$ und Δ sind auf der Menge M gleich (denn für jedes $x \in M$ ist $(\tau \circ \Delta)(x) = \tau(\Delta(x)) = \Delta(x)$).

Nun ist aber bekannt, daß zwei Algebrahomomorphismen, die auf einem Algebraerzeugendensystem gleich sind, auch überall gleich sein müssen. Angewandt auf die Algebrahomomorphismen $\tau \circ \Delta$ und Δ und das Algebraerzeugendensystem M ergibt dies: Die Algebrahomomorphismen $\tau \circ \Delta$ und Δ sind überall gleich (da sie auf dem Algebraerzeugendensystem M gleich sind). Mit anderen Worten: Die Coalgebra H ist cokommutativ. Folgerung 2.16 **3)** ist also bewiesen.

2) Sei $A = \left\{x \in H \mid x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}\right\}$.

a) Wir werden zeigen: Die Menge A ist ein Untervektorraum von H.

Beweis: Wir haben

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{x \in H \;\mid\; x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}\right\} \\
&= \left\{x \in H \;\mid\; \underbrace{x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right)}_{=\mu\left((\operatorname{id} \otimes S)\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right)\right)} = \underbrace{\varepsilon(x) \cdot 1}_{=\eta\varepsilon(x)}\right\} \cap \left\{x \in H \;\mid\; \underbrace{S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}}_{=\mu\left((S \otimes \operatorname{id})\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right)\right)} = \underbrace{\varepsilon(x) \cdot 1}_{=\eta\varepsilon(x)}\right\} \\
&= \left\{x \in H \;\mid\; \mu\left((\operatorname{id} \otimes S)\left(\underbrace{x_{(1)} \otimes x_{(2)}}_{=\Delta(x)}\right)\right) = \eta\varepsilon(x)\right\} \\
&\qquad \cap \left\{x \in H \;\mid\; \mu\left((S \otimes \operatorname{id})\left(\underbrace{x_{(1)} \otimes x_{(2)}}_{=\Delta(x)}\right)\right) = \eta\varepsilon(x)\right\} \\
&= \left\{x \in H \;\mid\; \underbrace{\mu\left((\operatorname{id} \otimes S)(\Delta(x))\right)}_{=(\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S) \circ \Delta)(x)} = \eta\varepsilon(x)\right\} \cap \left\{x \in H \;\mid\; \underbrace{\mu\left((S \otimes \operatorname{id})(\Delta(x))\right)}_{=(\mu \circ (S \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta)(x)} = \eta\varepsilon(x)\right\} \\
&= \underbrace{\left\{x \in H \;\mid\; (\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S) \circ \Delta)(x) = \eta\varepsilon(x)\right\}}_{=\operatorname{Ker}(\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S) \circ \Delta - \eta\varepsilon)} \cap \underbrace{\left\{x \in H \;\mid\; (\mu \circ (S \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta)(x) = \eta\varepsilon(x)\right\}}_{=\operatorname{Ker}(\mu \circ (S \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta - \eta\varepsilon)} \\
&= \operatorname{Ker}(\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S) \circ \Delta - \eta\varepsilon) \cap \operatorname{Ker}(\mu \circ (S \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta - \eta\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Da $\operatorname{Ker}(\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S) \circ \Delta - \eta\varepsilon)$ und $\operatorname{Ker}(\mu \circ (S \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta - \eta\varepsilon)$ Untervektorräume von H sind (denn die Abbildungen $\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S) \circ \Delta - \eta\varepsilon$ und $\mu \circ (S \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta - \eta\varepsilon$ sind k-linear, und der Kern jeder k-linearen Abbildung ist ein Untervektorraum), ist also auch ihre Schnittmenge A ein Untervektorraum von H.

b) Wir zeigen: $1 \in A$, und für alle $x, y \in A$ ist $xy \in A$.

Beweis: Daß $1 \in A$ ist, ist klar. Für alle $x, y \in A$ ist $xy \in A$ (denn

$$
\begin{aligned}
(xy)_{(1)} S\left((xy)_{(2)}\right) &= x_{(1)} y_{(1)} \underbrace{S\left(x_{(2)} y_{(2)}\right)}_{\substack{=S\left(y_{(2)}\right) S\left(x_{(2)}\right) \\ \text{(denn } S \text{ ist ein} \\ \text{Antialgebrahomomorphismus)}}} = x_{(1)} \underbrace{y_{(1)} S\left(y_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(y) \cdot 1} S\left(x_{(2)}\right) = x_{(1)} \varepsilon(y) S\left(x_{(2)}\right) \\
&= \varepsilon(y) \underbrace{x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(x) \cdot 1} = \varepsilon(y) \varepsilon(x) \cdot 1 = \underbrace{\varepsilon(x) \varepsilon(y)}_{=\varepsilon(xy)} \cdot 1 = \varepsilon(xy) \cdot 1
\end{aligned}
$$

und analog $S\left((xy)_{(1)}\right) (xy)_{(2)} = \varepsilon(xy) \cdot 1$).

c) Für alle $x \in M$ gilt $x \in A$ (denn $x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$). Somit gilt $M \subseteq A$.

d) Aus **a)** und **b)** folgt, daß $A \subseteq H$ eine Unteralgebra ist. Da $M \subseteq A$ ein Algebraerzeugendensystem von H ist, ist also $A = H$. Wegen

$$A = \left\{x \in H \;\mid\; x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}\right\}$$

bedeutet dies, daß $x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$ für jedes $x \in H$ gilt. Somit ist H eine Hopfalgebra mit der Antipode S, was zu beweisen war.

$\boxed{\textbf{Quotienten von Bialgebren und Hopfalgebren}}$

Jetzt werden wir Quotienten von Bialgebren definieren:

Definition: 1) Sei H eine Bialgebra, und $I \subseteq H$ ein Untervektorraum. Dann heißt I ein *Biideal* von H, wenn I ein Ideal und gleichzeitig ein Coideal von H ist.

2) Sei H eine Hopfalgebra mit Antipode S, und $I \subseteq H$ ein Untervektorraum. Dann heißt I ein *Hopfideal* von H, wenn I ein Biideal von H ist und $S(I) \subseteq I$ ist.

2.17. Bemerkung: 1) Sei H eine Bialgebra, und sei $I \subseteq H$ ein Biideal. Dann ist $H \diagup I$ eine Bialgebra, wobei die Multiplikation auf $H \diagup I$ durch $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$ für alle $x, y \in H$, das Einselement durch $1_{H \diagup I} = \overline{1_H}$, die Comultiplikation durch $\Delta_{H \diagup I}(\overline{x}) = \overline{x_{(1)}} \otimes \overline{x_{(2)}}$ für alle $x \in H$, und die Coeins durch $\varepsilon_{H \diagup I}(\overline{x}) = \varepsilon(x)$ für alle $x \in H$ gegeben ist.

Beweis: Da I ein Ideal von H ist, ist (laut Bemerkung 1.14.) die Multiplikation auf $H \diagup I$ wohldefiniert, und $H \diagup I$ ist mit dieser Multiplikation (und dem Einselement $1_{H \diagup I} = \overline{1_H}$) auch tatsächlich eine Algebra. Da I ein Coideal von H ist, sind (laut Bemerkung 2.10. **2)**) die Comultiplikation $\Delta_{H \diagup I}$ und die Coeins $\varepsilon_{H \diagup I}$ ebenfalls wohldefiniert, und $H \diagup I$ wird zu einer Coalgebra. Jetzt müssen wir nur noch beweisen, daß diese Algebrastruktur und diese Coalgebrastruktur auf $H \diagup I$ zusammen eine Bialgebra ergeben. Dies ist jedoch sehr leicht[98]. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

2) Ist H eine Hopfalgebra, und ist $I \subseteq H$ ein Hopfideal, so ist $H \diagup I$ eine Hopfalgebra, wobei die Bialgebrastruktur wie in **1)** definiert ist. Die Antipode S von $H \diagup I$ erfüllt $S_{H \diagup I}(\overline{x}) = \overline{S(x)}$ für alle $x \in H$. Die kanonische Projektion $H \to H \diagup I$ ist ein Hopfalgebrahomomorphismus.

Beweis: Man definiere eine Abbildung $\overline{S} : H \diagup I \to H \diagup I$ durch $\overline{S}(\overline{x}) = \overline{S(x)}$ für alle $x \in H$ (dazu muss man wieder erst einmal zeigen, daß diese Abbildung $\overline{S}$ wohldefiniert ist, aber dies folgt leicht aus $S(I) \subseteq I$), und zeige, daß diese Abbildung $\overline{S}$ eine Antipode der Bialgebra $H \diagup I$ ist (also die Axiome erfüllt, die eine Antipode erfüllen muß).

3) Sei H eine Hopfalgebra, und sei $G \subseteq G(H)$ eine Teilmenge von $G(H)$. Dann ist das Ideal $(g-1 \mid g \in G)$ (dies ist das von allen Elementen der Form $g-1$ mit $g \in G$ erzeugte (zweiseitige) Ideal in H) ein Hopfideal in H.

Beweis: Erstmal ist $I = \sum\limits_{g \in G} k(g-1)$ ein Coideal in H, denn für alle $g \in G$ ist $\varepsilon(g-1) = 0$ und $\Delta(g-1) = \Delta(g) - \Delta(1) = g \otimes g - 1 \otimes 1 = g \otimes (g-1) + (g-1) \otimes 1 \in$

[98] *Beweis:* Sei $\pi : H \to H \diagup I$ die kanonische Projektion. Dann ist π linear, und jedes $t \in H$ erfüllt $\overline{t} = \pi(t)$.

Für alle $a, b \in H \diagup I$ gilt $\Delta_{H \diagup I}(ab) = \Delta_{H \diagup I}(a) \Delta_{H \diagup I}(b)$ (denn für alle $a, b \in H \diagup I$ existieren $x, y \in H$ mit $a = \overline{x}$ und $b = \overline{y}$, und diese x, y erfüllen

$$\begin{aligned}
&\Delta_{H \diagup I}\left(\underbrace{a}_{=\overline{x}}\underbrace{b}_{=\overline{y}}\right) \\
&= \Delta_{H \diagup I}\left(\underbrace{\overline{x} \cdot \overline{y}}_{=\overline{xy}}\right) = \Delta_{H \diagup I}(\overline{xy}) = \underbrace{\overline{(xy)_{(1)}}}_{=\pi\left((xy)_{(1)}\right)} \otimes \underbrace{\overline{(xy)_{(2)}}}_{=\pi\left((xy)_{(2)}\right)} \\
&= \pi\left((xy)_{(1)}\right) \otimes \pi\left((xy)_{(2)}\right) = (\pi \otimes \pi)\left((xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)}\right) \\
&= (\pi \otimes \pi)\left(x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)}\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } (xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)} = x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)}, \text{ da } H \text{ eine Bialgebra ist}\right) \\
&= \underbrace{\pi\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)}_{=\overline{x_{(1)}y_{(1)}}=\overline{x_{(1)}}\cdot\overline{y_{(1)}}} \otimes \underbrace{\pi\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)}_{=\overline{x_{(2)}y_{(2)}}=\overline{x_{(2)}}\cdot\overline{y_{(2)}}} = \overline{x_{(1)}} \cdot \overline{y_{(1)}} \otimes \overline{x_{(2)}} \cdot \overline{y_{(2)}} = \underbrace{\left(\overline{x_{(1)}} \otimes \overline{x_{(2)}}\right)}_{=\Delta_{H \diagup I}(\overline{x})} \underbrace{\left(\overline{y_{(1)}} \otimes \overline{y_{(2)}}\right)}_{=\Delta_{H \diagup I}(\overline{y})} \\
&= \Delta_{H \diagup I}\left(\underbrace{\overline{x}}_{=a}\right) \Delta_{H \diagup I}\left(\underbrace{\overline{y}}_{=b}\right) = \Delta_{H \diagup I}(a) \Delta_{H \diagup I}(b)
\end{aligned}$$

) und $\varepsilon_{H \diagup I}(ab) = \varepsilon_{H \diagup I}(a) \varepsilon_{H \diagup I}(b)$ (denn für alle $a, b \in H \diagup I$ existieren $x, y \in H$ mit $a = \overline{x}$ und $b = \overline{y}$, und diese x, y erfüllen

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{H \diagup I}\left(\underbrace{a}_{=\overline{x}}\underbrace{b}_{=\overline{y}}\right) &= \varepsilon_{H \diagup I}\left(\underbrace{\overline{xy}}_{=\overline{xy}}\right) = \varepsilon_{H \diagup I}(\overline{xy}) = \varepsilon(xy) = \underbrace{\varepsilon(x)}_{=\varepsilon_{H \diagup I}(\overline{x})} \underbrace{\varepsilon(y)}_{=\varepsilon_{H \diagup I}(\overline{y})} \\
&\qquad \text{(denn } H \text{ ist eine Bialgebra)} \\
&= \varepsilon_{H \diagup I}\left(\underbrace{\overline{x}}_{=a}\right) \varepsilon_{H \diagup I}\left(\underbrace{\overline{y}}_{=b}\right) = \varepsilon_{H \diagup I}(a) \varepsilon_{H \diagup I}(b)
\end{aligned}$$

). Somit ist $H \diagup I$ eine Bialgebra.

$H \otimes I + I \otimes H$.

Also folgt, daß (I) (so bezeichnen wir das von I erzeugte Ideal) ein Coideal von H ist (denn (I) ist der k-span von allen Elementen der Form axb mit $a, b \in H$ und $x \in I$, und für jedes solche Element gilt

$$\Delta(axb) = \Delta(a)\Delta(x)\Delta(b) \in (H \otimes H)(H \otimes I + I \otimes H)(H \otimes H) \subseteq H \otimes I + I \otimes H$$

). Somit ist (I) ein Biideal von H. Außerdem gilt $S((I)) \subseteq (I)$, da für alle $g \in G$ gilt: $S(g-1) = g^{-1} - 1 = -g^{-1}\underbrace{(g-1)}_{\in I} \in I$.

4) Sei H eine Bialgebra. Wir bezeichnen den Kern $\operatorname{Ker}\varepsilon$ des Algebrahomomorphismus $\varepsilon : H \to k$ als das *Augmentationsideal* von H und nennen ihn H^+. Dann ist H^+ ein Biideal von H, und für alle $x \in H^+$ gilt

$$\Delta(x) \in x \otimes 1 + 1 \otimes x + H^+ \otimes H^+.$$

Beweis:[99] Daß $H^+ = \operatorname{Ker}\varepsilon$ ein Untervektorraum und ein Ideal von H ist, ist klar. Nun ist das Bild der Abbildung $\operatorname{id} - \eta\varepsilon : H \to H$ offensichtlich in H^+ enthalten (denn für alle $y \in H$ ist

$$\varepsilon((\operatorname{id} - \eta\varepsilon)(y)) = \left(\varepsilon - \underbrace{\varepsilon\eta}_{=\operatorname{id}_k}\varepsilon\right)(y) = (\varepsilon - \varepsilon)(y) = 0,$$

also $(\operatorname{id} - \eta\varepsilon)(y) \in \operatorname{Ker}\varepsilon = H^+$). Somit ist das Bild der Abbildung $(\operatorname{id} - \eta\varepsilon) \otimes (\operatorname{id} - \eta\varepsilon) : H \otimes H \to H \otimes H$ in $H^+ \otimes H^+$ enthalten. Für jedes $x \in H$ ist also

$$((\operatorname{id} - \eta\varepsilon) \otimes (\operatorname{id} - \eta\varepsilon))(\Delta(x)) \in H^+ \otimes H^+.$$

Doch unter Verwendung der summenlosen Sweedler-Notation ist

$$\begin{aligned}
&((\operatorname{id} - \eta\varepsilon) \otimes (\operatorname{id} - \eta\varepsilon))(\Delta(x)) = (\operatorname{id} \otimes \operatorname{id} - \eta\varepsilon \otimes \operatorname{id} - \operatorname{id} \otimes \eta\varepsilon + \eta\varepsilon \otimes \eta\varepsilon)(\Delta(x)) \\
&= \Delta(x) - (\eta\varepsilon)\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} - x_{(1)} \otimes (\eta\varepsilon)\left(x_{(2)}\right) + (\eta\varepsilon)\left(x_{(1)}\right) \otimes (\eta\varepsilon)\left(x_{(2)}\right) \\
&= \Delta(x) - \varepsilon\left(x_{(1)}\right) 1 \otimes x_{(2)} - x_{(1)} \otimes \varepsilon\left(x_{(2)}\right) 1 + \varepsilon\left(x_{(1)}\right) 1 \otimes \varepsilon\left(x_{(2)}\right) 1 \\
&= \Delta(x) - 1 \otimes \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} - x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) \otimes 1 + \varepsilon\left(x_{(1)}\right)\varepsilon\left(x_{(2)}\right) 1 \otimes 1 \\
&\qquad \left(\text{denn } \varepsilon\left(x_{(1)}\right) \text{ und } \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \text{ sind Skalare}\right) \\
&= \Delta(x) - 1 \otimes \underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}}_{=x} - \underbrace{x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x} \otimes 1 + \varepsilon\left(\underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}}_{=x}\right) 1 \otimes 1 \\
&= \Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1 + \varepsilon(x) 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, daß

$$\Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1 + \varepsilon(x) 1 \otimes 1 \in H^+ \otimes H^+ \qquad \text{für alle } x \in H$$

ist; das heißt,

$$\Delta(x) \in x \otimes 1 + 1 \otimes x - \varepsilon(x) 1 \otimes 1 + H^+ \otimes H^+ \qquad \text{für alle } x \in H.$$

[99] Dies war Gegenstand von Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 4.

Ist nun $x \in H^+$, so ist $\varepsilon(x) = 0$ (denn $x \in H^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon$), und damit vereinfacht sich dies zu

$$\Delta(x) \in x \otimes 1 + 1 \otimes x + H^+ \otimes H^+ \qquad \text{für alle } x \in H^+.$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort, daß H^+ ein Coideal von H ist (denn für alle $x \in H^+$ ist

$$\Delta(x) \in \underbrace{x \otimes 1}_{\in H^+ \otimes H} + \underbrace{1 \otimes x}_{\in H \otimes H^+} + \underbrace{H^+ \otimes H^+}_{\subseteq H \otimes H^+} \subseteq H^+ \otimes H + H \otimes H^+,$$

also $\Delta(H^+) \subseteq H^+ \otimes H + H \otimes H^+$). Damit ist H^+ zugleich ein Untervektorraum, ein Ideal und ein Coideal von H; somit ist H^+ ein Biideal von H, und Bemerkung **4)** ist bewiesen.

5) Sei H eine Hopfalgebra. Wir bezeichnen den Kern $\operatorname{Ker} \varepsilon$ des Algebrahomomorphismus $\varepsilon : H \to k$ als das *Augmentationsideal* von H und nennen ihn H^+. Dann ist H^+ ein Hopfideal von H.

Beweis: Laut **4)** ist H^+ ein Biideal von H, und ferner ist $S(H^+) \subseteq H^+$ (denn für jedes $x \in H^+$ ist $\varepsilon(x) = 0$, also $\varepsilon(S(x)) = \varepsilon(x) = 0$ und damit $S(x) \in \operatorname{Ker} \varepsilon = H^+$). Somit ist H^+ ein Hopfideal von H, was zu beweisen war.

6) Seien H und H' zwei Bialgebren, und sei $f : H \to H'$ ein Bialgebrahomomorphismus. Dann ist $\operatorname{Ker} f \subseteq H$ ein Biideal.

Beweis: Offensichtlich ist $\operatorname{Ker} f$ ein Ideal, und nach 2.10. **3)** ist $\operatorname{Ker} f$ auch ein Coideal, was zu beweisen war.

7) Seien H und H' zwei Hopfalgebren, und sei $f : H \to H'$ ein Bialgebrahomomorphismus. Dann ist $\operatorname{Ker} f \subseteq H$ ein Hopfideal.

Beweis: Nach **6)** ist $\operatorname{Ker} f$ ein Biideal. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $S(\operatorname{Ker} f) \subseteq \operatorname{Ker} f$ ist. Doch nach 2.14. **1)** ist $Sf = fS$, und damit $f(S(\operatorname{Ker} f)) = (fS)(\operatorname{Ker} f) = (Sf)(\operatorname{Ker} f) = 0$, also $S(\operatorname{Ker} f) \subseteq \operatorname{Ker} f$, was zu beweisen war.

8) Sei H eine Hopfalgebra, und sei $I \subseteq H$ ein Ideal (d. h. ein zweiseitiges Ideal) der Algebra H. Angenommen, $I \neq H$, $\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$ und $S(I) \subseteq I$. Dann ist I ein Hopfideal von H.

Beweis: Wenn $1 \in I$ wäre, dann wäre $I = H$ im Widerspruch zu $I \neq H$. Also muß $1 \notin I$ gelten. Daher ist $k \cdot 1 \cap I = 0$. Für jedes $x \in I$ ist aber

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} &\in \underbrace{S(I)}_{\subseteq I} H + \underbrace{S(H)}_{\subseteq H} I \\ &\qquad \left(\text{da } x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \Delta(x) \in \Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I\right) \\ &\subseteq IH + HI \subseteq I \qquad (\text{da } I \text{ ein Ideal von } H \text{ ist}), \end{aligned}$$

also $\varepsilon(x) \cdot 1 \in k \cdot 1 \cap I = 0$, und damit $\varepsilon(x) \cdot 1 = 0$, also $\varepsilon(x) = 0$. Damit ist $\varepsilon(I) = 0$, was zusammen mit $\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$ ergibt, daß $I \subseteq H$ ein Coideal ist. Somit ist I insgesamt ein Hopfideal von H, was zu zeigen war.

Wir wollen noch kurz anmerken, wie man aus zwei Bialgebren bzw. Hopfalgebren eine neue durch Tensorieren bilden kann:

2.17$\frac{1}{2}$. Satz: 1) Sind H und H' zwei Bialgebren, so wird auch $H \otimes H'$ kanonisch zu einer Bialgebra, indem man die Algebrastruktur auf $H \otimes H'$ gemäß Kapitel I.1 (Tensorprodukt zweier Algebren) und die Coalgebrastruktur auf $H \otimes H'$ gemäß Kapitel I.2 (Tensorprodukt zweier Coalgebren) einführt.

2) Sind H und H' zwei Hopfalgebren, dann ist die gemäß **1)** definierte Bialgebra $H \otimes H'$ ebenfalls eine Hopfalgebra, und ihre Antipode ist $S_H \otimes S_{H'} : H \otimes H' \to H \otimes H'$.

Beweis: **1)** Seien Δ_H und $\Delta_{H'}$ die Comultiplikationen der Bialgebren H bzw. H'. Seien ε_H und $\varepsilon_{H'}$ die Coeinsen der Bialgebren H bzw. H'.

Da H eine Bialgebra ist, ist die Comultiplikation Δ_H ein Algebrahomomorphismus. Analog ist $\Delta_{H'}$ ein Algebrahomomorphismus.

Die Comultiplikation der Coalgebra $H \otimes H'$ ist bekanntlich definiert als die Abbildung $\Delta_{H\otimes H'} : H \otimes H' \to (H \otimes H') \otimes (H \otimes H')$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H' \arrow[r, "\Delta_H \otimes \Delta_{H'}"] \arrow[drr, "\Delta_{H\otimes H'}"'] & H \otimes H \otimes H' \otimes H' \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}", "\cong"'] & H \otimes H' \otimes H \otimes H' \arrow[d, "="] \\
 & & (H \otimes H') \otimes (H \otimes H')
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei $\tau : H \otimes H' \to H' \otimes H$ die durch

$$\tau (c \otimes d) = d \otimes c \qquad \text{für alle } c \in H \text{ und } d \in H'$$

definierte k-lineare Abbildung ist. Somit ist die Comultiplikation $\Delta_{H\otimes H'}$ die Verkettung $(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_{H'})$.

Nun sind aber id, τ, Δ_H und $\Delta_{H'}$ Algebrahomomorphismen, und folglich sind auch $\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}$ und $\Delta_H \otimes \Delta_{H'}$ Algebrahomomorphismen (denn das Tensorprodukt mehrerer Algebrahomomorphismen ist stets ein Algebrahomomorphismus). Folglich ist auch die Verkettung $(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_{H'})$ ein Algebrahomomorphismus (denn die Verkettung zweier Algebrahomomorphismen ist ein Algebrahomomorphismus). Wegen $\Delta_{H\otimes H'} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta_H \otimes \Delta_{H'})$ ist also $\Delta_{H\otimes H'}$ ein Algebrahomomorphismus.

Da H eine Bialgebra ist, ist die Coeins ε_H ein Algebrahomomorphismus. Analog ist $\varepsilon_{H'}$ ein Algebrahomomorphismus.

Die Coeins der Coalgebra $H \otimes H'$ ist bekanntlich definiert als die Abbildung $\varepsilon_{H\otimes H'} : H \otimes H' \to k$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H' \arrow[r, "\varepsilon_H \otimes \varepsilon_{H'}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{H\otimes H'}"'] & k \otimes k \arrow[d, "\mathrm{kan}", "\cong"'] \\
 & k
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Das heißt, die Coeins $\varepsilon_{H\otimes H'}$ der Coalgebra $H \otimes H'$ ist die Verkettung $\mathrm{kan} \circ (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_{H'})$. Da aber ε_H und $\varepsilon_{H'}$ Algebrahomomorphismen sind, muß auch das Tensorprodukt $\varepsilon_H \otimes \varepsilon_{H'}$ ein Algebrahomomorphismus sein (denn das Tensorprodukt mehrerer Algebrahomomorphismen ist stets ein Algebrahomomorphismus).

Da $\varepsilon_H \otimes \varepsilon_{H'}$ und kan Algebrahomomorphismen sind, ist auch die Verkettung $\mathrm{kan} \circ (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_{H'})$ ein Algebrahomomorphismus (denn die Verkettung zweier Algebrahomomorphismen ist ein Algebrahomomorphismus). Wegen $\varepsilon_{H\otimes H'} = \mathrm{kan} \circ (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_{H'})$ ist also $\varepsilon_{H\otimes H'}$ ein Algebrahomomorphismus.

Da nun sowohl die Comultiplikation $\Delta_{H\otimes H'}$, als auch die Coeins $\varepsilon_{H\otimes H'}$ der Coalgebra $H \otimes H'$ Algebrahomomorphismen sind, muß $H \otimes H'$ eine Bialgebra sein, was zu beweisen war.

2) Wir müssen zeigen, daß die Bialgebra $H \otimes H'$ eine Hopfalgebra mit Antipode $S_H \otimes S_{H'}$ ist. Um dies zu beweisen, müssen wir (gemäß der Definition einer Antipode) beweisen, daß $S_H \otimes S_{H'}$ das $*$-Inverse der Identität $\mathrm{id} : H \otimes H' \to H \otimes H'$ ist, also daß $(S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id} = \eta\varepsilon = \mathrm{id} * (S_H \otimes S_{H'})$ ist.

Wir wollen zuerst zeigen, daß $(S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id} = \eta\varepsilon$ gilt. Dazu zeigen wir zunächst, daß $((S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id})(T) = (\eta\varepsilon)(T)$ für jeden *reinen* Tensor $T \in H \otimes H'$ gilt.

In der Tat sei $T \in H \otimes H'$ ein reiner Tensor. Das heißt, es gibt ein $c \in H$ und ein $d \in H'$ mit $T = c \otimes d$. Betrachte diese c und d. Nach der Definition des Tensorproduktes zweier Coalgebren gilt dann

$$\Delta(c \otimes d) = c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon(c)\,\varepsilon(d).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&((S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id})(T) \\
&= (S_H \otimes S_{H'})\left(T_{(1)}\right) \cdot T_{(2)} = \underbrace{(S_H \otimes S_{H'})\left(c_{(1)} \otimes d_{(1)}\right)}_{=S_H\left(c_{(1)}\right) \otimes S_{H'}\left(d_{(1)}\right)} \cdot \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } T_{(1)} \otimes T_{(2)} = \Delta\left(\underbrace{T}_{=c\otimes d}\right) = \Delta(c \otimes d) = c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right) \\
&= \left(S_H\left(c_{(1)}\right) \otimes S_{H'}\left(d_{(1)}\right)\right) \cdot \left(c_{(2)} \otimes d_{(2)}\right) = \underbrace{\left(S_H\left(c_{(1)}\right) \cdot c_{(2)}\right)}_{\substack{=(\eta\varepsilon)(c) \\ (\text{denn } H \text{ ist eine Hopfalgebra})}} \otimes \underbrace{\left(S_{H'}\left(d_{(1)}\right) \cdot d_{(2)}\right)}_{\substack{=(\eta\varepsilon)(d) \\ (\text{denn } H' \text{ ist eine Hopfalgebra})}} \\
&= \underbrace{(\eta\varepsilon)(c)}_{=\varepsilon(c)\cdot 1} \otimes \underbrace{(\eta\varepsilon)(d)}_{=\varepsilon(d)\cdot 1} = (\varepsilon(c) \cdot 1) \otimes (\varepsilon(d) \cdot 1) = \underbrace{\varepsilon(c)\,\varepsilon(d)}_{=\varepsilon(c\otimes d)} \cdot 1_{H\otimes H'} = \varepsilon(c \otimes d) \cdot 1_{H \otimes H'} \\
&= (\eta\varepsilon)\left(\underbrace{c \otimes d}_{=T}\right) = (\eta\varepsilon)(T).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt: $((S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id})(T) = (\eta\varepsilon)(T)$ für jeden *reinen* Tensor $T \in H \otimes H'$. Die Abbildungen $(S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id}$ und $\eta\varepsilon$ stimmen also auf jedem reinen Tensor überein. Da diese beiden Abbildungen linear sind, müssen sie folglich identisch sein (denn zwei lineare Abbildungen aus einem Tensorprodukt, die auf jedem reinen Tensor übereinstimmen, müssen identisch sein).

Damit ist $(S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id} = \eta\varepsilon$ gezeigt. Analog zeigt man $\mathrm{id} * (S_H \otimes S_{H'}) = \eta\varepsilon$. Daher ist $(S_H \otimes S_{H'}) * \mathrm{id} = \eta\varepsilon = \mathrm{id} * (S_H \otimes S_{H'})$. Wie gesagt, folgt hieraus, daß die Bialgebra $H \otimes H'$ eine Hopfalgebra mit Antipode $S_H \otimes S_{H'}$ ist, qed.

Beispiele für Hopfalgebren

Nachdem wir recht allgemeine Eigenschaften von Hopfalgebren untersucht haben, ist es an der Zeit, einige Beispiele für Hopfalgebren zusammenzustellen. Eine Reihe solcher Beispiele haben wir bereits weiter oben in 2.11 gegeben - nämlich die Gruppenalgebren. Es gibt aber viele andere Beispiele, wie etwa folgende[100]:

2.18. Beispiele: 1) Wir betrachten $k[T]$, die Polynomalgebra in einer Unbestimmten T über dem Körper k. Auf dieser Algebra $k[T]$ gibt es genau eine Hopfalgebrastruktur, die

$$\Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T, \qquad \varepsilon(T) = 0 \qquad \text{und} \qquad S(T) = -T$$

[100]Weitere Beispiele werden wir in 2.30 kennenlernen.

erfüllt.

Beweis: Definiere mit der universellen Eigenschaft der Polynomalgebra Algebrahomomorphismen

$$\Delta : k[T] \to k[T] \otimes k[T] \qquad \text{durch} \qquad \Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T,$$
$$\varepsilon : k[T] \to k \qquad \text{durch} \qquad \varepsilon(T) = 0,$$
$$S : k[T] \to k[T] \qquad \text{durch} \qquad S(T) = -T$$

[101]. Nach Folgerung 2.16. **1)** und Folgerung 2.16 **2)** folgt, daß damit $k[T]$ zu einer Hopfalgebra wird, wenn erstmal die Hopfalgebraaxiome

$$x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right) = \Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}, \qquad x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) = x = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$$
$$\text{und} \qquad x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$$

für $x = T$ nachgeprüft sind (denn (T) ist ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra $k[T]$). Doch diese Axiome sind für $x = T$ leicht nachzuprüfen[102]. Somit ist $k[T]$ eine Hopfalgebra.

---

[101] Die Antipode S soll zwar laut Definition einer Hopfalgebra ein Antialgebrahomomorphismus sein, aber die Polynomalgebra $k[T]$ ist kommutativ, und daher ist ein Antialgebrahomomorphismus $k[T] \to k[T]$ nichts anderes als ein Algebrahomomorphismus $k[T] \to k[T]$.

[102] *Beweis:* Sei $x = T$. Dann ist $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \Delta(x) = \Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$, und somit

$$x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right) = T \otimes \underbrace{\Delta(1)}_{=1} + 1 \otimes \underbrace{\Delta(T)}_{=T\otimes 1+1\otimes T} = T \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes T \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes T;$$
$$\Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} = \underbrace{\Delta(T)}_{=T\otimes 1+1\otimes T} \otimes 1 + \underbrace{\Delta(1)}_{=1} \otimes 1 = T \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes T \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes T;$$
$$x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) = T \underbrace{\varepsilon(1)}_{=1} + 1 \underbrace{\varepsilon(T)}_{=0} = T \cdot 1 = T = x;$$
$$\varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} = \underbrace{\varepsilon(T)}_{=0} 1 + \underbrace{\varepsilon(1)}_{=1} T = 1 \cdot T = T = x;$$
$$x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right) = T \underbrace{S(1)}_{=1} + 1 \underbrace{S(T)}_{=-T} = 0;$$
$$S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} = \underbrace{S(T)}_{=-T} 1 + \underbrace{S(1)}_{=1} T = 0;$$
$$\varepsilon\left(\underbrace{x}_{=T}\right) \cdot 1 = \underbrace{\varepsilon(T)}_{=0} \cdot 1 = 0,$$

also

$$x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right) = T \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes T \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes T = \Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)};$$
$$x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) = x = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)};$$
$$x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right) = 0 = \varepsilon(x) \cdot 1 = 0 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}.$$

Folglich gelten alle drei Axiome

$$x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right) = \Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}, \qquad x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) = x = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$$
$$\text{und} \qquad x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1 = S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$$

für $x = T$, was zu beweisen war.

2) In der Hopfalgebra $k[T]$, welche in Beispiel **1)** eingeführt wurde, gilt: Für alle $n \geq 0$ ist $\Delta(T^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^i \otimes T^{n-i}$.

Beweis: Klar, da

$$\Delta(T^n) = (\Delta(T))^n = (T \otimes 1 + 1 \otimes T)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{(T \otimes 1)^i}_{=T^i \otimes 1} \underbrace{(1 \otimes T)^{n-i}}_{=1 \otimes T^{n-i}}$$

(nach der binomischen Formel, da $T \otimes 1$ und $1 \otimes T$ kommutieren)

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^i \otimes T^{n-i}.$$

3) Angenommen, $\operatorname{char} k = p > 0$. Dann ist die Algebra $k[T] \diagup (T^p)$ eine Quotienten-Hopfalgebra von $k[T]$, denn (T^p) ist ein Hopfideal.

Beweis: Da $\binom{p}{i} = 0$ in k für alle $i \in \{1, 2, ..., p-1\}$ ist (denn wegen $p = \operatorname{char} k > 0$ ist p prim), wird $\Delta(T^p) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} T^i \otimes T^{p-i}$ zu $\Delta(T^p) = 1 \otimes T^p + T^p \otimes 1$. Außerdem ist $\varepsilon(T^p) = (\varepsilon(T))^p = 0$ und $S(T^p) = (-1)^p T^p$. Daher ist (T^p) ein Hopfideal, qed.

$3\frac{1}{4}$) Angenommen, $\operatorname{char} k = p > 0$ und $n \geq 0$. Dann ist die Algebra $k[T] \diagup \left(T^{p^n}\right)$ eine Quotienten-Hopfalgebra von $k[T]$, denn $\left(T^{p^n}\right)$ ist ein Hopfideal.

Beweis: Wegen $p = \operatorname{char} k > 0$ ist p prim. Somit gilt $p \mid \binom{p^n}{i}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, p^n - 1\}$ [103]. Also ist $\binom{p^n}{i} = 0$ in k für alle $i \in \{1, 2, \ldots, p^n - 1\}$.

Daher wird die Formel $\Delta\left(T^{p^n}\right) = \sum_{i=0}^{p^n} \binom{p^n}{i} T^i \otimes T^{p^n - i}$ zu $\Delta\left(T^{p^n}\right) = 1 \otimes T^{p^n} + T^{p^n} \otimes 1$. Außerdem ist $\varepsilon\left(T^{p^n}\right) = (\varepsilon(T))^{p^n} = 0$ und $S\left(T^{p^n}\right) = (-1)^{p^n} T^{p^n}$. Daher ist $\left(T^{p^n}\right)$ ein Hopfideal, qed.

$3\frac{1}{2}$) Angenommen, $\operatorname{char} k = p > 0$. Seien $n, m \geq 1$ und $\alpha, \beta \in k$. Dann gibt es auf der Algebra $k\left\langle t \mid t^{p^{n+m}} = 0 \right\rangle$ genau eine Hopfalgebrastruktur, die

$$\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t + \alpha t^{p^n} \otimes t^{p^m} + \beta t^{p^m} \otimes t^{p^n}$$

erfüllt; für diese Hopfalgebrastruktur gilt

$$\varepsilon(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad S(t) = (\alpha + \beta) t^{p^n + p^m} - t.$$

[103] *Beweis:* Sei $i \in \{1, 2, \ldots, p^n - 1\}$. Dann ist $p^n \nmid i$.

Andererseits ist bekannt, daß $b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1}$ für beliebige ganze Zahlen a und $b \geq 0$ gilt. Wenden wir dies auf $a = p^n$ und $b = i$ an, so erhalten wir $i\binom{p^n}{i} = p^n\binom{p^n - 1}{i - 1}$. Somit ist $i\binom{p^n}{i}$ durch p^n teilbar. Wäre $\binom{p^n}{i}$ zu p^n teilerfremd, dann würde hieraus folgen, daß i selber durch p^n teilbar; aber dies würde zu $p^n \nmid i$ widersprechen. Somit ist $\binom{p^n}{i}$ nicht zu p^n teilerfremd. Mit anderen Worten: $p \mid \binom{p^n}{i}$.

Beweis: Dies ist (ein Teil von) Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt 6.

4) a) Ist A eine kommutative Algebra, und betrachtet man $k[T]$ als Hopfalgebra wie in **1)**, dann gilt $\operatorname{Alg}(k[T], A) \cong A$ als Gruppen (via dem Gruppenisomorphismus

$$\operatorname{Alg}(k[T], A) \to A, \qquad \varphi \mapsto \varphi(T)$$

), wobei A eine Gruppe bezüglich $+$ ist, und $\operatorname{Alg}(k[T], A)$ eine Gruppe nach Folgerung 2.15. **1) b)** ist.

b) Sei $\operatorname{char} k = p > 0$. Sei A eine kommutative Algebra. Dann ist $\alpha_p(A) = \{a \in A \mid a^p = 0\}$ eine Gruppe bezüglich $+$. Man betrachte $k[T] \diagup (T^p)$ als Hopfalgebra wie in **3)**. Dann gilt $\operatorname{Alg}(k[T] \diagup (T^p), A) \cong \alpha_p(A)$ als Gruppen (via dem Gruppenisomorphismus

$$\operatorname{Alg}(k[T] \diagup (T^p), A) \to \alpha_p(A), \qquad \varphi \mapsto \varphi\left(\overline{T}\right)$$

), wobei $\operatorname{Alg}(k[T] \diagup (T^p), A)$ eine Gruppe nach Folgerung 2.15. **1) b)** ist.

Beweis: **a)** Die Abbildung

$$\operatorname{Alg}(k[T], A) \to A, \qquad \varphi \mapsto \varphi(T)$$

ist bijektiv nach der universellen Eigenschaft der Polynomalgebra, und ein Gruppenhomomorphismus da für alle $\varphi, \psi \in \operatorname{Alg}(k[T], A)$ gilt:

$$(\varphi * \psi)(T) = \varphi(T)\underbrace{\psi(1)}_{=1} + \underbrace{\varphi(1)}_{=1}\psi(T) = \varphi(T) + \psi(T).$$

b) Die Abbildung

$$\operatorname{Alg}(k[T] \diagup (T^p), A) \to \alpha_p(A), \qquad \varphi \mapsto \varphi\left(\overline{T}\right)$$

ist bijektiv nach den universellen Eigenschaften des Polynomrings und des Faktorringes, und ein Gruppenhomomorphismus aus gleichem Grund wie in **a)**.

5) Sei $n \geq 0$, und sei $H = k[T_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ die (kommutative) Polynomalgebra in n^2 Unbestimmten.[104] Dann läßt sich H eindeutig zu einer Bialgebra mit

$$\Delta(T_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} T_{i,l} \otimes T_{l,j} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(T_{i,j}) = \delta_{i,j} \qquad \text{für alle } i \text{ und } j$$

machen.

Setzt man $d = \det\left((T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}\right) \in k[T_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, dann ist d ein Gruppenelement in H.

Beweis: Nach der universellen Eigenschaft der Polynomalgebra sind die Algebrahomomorphismen Δ und ε durch obige Gleichungen wohldefiniert und eindeutig. Wie man leicht einsieht, gelten die Coalgebraaxiome für die Erzeuger $T_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Nach Folgerung 2.16. **1)** folgt daraus, daß H eine Bialgebra ist.

[104] Wenn $n = 0$ ist, dann ist H also einfach k.

Nun ist $d = \det\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)$, also

$$\begin{aligned}
\Delta(d) &= \Delta\left(\det\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)\right) = \det\left((\Delta(T_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn }\det\text{ ist ein Polynom und kommutiert daher mit} \\ \text{dem Algebrahomomorphismus }\Delta\end{array}\right) \\
&= \det\left(\left(\sum_{l=1}^{n} T_{i,l}\otimes T_{l,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) \qquad \left(\text{denn } \Delta(T_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} T_{i,l}\otimes T_{l,j}\right).
\end{aligned}$$

Doch

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{l=1}^{n} T_{i,l}\otimes T_{l,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} &= (T_{i,l}\otimes 1)_{1\leq i,l\leq n}(1\otimes T_{l,j})_{1\leq l,j\leq n} \\
&= (T_{i,j}\otimes 1)_{1\leq i,j\leq n}(1\otimes T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}.
\end{aligned}$$

Daher ist auch

$$\begin{aligned}
\Delta(d) &= \det\left(\left(\sum_{l=1}^{n} T_{i,l}\otimes T_{l,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = \det\left((T_{i,j}\otimes 1)_{1\leq i,j\leq n}(1\otimes T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right) \\
&= \underbrace{\det\left((T_{i,j}\otimes 1)_{1\leq i,j\leq n}\right)}_{=\det\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)\otimes 1 = d\otimes 1}\underbrace{\det\left((1\otimes T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)}_{=1\otimes\det\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)=1\otimes d} = (d\otimes 1)(1\otimes d) = d\otimes d.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon(d) &= \varepsilon\left(\det\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)\right) = \det\left((\varepsilon(T_{i,j}))_{1\leq i,j\leq n}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn }\det\text{ ist ein Polynom und kommutiert daher} \\ \text{mit dem Algebrahomomorphismus }\varepsilon\end{array}\right) \\
&= \det\left((\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Daher ist d ein Gruppenelement, was zu beweisen war.

6) Eine *Vorbemerkung* zu den nächsten Beispielen: In der Bialgebra $H = k[T_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ aus Beispiel **5)** definieren wir die Elemente

$$\widetilde{T}_{i,j} = (-1)^{i+j}\det\left((T_{r,s})_{\substack{1\leq r,s\leq n;\\ r\neq j;\ s\neq i}}\right) \qquad \text{für alle } i,j\in\{1,2,...,n\}.$$

Dann ist die Matrix $\left(\widetilde{T}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ die Adjunkte[105] der Matrix $(T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Nach einer klassischen Formel gilt somit

$$(T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\left(\widetilde{T}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} d & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & d & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & d \end{pmatrix}$$

[105] die Adjunkte im Sinne der Linearen Algebra (also *nicht* die komplex Konjugierte der Transponierten)

(denn $d = \det\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\right)$). Hieraus folgt $\det\left((T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\left(\widetilde{T}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = d^n$.

7) Jetzt betrachten wir die Quotientenalgebra $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1)$ der Polynomalgebra $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ in Beispiel **5)**.

Wir schreiben $t_{i,j} = \overline{T_{i,j}}$ für alle i und j (wobei $\overline{T_{i,j}}$ die Restklasse von $T_{i,j}$ modulo dem Ideal $(d-1)$ bezeichnet). Dann ist $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1) = k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$.

Dann ist $k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ eine Hopfalgebra, wobei gilt:

$$\Delta(t_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l} \otimes t_{l,j}, \qquad \varepsilon(t_{i,j}) = \delta_{i,j},$$

$$\text{und} \qquad S(t_{i,j}) = (-1)^{i+j} \det\left((t_{r,s})_{\substack{1\leq r,s\leq n;\\ r\neq j;\ s\neq i}}\right) = \widetilde{t}_{i,j}$$

$$\text{für alle } i \text{ und } j,$$

wobei $\widetilde{t}_{i,j}$ als $\overline{\widetilde{T}_{i,j}}$ für alle i und j definiert ist.

Beweis: **a)** Da d ein Gruppenelement ist, ist $(d-1)$ ein Biideal (laut 2.17. **3)**) mit $\Delta(d-1) = d \otimes (d-1) + (d-1) \otimes 1$. Laut 2.17. **2)** ist also $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1)$ eine Bialgebra. Für diese Bialgebra gilt offensichtlich

$$\Delta(t_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l} \otimes t_{l,j} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(t_{i,j}) = \delta_{i,j} \qquad \text{für alle } i \text{ und } j.$$

b) Wir wissen, daß

$$(T_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\left(\widetilde{T}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} d & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & d & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & d \end{pmatrix}$$

in $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ gilt. Projizieren wir diese Identität auf $k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$, dann erhalten wir

$$(t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\left(\widetilde{t}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(denn die Projektion von $d \in k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ auf $k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ ist 1, weil ja $k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} = k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1)$ ist). Mit anderen Worten: $(t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\left(\widetilde{t}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = E$ (wobei E die Einheitsmatrix ist).

c) Definiere S wie folgt: Definiere zunächst einen Algebrahomomorphismus $\widehat{S}$: $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \to k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ durch

$$\widehat{S}(T_{i,j}) = (-1)^{i+j} \det\left((T_{r,s})_{\substack{1\leq r,s\leq n;\\ r\neq j;\ s\neq i}}\right) = \widetilde{T}_{i,j} \qquad \text{für alle } i \text{ und } j.$$

Betrachte nun die Verkettung

$$k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \xrightarrow{\widehat{S}} k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \xrightarrow{\text{kan}} k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1)\ ,$$

Diese Verkettung $\text{kan}\circ\widehat{S}$ faktorisiert über $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1)$ (denn

$$d\widehat{S}(d) = \det\left(\left(T_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) \underbrace{\widehat{S}\left(\det\left(\left(T_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right)\right)}_{\substack{=\det\left(\left(\widehat{S}(T_{i,j})\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) \\ \text{(denn }\det\text{ ist ein Polynom und} \\ \text{kommutiert daher mit dem} \\ \text{Algebrahomomorphismus }\widehat{S})}} \qquad \left(\text{denn } d = \det\left(\left(T_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right)\right)$$

$$= \det\left(\left(T_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) \det\left(\left(\underbrace{\widehat{S}\left(T_{i,j}\right)}_{=\widetilde{T}_{i,j}}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right)$$

$$= \det\left(\left(T_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) \det\left(\left(\widetilde{T}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = \det\left(\left(T_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\left(\widetilde{T}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) = d^n,$$

also $\widehat{S}(d) = d^{n-1}$ (denn $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ ist ein Integritätsring)[106], daher $\widehat{S}(d-1) = d^{n-1} - 1 \in (d-1)$ und somit $\left(\text{kan}\circ\widehat{S}\right)(d-1) = 0$).

Daher können wir einen Algebrahomomorphismus S durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \arrow[r, "\widehat{S}"] \arrow[rrd, "\text{kan}"'] & k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \arrow[r, "\text{kan}"] & k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1) \\
& & k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1) \arrow[u, dotted, "S"]
\end{tikzcd}$$

definieren. Es ist klar, daß dieser Homomorphismus S die Gleichung

$$S\left(t_{i,j}\right) = \widetilde{t}_{i,j} \qquad \text{für alle } i \text{ und } j$$

erfüllt (denn $\widehat{S}\left(T_{i,j}\right) = \widetilde{T}_{i,j}$).

Wir werden nun zeigen, daß dieses S das Antipodenaxiom erfüllt. Um dies zu zeigen, genügt es (laut Folgerung 2.16. **2)**), dieses Axiom auf den Erzeugern $t_{i,j}$ nachzuweisen. Doch für alle i, j gilt:

$$\left(t_{i,j}\right)_{(1)} \otimes \left(t_{i,j}\right)_{(2)} = \Delta\left(t_{i,j}\right) = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l} \otimes t_{l,j}, \qquad \text{und daher}$$

$$\left(t_{i,j}\right)_{(1)} S\left(\left(t_{i,j}\right)_{(2)}\right) = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l} \underbrace{S\left(t_{l,j}\right)}_{=\widetilde{t}_{l,j}} = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l}\widetilde{t}_{l,j} = \delta_{i,j} \qquad \left(\text{denn } \left(t_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\left(\widetilde{t}_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = E\right),$$

und analog

$$S\left(\left(t_{i,j}\right)_{(1)}\right)\left(t_{i,j}\right)_{(2)} = \sum_{l=1}^{n} S\left(t_{i,l}\right) t_{l,j} = \delta_{i,j}.$$

[106]Dies ergibt auch im Falle von $n = 0$ Sinn (denn in diesem Falle ist $d = 1$).

Daher erfüllt S das Antipodenaxiom auf den Erzeugern $t_{i,j}$ der Algebra $k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$. Folglich ist S eine Antipode der Bialgebra $k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$, und diese Bialgebra mithin eine Hopfalgebra, was zu beweisen war.

8) Für die Hopfalgebra $H = k\left[t_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} = k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1)$ aus Beispiel **7)** gilt:

Für jede kommutative Algebra A ist

$$\operatorname{Alg}(H,A) \to \operatorname{SL}_n(A), \qquad \varphi \mapsto \left(\varphi\left(t_{i,j}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

ein Gruppenisomorphismus, wobei $\operatorname{Alg}(H,A)$ eine Gruppe bezüglich Faltung ist.

Beweis: **a)** Die Abbildung

$$\operatorname{Alg}(H,A) \to \operatorname{SL}_n(A), \qquad \varphi \mapsto \left(\varphi\left(t_{i,j}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

ist bijektiv nach den universellen Eigenschaften der Polynomalgebra $k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ und der Faktoralgebra; sie ist nämlich der untere Bijektions-Pfeil in folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Alg}\left(k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n}, A\right) \arrow[r, "\text{Bijektion}"] & \operatorname{M}_n(A)\ , \\
\operatorname{Alg}\left(k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} / (d-1), A\right) \arrow[u, hook, "\operatorname{Hom}(\pi,\mathrm{id})"'] \arrow[r, dotted, "\text{Bijektion}"] & \operatorname{SL}_n(A) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

wobei der obere Bijektions-Pfeil durch die Abbildung $\phi \mapsto \left(\phi\left(T_{i,j}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ gegeben ist (nach der universellen Eigenschaft der Polynomalgebra ist dies eine Bijektion), und $\pi : k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \to k\left[T_{i,j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \diagup (d-1)$ die kanonische Projektion ist.

b) Die Abbildung

$$\operatorname{Alg}(H,A) \to \operatorname{SL}_n(A), \qquad \varphi \mapsto \left(\varphi\left(t_{i,j}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für alle $\varphi, \psi \in \operatorname{Alg}(H,A)$ und für alle i, j ist

$$\begin{aligned}
(\varphi * \psi)\left(t_{i,j}\right) &= \sum_{l=1}^{n} \varphi\left(t_{i,l}\right)\psi\left(t_{l,j}\right) \qquad \left(\text{weil } \Delta\left(t_{i,j}\right) = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l} \otimes t_{l,j}\right) \\
&= \text{Koeffizient an der Stelle } (i,j) \text{ der Matrix } \left(\varphi\left(t_{u,v}\right)\right)_{1\leq u,v\leq n}\left(\psi\left(t_{u,v}\right)\right)_{1\leq u,v\leq n}
\end{aligned}$$

und damit

$$\left((\varphi * \psi)\left(t_{u,v}\right)\right)_{1\leq u,v\leq n} = \left(\varphi\left(t_{u,v}\right)\right)_{1\leq u,v\leq n}\left(\psi\left(t_{u,v}\right)\right)_{1\leq u,v\leq n}.$$

9) Sei $H = k\langle g, x\rangle$ die freie Algebra in den Unbestimmten g, x. Dann wird H zu einer Bialgebra, wenn man die Algebrahomomorphismen $\Delta : H \to H \otimes H$ und $\varepsilon : H \to k$ nach der universellen Eigenschaft der freien Algebra auf den Erzeugern durch

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1, \qquad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, \qquad \varepsilon(x) = 0$$

definiert.

Beweis: Die Bialgebraaxiome gelten auf den Erzeugenden g, x (siehe die Rechnungen von 2.1. **4)** für $h = 1$). Nach Folgerung 2.16. **1)** müssen sie also überall gelten.

10) Sei $q \in k$, und sei $H = k\langle g, x \mid gx = qxg\rangle$. Dies ist die k-Algebra mit den Erzeugern g und x und der Relation $gx = qxg$; das heißt,

$$H = \underbrace{k\langle \mathbf{G}, \mathbf{X}\rangle}_{\text{freie Algebra}} \diagup (\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}).$$

Dann ist H eine Bialgebra mit Δ und ε wie in **9)**; genauer gesagt: H ist eine Faktorbialgebra von der Algebra H in **9)**.

Beweis: Sei $k\langle \mathbf{G}, \mathbf{X}\rangle$ die Bialgebra H aus Beispiel **9)**, wobei wir die Erzeuger, die wir in Beispiel **1)** mit g und x bezeichnet hatten, diesmal $\mathbf{G}$ und $\mathbf{X}$ nennen.

Wir müssen nur zeigen, daß $(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG})$ ein Biideal in dieser Bialgebra $k\langle \mathbf{G}, \mathbf{X}\rangle$ ist. Dies folgt aus

$$\Delta(\mathbf{GX}) = (\mathbf{G}\otimes\mathbf{G})(\mathbf{G}\otimes\mathbf{X} + \mathbf{X}\otimes 1) = \mathbf{G}^2\otimes\mathbf{GX} + \mathbf{GX}\otimes\mathbf{G} \qquad \text{und}$$
$$\Delta(q\mathbf{XG}) = q(\mathbf{G}\otimes\mathbf{X} + \mathbf{X}\otimes 1)(\mathbf{G}\otimes\mathbf{G}) = q\mathbf{G}^2\otimes\mathbf{XG} + q\mathbf{XG}\otimes\mathbf{G}, \qquad \text{also}$$
$$\Delta(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) = \mathbf{G}^2\otimes(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) + (\mathbf{GX} - q\mathbf{XG})\otimes\mathbf{G},$$

und natürlich $\varepsilon(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) = 0$ (denn $\varepsilon(\mathbf{X}) = 0$).

11) Sei weiterhin $q \in k$. Betrachte jetzt die Algebra

$$H = k\langle g, h, x \mid gh = 1 = hg,\ gx = qxg\rangle$$

(dabei ist $gh = 1 = hg$ nur eine Kurzschreibweise für $gh = 1,\ hg = 1$). Dieses H ist eine Hopfalgebra mit

$$\Delta(g) = g\otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1, \qquad \Delta(h) = h\otimes h, \qquad \varepsilon(h) = 1,$$
$$\Delta(x) = g\otimes x + x\otimes 1, \qquad \varepsilon(x) = 0,$$
$$S(g) = h, \qquad S(h) = g, \qquad S(x) = -hx.$$

Außerdem gilt $S^2(x) = q^{-1}x$, wenn $q \neq 0$ gilt.

Beweis: Die Wohldefiniertheit der Bialgebra zeigen wir wie in **10)**. Sei nun $\widehat{S}$: $\underbrace{k\langle \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{X}\rangle}_{\text{freie Algebra}} \to H$ der Antialgebrahomomorphismus mit

$$\widehat{S}(\mathbf{G}) = h, \qquad \widehat{S}(\mathbf{H}) = g, \qquad \widehat{S}(\mathbf{X}) = -hx.$$

Dieses $\widehat{S}$ faktorisiert über H (wobei wir H als Faktoralgebra der freien Algebra $k\langle \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{X}\rangle$ modulo dem Ideal $(\mathbf{GH} - 1, \mathbf{HG} - 1, \mathbf{GX} - q\mathbf{XG})$ betrachten), denn

$$\widehat{S}(\mathbf{GH} - 1) = gh - 1 = 0; \qquad \widehat{S}(\mathbf{HG} - 1) = hg - 1 = 0;$$
$$\widehat{S}(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) = \widehat{S}(\mathbf{X})\,\widehat{S}(\mathbf{G}) - q\widehat{S}(\mathbf{G})\,\widehat{S}(\mathbf{X}) = -hxh - qh(-hx) = 0$$
$$(\text{denn } gx = qxg \Longrightarrow xh = qhx \text{ wegen } hg = 1 = gh).$$

Somit induziert $\widehat{S}$ einen Antialgebrahomomorphismus $H \to H$; wir bezeichnen diesen Homomorphismus mit S. Jetzt müssen wir (gemäß Folgerung 2.16 **2)**) nur noch die

Antipodenaxiome für die Antialgebraabbildung $S : H \to H$ nachprüfen. Dies können wir schnell per Hand erledigen:

Für g ist

$$gS(g) = gh = 1 = \varepsilon(g), \qquad S(g)\,g = hg = 1 = \varepsilon(g).$$

Für h geht dies ebenso.

Für x ist $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1$, und

$$\begin{aligned} &g\underbrace{S(x)}_{=-hx} + x\underbrace{S(1)}_{=1} = -ghx + x = -1x + x = 0 = \varepsilon(x), \\ &\underbrace{S(g)}_{=h}x + \underbrace{S(x)}_{=-hx}1 = hx - hx = 0 = \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Im Falle $q \neq 0$ gilt außerdem

$$S^2(x) = S(-hx) = -S(x)\,S(h) = -(-hx)\,g = hxg = hq^{-1}gx = q^{-1}hgx = q^{-1}x.$$

12) Sei $n \geq 1$, und sei $q \in k$ eine primitive n-te Einheitswurzel (also eine n-te Einheitswurzel mit Ordnung n). Sei

$$H = k\langle g, x \mid g^n = 1,\ x^n = 0,\ gx = qxg\rangle.$$

Dann ist H eine Hopfalgebra mit

$$\begin{aligned} &\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1, \qquad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, \qquad \varepsilon(x) = 0, \\ &S(g) = g^{-1} = g^{n-1}, \qquad S(x) = -g^{-1}x. \end{aligned}$$

Diese Hopfalgebra H heißt *Taft-Hopfalgebra* über k.

Beweis: **a)** Sei $\widehat{H} = k\langle \mathbf{G}, \mathbf{X}\rangle$ die freie Algebra, erzeugt von den zwei Elementen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{X}$.

Lemma 1: Sei $\widehat{\Delta} : \widehat{H} \to H \otimes H$ der Algebrahomomorphismus mit $\widehat{\Delta}(\mathbf{G}) = g \otimes g$ und $\widehat{\Delta}(\mathbf{X}) = g \otimes x + x \otimes 1$. Dieser Homomorphismus $\widehat{\Delta}$ faktorisiert über H.

Beweis: Wir haben $\widehat{\Delta}(\mathbf{G}^n) = (g \otimes g)^n = g^n \otimes g^n = 1 \otimes 1$, also $\widehat{\Delta}(\mathbf{G}^n - 1) = 0$.

Jetzt wollen wir $\widehat{\Delta}(\mathbf{X}^n) = 0$ zeigen. Wir haben $\widehat{\Delta}(\mathbf{X}^n) = (g \otimes x + x \otimes 1)^n$. Bezeichnen wir $b = g \otimes x$ und $a = x \otimes 1$.

In $H \otimes H$ gilt $ba = \underbrace{gx}_{=qxg} \otimes x$ und $ab = xg \otimes x$, also $ba = q \cdot ab$. Nach Lemma 2.20 **2)** und wegen der Tatsache, daß q eine primitive n-te Einheitswurzel ist, gilt also $(a+b)^n = a^n + b^n$. Damit ist

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(\mathbf{X}^n) &= (g \otimes x + x \otimes 1)^n = (a+b)^n = a^n + b^n \\ &= (g \otimes x)^n + (x \otimes 1)^n = g^n \otimes \underbrace{x^n}_{=0} + \underbrace{x^n}_{=0} \otimes 1^n = 0. \end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir $\widehat{\Delta}(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) = g^2 \otimes (gx - qxg) + (gx - qxg) \otimes g$ (genau so, wie wir $\Delta(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) = \mathbf{G}^2 \otimes (\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) + (\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) \otimes \mathbf{G}$ in Beispiel **10)** gezeigt haben); wegen $gx - qxg = 0$ wird dies zu $\widehat{\Delta}(\mathbf{GX} - q\mathbf{XG}) = 0$. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2: Sei $\widehat{\varepsilon} : \widehat{H} \to k$ der Algebrahomomorphismus mit $\widehat{\varepsilon}(\mathbf{G}) = 1$ und $\widehat{\varepsilon}(\mathbf{X}) = 0$. Dieser Homomorphismus $\widehat{\varepsilon}$ faktorisiert über H.

Beweis: klar (wie oben).

Lemma 3: Sei $\widehat{S} : \widehat{H} \to H$ der Antialgebrahomomorphismus mit $\widehat{S}(\mathbf{G}) = g^{-1}$ und $\widehat{S}(\mathbf{X}) = -g^{-1}x$. Dieser Antialgebrahomomorphismus $\widehat{S}$ faktorisiert über H.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß $\widehat{S}(\mathbf{G}^n) = 1$, $\widehat{S}(\mathbf{X}^n) = 0$ und $\widehat{S}(\mathbf{G}\mathbf{X} - q\mathbf{X}\mathbf{G}) = 0$ ist.

In der Tat ist

$$\widehat{S}(\mathbf{G}^n) = \left(g^{-1}\right)^n = (g^n)^{-1} = 1^{-1} = 1;$$

$$\widehat{S}(\mathbf{X}^n) = \left(-g^{-1}x\right)^n = 0 \qquad \text{(nach vielfach angewandter Relation } gx = qxg\text{)};$$

$$\widehat{S}(\mathbf{G}\mathbf{X} - q\mathbf{X}\mathbf{G}) = 0 \qquad \text{wie in Beispiel } \mathbf{11)},$$

was zu beweisen war.

Nach Lemmata 1, 2 und 3 gibt es Algebrahomomorphismen $\Delta : H \to H \otimes H$ und $\varepsilon : H \to k$ und einen Antialgebrahomomorphismus $S : H \to H$ mit den geforderten Axiomen (denn die Axiome gelten auf erzeugenden Elementen, wie man nachrechnen kann[107]). Damit haben wir Beispiel **12)** bewiesen, aber wir sind den Beweis eines Lemmas schuldig geblieben. Bevor wir dieses Lemma formulieren können, definieren wir die sogenannten *q-Binomialkoeffizienten*:

Definition: Sei v eine Unbestimmte. Betrachte den Körper $\mathbb{Q}(v)$ der rationalen Funktionen in v.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $(n)_v \in \mathbb{Q}(v)$ durch

$$(n)_v = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} = \frac{v^n - 1}{v - 1},$$

und eine weitere Funktion $(n)_v! \in \mathbb{Q}(v)$ durch

$$(n)_v! = (1)_v (2)_v ... (n)_v \qquad \text{(das heißt insbesondere } (0)_v! = 1\text{)}.$$

Schließlich legen wir für beliebige ganze $n \geq 0$ und $i \in \{0, 1, ..., n\}$ eine Funktion $\binom{n}{i}_v \in \mathbb{Q}(v)$ durch

$$\binom{n}{i}_v = \frac{(n)_v!}{(i)_v! \, (n-i)_v!}$$

fest.

2.19. Lemma: Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ ist $\binom{n}{i}_v = \binom{n-1}{i-1}_v + v^i \binom{n-1}{i}_v$. Für alle ganzen $n \geq 0$ und $i \in \{0, 1, ..., n\}$ ist $\binom{n}{i}_v \in \mathbb{Z}[v]$.

[107] Wir haben die dazu notwendigen Rechnungen im Wesentlichen schon gemacht: Die Bialgebraaxiome auf den Erzeugenden g und x prüfen wir wie in Beispiel 2.1. **4)**, mit h durch 1 ersetzt, nach, und das Antipodenaxiom auf den Erzeugenden g und x beweisen wir wie in Beispiel 2.18. **11)**, mit h durch g^{-1} ersetzt.

Beweis: Die Gleichung $\binom{n}{i}_v = \binom{n-1}{i-1}_v + v^i \binom{n-1}{i}_v$ folgt aus einer simplen Rechnung:

$$\begin{aligned}
&\binom{n-1}{i-1}_v + v^i \binom{n-1}{i}_v = \frac{(n-1)_v!}{(i-1)_v!\,(n-i)_v!} + v^i \frac{(n-1)_v!}{(i)_v!\,(n-1-i)_v!} \\
&= \frac{(i)_v\,(n-1)_v!}{(i)_v\,(i-1)_v!\,(n-i)_v!} + v^i \frac{(n-i)_v\,(n-1)_v!}{(i)_v!\,(n-i)_v\,(n-1-i)_v!} \\
&= \frac{(i)_v\,(n-1)_v!}{(i)_v!\,(n-i)_v!} + v^i \frac{(n-i)_v\,(n-1)_v!}{(i)_v!\,(n-i)_v!} = \frac{(i)_v\,(n-1)_v! + v^i\,(n-i)_v\,(n-1)_v!}{(i)_v!\,(n-i)_v!}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&(i)_v\,(n-1)_v! + v^i\,(n-i)_v\,(n-1)_v! = (n-1)_v! \cdot \left((i)_v + v^i\,(n-i)_v\right) \\
&= (n-1)_v! \cdot \left(\frac{v^i-1}{v-1} + v^i \frac{v^{n-i}-1}{v-1}\right) = (n-1)_v! \cdot \left(\frac{v^i-1}{v-1} + \frac{v^n-v^i}{v-1}\right) \\
&= (n-1)_v! \cdot \frac{v^n-1}{v-1} = (n-1)_v! \cdot (n)_v = (n)_v!
\end{aligned}$$

wird dies zu

$$\binom{n-1}{i-1}_v + v^i \binom{n-1}{i}_v = \frac{(n)_v!}{(i)_v!\,(n-i)_v!} = \binom{n}{i}_v.$$

Nachdem nun diese Gleichung gezeigt ist, ergibt sich $\binom{n}{i}_v \in \mathbb{Z}[v]$ für alle ganzen $n \geq 0$ und $i \in \{0, 1, ..., n\}$ durch vollständige Induktion nach n. Lemma 2.19. ist bewiesen.

Definition: Sei $q \in k$. Dann können wir Elemente $(n)_q$, $(n)_q!$ und $\binom{n}{i}_q$ von k durch Einsetzen von q statt v in die Polynome $(n)_v$, $(n)_v!$ und $\binom{n}{i}_v$ (formal gesprochen: durch Anwenden des Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[v] \to k, \qquad v \mapsto q$$

auf diese Polynome) definieren. (Hier verwenden wir, daß $(n)_v$, $(n)_v!$ und $\binom{n}{i}_v$ tatsächlich Polynome sind; dies ist für $(n)_v$ und $(n)_v!$ klar, während es für $\binom{n}{i}_v$ aus Lemma 2.19. folgt).

2.20. Lemma: Sei $q \in k$ beliebig, sei A eine Algebra, und seien $a, b \in A$ zwei Elemente mit $ba = qab$.

1) Dann gilt $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_q a^i b^{n-i}$ für alle ganzen $n \geq 0$.

2) Ist q eine primitive n-te Einheitswurzel, so ist $(a+b)^n = a^n + b^n$.

Beweis: Zunächst stellen wir fest, daß

$$ba^i = q^i a^i b \qquad (2.20)$$

für jede nichtnegative ganze Zahl i gilt. (Dies folgt leicht durch Induktion nach i, wobei im Induktionsschritt auf die Formel $ba = qab$ zurückgegriffen wird.)

1) Wir führen vollständige Induktion nach n: Für $n = 0$ ist die Aussage trivial.
Der Induktionsschritt von $n-1$ auf n beruht auf

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)\cdot(a+b)^{n-1} = (a+b)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q a^i b^{n-1-i} \\
&\qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= a\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q a^i b^{n-1-i} + b\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q a^i b^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q a^{i+1} b^{n-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q b a^i b^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}_q a^i b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q \underbrace{b a^i b^{n-1-i}}_{\substack{=q^i a^i b b^{n-1-i},\\ \text{wegen (2.20)}}} \\
&\qquad \text{(nach Indexverschiebung in der ersten Summe)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}_q a^i b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q q^i \underbrace{a^i b b^{n-1-i}}_{=a^i b^{n-i}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}_q a^i b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}_q q^i a^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{\left(\binom{n-1}{i-1}_q + q^i\binom{n-1}{i}_q\right)}_{=\binom{n}{i}_q \text{ nach Lemma 2.19.}} a^i b^{n-i} + a^n + b^n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}_q a^i b^{n-i} + a^n + b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}_q a^i b^{n-i} \\
&\left(\begin{aligned} \text{denn } \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}_q a^i b^{n-i} &= \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}_q a^i b^{n-i} + \underbrace{\binom{n}{n}_q}_{=1} a^n \underbrace{b^{n-n}}_{=b^0=1} + \underbrace{\binom{n}{0}_q}_{=1} \underbrace{a^0}_{=1} \underbrace{b^{n-0}}_{=b^n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}_q a^i b^{n-i} + a^n + b^n \end{aligned}\right).
\end{aligned}
$$

2) Wegen **1)** müssen wir nur noch zeigen, daß $\binom{n}{i}_q = 0$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ ist.

Dies folgt aber aus $\binom{n}{i}_q \cdot (i)_q!\,(n-i)_q! = (n)_q!$ (denn $\binom{n}{i}_v = \dfrac{(n)_v!}{(i)_v!\,(n-i)_v!}$ ergibt $\binom{n}{i}_v \cdot (i)_v!\,(n-i)_v! = (n)_v!$), sowie $(n)_q! = 0$ (weil $(n)_q = \dfrac{q^n-1}{q-1} = 0$), aber $(i)_q! \neq 0$ und $(n-i)_q! \neq 0$ (denn q ist eine *primitive* n-te Einheitswurzel).

Damit ist Lemma 2.20 gezeigt.

Was ist eigentlich $\dim H$, wenn H wie in 2.18. **12)** definiert ist? Die Antwort für diese Frage wird in einem späteren Abschnitt (Beispiel 3.3. **4)**) abfallen.

2.21. Folgerung: Es gibt quasiinverse Äquivalenzen zwischen den Kategorien

$$\{H \mid H \text{ endlichdimensionale Bialgebra}\}^{\mathrm{op}} \rightleftarrows \{H \mid H \text{ endlichdimensionale Bialgebra}\},$$

gegeben durch $H \mapsto H^*$ (von links nach rechts) und $H \mapsto H^*$ (von rechts nach links). Dabei ist für jede endlichdimensionale Bialgebra $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ die Bialgebrastruktur auf H^* durch

$$\left(H^*, \Delta^* \circ \operatorname{kan}, \varepsilon^* \circ \operatorname{kan}', \operatorname{kan}^{-1} \circ \mu^*, (\operatorname{kan}')^{-1} \circ \eta^*\right)$$

gegeben, wobei $\operatorname{kan} : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ und $\operatorname{kan}' : k \to k^*$ die kanonischen Isomorphismen sind. (Diese Bialgebrastruktur entsteht aus den Algebra- und Coalgebrastrukturen von Folgerung 2.8.)

Ist H eine Hopfalgebra mit Antipode S, so ist diese Bialgebra H^* ebenfalls eine Hopfalgebra, und die Antipode von H^* ist die Abbildung $S^* : H^* \to H^*$, die durch $S^*(f)(x) = f(S(x))$ für alle $f \in H^*$ und $x \in H$ gegeben ist.

Beweis: Aufgabe auf Übungsblatt 5.

$\boxed{\text{op } \textbf{und} \text{ cop}}$

Definition: Sei H eine Bialgebra. Wir definieren zwei neue Bialgebrastrukturen H^{op} und H^{cop} auf dem Vektorraum H:

1) Wir definieren eine Bialgebra H^{op} wie folgt: Als Coalgebra sei $H^{\mathrm{op}} = H$. Für jedes Element $h \in H$ bezeichnen wir das entsprechende Element von H^{op} mit h^{op} [108]. Die Algebrastruktur auf H^{op} werde dadurch festgelegt, daß man $x^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} = (yx)^{\mathrm{op}}$ für je zwei Elemente $x, y \in H$ setzt, und 1^{op} als Eins von H^{op} deklariert.

2) Wir definieren eine Bialgebra H^{cop} wie folgt: Als Algebra sei $H^{\mathrm{cop}} = H$. Für jedes Element $h \in H$ bezeichnen wir das entsprechende Element von H^{cop} mit h^{cop} [109]. Die Coalgebrastruktur auf H^{cop} werde dadurch festgelegt, daß $\Delta_{H^{\mathrm{cop}}}(x^{\mathrm{cop}}) = \left(x_{(2)}\right)^{\mathrm{cop}} \otimes \left(x_{(1)}\right)^{\mathrm{cop}}$ und $\varepsilon_{H^{\mathrm{cop}}}(x^{\mathrm{cop}}) = \varepsilon(x)$ für jedes $x \in H$ gesetzt wird (wobei, wie immer, $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ ein Synonym für $\Delta_H(x)$ ist).

2.21$\frac{1}{2}$. Bemerkung: Sei H eine Bialgebra. Sei $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ der Vektorraumisomorphismus, der $a \otimes b$ auf $b \otimes a$ schickt für alle $a, b \in H$.

1) Die gemäß obiger Definition definierte Bialgebra H^{op} ist tatsächlich eine Bialgebra. Es gilt $\mu_{H^{\mathrm{op}}} = \mu \circ \tau$, $\eta_{H^{\mathrm{op}}} = \eta$, $\Delta_{H^{\mathrm{op}}} = \Delta$ und $\varepsilon_{H^{\mathrm{op}}} = \varepsilon$.

2) Die gemäß obiger Definition definierte Bialgebra H^{cop} ist tatsächlich eine Bialgebra. Es gilt $\mu_{H^{\mathrm{cop}}} = \mu$, $\eta_{H^{\mathrm{cop}}} = \eta$, $\Delta_{H^{\mathrm{cop}}} = \tau \circ \Delta$ und $\varepsilon_{H^{\mathrm{cop}}} = \varepsilon$.

[108] Es gilt also $h^{\mathrm{op}} = h$ für jedes $h \in H$. Aber wir sollten trotzdem zwischen h und h^{op} unterscheiden, denn für zwei Elemente $h_1, h_2 \in H$ meinen wir mit $h_1 h_2$ das Produkt dieser zwei Elemente in H, während wir unter $h_1^{\mathrm{op}} h_2^{\mathrm{op}}$ das Produkt dieser zwei Elemente in H^{op} verstehen, und diese Produkte sind im Allgemeinen nicht gleich, denn als Algebren sind H und H^{op} nicht identisch.

[109] Es gilt also $h^{\mathrm{cop}} = h$ für jedes $h \in H$. Aber wir sollten trotzdem zwischen h und h^{cop} unterscheiden, denn für ein $h \in H$ meinen wir mit $\Delta(h)$ das Bild von h unter der Comultiplikation Δ_H der Coalgebra H, während $\Delta(h^{\mathrm{cop}})$ das Bild von h unter der Comultiplikation $\Delta_{H^{\mathrm{cop}}}$ der Coalgebra H^{cop} bedeutet, und diese Bilder sind im Allgemeinen nicht gleich, denn als Coalgebren sind H und H^{cop} nicht identisch.

3) Es gilt $H^{\mathrm{op\,cop}} = H^{\mathrm{cop\,op}}$. [110] Es gilt $\mu_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \mu \circ \tau$, $\eta_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \eta$, $\Delta_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \tau \circ \Delta$ und $\varepsilon_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \varepsilon$.

4) Genau dann ist die Hopfalgebra H kommutativ, wenn $H = H^{\mathrm{op}}$ ist.

5) Genau dann ist die Hopfalgebra H cokommutativ, wenn $H = H^{\mathrm{cop}}$ ist.

6) Ist H eine Hopfalgebra, dann ist auch $H^{\mathrm{op\,cop}}$ eine Hopfalgebra mit der gleichen Antipode wie H.

7) Ist H eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode S, dann sind H^{op} und H^{cop} Hopfalgebren mit bijektiver Antipode S^{-1}.

8) Ist H eine Hopfalgebra, dann ist die Antipode $S : H \to H$ ein Hopfalgebrahomomorphismus von H nach $H^{\mathrm{op\,cop}}$.

Beweis: **1)-5)** sind triviale Rechnungen.

6) Da H eine Hopfalgebra ist, ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dd, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
H \otimes H \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[dd, "S \otimes \mathrm{id}"] \\
 & k \arrow[dd, "\eta"] & \\
H \otimes H \arrow[dr, "\mu"'] & & H \otimes H \arrow[dl, "\mu"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Um zu zeigen, daß $H^{\mathrm{op\,cop}}$ eine Hopfalgebra mit Antipode S ist, müssen wir nachprüfen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H^{\mathrm{op\,cop}} \arrow[dl, "\Delta_{H^{\mathrm{op\,cop}}}"'] \arrow[dd, "\varepsilon_{H^{\mathrm{op\,cop}}}"] \arrow[dr, "\Delta_{H^{\mathrm{op\,cop}}}"] & \\
H^{\mathrm{op\,cop}} \otimes H^{\mathrm{op\,cop}} \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & H^{\mathrm{op\,cop}} \otimes H^{\mathrm{op\,cop}} \arrow[dd, "S \otimes \mathrm{id}"] \\
 & k \arrow[dd, "\eta_{H^{\mathrm{op\,cop}}}"] & \\
H^{\mathrm{op\,cop}} \otimes H^{\mathrm{op\,cop}} \arrow[dr, "\mu_{H^{\mathrm{op\,cop}}}"'] & & H^{\mathrm{op\,cop}} \otimes H^{\mathrm{op\,cop}} \arrow[dl, "\mu_{H^{\mathrm{op\,cop}}}"] \\
 & H^{\mathrm{op\,cop}} &
\end{tikzcd}$$

ebenfalls kommutativ ist. Da $H^{\mathrm{op\,cop}} = H$ und $H^{\mathrm{op\,cop}} \otimes H^{\mathrm{op\,cop}} = H \otimes H$ als Mengen (und sogar als Vektorräume) gilt, und wegen **3)**, ist dies dazu äquivalent, daß das

[110] Mit $H^{\mathrm{op\,cop}} = H^{\mathrm{cop\,op}}$ meinen wir nicht nur, daß $H^{\mathrm{op\,cop}} \cong H^{\mathrm{cop\,op}}$ als Bialgebren sind, sondern daß die Bialgebrastrukturen von $H^{\mathrm{op\,cop}}$ und $H^{\mathrm{cop\,op}}$ auf dem Vektorraum H wirklich identisch sind, also daß $\mu_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \mu_{H^{\mathrm{cop\,op}}}$, $\eta_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \eta_{H^{\mathrm{cop\,op}}}$, $\Delta_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \Delta_{H^{\mathrm{cop\,op}}}$ und $\varepsilon_{H^{\mathrm{op\,cop}}} = \varepsilon_{H^{\mathrm{cop\,op}}}$ gilt.

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, "\tau\circ\Delta"'] \arrow[dr, "\tau\circ\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \\
H\otimes H \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes S"'] & k \arrow[dd, "\eta"] & H\otimes H \arrow[dd, "S\otimes\mathrm{id}"] \\
 & & \\
H\otimes H \arrow[dr, "\mu\circ\tau"'] & & H\otimes H \arrow[dl, "\mu\circ\tau"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Doch dies ist wahr, denn

$$(\mu\circ\tau)\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ(\tau\circ\Delta)=\mu\circ\left(\underbrace{\tau\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ\tau}_{=S\otimes\mathrm{id}}\right)\circ\Delta=\mu\circ(S\otimes\mathrm{id})\circ\Delta=\eta\circ\varepsilon$$

und

$$(\mu\circ\tau)\circ(S\otimes\mathrm{id})\circ(\tau\circ\Delta)=\mu\circ\left(\underbrace{\tau\circ(S\otimes\mathrm{id})\circ\tau}_{=\mathrm{id}\otimes S}\right)\circ\Delta=\mu\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ\Delta=\eta\circ\varepsilon.$$

7) Da S ein Antialgebrahomomorphismus ist, ist auch S^{-1} ein solcher. Somit ist $\mu\circ\tau\circ(S^{-1}\otimes S^{-1})=S^{-1}\circ\mu$, also

$$(\mu\circ\tau)\circ\underbrace{\left(\mathrm{id}\otimes S^{-1}\right)}_{=(S^{-1}\otimes S^{-1})\circ(S\otimes\mathrm{id})}=\underbrace{\mu\circ\tau\circ\left(S^{-1}\otimes S^{-1}\right)}_{=S^{-1}\circ\mu}\circ(S\otimes\mathrm{id})=S^{-1}\circ\mu\circ(S\otimes\mathrm{id})$$

und

$$(\mu\circ\tau)\circ\underbrace{\left(S^{-1}\otimes\mathrm{id}\right)}_{=(S^{-1}\otimes S^{-1})\circ(\mathrm{id}\otimes S)}=\underbrace{\mu\circ\tau\circ\left(S^{-1}\otimes S^{-1}\right)}_{=S^{-1}\circ\mu}\circ(\mathrm{id}\otimes S)=S^{-1}\circ\mu\circ(\mathrm{id}\otimes S)\,.$$

Da H eine Hopfalgebra ist, ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \\
H\otimes H \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes S"'] & k \arrow[dd, "\eta"] & H\otimes H \arrow[dd, "S\otimes\mathrm{id}"] \\
 & & \\
H\otimes H \arrow[dr, "\mu"'] & & H\otimes H \arrow[dl, "\mu"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Um zu zeigen, daß H^{op} eine Hopfalgebra mit Antipode S^{-1} ist, müssen wir nachprüfen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\Delta_{H^{\mathrm{op}}}"'] \arrow[dr, "\Delta_{H^{\mathrm{op}}}"] \arrow[dd, "\varepsilon_{H^{\mathrm{op}}}"] & \\
H^{\mathrm{op}} \otimes H^{\mathrm{op}} \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S^{-1}"'] & & H^{\mathrm{op}} \otimes H^{\mathrm{op}} \arrow[dd, "S^{-1} \otimes \mathrm{id}"] \\
 & k \arrow[dd, "\eta_{H^{\mathrm{op}}}"] & \\
H^{\mathrm{op}} \otimes H^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mu_{H^{\mathrm{op}}}"'] & & H^{\mathrm{op}} \otimes H^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mu_{H^{\mathrm{op}}}"] \\
 & H^{\mathrm{op}} &
\end{tikzcd}$$

ebenfalls kommutativ ist. Da $H^{\mathrm{op}} = H$ und $H^{\mathrm{op}} \otimes H^{\mathrm{op}} = H \otimes H$ als Mengen (sogar als Vektorräume) gilt, und wegen **1)**, ist dies dazu äquivalent, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[dd, "\varepsilon"] & \\
H \otimes H \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S^{-1}"'] & & H \otimes H \arrow[dd, "S^{-1} \otimes \mathrm{id}"] \\
 & k \arrow[dd, "\eta"] & \\
H \otimes H \arrow[dr, "\mu \circ \tau"'] & & H \otimes H \arrow[dl, "\mu \circ \tau"] \\
 & H &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Doch dies ist leicht:

$$\underbrace{(\mu \circ \tau) \circ \left(\mathrm{id} \otimes S^{-1}\right)}_{= S^{-1} \circ \mu \circ (S \otimes \mathrm{id})} \circ \Delta = S^{-1} \circ \underbrace{\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta}_{= \eta \circ \varepsilon} = S^{-1} \circ \eta \circ \varepsilon = \eta \circ \varepsilon$$

(denn $S^{-1} \circ \eta = \eta$, weil S^{-1} ein Antialgebrahomomorphismus ist), und

$$\underbrace{(\mu \circ \tau) \circ \left(S^{-1} \otimes \mathrm{id}\right)}_{= S^{-1} \circ \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S)} \circ \Delta = S^{-1} \circ \underbrace{\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta}_{= \eta \circ \varepsilon} = S^{-1} \circ \eta \circ \varepsilon = \eta \circ \varepsilon$$

(wieder wegen $S^{-1} \circ \eta = \eta$). Somit ist gezeigt, daß H^{op} eine Hopfalgebra mit Antipode S^{-1} ist. Analog beweist man die entsprechende Aussage für H^{cop} (alternativ kann man auch $H^{\mathrm{cop}} = \left(H^{\mathrm{op\,cop}}\right)^{\mathrm{op}}$ benutzen und auf das bereits Bewiesene zurückgreifen).

8) Wir wissen (nach 2.13 **1)**), daß die Antipode S von H ein Antialgebrahomomorphismus von H nach H ist. Mit anderen Worten: Die Antipode S ist ein Algebrahomomorphismus von H nach H^{op}. Da $H^{\mathrm{op}} = H^{\mathrm{op\,cop}}$ *als Algebra* ist, läßt sich dies folgendermaßen umschreiben: Die Antipode S ist ein Algebrahomomorphismus von H nach $H^{\mathrm{op\,cop}}$. Analog erhält man, daß S ein Coalgebrahomomorphismus von H nach $H^{\mathrm{op\,cop}}$ ist (denn S ist ein Anticoalgebrahomomorphismus von H nach H, und $H^{\mathrm{cop}} = H^{\mathrm{op\,cop}}$ *als Coalgebra*). Somit ist S ein Hopfalgebrahomomorphismus von H nach $H^{\mathrm{op\,cop}}$, was zu beweisen war.

Eine andere Charakterisierung von Hopfalgebren

Wir haben Hopfalgebren definiert als Bialgebren, die eine Antipode (d. h. eine Abbildung mit bestimmten Eigenschaften) besitzen. Oft ist auch ein anderes Kriterium für Hopfalgebren nützlich:

$2.21\frac{15}{20}$. Satz: Sei H eine Bialgebra. Genau dann ist H eine Hopfalgebra, wenn die lineare Abbildung

$$\Phi : H \otimes H \to H \otimes H, \qquad x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Beweis (nur teilweise): Zum Beweis dieses Satzes müssen wir folgende zwei Aussagen zeigen:

Aussage 1: Ist H eine Hopfalgebra, dann ist Φ ein Vektorraumisomorphismus.

Aussage 2: Ist Φ ein Vektorraumisomorphismus, dann ist H eine Hopfalgebra.

Wir werden im Folgenden Aussage 1 komplett beweisen, während wir Aussage 2 nur für den Fall $\dim H < \infty$ nachweisen.[111]

Zum Beweis beider Aussagen führen wir folgende Notation ein: Ist $f : H \to H$ eine lineare Abbildung, dann bezeichne Φ_f die lineare Abbildung $H \otimes H \to H \otimes H$, die durch

$$\Phi_f (x \otimes y) = xf\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} \qquad \text{für alle } x, y \in H$$

definiert ist. Offensichtlich ist $\Phi_{\mathrm{id}} = \Phi$. Es gilt:

Lemma 1: Seien $f : H \to H$ und $g : H \to H$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist $\Phi_f \circ \Phi_g = \Phi_{g*f}$. Ferner ist $\Phi_{\eta\varepsilon} = \mathrm{id}_{H\otimes H}$.

Beweis von Lemma 1: Für alle $x, y \in H$ ist

$$\begin{aligned}(\Phi_f \circ \Phi_g)(x \otimes y) &= \Phi_f (\Phi_g (x \otimes y)) = \Phi_f \left(xg\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}\right) \\ &= xg\left(y_{(1)}\right) f\left(\left(y_{(2)}\right)_{(1)}\right) \otimes \left(y_{(2)}\right)_{(2)} = xg\left(y_{(1)}\right) f\left(y_{(2)}\right) \otimes y_{(3)} \\ &= x(g*f)\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} = \Phi_{g*f}(x \otimes y).\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\Phi_f \circ \Phi_g = \Phi_{g*f}$ (denn zwei lineare Abbildungen aus einem Tensorprodukt, die auf jedem reinen Tensor übereinstimmen, müssen identisch sein). Die Behauptung $\Phi_{\eta\varepsilon} = \mathrm{id}_{H\otimes H}$ folgt aus

$$\Phi_{\eta\varepsilon}(x \otimes y) = x(\eta\varepsilon)\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} = \varepsilon\left(y_{(1)}\right) x \otimes y_{(2)} = x \otimes \varepsilon\left(y_{(1)}\right) y_{(2)} = x \otimes y$$

für alle $x, y \in H$. Damit ist Lemma 1 gezeigt.

Beweis von Aussage 1: Da H eine Hopfalgebra ist, gibt es eine lineare Abbildung $S : H \to H$ mit $S * \mathrm{id} = \mathrm{id} * S = \eta\varepsilon$. Daraus folgt $\Phi_{S*\mathrm{id}} = \Phi_{\mathrm{id}*S} = \Phi_{\eta\varepsilon}$. Nach

[111] Später (in Abschnitt $4.2\frac{1}{2}$.) werden wir auch einen kompletten Beweis von Aussage 2 liefern, und damit den Beweis von Satz $2.21\frac{15}{20}$. abschließen.

Lemma 1 wird dies zu $\Phi_{\mathrm{id}} \circ \Phi_S = \Phi_S \circ \Phi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{H \otimes H}$, und somit ist Φ_{id} (also Φ) ein Vektorraumisomorphismus. Aussage 1 ist also gezeigt.

Für unseren Teil-Beweis von Aussage 2 benötigen wir drei weitere Lemmata:

Lemma 2: Seien $f : H \to H$ und $g : H \to H$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist $\Phi_f + \Phi_g = \Phi_{f+g}$. Für jede lineare Abbildung $f : H \to H$ und jedes $\lambda \in k$ gilt $\lambda \Phi_f = \Phi_{\lambda f}$.

Lemma 3: Die Abbildung

$$(\mathrm{Hom}\,(H, H))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}\,(H \otimes H)\,, \qquad f \mapsto \Phi_f$$

ist ein injektiver Algebrahomomorphismus, wobei die Multiplikation auf $\mathrm{Hom}\,(H, H)$ die Faltung $*$ ist, während die Multiplikation auf $\mathrm{End}\,(H \otimes H)$ die Verkettung $\circ$ ist.[112]

Lemma 4: Ist V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$, und ist $f : V \to V$ ein Vektorraumisomorphismus, dann gibt es ein Polynom $P \in k\,[X]$ mit $f^{-1} = P\,(f)$, wobei die Multiplikation auf $\mathrm{End}\, V$ die Verkettung $\circ$ sein soll.

Beweis von Lemma 2: Trivial.

Beweis von Lemma 3: Aus Lemmata 1 und 2 folgt, daß

$$(\mathrm{Hom}\,(H, H))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}\,(H \otimes H)\,, \qquad f \mapsto \Phi_f$$

ein Algebrahomomorphismus ist. Dieser Homomorphismus ist injektiv, denn für jedes $f \in \mathrm{Hom}\,(H, H)$ gilt

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon)\,(\Phi_f\,(1 \otimes y)) \\
&= (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon)\left(1 f\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}\right) = 1 f\left(y_{(1)}\right) \otimes \varepsilon\left(y_{(2)}\right) \\
&= 1 f\left(y_{(1)}\right) \varepsilon\left(y_{(2)}\right) \qquad \text{(hier haben wir kanonisch } H \otimes k \text{ mit } H \text{ identifiziert)} \\
&= f\left(y_{(1)} \varepsilon\left(y_{(2)}\right)\right) = f\,(y)
\end{aligned}$$

für alle $y \in H$, und aus $\Phi_f = 0$ folgt somit $f = 0$.

Beweis von Lemma 4: Sei $n = \dim V$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i f^i = 0$, wobei $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in k\,[X]$ das charakteristische Polynom von f ist. Da f ein Isomorphismus ist, gilt $\det f \neq 0$, und somit ist $a_0 \neq 0$ (denn $a_0 = (-1)^n \det f$). Aus $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i f^i = 0$ wird aber $a_0 f^0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f^i = 0$, also $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f^i = -a_0 f^0 = -a_0$, also $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f^{i-1} = -a_0 f^{-1}$ und damit

$$f^{-1} = -\underbrace{a_0^{-1}}_{\substack{\text{existiert,}\\ \text{da } a_0 \neq 0}} \sum_{i=1}^{n} a_i f^{i-1} = P\,(f)\,,$$

wobei $P \in k\,[X]$ das durch $P\,(X) = -a_0^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X^{i-1}$ definierte Polynom ist.

[112] Dies sind zwei unterschiedliche Arten von Multiplikation! Dies ist auch der Grund, wieso wir $\mathrm{Hom}\,(H, H)$ anstelle von $\mathrm{End}\, H$ schreiben: Denn als Vektorräume sind $\mathrm{Hom}\,(H, H)$ und $\mathrm{End}\, H$ zwar identisch, doch die Notation $\mathrm{End}\, H$ trägt eine starke Ähnlichkeit zu $\mathrm{End}\,(H \otimes H)$, und könnte daher nahelegen, daß wir die Multiplikation auf $\mathrm{End}\, H$ ähnlich zu der auf $\mathrm{End}\,(H \otimes H)$ definieren, was aber nicht der Fall ist.

Beweis von Aussage 2 im Fall $\dim H < \infty$*:* Angenommen, Φ ist ein Vektorraumisomorphismus, und $\dim H < \infty$. Wir wollen zeigen, daß H eine Hopfalgebra ist.

Nach Lemma 4 gibt es ein Polynom $P \in k[X]$ mit $\Phi^{-1} = P(\Phi)$, also $\Phi_{\mathrm{id}}^{-1} = P(\Phi_{\mathrm{id}})$. Nach Lemma 3 gilt $P(\Phi_{\mathrm{id}}) = \Phi_{P(\mathrm{id})}$, wobei $P(\mathrm{id})$ als Element von $(\mathrm{Hom}(H,H))^{\mathrm{op}}$ angesehen wird. Wir haben also $\Phi_{\mathrm{id}}^{-1} = \Phi_{P(\mathrm{id})}$, damit $\Phi_{\mathrm{id}} \circ \Phi_{P(\mathrm{id})} = \Phi_{P(\mathrm{id})} \circ \Phi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{H \otimes H}$. Nach Lemma 1 wird dies zu $\Phi_{P(\mathrm{id}) * \mathrm{id}} = \Phi_{\mathrm{id} * P(\mathrm{id})} = \Phi_{\eta\varepsilon}$. Da die Abbildung

$$(\mathrm{Hom}(H,H))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}(H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

injektiv ist, folgt hieraus $P(\mathrm{id}) * \mathrm{id} = \mathrm{id} * P(\mathrm{id}) = \eta\varepsilon$. Das heißt, $P(\mathrm{id})$ ist ein $*$-Inverses zu id. Somit ist H eine Hopfalgebra mit Antipode $P(\mathrm{id})$, und Aussage 2 ist im Fall $\dim H < \infty$ bewiesen.

Bemerkung: Der vollständige Beweis von Satz $2.21\frac{15}{20}$. war Gegenstand von Aufgabe 3 auf Übungsblatt 5. Wir werden einen solchen Beweis in Abschnitt $4.2\frac{1}{2}$. geben.

Satz $2.21\frac{15}{20}$. hat eine Reihe von Anwendungen. Wir beginnen mit einer, die Gegenstand von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 6 war:

$2.21\frac{16}{20}$. Satz: Seien H eine Hopfalgebra und H' eine endlichdimensionale Bialgebra. Angenommen, mindestens eine der folgenden beiden Bedingungen ist erfüllt:

a) Es gilt $H' \subseteq H$, und die Inklusionsabbildung $H' \to H$ ist ein Bialgebrahomomorphismus (das heißt, H' ist eine Unterbialgebra von H).

b) Es gibt einen surjektiven Bialgebrahomomorphismus $H \to H'$.

Dann ist H' eine Hopfalgebra.

Beweis: Gemäß Satz $2.21\frac{15}{20}$. ist die lineare Abbildung

$$\Phi : H \otimes H \to H \otimes H, \qquad x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)}$$

ein Vektorraumisomorphismus, also injektiv und surjektiv.

Angenommen, die Bedingung *a)* ist erfüllt. Dann können wir $H' \otimes H'$ kanonisch als Untervektorraum von $H \otimes H$ auffassen. Dann ist die lineare Abbildung

$$H' \otimes H' \to H' \otimes H', \qquad x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)}$$

injektiv (denn sie ist einfach die Einschränkung der injektiven Abbildung Φ auf $H' \otimes H'$), also ein Vektorraumisomorphismus (denn $\dim H' < \infty$ ergibt $\dim(H' \otimes H') < \infty$, und somit ist jede injektive lineare Abbildung $H' \otimes H' \to H' \otimes H'$ ein Vektorraumisomorphismus). Nach Satz $2.21\frac{15}{20}$. ist H' also eine Hopfalgebra.

Jetzt vergessen wir Bedingung *a)* und nehmen stattdessen an, die Bedingung *b)* sei erfüllt. Sei $p : H \to H'$ ein surjektiver Bialgebrahomomorphismus. Natürlich ist dann auch die Abbildung $p \otimes p : H \otimes H \to H' \otimes H'$ surjektiv. Definiere eine Abbildung Φ' durch

$$\Phi' : H' \otimes H' \to H' \otimes H', \qquad x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)}.$$

Dann ist

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "p \otimes p"] \arrow[d, "\Phi"] & H' \otimes H' \arrow[d, "\Phi'"] \\ H \otimes H \arrow[r, "p \otimes p"] & H' \otimes H' \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm (da p ein Bialgebrahomomorphismus ist). Da Φ und $p \otimes p$ surjektiv sind, ist auch $\Phi' \circ (p \otimes p) = (p \otimes p) \circ \Phi$ surjektiv, und somit ist Φ' selber surjektiv, und damit ein Vektorraumisomorphismus (denn $\dim H' < \infty$ ergibt $\dim (H' \otimes H') < \infty$, und somit ist jede surjektive lineare Abbildung $H' \otimes H' \to H' \otimes H'$ ein Vektorraumisomorphismus). Nach Satz $2.21\frac{15}{20}$. ist H' also eine Hopfalgebra.

Wir haben damit sowohl unter Bedingung *a)*, als auch unter Bedingung *b)* nachgewiesen, daß H' eine Hopfalgebra ist. Damit ist Satz $2.21\frac{16}{20}$. gezeigt.

$\mathbf{2.21\frac{17}{20}}$. Folgerung: Sei H eine Hopfalgebra, und sei I ein Biideal von H mit $\dim (H \diagup I) < \infty$. Dann ist I ein Hopfideal von H.

Beweis: Gemäß 2.17. **1)** ist $H \diagup I$ eine Bialgebra, und die kanonische Projektion $H \to H \diagup I$ ist ein surjektiver Bialgebrahomomorphismus. Nach Satz $2.21\frac{16}{20}$. ist also $H \diagup I$ eine Hopfalgebra (da $\dim (H \diagup I) < \infty$), und somit ist die kanonische Projektion $H \to H \diagup I$ ein Hopfalgebrahomomorphismus. Nach 2.17. **7)** ist also sein Kern (das heißt, I) ein Hopfideal von H, was zu beweisen war.

Als Kuriosum sei angemerkt, daß sich Folgerung $2.21\frac{17}{20}$ mit Bemerkung 2.17 **8)** "vermengen" läßt:

$\mathbf{2.21\frac{18}{20}}$. Bemerkung: Sei H eine Hopfalgebra, und sei I ein Ideal von H, welches $I \neq H$, $\dim (H \diagup I) < \infty$ und $\Delta (I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$ erfüllt. Dann ist I ein Hopfideal von H.

Beweis: Wir wollen zunächst zeigen, daß $\varepsilon (I) = 0$ ist.

Wir führen den Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $\varepsilon (I) \neq 0$. Dann existiert ein $q \in I$, welches $\varepsilon (q) = 1$ erfüllt[113]. Betrachte dieses q.

Sei das Hopfideal H^+ von H definiert wie in Bemerkung 2.17 **5)**. Sei $I^+ = I \cap H^+$. Da I und H^+ Ideale von H sind, ist auch $I \cap H^+$ ein Ideal von H. Das heißt, I^+ ist ein Ideal von H (denn $I^+ = I \cap H^+$).

Wir definieren nun eine Abbildung $\nu : H \to H$ durch

$$(\nu (x) = x - \varepsilon (x) \cdot q \qquad \text{für alle } x \in H) .$$

[113] *Beweis:* Wegen $\varepsilon (I) \neq 0$ existiert ein $w \in I$, welches $\varepsilon (w) \neq 0$ erfüllt. Betrachte dieses w. Da k ein Körper ist, ist $\varepsilon (w)$ invertierbar (da $\varepsilon (w) \neq 0$), und es gilt $\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon (w)} w \right) = \frac{1}{\varepsilon (w)} \varepsilon (w) = 1$. Da $\frac{1}{\varepsilon (w)} w \in I$ ist (denn $w \in I$), existiert also ein $q \in I$, welches $\varepsilon (q) = 1$ erfüllt (nämlich $q = \frac{1}{\varepsilon (w)} w$), qed.

Dann ist $\nu(I) \subseteq I^+$ [114]. Für jedes $x \in I$ gilt nun

$$\begin{aligned}
&(\nu \otimes \nu)\left(\underbrace{\Delta(x)}_{=x_{(1)}\otimes x_{(2)}}\right) \\
&= (\nu \otimes \nu)\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) = \underbrace{\nu\left(x_{(1)}\right)}_{\substack{=x_{(1)}-\varepsilon\left(x_{(1)}\right)\cdot q \\ \text{(nach der Definition von } \nu\text{)}}} \otimes \underbrace{\nu\left(x_{(2)}\right)}_{\substack{=x_{(2)}-\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot q \\ \text{(nach der Definition von } \nu\text{)}}} \\
&= \left(x_{(1)} - \varepsilon\left(x_{(1)}\right) \cdot q\right) \otimes \left(x_{(2)} - \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot q\right) \\
&= \underbrace{x_{(1)} \otimes x_{(2)}}_{=\Delta(x)} - \underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \cdot q \otimes x_{(2)}}_{=q\otimes\varepsilon\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}} - \underbrace{x_{(1)} \otimes \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot q}_{=x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\otimes q} + \underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \cdot q \otimes \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot q}_{=\varepsilon\left(x_{(1)}\right)\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot q\otimes q} \\
&= \Delta(x) - q \otimes \underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}}_{=x} - \underbrace{x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x} \otimes q + \underbrace{\varepsilon\left(x_{(1)}\right)\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{\substack{=\varepsilon\left(x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\right)=\varepsilon(x) \\ \left(\text{da } x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)=x\right)}} \cdot q \otimes q \\
&= \Delta(x) - q \otimes x - x \otimes q + \varepsilon(x) \cdot q \otimes q,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\Delta(x) - q \otimes x - x \otimes q + \varepsilon(x) \cdot q \otimes q &= (\nu \otimes \nu)\left(\Delta\left(\underbrace{x}_{\in I}\right)\right) \in (\nu \otimes \nu) \underbrace{(\Delta(I))}_{\subseteq I\otimes H + H\otimes I} \\
&\subseteq (\nu \otimes \nu)(I \otimes H + H \otimes I) \subseteq \underbrace{\nu(I)}_{\subseteq I^+} \otimes \underbrace{\nu(H)}_{\subseteq H} + \underbrace{\nu(H)}_{\subseteq H} \otimes \underbrace{\nu(I)}_{\subseteq I^+} \\
&\subseteq I^+ \otimes H + H \otimes I^+,
\end{aligned}$$

also

$$\Delta(x) \in q \otimes x + x \otimes q - \varepsilon(x) \cdot q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+.$$

Für jedes $x \in I^+$ gilt also

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &\in \underbrace{q}_{\in H} \otimes \underbrace{x}_{\in I^+} + \underbrace{x}_{\in I^+} \otimes \underbrace{q}_{\in H} - \underbrace{\varepsilon(x)}_{\substack{=0 \\ (\text{da } x\in I^+=I\cap H^+\subseteq H^+=\operatorname{Ker}\varepsilon)}} \cdot q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+ \qquad \left(\text{da } x \in I^+ \subseteq I\right) \\
&\subseteq H \otimes I^+ + I^+ \otimes H - \underbrace{0 \cdot q \otimes q}_{=0} + I^+ \otimes H + H \otimes I^+ \\
&= H \otimes I^+ + I^+ \otimes H + I^+ \otimes H + H \otimes I^+ = \underbrace{\left(I^+ \otimes H + I^+ \otimes H\right)}_{\substack{\subseteq I^+\otimes H \\ (\text{da } I^+\otimes H \text{ ein Vektorraum ist})}} + \underbrace{\left(H \otimes I^+ + H \otimes I^+\right)}_{\substack{\subseteq H\otimes I^+ \\ (\text{da } H\otimes I^+ \text{ ein Vektorraum ist})}} \\
&\subseteq I^+ \otimes H + H \otimes I^+.
\end{aligned}$$

---

[114] *Beweis:* Sei $x \in I$. Aus $\nu(x) = \underbrace{x}_{\in I} - \varepsilon(x) \cdot \underbrace{q}_{\in I} \in I - \varepsilon(x) \cdot I \subseteq I$ (da I ein Ideal ist) und $\nu(x) = x - \varepsilon(x) \cdot q \in \operatorname{Ker}\varepsilon$ (denn $\varepsilon(x - \varepsilon(x) \cdot q) = \varepsilon(x) - \varepsilon(x) \cdot \underbrace{\varepsilon(q)}_{=1} = \varepsilon(x) - \varepsilon(x) = 0$) folgt $\nu(x) \in I \cap \underbrace{(\operatorname{Ker}\varepsilon)}_{=H^+} = I \cap H^+ = I^+$.

Wir haben also gezeigt, daß $\nu(x) \in I^+$ für jedes $x \in I$ ist. Mit anderen Worten: $\nu(I) \subseteq I^+$, was zu beweisen war.

Mit anderen Worten: $\Delta(I^+) \subseteq I^+ \otimes H + H \otimes I^+$. Zusammen mit $\varepsilon(I^+) = 0$ (denn $I^+ = I \cap H^+ \subseteq H^+ = \operatorname{Ker}\varepsilon$) beweist dies, daß I^+ ein Coideal von H ist. Da I^+ auch ein Ideal von H ist, folgt hieraus, daß I^+ ein Biideal von H ist. Da $I^+ = I \cap \underbrace{H^+}_{=\operatorname{Ker}\varepsilon} = I \cap (\operatorname{Ker}\varepsilon) = \operatorname{Ker}(\varepsilon\mid_I)$ gilt, ist $I \diagup I^+ = I \diagup \operatorname{Ker}(\varepsilon\mid_I) \cong (\varepsilon\mid_I)(I)$ (nach dem Homomorphiesatz), also $\dim(I \diagup I^+) = \dim((\varepsilon\mid_I)(I)) < \infty$ (da $(\varepsilon\mid_I)(I)$ ein Untervektorraum von k und daher endlichdimensional ist). Nun ist $\dim(H \diagup I^+) = \underbrace{\dim(H \diagup I)}_{<\infty} + \underbrace{\dim\left(I \diagup I^+\right)}_{<\infty} < \infty + \infty = \infty$. Nach Folgerung $2.21\frac{17}{20}$ (angewandt auf I^+ statt I) ist also I^+ ein Hopfideal von H. Daher ist $S(I^+) \subseteq I^+$. Wegen $I^+ \subseteq I \cap H^+ \subseteq I$ folgt hieraus $S(I^+) \subseteq I$.

Doch wir haben oben gesehen, daß

$$\Delta(x) \in q \otimes x + x \otimes q - \varepsilon(x) \cdot q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+$$

für jedes $x \in I$ ist. Angewandt auf $x = q$ ergibt dies, daß

$$\begin{aligned} \Delta(q) &\in q \otimes q + q \otimes q - \underbrace{\varepsilon(q)}_{=1} \cdot q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+ \\ &= q \otimes q + q \otimes q - q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+ \\ &= q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+ \end{aligned}$$

gilt. Wenden wir die Abbildung $\mu \circ (S \otimes \mathrm{id})$ auf beide Seiten dieser Gleichung an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}))(\Delta(q)) &\in (\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}))\left(q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+\right) \\ &= \mu\left((S \otimes \mathrm{id})\left(q \otimes q + I^+ \otimes H + H \otimes I^+\right)\right) \\ &= \mu\left(\underbrace{(S \otimes \mathrm{id})(q \otimes q)}_{=S(q)\otimes \mathrm{id}(q)} + \underbrace{(S \otimes \mathrm{id})\left(I^+ \otimes H\right)}_{\subseteq S(I^+)\otimes \mathrm{id}(H)} + \underbrace{(S \otimes \mathrm{id})\left(H \otimes I^+\right)}_{\subseteq S(H)\otimes \mathrm{id}(I^+)}\right) \\ &= \mu\left(\underbrace{S(q)}_{\in H} \otimes \underbrace{\mathrm{id}(q)}_{=q\in I} + \underbrace{S\left(I^+\right)}_{\subseteq I} \otimes \underbrace{\mathrm{id}(H)}_{\subseteq H} + \underbrace{S(H)}_{\subseteq H} \otimes \underbrace{\mathrm{id}\left(I^+\right)}_{=I^+\subseteq I}\right) \\ &\subseteq \mu(H \otimes I + I \otimes H + H \otimes I) = \underbrace{H \cdot I}_{\substack{\subseteq I \\ \text{(denn } I \text{ ist ein Ideal)}}} + \underbrace{I \cdot H}_{\substack{\subseteq I \\ \text{(denn } I \text{ ist ein Ideal)}}} + \underbrace{H \cdot I}_{\substack{\subseteq I \\ \text{(denn } I \text{ ist ein Ideal)}}} \\ &\qquad \text{(denn } \mu \text{ ist die Multiplikationsabbildung von } H\text{)} \\ &\subseteq I + I + I \subseteq I \qquad \text{(denn } I \text{ ist ein Untervektorraum von } H\text{)}. \end{aligned}$$

Doch wegen

$$\begin{aligned} (\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}))(\Delta(q)) &= \underbrace{(\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta)}_{\substack{=\eta\circ\varepsilon \\ \text{(nach der Definition der Antipode)}}}(q) = (\eta \circ \varepsilon)(q) \\ &= \eta\left(\underbrace{\varepsilon(q)}_{=1}\right) = \eta(1) = 1_H \end{aligned}$$

vereinfacht sich dies zu $1_H \in I$. Da I ein Ideal von H ist, folgt hieraus $I = H$, im Widerspruch zu $I \neq H$. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme ($\varepsilon(I) \neq 0$) falsch war. Somit ist $\varepsilon(I) = 0$. Zusammen mit $\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$ ergibt dies, daß I ein Coideal von H ist. Da I auch ein Ideal von H ist, führt dies dazu, daß I ein Biideal von H ist. Laut Folgerung 2.21$\frac{17}{20}$ ist I also auch ein Hopfideal von H, was zu beweisen war.

Moduln über Hopfalgebren

Wir wollen nun zeigen, daß man mit Moduln über Bialgebren oder Hopfalgebren "mehr machen kann" als mit Moduln über (nur) Algebren.

Ist H eine Bialgebra, dann kann man auf dem Tensorprodukt $V \otimes W$ zweier H-Linksmoduln V und W selber kanonisch eine H-Linksmodulstruktur definieren - und zwar nicht nur die H-Linksmodulstruktur, die man gemäß Satz 1.5. **1) a)** als Tensorprodukt des (H, k)-Bimoduls V mit dem k-Linksmodul W erhält[115], sondern auch eine zweite, "symmetrischere" H-Linksmodulstruktur - die sogenannte *Diagonalstruktur*. Wir werden auch auf $\operatorname{Hom}(V, W)$ eine H-Linksmodulstruktur einführen können, falls H eine Hopfalgebra ist.

Bevor wir zu dieser Definition kommen, wollen wir kurz auffrischen, was ein A-Modul für eine k-Algebra A ist. Dies ist so gut wie das gleiche wie ein A-Modul, wenn man A nur als Ring betrachtet (statt als k-Algebra) - aber der Unterschied reicht aus, um darüber zu stolpern. Deshalb wollen wir die Definitionen der beiden Begriffe präzisieren.

Zuerst erinnern wir uns an die Definition eines Moduls über einem Ring. Es gibt viele verschiedene Definitionen; hier ist diejenige, die wir in Abschnitt 1 von Kapitel I gegeben haben. Das ist die elementarste Definition:

> **Definition (Modul über einem Ring):** Sei R ein Ring, sei V eine abelsche Gruppe, und sei $\operatorname{act} : R \times V \to V$ eine Abbildung. Wir benutzen im Folgenden die Abkürzung rv für das Element $\operatorname{act}(r, v)$ von V, wobei $r \in R$ und $v \in V$ beliebig sind.
>
> Angenommen, diese Abbildung act erfüllt folgende Axiome:
>
> $$\begin{aligned} r(v+w) &= rv + rw && \text{für alle } r \in R,\ v \in V \text{ und } w \in V \text{ (Linksdistributivität);} \\ (r+s)v &= rv + sv && \text{für alle } r \in R,\ s \in R \text{ und } v \in V \text{ (Rechtsdistributivität);} \\ r(sv) &= (rs)v && \text{für alle } r \in R,\ s \in R \text{ und } v \in V \text{ (Assoziativität);} \\ 1_R v &= v && \text{für alle } v \in V \text{ (Unitalität).} \end{aligned}$$
>
> Dann heißt die Gruppe V zusammen mit der $\mathbb{Z}$-bilinearen Abbildung act ein *R-Linksmodul*. Die Abbildung act heißt die *Wirkung* von R auf diesem Modul V.

Wir können diese Definition ein wenig abstrakter umschreiben, wenn wir bemerken, daß die ersten zwei unserer vier Axiome (nämlich Linksdistributivität und Rechtsdistributivität) im Wesentlichen aussagen, daß act eine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung ist, während

[115] Diese H-Linksmodulstruktur läßt sich zwar definieren (und hat ihren Nutzen), aber sie hängt gar nicht von der H-Linksmodulstruktur auf W ab, sondern nur von der auf V.

die letzten beiden Axiome (Assoziativität und Unitalität) als kommutative Diagramme umgeschrieben werden können. Dadurch erhalten wir folgende äquivalente Umformulierung der obigen Definition:

> **Definition (Modul über einem Ring):** Sei R ein Ring, sei V eine abelsche Gruppe, und sei $\operatorname{act} : R \times V \to V$ eine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung, für die die zwei Diagramme
>
> $$\begin{tikzcd} R \times R \times V \arrow[r, "\mathrm{id} \times \mathrm{act}"] \arrow[d, "\mathrm{mult} \times \mathrm{id}"'] & R \times V \arrow[d, "\mathrm{act}"] \\ R \times V \arrow[r, "\mathrm{act}"'] & V \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V & \mathbb{Z} \times V \arrow[l, "\mathrm{kan}"'] \arrow[d, "\eta_R \times \mathrm{id}"] \\ & R \times V \arrow[ul, "\mathrm{act}"] \end{tikzcd}$$
>
> kommutativ sind[116], wobei die Abbildungen $\operatorname{kan} : \mathbb{Z} \times V \to V$, $\operatorname{mult} : R \times R \to R$ und $\eta_R : \mathbb{Z} \to R$ wie folgt definiert sind:
>
> $$\begin{aligned} \operatorname{kan}(n, v) &= nv && \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und } v \in V; \\ \operatorname{mult}(a, b) &= ab && \text{für alle } a, b \in R; \\ \eta_R(n) &= n \cdot 1_R && \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
>
> Dann heißt die Gruppe V zusammen mit der $\mathbb{Z}$-bilinearen Abbildung act ein *R-Linksmodul*. Man schreibt kurz rv für das Element $\operatorname{act}(r, v)$ von V, wobei $r \in R$ und $v \in V$ beliebig sind. Die Abbildung act heißt die *Wirkung* von R auf diesem Modul V.

Wir können diese Definition noch ein wenig umformulieren, indem wir die $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung $\operatorname{act} : R \times V \to V$ durch eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\mu : R \otimes V \to V$ ersetzen (vermöge der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes). Wir erhalten dadurch folgende äquivalente Definition[117]:

> **Definition (Modul über einem Ring):** Sei R ein Ring, sei V eine abelsche Gruppe, und sei $\mu : R \otimes V \to V$ (wobei $\otimes$ das Tensorprodukt $\otimes_{\mathbb{Z}}$ bezeichnet) ein Homomorphismus abelscher Gruppen[118], für den die zwei Diagramme
>
> $$\begin{tikzcd} R \otimes R \otimes V \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu_R \otimes \mathrm{id}"'] & R \otimes V \arrow[d, "\mu"] \\ R \otimes V \arrow[r, "\mu"'] & V \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V & \mathbb{Z} \otimes V \arrow[l, "\mathrm{kan}"'] \arrow[d, "\eta_R \otimes \mathrm{id}"] \\ & R \otimes V \arrow[ul, "\mu"] \end{tikzcd}$$

[116] Die Kommutativität des ersten dieser beiden Diagramme ist äquivalent zum Axiom der Assoziativität, und die Kommutativität des zweiten ist äquivalent zum Axiom der Unitalität.

[117] die den Vorteil hat, daß wir in ihr nur die Pfeile umzudrehen brauchen, um aus ihr die Definition eines Comoduls zu erhalten (was wir später tun werden)

[118] In dieser Definition ist das Tensorprodukt $\otimes$ immer als Tensorprodukt von abelschen Gruppen gemeint. Zwar haben wir für die Definition des Tensorproduktes abelscher Gruppen bereits den Begriff "Modul" verwendet (wir haben nämlich gleich das Tensorprodukt von R-Moduln definiert), aber wir hätten genauso gut erstmal das Tensorprodukt nur für abelsche Gruppen (d. h. für $\mathbb{Z}$-Moduln) definieren können, ohne den Begriff eines Moduls zu benutzen. Insofern dürfen wir hier bei der Definition eines Moduls das Tensorprodukt abelscher Gruppen verwenden.

kommutativ sind, wobei die Gruppenhomomorphismen $\mathrm{kan} : \mathbb{Z} \otimes V \to V$, $\mu_R : R \otimes R \to R$ und $\eta_R : \mathbb{Z} \to R$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{kan}\,(n \otimes v) &= nv && \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und } v \in V; \\ \mu_R\,(a \otimes b) &= ab && \text{für alle } a, b \in R; \\ \eta_R\,(n) &= n \cdot 1_R && \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Der Gruppenhomomorphismus kan ist ein Isomorphismus. Die Gruppenhomomorphismen μ_R und η_R sind einfach die Homomorphismen μ_R und η_R, wenn man R als $\mathbb{Z}$-Algebra$_3$ auffasst.)

Dann heißt die Gruppe V zusammen mit dem Homomorphismus μ ein R-*Linksmodul*. Man schreibt kurz rv für das Element $\mu\,(r \otimes v)$ von V, wobei $r \in R$ und $v \in V$ beliebig sind.

Wir haben damit drei Definitionen für den Begriff "R-Linksmodul" gegeben. Diese drei Definitionen sind zueinander äquivalent: So kommt man von einem Homomorphismus $\mu : R \otimes V \to V$ zu der Wirkung $\mathrm{act} : R \times V \to V$ von R auf V, indem man $\mathrm{act}\,(r, v) = \mu\,(r \otimes v)$ für alle $r \in R$ und $v \in V$ setzt, und umgekehrt kommt man von der Wirkung $\mathrm{act} : R \times V \to V$ von R auf V zum Homomorphismus $\mu : R \otimes V \to V$, indem man $\mu\,(r \otimes v) = \mathrm{act}\,(r, v)$ für alle $r \in R$ und $v \in V$ festlegt. (Man müsste natürlich noch beweisen, daß dies alles wohldefiniert ist, aber dies ist sehr einfach.)

Jetzt definieren wir völlig analog zur obigen (dritten) Definition eines Moduls über einem Ring einen Modul über einer k-Algebra:

Definition (Modul über einer k-Algebra): Sei k ein Körper, und sei R eine k-Algebra. Sei V ein k-Vektorraum, und sei $\mu : R \otimes V \to V$ (wobei $\otimes$ das Tensorprodukt $\otimes_k$ bezeichnet) ein Homomorphismus von k-Vektorräumen, für den die zwei Diagramme

$$\begin{tikzcd} R \otimes R \otimes V \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu_R \otimes \mathrm{id}"'] & R \otimes V \arrow[d, "\mu"] \\ R \otimes V \arrow[r, "\mu"'] & V \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} V & k \otimes V \arrow[l, "\mathrm{kan}"'] \arrow[d, "\eta_R \otimes \mathrm{id}"] \\ & R \otimes V \arrow[ul, "\mu"] \end{tikzcd}$$

kommutativ sind, wobei die Vektorraumhomomorphismen $\mathrm{kan} : k \otimes V \to V$, $\mu_R : R \otimes R \to R$ und $\eta_R : k \to R$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{kan}\,(\alpha \otimes v) &= \alpha v && \text{für alle } \alpha \in k \text{ und } v \in V; \\ \mu_R\,(a \otimes b) &= ab && \text{für alle } a, b \in R; \\ \eta_R\,(\alpha) &= \alpha \cdot 1_R && \text{für alle } \alpha \in k. \end{aligned}$$

(Dabei ist wieder kan ist ein Isomorphismus. Die k-Algebrahomomorphismen μ_R und η_R sind einfach die Homomorphismen μ_R und η_R, wenn man die k-Algebra R als k-Algebra$_3$ auffasst.)

Dann heißt der k-Vektorraum V zusammen mit dem Homomorphismus μ ein $(R)_k$-*Linksmodul*. Man schreibt kurz rv für das Element $\mu\,(r \otimes v)$ von V, wobei $r \in R$ und $v \in V$ beliebig sind.

Der Index k in der Notation "$(R)_k$-Linksmodul" soll dabei daran erinnern, daß diese Definition von k abhängig ist.

2.21$\frac{19}{20}$. Bemerkung: Wenn k ein Körper und R eine k-Algebra ist, dann haben wir jetzt zwei verschiedene Begriffe von "Linksmoduln" definiert: den Begriff des "R-Linksmoduls" (wobei R hier nur als Ring eine Rolle spielt), und den Begriff des "$(R)_k$-Linksmoduls" (wobei wir hier verwenden, daß R eine k-Algebra ist). Diese Begriffe sind nicht exakt identisch[119], doch sie sind in einer gewissen Weise zueinander äquivalent:

- Ist k ein Körper und R eine k-Algebra, dann kann man jede abelsche Gruppe V, die ein R-Linksmodul ist, kanonisch zu einem k-Vektorraum, der ein $(R)_k$-Linksmodul ist, machen - indem man eine k-Vektorraumstruktur auf V durch $\alpha v = \mu(\alpha \cdot 1_R \otimes v)$ für alle $\alpha \in k$ und $v \in V$ definiert. Diese k-Vektorraumstruktur bezeichnen wir als die *kanonische k-Vektorraumstruktur* auf dem R-Linksmodul V.

- Und umgekehrt ist jeder k-Vektorraum, der ein $(R)_k$-Linksmodul ist, automatisch auch ein R-Linksmodul als abelsche Gruppe.

Insofern sind die Begriffe "$(R)_k$-Linksmodul" und "R-Linksmodul" äquivalent - man muss nur folgendes Problem beachten: Wenn man auf einem k-Vektorraum V eine R-Linksmodulstruktur definiert, kann es passieren, daß V dadurch *nicht* zu einem $(R)_k$-Linksmodul wird. Der Grund dafür ist folgender: Ein $(R)_k$-Linksmodul V muß immer die Relation

$$(\lambda 1_R)\, v = \lambda v \qquad \text{für alle } \lambda \in k \text{ und } v \in V$$

erfüllen (d. h. die vorgegebene k-Vektorraumstruktur auf V muß mit der kanonischen k-Vektorraumstruktur auf dem R-Linksmodul V [120] identisch sein), während ein k-Vektorraum V mit einer (zufälligen) R-Linksmodulstruktur diese Relation nicht unbedingt erfüllt. Mit anderen Worten: Man kann zwar jede abelsche Gruppe V, die ein R-Linksmodul ist, kanonisch zu einem $(R)_k$-Linksmodul machen, indem man ihr die kanonische k-Vektorraumstruktur verleiht; doch wenn diese Gruppe V bereits im Vorhinein eine andere k-Vektorraumstruktur hatte, ist natürlich nicht zu garantieren, daß sie mit dieser anderen Vektorraumstruktur ein $(R)_k$-Linksmodul wird, d. h. es kann passieren, daß man auf einmal zwei verschiedene k-Vektorraumstrukturen auf der gleichen abelschen Gruppe V erhält (einerseits die vorgegebene k-Vektorraumstruktur auf V; andererseits die durch die Setzung $\alpha v = \mu(\alpha \cdot 1_R \otimes v)$ für alle $\alpha \in k$ und $v \in V$ entstandene), und nur mit der zweiten davon wird V auch wirklich zu einem $(R)_k$-Linksmodul.

Wir werden allerdings mit diesem Fall nie in Berührung kommen. Daher werden wir salopp den Begriff "R-Linksmodul" als Synonym für "$(R)_k$-Linksmodul" benutzen

[119] Ihre Definitionen sind zueinander analog, aber unterscheiden sich z. B. darin, daß in der Definition des ersteren Begriffes Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$ benutzt werden, während in der Definition des zweiteren Begriffes Tensorprodukte über k an deren Stelle treten. Man kann sich leicht einen k-Vektorraum V vorstellen, der als abelsche Gruppe ein R-Linksmodul ist, aber kein $(R)_k$-Linksmodul ist.

[120] Zur Erinnerung: Die kanonische k-Vektorraumstruktur auf dem R-Linksmodul V ist die durch $\alpha v = \mu(\alpha \cdot 1_R \otimes v)$ für alle $\alpha \in k$ und $v \in V$ definierte k-Vektorraumstruktur auf V, wobei das Zeichen $\otimes$ hier für $\otimes_{\mathbb{Z}}$ steht, und die Abbildung μ von der R-Linksmodulstruktur auf V kommt.

(im Fall, wenn R eine k-Algebra ist). Im Zweifelsfall sind Sätze der Art "Wir machen den k-Vektorraum V zu einem R-Linksmodul" (wobei R eine k-Algebra ist) immer als "Wir machen den k-Vektorraum V zu einem $(R)_k$-Linksmodul" zu lesen, weil wir meistens keinen Grund haben, eine R-Linksmodulstruktur auf einem k-Vektorraum V zu definieren, die nicht gleichzeitig eine $(R)_k$-Linksmodulstruktur auf V ist. Wenn wir aber doch einmal eine R-Linksmodulstruktur auf V einführen wollen, die keine $(R)_k$-Linksmodulstruktur ist, dann werden wir hierauf explizit hinweisen.

Ähnlich zum Begriff eines R-Linksmoduls wird der Begriff eines R-Rechtsmoduls definiert, und ähnlich zum Begriff eines $(R)_k$-Linksmoduls wird der Begriff eines $(R)_k$-Rechtsmoduls eingeführt. Ferner können wir genauso, wie wir $(R)_k$-Linksmoduln definiert haben, auch den Begriff eines $(A,B)_k$-Bimoduls einführen, wobei A und B zwei k-Algebren sind. Doch mit Bimoduln sollten wir noch vorsichtiger sein als mit einseitigen Moduln, denn:

Laut Bemerkung $2.21\frac{19}{20}$ sind die Begriffe "R-Linksmodul" und "$(R)_k$-Linksmodul" äquivalent, und aus dem gleichen Grund sind die Begriffe "R-Rechtsmodul" und "$(R)_k$-Rechtsmodul" äquivalent. Doch die Begriffe "(A,B)-Bimodul" und "$(A,B)_k$-Bimodul" sind *nicht* äquivalent, denn ist M ein $(A,B)_k$-Bimodul, dann muß notwendigerweise $(\lambda 1_A)\, m = m\, (\lambda 1_B)$ für jedes $m \in M$ und $\lambda \in k$ gelten (denn die Abbildungen $A \otimes M \to M$ und $M \otimes B \to M$ sind k-linear), aber ist M ein (A,B)-Bimodul, dann gilt dies nicht notwendigerweise[121]. Man kann also nicht jede abelsche Gruppe mit einer (A,B)-Bimodulstruktur automatisch zu einem $(A,B)_k$-Bimodul machen!

Genug der Trivialitäten, jetzt werden wir (wie versprochen) H-Linksmodulstrukturen auf $V \otimes W$, k und $\operatorname{Hom}(V,W)$ für Bialgebren bzw. Hopfalgebren H definieren:

Definition (Diagonalstruktur, ε-Modulstruktur, Hom-Struktur): Sei H eine Bialgebra. Wir bezeichnen mit ${}_H\mathcal{M}$ die Kategorie der H-Linksmoduln, wobei wir H als k-Algebra ansehen (die zusätzliche Coalgebrastruktur auf H ignorieren wir erst einmal), und jeden H-Linksmodul betrachten wir als k-Vektorraum mit der (oben eingeführten) kanonischen k-Vektorraumstruktur.

1) [122] Seien $V, W \in {}_H\mathcal{M}$. Dann können wir auf dem Vektorraum $V \otimes W$ eine kanonische H-Linksmodulstruktur konstruieren, indem wir die kanonische $(H \otimes H)$-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$ (diese $(H \otimes H)$-Linksmodulstruktur ist definiert durch $(x \otimes y)\,(v \otimes w) = xv \otimes yw$ für alle $x, y \in H$, $v \in V$ und $w \in W$) vermöge des Algebrahomomorphismus $\Delta : H \to H \otimes H$ zu einer H-Linksmodulstruktur einschränken.

Diese H-Linksmodulstruktur heißt *Diagonalstruktur* auf $V \otimes W$. Wir schreiben also $V \otimes W \in {}_H\mathcal{M}$.

2) Ferner können wir den Vektorraum k zu einem H-Linksmodul machen, und zwar

---

[121] Hier ein *Beispiel* für einen der Fälle, wo dies *nicht* gilt:

Bezeichnen wir mit $\mathbb{H}$ den Ring der Quaternionen, dann ist $\mathbb{H}$ ein $(\mathbb{C},\mathbb{C})$-Bimodul (wobei die Linkswirkung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{H}$ durch $z \cdot h = \underbrace{zh}_{\text{Produkt in } \mathbb{H}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{H}$ gegeben ist, und die Rechtswirkung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{H}$ durch $h \cdot z = \underbrace{hz}_{\text{Produkt in } \mathbb{H}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{H}$ gegeben ist), und sogar ein $(\mathbb{C},\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$-Bimodul, aber *kein* $(\mathbb{C},\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$-Bimodul (zumindest nicht mit den gerade definierten Links- und Rechtswirkungen), obwohl man $\mathbb{H}$ zu einem $(\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$-Linksmodul und zu einem $(\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$-Rechtsmodul machen könnte. (Daß $\mathbb{H}$ kein $(\mathbb{C},\mathbb{C})_{\mathbb{C}}$-Bimodul ist, erkennt man daran, daß $(\lambda 1_{\mathbb{C}})\, m = m\, (\lambda 1_{\mathbb{C}})$ nicht für jedes $m \in \mathbb{H}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt ist (zum Beispiel nicht für $m = j$ und $\lambda = i$).)

[122] Diese Definition ist recht abstrakt. Eine alternative (konkretere) Definition der Diagonalstruktur ist weiter unten (zwischen Bemerkung 2.23 und Bemerkung 2.24) zu finden.

vermöge des Algebrahomomorphismus $\varepsilon : H \to k$. Das heißt, auf dem Vektorraum k ist eine H-Linksmodulstruktur definiert durch $h \cdot \lambda = \varepsilon(h) \cdot \lambda$ für alle $h \in H$ und $\lambda \in k$. Diese H-Linksmodulstruktur wird als *ε-Modulstruktur* oder auch als *triviale* 1-*dimensionale Darstellung* von H bezeichnet. Wir haben also $k \in {}_H\mathcal{M}$.

Bemerkung: Der H-Linksmodul k mit der gerade definierten ε-Modulstruktur wird auch öfters mit ${}_\varepsilon k$ bezeichnet (um zu betonen, daß die H-Linksmodulstruktur auf ihm von der Abbildung ε herstammt).

3) Seien $V, W \in {}_H\mathcal{M}$. Ist H eine Hopfalgebra, dann können wir auch auf dem Vektorraum $\operatorname{Hom}(V, W)$ eine H-Linksmodulstruktur definieren durch

$$(hf)(v) = h_{(1)} f\left(S\left(h_{(2)}\right) v\right) \qquad \text{für alle } h \in H,\ f \in \operatorname{Hom}(V, W) \text{ und } v \in V$$

(wobei wir die summenlose Sweedler-Notation verwenden). Wir bezeichnen diese H-Linksmodulstruktur als *Hom-Struktur* auf $V \otimes W$. Mithilfe dieser Struktur wird $\operatorname{Hom}(V, W)$ zu einem H-Linksmodul, d. h. wir können $\operatorname{Hom}(V, W) \in {}_H\mathcal{M}$ schreiben. Im Falle von $W = k$ ergibt dies insbesondere eine H-Linksmodulstruktur auf V^* mit $(hf)(v) = f(S(h)v)$ für alle $h \in H$, $f \in V^*$ und $v \in V$. Wir können damit auch $V^* \in {}_H\mathcal{M}$ schreiben.

2.22. Bemerkung: Wir müssen zeigen, daß diese Definition korrekt ist.

1) Ist H eine Bialgebra, und sind $V, W \in {}_H\mathcal{M}$, dann ist die oben definierte Diagonalstruktur auf $V \otimes W$ tatsächlich eine H-Linksmodulstruktur.

Beweis: Für *jede* Algebra H (nicht notwendigerweise eine Bialgebra) ist eine kanonische $(H \otimes H)$-Linksmodulstruktur $V \otimes W \in {}_{H \otimes H}\mathcal{M}$ definiert durch $(x \otimes y)(v \otimes w) = xv \otimes yw$ für alle $x, y \in H$, $v \in V$ und $w \in W$. Da für unsere Bialgebra H aber $\Delta : H \to H \otimes H$ ein Algebrahomomorphismus ist, können wir diese Struktur vermöge des Algebrahomomorphismus $\Delta : H \to H \otimes H$ zu einer H-Linksmodulstruktur einschränken.

2) Ist H eine Bialgebra, dann ist die oben definierte ε-Modulstruktur auf k tatsächlich eine H-Linksmodulstruktur.

Beweis: Trivial.

3) Ist H eine Hopfalgebra, und sind $V, W \in {}_H\mathcal{M}$, dann ist die oben definierte Hom-Struktur auf $\operatorname{Hom}(V, W)$ tatsächlich eine H-Linksmodulstruktur.

Beweis: Diese mutmaßliche Modulstruktur erfüllt alle Axiome, die eine Modulstruktur erfüllen soll. Denn:

- Sie ist assoziativ, denn für alle $x, y \in H$ und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ist $x(yf) = (xy) f$ (denn für jedes $v \in V$ ist

$$\begin{aligned}
(x(yf))(v) &= x_{(1)} \underbrace{(yf)\left(S\left(x_{(2)}\right) v\right)}_{= y_{(1)} f\left(S\left(y_{(2)}\right) S\left(x_{(2)}\right) v\right)} = x_{(1)} y_{(1)} f\left(\underbrace{S\left(y_{(2)}\right) S\left(x_{(2)}\right)}_{= S\left(x_{(2)} y_{(2)}\right)} v\right) \\
&= x_{(1)} y_{(1)} f\left(S\left(x_{(2)} y_{(2)}\right) v\right) = (xy)_{(1)} f\left(S\left((xy)_{(2)}\right) v\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } x_{(1)} y_{(1)} \otimes x_{(2)} y_{(2)} = (xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)}\right) \\
&= ((xy) f)(v)
\end{aligned}$$

).

- Für alle $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ ist $1_H f = f$ (denn für jedes $v \in V$ ist $(1_H f)(v) = (1_H)_{(1)} f\left(S\left((1_H)_{(2)}\right) v\right) = 1 f\left(\underbrace{S(1)}_{=1} v\right) = f(v)$).

- Für jede $h, g \in H$ und jedes $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ gilt $(h+g) f = hf + gf$. (Dies ist leicht zu sehen.)

- Für jede $h \in H$ und $\lambda \in k$ und jedes $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ gilt $(\lambda h) f = \lambda \cdot hf$. (Dies ist leicht zu sehen.)

- Für jedes $h \in H$ und jede $f, f' \in \operatorname{Hom}(V,W)$ gilt $h(f+f') = hf + hf'$. (Dies ist leicht zu sehen.)

- Für jede $h \in H$ und $\lambda \in k$ und jedes $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ gilt $h(\lambda f) = \lambda \cdot hf$. (Dies ist leicht zu sehen.)

Damit ist 2.22 **3)** bewiesen.

In der obigen Definition haben wir die Diagonalstruktur auf $V \otimes W$ recht abstrakt eingeführt; folgendermaßen können wir sie explizit beschreiben:

2.23. Bemerkung: 1) Ist H eine Bialgebra, und sind $V, W \in {}_H\mathcal{M}$, dann gilt die Identität

$$h(v \otimes w) = h_{(1)} v \otimes h_{(2)} w \qquad \text{für alle } h \in H,\ v \in V \text{ und } w \in W$$

(wobei wir die summenlose Sweedler-Notation verwenden).

2) Durch diese Identität ist die Diagonalstruktur auf $V \otimes W$ eindeutig festgelegt. Das heißt, die einzige H-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$, die

$$h(v \otimes w) = h_{(1)} v \otimes h_{(2)} w \qquad \text{für alle } h \in H,\ v \in V \text{ und } w \in W$$

erfüllt, ist die Diagonalstruktur.

Beweis: **1)** Wir haben die Diagonalstruktur auf $V \otimes W$ konstruiert, indem wir die kanonische $(H \otimes H)$-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$ (diese $(H \otimes H)$-Linksmodulstruktur ist definiert durch $(x \otimes y)(v \otimes w) = xv \otimes yw$ für alle $x, y \in H$, $v \in V$ und $w \in W$) vermöge des Algebrahomomorphismus $\Delta : H \to H \otimes H$ zu einer H-Linksmodulstruktur eingeschränkt haben. Somit ist $ht = (\Delta(h))\, t$ für alle $h \in H$ und $t \in V \otimes W$. Angewandt auf $t = v \otimes w$ ergibt dies also

$$h(v \otimes w) = \left(\underbrace{\Delta(h)}_{= h_{(1)} \otimes h_{(2)}}\right)(v \otimes w) = \left(h_{(1)} \otimes h_{(2)}\right)(v \otimes w) = h_{(1)} v \otimes h_{(2)} w,$$

was zu beweisen war.

2) Es kann nur eine H-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$ geben, welche die Identität

$$h(v \otimes w) = h_{(1)} v \otimes h_{(2)} w \qquad \text{für alle } h \in H,\ v \in V \text{ und } w \in W$$

erfüllt (denn diese Identität gibt die Wirkung von jedem $h \in H$ auf jedem reinen Tensor $v \otimes w \in V \otimes W$ vor, und (wegen der Linearität der Wirkung) ist dadurch auch die

Wirkung von jedem $h \in H$ auf jedem (nicht notwendigerweise reinen) Tensor in $V \otimes W$ eindeutig bestimmt). Da die Diagonalstruktur auf $V \otimes W$ diese Identität erfüllt, gilt also: Die einzige H-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$, die

$$h\left(v \otimes w\right) = h_{(1)}v \otimes h_{(2)}w \qquad \text{für alle } h \in H,\ v \in V \text{ und } w \in W$$

erfüllt, ist die Diagonalstruktur. Qed.

Wegen Bemerkung 2.23 **2)** hätten wir die Diagonalstruktur auf $V \otimes W$ also auch folgendermaßen definieren können:

Alternative Definition: Sei H eine Bialgebra, und seien $V, W \in {}_H\mathcal{M}$. Dann gibt es genau eine H-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$, die

$$h\left(v \otimes w\right) = h_{(1)}v \otimes h_{(2)}w \qquad \text{für alle } h \in H,\ v \in V \text{ und } w \in W$$

erfüllt. Diese H-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$ heißt *Diagonalstruktur*.

2.24. Beispiel: Sei G eine Gruppe. Die Gruppenalgebra $k\left[G\right]$ ist dann eine Hopfalgebra (mit der in Beispiel 2.11 **1)** definierten Hopfalgebrastruktur). Wir können dann unsere obigen Definitionen (Diagonalstruktur, ε-Modulstruktur, Hom-Struktur) auf den Fall $H = k\left[G\right]$ anwenden. Hier sind die Details:

1) Sind V und W zwei Darstellungen von G, dann kann man V und W kanonisch als $k\left[G\right]$-Linksmoduln betrachten. Die Diagonalstruktur auf dem Tensorprodukt $V \otimes W$ macht dann den Vektorraum $V \otimes W$ ebenfalls zu einer Darstellung von G, und diese erfüllt $g\left(v \otimes w\right) = gv \otimes gw$ für alle $g \in G$, $v \in V$ und $w \in W$ (denn nach 2.23. **1)** ist $g\left(v \otimes w\right) = g_{(1)}v \otimes g_{(2)}w$, was aber wegen $g_{(1)} \otimes g_{(2)} = \Delta\left(g\right) = g \otimes g$ zu $g\left(v \otimes w\right) = gv \otimes gw$ wird). Diese Darstellung der Gruppe G auf dem Vektorraum $V \otimes W$ ist das sogenannte *innere Tensorprodukt der Darstellungen* V und W.

2) Die ε-Modulstruktur auf k macht den Vektorraum k zu einer Darstellung von G. Diese Darstellung erfüllt $g \cdot \lambda = \lambda$ für alle $g \in G$ und $\lambda \in k$ (denn $g \cdot \lambda = \underbrace{\varepsilon\left(g\right)}_{=1} \cdot \lambda = \lambda$), und wird als *die triviale Darstellung von* G bezeichnet.

3) Sind V und W zwei Darstellungen von G, dann kann man V und W kanonisch als $k\left[G\right]$-Linksmoduln betrachten. Die Hom-Struktur auf $\operatorname{Hom}\left(V, W\right)$ macht dann den Vektorraum $\operatorname{Hom}\left(V, W\right)$ ebenfalls zu einer Darstellung von G, und diese erfüllt $\left(gf\right)\left(v\right) = gf\left(g^{-1}v\right)$ für alle $g \in G$, $f \in \operatorname{Hom}\left(V, W\right)$ und $v \in V$ (denn nach der Definition der Hom-Struktur ist $\left(gf\right)\left(v\right) = g_{(1)}f\left(S\left(g_{(2)}\right)v\right)$, was aber wegen $g_{(1)} \otimes g_{(2)} = g \otimes g$ und $S\left(g\right) = g^{-1}$ zu $\left(gf\right)\left(v\right) = gf\left(g^{-1}v\right)$ wird). Diese Darstellung der Gruppe G ist genau diejenige Darstellung, die Algebraiker meinen, wenn sie von der "Darstellung $\operatorname{Hom}\left(V, W\right)$ der Gruppe G" reden.

Bemerkung: Ein aufmerksamer Leser wird festgestellt haben, daß wir für die Definitionen der Diagonalstruktur, der ε-Modulstruktur und der Hom-Struktur nur eine Algebra H und drei Algebrahomomorphismen $\Delta : H \to H \otimes H$, $\varepsilon : H \to k$ und $S : H^{\mathrm{op}} \to H$ benutzt haben, *nicht* aber die Tatsache, daß diese drei Homomorphismen die Axiome einer Hopfalgebra erfüllen. Wir haben also weder gebraucht, daß Δ coassoziativ ist, noch daß Δ bezüglich ε counitär ist, noch daß S wirklich eine Antipode ist. Doch diese Eigenschaften werden alle nötig, wenn wir wollen, daß die Diagonalstruktur, die ε-Modulstruktur und die Hom-Struktur einige naheliegende Eigenschaften erfüllen: zum Beispiel muß Δ coassoziativ sein, damit der kanonische k-Vektorraumisomorphismus $U \otimes \left(V \otimes W\right) \underset{\cong}{\xrightarrow{\text{kan}}} \left(U \otimes V\right) \otimes W$ eine H-linkslineare Abbildung für alle $U, V, W \in {}_H\mathcal{M}$ ist. Genauer:

2.25. Bemerkung: Sei H eine beliebige Algebra (nicht notwendigerweise Hopfalgebra) mit Algebrahomomorphismen $\Delta : H \to H \otimes H$, $\varepsilon : H \to k$ und $S : H^{\mathrm{op}} \to H$. Für alle $V, W \in {}_H\mathcal{M}$ gilt dann: $k \in {}_H\mathcal{M}$ vermöge ε, ferner $V \otimes W \in {}_H\mathcal{M}$ vermöge Δ, und schließlich $\operatorname{Hom}(V, W) \in {}_H\mathcal{M}$ vermöge Δ und S.

Dann gilt (unter Verwendung der summenlosen Sweedler-Notation $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ für alle $x \in H$, auch wenn H nicht unbedingt eine Hopfalgebra ist):

a) Genau dann ist für alle $U, V, W \in {}_H\mathcal{M}$ der kanonische k-Vektorraumisomorphismus $U \otimes (V \otimes W) \xrightarrow[\cong]{\text{kan}} (U \otimes V) \otimes W$ eine H-linkslineare Abbildung, wenn Δ coassoziativ ist (d. h. wenn für alle $x \in H$ gilt: $\Delta\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes \Delta\left(x_{(2)}\right)$).

b) Genau dann sind für alle $V \in {}_H\mathcal{M}$ die kanonischen k-Vektorraumisomorphismen $V \otimes k \xrightarrow[\cong]{\text{kan}} V$ und $k \otimes V \xrightarrow[\cong]{\text{kan}} V$ beide H-linkslinear, wenn Δ bezüglich ε counitär ist (d. h. wenn für alle $x \in H$ gilt: $x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) = x = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$).

c) Genau dann ist für alle $V \in {}_H\mathcal{M}$ der kanonische k-Vektorraumhomomorphismus $V^* \otimes V \xrightarrow{\text{ev}} k$ (definiert durch $\operatorname{ev}(f \otimes v) = f(v)$ für alle $f \in V^*$ und $v \in V$) eine H-linkslineare Abbildung, wenn für alle $x \in H$ gilt: $S\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} = \varepsilon(x) \cdot 1$.

d) Genau dann ist für alle $V \in {}_H\mathcal{M}$ der kanonische k-Vektorraumhomomorphismus $k \to \operatorname{End} V$ (der $1 \in k$ auf $\mathrm{id} \in \operatorname{End} V$ abbildet) H-linkslinear[123], wenn für alle $x \in H$ gilt: $x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \cdot 1$.

Warnung: Im Allgemeinen sind $V^* \otimes V$ und $V \otimes V^*$ *nicht isomorph als H-Moduln, auch wenn H eine Hopfalgebra ist*! Auch der kanonische k-Vektorraumhomomorphismus $V \otimes V^* \xrightarrow{\text{ev}} k$ (definiert durch $\operatorname{ev}(v \otimes f) = f(v)$ für alle $f \in V^*$ und $v \in V$) ist nicht immer eine H-linkslineare Abbildung, wenn H (nur) eine Hopfalgebra ist.

e) Genau dann ist für alle $V, W \in {}_H\mathcal{M}$ der kanonische k-Vektorraumisomorphismus $V \otimes W \xrightarrow[\cong]{\tau} W \otimes V$ (definiert durch $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ für alle $v \in V$ und $w \in W$) eine H-linkslineare Abbildung, wenn $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(2)} \otimes x_{(1)}$ für alle $x \in H$ gilt.

Beweis: **a)** $\Longleftarrow$: Für alle $x \in H$, $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$x(u \otimes (v \otimes w)) = x_{(1)}u \otimes \underbrace{x_{(2)}(v \otimes w)}_{=\left(x_{(2)}\right)_{(1)}v \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)}w} = x_{(1)}u \otimes \left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)} v \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)} w\right),$$

also

$$\operatorname{kan}(x(u \otimes (v \otimes w))) = \left(x_{(1)}u \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(1)} v\right) \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)} w,$$

aber

$$\begin{aligned} x \operatorname{kan}(u \otimes (v \otimes w)) &= x((u \otimes v) \otimes w) = x_{(1)}(u \otimes v) \otimes x_{(2)}(w) \\ &= \left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)} u \otimes \left(x_{(1)}\right)_{(2)} v\right) \otimes x_{(2)}w. \end{aligned}$$

Da Δ coassoziativ ist, ist aber $x_{(1)} \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)} = \left(x_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(1)}\right)_{(2)} \otimes x_{(2)}$ und somit

$$\left(x_{(1)}u \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(1)} v\right) \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(2)} w = \left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)} u \otimes \left(x_{(1)}\right)_{(2)} v\right) \otimes x_{(2)}w,$$

[123] Dabei ist $\operatorname{End} V$ ein H-Linksmodul, da $\operatorname{End} V = \operatorname{Hom}(V, V)$ ist.

und damit $\operatorname{kan}(x(u\otimes(v\otimes w))) = x\operatorname{kan}(u\otimes(v\otimes w))$ (denn $\operatorname{kan}(x(u\otimes(v\otimes w))) = \left(x_{(1)}u\otimes\left(x_{(2)}\right)_{(1)}v\right)\otimes\left(x_{(2)}\right)_{(2)}w$ und $x\operatorname{kan}(u\otimes(v\otimes w)) = \left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}u\otimes\left(x_{(1)}\right)_{(2)}v\right)\otimes x_{(2)}w$). Das heißt, kan ist H-linkslinear, was zu beweisen war.

$\Longrightarrow$: Setze $U = V = W = H$.

b) $\Longleftarrow$: Daß $\operatorname{kan} : V\otimes k \xrightarrow{\cong} V$ eine H-linkslineare Abbildung ist, bedeutet, daß für alle $x\in H$ und $v\in V$ gilt: $\operatorname{kan}(x(v\otimes 1)) = xv$. Doch letzteres ist klar, da

$$\operatorname{kan}(x(v\otimes 1)) = \operatorname{kan}\left(x_{(1)}v\otimes x_{(2)}1\right) = x_{(1)}v\cdot \underbrace{x_{(2)}1}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)1} = x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)v = xv.$$

Ebenso zeigt man, daß $\operatorname{kan} : k\otimes V \xrightarrow{\cong} V$ eine H-linkslineare Abbildung ist.

$\Longrightarrow$: Setze $V = H$.

c) $\Longleftarrow$: Der k-Vektorraumhomomorphismus $\operatorname{ev} : V^*\otimes V\to k$ ist genau dann H-linkslinear, wenn für alle $x\in H$, $f\in V^*$ und $v\in V$ gilt: $\operatorname{ev}(x(f\otimes v)) = x\operatorname{ev}(f\otimes v)$. Doch letzteres folgt aus

$$\begin{aligned}\operatorname{ev}(x(f\otimes v)) &= \operatorname{ev}\left(x_{(1)}f\otimes x_{(2)}v\right) = \left(x_{(1)}f\right)\left(x_{(2)}v\right) = f\left(\underbrace{S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}}_{=\varepsilon(x)1}v\right)\\ &= \varepsilon(x)f(v) = xf(v) = x\operatorname{ev}(f\otimes v).\end{aligned}$$

Der Homomorphismus ev ist also H-linkslinear, was zu beweisen war.

$\Longrightarrow$: Setze $V = H$. Da $\operatorname{ev} : V^*\otimes V\to k$ eine H-linkslineare Abbildung ist, gilt für alle $f\in H^*$, $v\in H$ und $x\in H$ die Gleichung $\operatorname{ev}(x(f\otimes v)) = x\operatorname{ev}(f\otimes v)$, also

$$\begin{aligned}f\left(S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}v\right) &= \left(x_{(1)}f\right)\left(x_{(2)}v\right) = \operatorname{ev}\left(x_{(1)}f\otimes x_{(2)}v\right) = \operatorname{ev}(x(f\otimes v))\\ &= x\underbrace{\operatorname{ev}(f\otimes v)}_{=f(v)} = xf(v) = \varepsilon(x)f(v) = f(\varepsilon(x)v).\end{aligned}$$

Für $v = 1$ wird dies zu $f\left(S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}\right) = f(\varepsilon(x))$. Da dies *für alle* $f\in H^*$ gilt, muß also $\varepsilon(x) = S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}$ sein[124], was zu beweisen war.

d) $\Longleftarrow$: Der k-Vektorraumhomomorphismus $k\to\operatorname{End}V$ (der $1\in k$ auf $\operatorname{id}\in\operatorname{End}V$ abbildet) ist genau dann H-linkslinear, wenn für alle $x\in H$ gilt: $\varepsilon(x)\operatorname{id} = x\cdot\operatorname{id}$ (wobei id die Eins von $\operatorname{End}V$ ist). Doch letzteres ist klar, da $\varepsilon(x)v = x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right)v = x_{(1)}\operatorname{id}\left(S\left(x_{(2)}\right)v\right) = (x\cdot\operatorname{id})v$ für alle $v\in V$ gilt.

$\Longrightarrow$: Setze $V = H$ und $v = 1$.

e) $\Longleftarrow$: Für alle $h\in H$, $v\in V$ und $w\in W$ ist

$$\begin{aligned}h\left(\underbrace{\tau(v\otimes w)}_{=w\otimes v}\right) &= h(w\otimes v) = h_{(1)}w\otimes h_{(2)}v = \tau\left(h_{(2)}v\otimes h_{(1)}w\right) = \tau\left(\underbrace{h_{(1)}v\otimes h_{(2)}w}_{=h(v\otimes w)}\right)\\ &\qquad\left(\text{denn } h_{(2)}\otimes h_{(1)} = h_{(1)}\otimes h_{(2)}\right)\\ &= \tau(h(v\otimes w)),\end{aligned}$$

[124] Denn ist X ein Vektorraum, und sind v und w zwei Elemente von X so, daß für alle $f\in X^*$ die Gleichung $f(v) = f(w)$ gilt, dann ist $v = w$. Dies folgt daraus, daß die kanonische Abbildung $X\to X^{**}$ injektiv ist.

und somit ist τ ein H-linkslinearer Homomorphismus, was zu zeigen war.

$\Longrightarrow$: Setze $V = H$ und $W = H$ und wende $h(\tau(v \otimes w)) = \tau(h(v \otimes w))$ auf $v = w = 1$ an.

Die Teile **a)**, **b)**, **c)** und **d)** von Bemerkung 2.25 zeigen, daß die Axiome einer Hopfalgebra natürlicher sind, als sie bei der Definition der Hopfalgebra aussahen. Die Axiome besagen im Wesentlichen, daß die wichtigsten kanonischen Vektorraumabbildungen für H-Moduln auch H-linkslinear, d. h. Homomorphismen von H-Moduln sind. Teil **e)** von Bemerkung 2.25 beleuchtet die Frage, ob eine Hopfalgebra H cokommutativ ist, vom Standpunkt der H-Linksmoduln.

Graduierte Strukturen

Wir wollen nun einige Bemerkungen über graduierte Vektorräume, Algebren, Coalgebren, Bialgebren und Hopfalgebren geben. Zunächst definieren wir all diese Begriffe:

Definition: Ein *graduierter Vektorraum* ist ein Paar $\left(V, (V_n)_{n\geq 0}\right)$ aus einem Vektorraum V und einer Familie $(V_n)_{n\geq 0}$ von Untervektorräumen von V, die $V = \bigoplus\limits_{n\geq 0} V_n$ erfüllen.[125]

Statt zu sagen, daß $\left(V, (V_n)_{n\geq 0}\right)$ ein graduierter Vektorraum ist, werden wir oft abkürzend behaupten, daß V ein graduierter Vektorraum ist. Dies ist nicht ganz formal korrekt, aber wenn aus dem Kontext heraus sich eindeutig ergibt, welche Familie $(V_n)_{n\geq 0}$ gemeint ist, werden wir diese Formulierung benutzen.

Unter der *Graduierung* eines graduierten Vektorraumes $\left(V, (V_n)_{n\geq 0}\right)$ verstehen wir die Familie $(V_n)_{n\geq 0}$.

Definition: Sind $\left(V, (V_n)_{n\geq 0}\right)$ und $\left(W, (W_n)_{n\geq 0}\right)$ zwei graduierte Vektorräume, dann ist auch $\left(V \otimes W, \left(\sum\limits_{\ell=0}^{n} V_\ell \otimes W_{n-\ell}\right)_{n\geq 0}\right)$ ein graduierter Vektorraum (dies läßt sich sehr leicht nachprüfen). Man bezeichnet diesen graduierten Vektorraum als *Tensorprodukt* der graduierten Vektorräume $\left(V, (V_n)_{n\geq 0}\right)$ und $\left(W, (W_n)_{n\geq 0}\right)$.

Definition: Wenn wir vom *trivial-graduierten Vektorraum* k reden, meinen wir damit immer den Vektorraum $\left(k, \left(\begin{cases} k, & \text{wenn } n = 0; \\ 0, & \text{wenn } n > 0 \end{cases}\right)_{n\geq 0}\right)$.

Definition: Seien $\left(V, (V_n)_{n\geq 0}\right)$ und $\left(W, (W_n)_{n\geq 0}\right)$ zwei graduierte Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heiße *graduiert*, wenn $f(V_n) \subseteq W_n$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Jetzt definieren wir den Begriff einer graduierten Algebra. Dafür gibt es zwei Definitionen. Hier ist erstmal die klassische Definition:

Definition: Eine *graduierte Algebra* ist ein graduierter Vektorraum $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$

---

[125] Es sei angemerkt, daß der gerade definierte Begriff eines "graduierten Vektorraumes" nicht mit dem Begriff eines "graduierten Vektorraumes", den manche Algebraiker verwenden, übereinstimmt. Dies liegt daran, daß sie diesen Begriff deutlich weiter fassen als wir (sie definieren einen graduierten Vektorraum als ein Paar $\left(V, (V_i)_{i\in I}\right)$ aus einem Vektorraum V und einer Familie $(V_i)_{i\in I}$ von Untervektorräumen von V, die $V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$ erfüllen, wobei I irgendeine Menge ist). Das, was wir einen "graduierten Vektorraum" nennen, bezeichnen sie hingegen als einen "$\mathbb{N}$-graduierten Vektorraum".

Eine analoge Diskrepanz von Begriffen sollte man bei den weiter unten definierten Begriffen "graduierte Algebra", "graduierte Coalgebra", "graduierte Bialgebra" und "graduierte Hopfalgebra" beachten.

zusammen mit einer Algebrastruktur auf A, die

$$k \cdot 1_A \subseteq A_0 \qquad \text{und} \qquad (A_n A_m \subseteq A_{n+m} \text{ für alle } n, m \geq 0)$$

erfüllt.

Und hier ist eine zu ihr äquivalente Definition:

Definition: Eine *graduierte Algebra* ist ein graduierter Vektorraum $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ zusammen mit einer Algebrastruktur auf A, für die gilt: Die Multiplikationsabbildung $\mu_A : A \otimes A \to A$ und die Einsabbildung $\eta_A : k \to A$ sind graduiert.

Hierbei ist zu beachten, daß $A \otimes A$ und k zwei graduierte Vektorräume sind (und zwar ist $A \otimes A$ das Tensorprodukt der graduierten Vektorräume $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ und $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$, und k ist der vorhin definierte trivial-graduierte Vektorraum k).

Die letztere Definition einer graduierten Algebra hat den Vorteil, daß man analog zu ihr den Begriff einer graduierten Coalgebra definieren kann:

Definition: Eine *graduierte Coalgebra* ist ein graduierter Vektorraum $\left(C, (C_n)_{n\geq 0}\right)$ zusammen mit einer Coalgebrastruktur auf C, für die gilt: Die Comultiplikation $\Delta_C : C \to C \otimes C$ und die Coeins $\varepsilon_C : C \to k$ sind graduiert.

Wieder sind dabei $C \otimes C$ und k als graduierte Vektorräume zu verstehen (analog zu $A \otimes A$ und k weiter oben).

Man kann diese Definition auch elementarer umformulieren:

Definition: Eine *graduierte Coalgebra* ist ein graduierter Vektorraum $\left(C, (C_n)_{n\geq 0}\right)$ zusammen mit einer Coalgebrastruktur auf C, für die gilt:

$$\Delta_C (C_n) \subseteq \sum_{\ell=0}^{n} C_\ell \otimes C_{n-\ell} \qquad \text{für alle } n \geq 0$$

und $\varepsilon_C (C_n) = 0$ für alle $n \geq 1$.

Desweiteren können wir graduierte Bialgebren einführen:

Definition: Eine *graduierte Bialgebra* ist ein graduierter Vektorraum $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ zusammen mit einer Algebrastruktur und einer Coalgebrastruktur auf H, für die gilt: Die Multiplikationsabbildung $\mu_H : H \otimes H \to H$, die Einsabbildung $\eta_H : k \to H$, die Comultiplikation $\Delta_H : H \to H \otimes H$ und die Coeins $\varepsilon_H : H \to k$ sind graduiert.

Dieselbe Definition, anders ausgedrückt:

Definition: Eine *graduierte Bialgebra* ist ein graduierter Vektorraum $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ zusammen mit einer Algebrastruktur und einer Coalgebrastruktur auf H, für die gilt: $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ ist eine graduierte Algebra und eine graduierte Coalgebra.

Schließlich lassen sich graduierte Hopfalgebren definieren:

Definition: Eine *graduierte Hopfalgebra* ist eine graduierte Bialgebra $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$, für die gilt: Die Bialgebra H hat eine Antipode S, und diese Antipode $S : H \to H$ ist graduiert.

Schließlich definieren wir eine Unterklasse der graduierten Algebren:

Definition: Eine graduierte Algebra $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ heißt *zusammenhängend*, wenn $A_0 = k \cdot 1_A$ ist.

Da jede graduierte Bialgebra immer auch eine graduierte Algebra ist, kann man den Begriff "zusammenhängend" auch auf graduierte Bialgebren übertragen:

Definition: Eine graduierte Bialgebra $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie als graduierte Algebra zusammenhängend ist (d. h., wenn $H_0 = k \cdot 1_H$ ist).

2.40. Beispiele: 1) Für jeden Vektorraum V läßt sich ein graduierter Vektorraum $\operatorname{Triv} V$ definieren durch $\operatorname{Triv} V = \left(V, \left(\left\{ \begin{array}{c} V, \text{ wenn } n=0; \\ 0, \text{ wenn } n>0 \end{array} \right. \right)_{n\geq 0} \right)$. Dieser Vektorraum $\operatorname{Triv} V$ heißt *trivial-graduierter Vektorraum* V. (Für $V = k$ haben wir diesen Begriff bereits weiter oben definiert.) Die Graduierung $\left(\left\{ \begin{array}{c} V, \text{ wenn } n=0; \\ 0, \text{ wenn } n>0 \end{array} \right. \right)_{n\geq 0}$ heißt *triviale Graduierung*.

Ist V eine Algebra, eine Coalgebra, eine Bialgebra oder eine Hopfalgebra, so ist entsprechend auch $\operatorname{Triv} V$ eine graduierte Algebra, eine graduierte Coalgebra, eine graduierte Bialgebra bzw. eine graduierte Hopfalgebra. Doch dies sind nicht die interessanten Fälle von graduierten Algebren, Coalgebren, Bialgebren bzw. Hopfalgebren.

2) Für jeden Vektorraum V läßt sich der Tensormodul TV (der in 2.1. **5)** definiert wurde) zu einem graduierten Vektorraum $\left(TV, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ machen. Die in 2.1. **5)** definierte Tensorcoalgebra $(TV, \Delta, \varepsilon)$ ist eine zusammenhängende graduierte Coalgebra, und die in 2.1. **7)** definierte Shufflecoalgebra $(TV, \Delta', \varepsilon)$ ist ebenfalls eine zusammenhängende graduierte Coalgebra.

3) Die in 2.18. **1)** definierte Hopfalgebra $k[T]$ wird zu einer zusammenhängenden graduierten Hopfalgebra $\left(k[T], (P_n)_{n\geq 0}\right)$, wenn man P_n als die Menge aller homogenen Polynome in $k[T]$ von Grad n definiert. (Dabei muß man 0 als ein homogenes Polynom von Grad n für jedes $n \geq 0$ betrachten.)

4) Auch die in 2.18. **3)** definierte Hopfalgebra $k[T] \diagup (T^p)$ ist eine zusammenhängende graduierte Hopfalgebra (wobei die Graduierung durch Faktorbildung aus der Graduierung $(P_n)_{n\geq 0}$ von $k[T]$ entsteht).

5) Die in 2.18. $\mathbf{3\frac{1}{2}}$**)** definierte Hopfalgebra $k\left\langle t \mid t^{p^{n+m}} = 0 \right\rangle$ ist (zumindest mit der naheliegenden Graduierung, also der Graduierung $(Q_\ell)_{\ell\geq 0}$, wobei Q_ℓ die Menge aller homogenen Polynome in t von Grad ℓ ist) *keine* graduierte Hopfalgebra, da ihre Comultiplikation Δ und ihre Antipode S nicht graduiert sind.

6) Die in 2.18. **5)** definierte Bialgebra $k[T_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ läßt sich nicht zu einer graduierten Bialgebra machen, außer durch die triviale Graduierung.

Zusammenhängende graduierte Bialgebren

Zusammenhängende graduierte Bialgebren haben eine Reihe nützlicher Eigenschaften. Unter anderem sind sie stets graduierte Hopfalgebren, wie folgender Satz zeigt:

2.45. Satz: Sei $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ eine zusammenhängende graduierte Bialgebra. Dann gilt:

1) Für jedes $i \geq 1$ ist $\varepsilon(H_i) = 0$.

2) Jedes Element von H_1 ist in H primitiv.

3) Für jedes $n \geq 0$ und jedes $x \in H_n$ gilt $\Delta(x) - x \otimes 1 \in \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$.

4) Für jedes $n \geq 1$ und jedes $x \in H_n$ gilt $\Delta(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x \in \sum\limits_{\ell=1}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$.

5) Für jede graduierte Abbildung $f : H \to H$, die $f\mid_{H_0} = \operatorname{id}_{H_0}$ erfüllt, existiert ein $*$-Inverses $g : H \to H$ von f, und dieses $*$-Inverse g ist ebenfalls graduiert.

6) Die graduierte Bialgebra $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ ist auch eine graduierte Hopfalgebra (d. h. die Bialgebra H hat eine graduierte Antipode).

7) Sei S die Antipode der Hopfalgebra H. Für jedes $n \geq 0$ sei $E_n : H_n \to H_n$ die Abbildung, die jedes $x \in H_n$ auf $nx \in H_n$ abbildet. Sei E die direkte Summe $\bigoplus\limits_{n\geq 0} E_n : \bigoplus\limits_{n\geq 0} H_n \to \bigoplus\limits_{n\geq 0} H_n$ dieser Abbildungen. Wegen $H = \bigoplus\limits_{n\geq 0} H_n$ (weil $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte Bialgebra ist) ist also E eine Abbildung von H nach H.

Für je zwei Elemente x und y von H bezeichnen wir mit $[x, y]$ die Differenz $xy - yx$.

Für jedes $n \geq 1$ und beliebige n Elemente x_1, x_2, ..., x_n von H_1 gilt dann

$$(E * S)(x_1 x_2 ... x_n) = [x_1, [x_2, [x_3, ..., [x_{n-1}, x_n]]]].$$

[126]

Beweis von Satz 2.45: **1)** Da $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte Bialgebra ist, ist die Coeins $\varepsilon : H \to k$ graduiert. Für jedes $i \geq 0$ ist also $\varepsilon(H_i) \subseteq \begin{cases} k, & \text{wenn } i = 0; \\ 0, & \text{wenn } i > 0 \end{cases}$ (denn die Graduierung von k ist die triviale Graduierung $\left(\begin{cases} k, & \text{wenn } n = 0; \\ 0, & \text{wenn } n > 0 \end{cases}\right)_{n\geq 0}$). Im Fall $i > 0$ vereinfacht sich dies zu $\varepsilon(H_i) \subseteq 0$. Also ist $\varepsilon(H_i) = 0$ für alle $i > 0$, was zu beweisen war.

3) Seien $n \geq 0$ und $x \in H_n$ beliebig. Da $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte Bialgebra ist, ist die Comultiplikation $\Delta : H \to H \otimes H$ graduiert. Somit gilt $\Delta(H_n) \subseteq \sum\limits_{\ell=0}^{n} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$ (denn die Graduierung auf dem Tensorprodukt $H \otimes H$ ist laut Definition gegeben durch $\left(\sum\limits_{\ell=0}^{n} H_\ell \otimes H_{n-\ell}\right)_{n\geq 0}$). Aus $x \in H_n$ folgt also

$$\Delta(x) \in \Delta(H_n) \subseteq \sum_{\ell=0}^{n} H_\ell \otimes H_{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell} + H_n \otimes H_0.$$

Somit gibt es ein $\alpha \in H_n \otimes H_0$ mit $\Delta(x) \in \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell} + \alpha$. Für dieses α ist also $\Delta(x) - \alpha \in \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$ und damit

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(x) - \alpha) \in (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{id}(H_\ell) \otimes \underbrace{\varepsilon(H_{n-\ell})}_{\substack{=0 \text{ (denn aus } \ell \leq n-1 \\ \text{folgt } n-\ell \neq 0 \text{ und somit} \\ \varepsilon(H_{n-\ell})=0 \text{ (nach } \mathbf{1)}, \\ \text{angewandt auf } i=n-\ell))}}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathrm{id}(H_\ell) \otimes 0 = 0,$$

also $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(x) - \alpha) = 0$. Wenn wir mit $\mathrm{kan} : H \to H \otimes k$ die kanonische Abbildung von H nach $H \otimes k$ bezeichnen, dann gilt also

$$0 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(x) - \alpha) = \underbrace{(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(x))}_{=\mathrm{kan}\, x \text{ (da } H \text{ eine Coalgebra ist)}} - (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\alpha) = \mathrm{kan}\, x - (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\alpha),$$

[126] Hierbei ist der Term $[x_1, [x_2, [x_3, ..., [x_{n-1}, x_n]]]]$ als x_1 zu verstehen, wenn $n = 1$ ist.

also $\operatorname{kan} x = (\operatorname{id} \otimes \varepsilon)(\alpha)$. Da $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ zusammenhängend ist, gilt $H_0 = k \cdot 1_H$, und somit ist der Homomorphismus $\varepsilon \mid_{H_0}: H_0 \to k$ ein Isomorphismus (da er 1_H auf 1 abbildet). Folglich ist der Homomorphismus $\operatorname{id} \otimes \varepsilon \mid_{H_0}: H_n \otimes H_0 \to H_n \otimes k$ ein Isomorphismus. Aus

$$\begin{aligned}\underbrace{\left(\operatorname{id} \otimes \varepsilon \mid_{H_0}\right)}_{=(\operatorname{id} \otimes \varepsilon)\mid_{H_n \otimes H_0}}(\alpha) &= \left((\operatorname{id} \otimes \varepsilon)\mid_{H_n \otimes H_0}\right)(\alpha) = (\operatorname{id} \otimes \varepsilon)(\alpha) = \operatorname{kan} x = x \otimes \underbrace{1}_{=\left(\varepsilon\mid_{H_0}\right)(1_H)} \\ &= x \otimes \left(\varepsilon \mid_{H_0}\right)(1_H) = \left(\operatorname{id} \otimes \varepsilon \mid_{H_0}\right)(x \otimes 1_H)\end{aligned}$$

folgt somit $\alpha = x \otimes 1_H$, also kurz $\alpha = x \otimes 1$. Somit wird $\Delta(x) - \alpha \in \sum_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$ zu $\Delta(x) - x \otimes 1 \in \sum_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$, und Satz 2.45 **3)** ist somit gezeigt.

4) Seien $n \geq 1$ und $x \in H_n$ beliebig. Aus $n \geq 1$ folgt $n \neq 0$ und somit $\varepsilon(H_n) = 0$ (nach **1)**, angewandt auf $i = n$). Also ist $\varepsilon(x) = 0$ (da $x \in H_n$).

Nach **3)** gilt

$$\Delta(x) - x \otimes 1 \in \sum_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell} = H_0 \otimes H_n + \sum_{\ell=1}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}.$$

Somit gibt es ein $\beta \in H_0 \otimes H_n$ mit $\Delta(x) - x \otimes 1 \in \beta + \sum_{\ell=1}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$. Für dieses β gilt also $\Delta(x) - x \otimes 1 - \beta \in \sum_{\ell=1}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$ und damit

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\Delta(x) - x \otimes 1 - \beta) &\in (\varepsilon \otimes \operatorname{id})\left(\sum_{\ell=1}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1} \underbrace{\varepsilon(H_\ell)}_{\substack{=0 \text{ (denn aus } \ell\geq 1 \\ \text{folgt } \ell\neq 0 \text{ und somit} \\ \varepsilon(H_\ell)=0 \text{ (nach } \mathbf{1)}, \\ \text{angewandt auf } i=\ell))}} \otimes \operatorname{id}(H_{n-\ell}) = \sum_{\ell=1}^{n-1} 0 \otimes \operatorname{id}(H_{n-\ell}) = 0,\end{aligned}$$

also $(\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\Delta(x) - x \otimes 1 - \beta) = 0$. Wenn wir mit $\operatorname{kan} : H \to k \otimes H$ die kanonische Abbildung von H nach $k \otimes H$ bezeichnen, dann gilt also

$$\begin{aligned}0 &= (\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\Delta(x) - x \otimes 1 - \beta) \\ &= \underbrace{(\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\Delta(x))}_{=\operatorname{kan} x \text{ (da } H \text{ eine Coalgebra ist)}} - \underbrace{(\varepsilon \otimes \operatorname{id})(x \otimes 1)}_{=\varepsilon(x)\otimes 1} - (\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\beta) \\ &= \operatorname{kan} x - \underbrace{\varepsilon(x)}_{=0} \otimes 1 - (\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\beta) = \operatorname{kan} x - 0 \otimes 1 - (\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\beta) \\ &= \operatorname{kan} x - (\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\beta),\end{aligned}$$

also $\operatorname{kan} x = (\varepsilon \otimes \operatorname{id})(\beta)$.

Da $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ zusammenhängend ist, gilt $H_0 = k \cdot 1_H$, und somit ist der Homomorphismus $\varepsilon \mid_{H_0}: H_0 \to k$ ein Isomorphismus (da er 1_H auf 1 abbildet). Folglich ist der Homomorphismus $\varepsilon\mid_{H_0}\otimes\mathrm{id}:H_0\otimes H_n\to k\otimes H_n$ ein Isomorphismus. Aus

$$\underbrace{\left(\varepsilon\mid_{H_0}\otimes\mathrm{id}\right)}_{=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\mid_{H_0\otimes H_n}}(\beta)=\left((\varepsilon\otimes\mathrm{id})\mid_{H_0\otimes H_n}\right)(\beta)=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\beta)=\operatorname{kan}x=\underbrace{1}_{=\left(\varepsilon\mid_{H_0}\right)(1_H)}\otimes x$$
$$=\left(\varepsilon\mid_{H_0}\right)(1_H)\otimes x=\left(\varepsilon\mid_{H_0}\otimes\mathrm{id}\right)(1_H\otimes x)$$

folgt somit $\beta=1_H\otimes x$, also kurz $\beta=1\otimes x$. Somit wird $\Delta(x)-x\otimes 1-\beta\in\sum\limits_{\ell=1}^{n-1}H_\ell\otimes H_{n-\ell}$ zu $\Delta(x)-x\otimes 1-1\otimes x\in\sum\limits_{\ell=1}^{n-1}H_\ell\otimes H_{n-\ell}$, und Satz 2.45 **4)** ist somit gezeigt.

2) Sei $x\in H_1$. Nach **4)** (angewandt auf $n=1$) ist dann $\Delta(x)-x\otimes 1-1\otimes x\in\sum\limits_{\ell=1}^{0}H_\ell\otimes H_{1-\ell}=$ (leere Summe) $=0$, also $\Delta(x)-x\otimes 1-1\otimes x=0$ und damit $\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x$. Folglich ist x primitiv. Somit ist gezeigt, daß jedes Element von H_1 primitiv ist, was zu beweisen war.

5) Da $\left(H,(H_n)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte Bialgebra ist, gilt $H=\bigoplus\limits_{n\geq 0}H_n$ und somit $H\otimes H=\left(\bigoplus\limits_{n\geq 0}H_n\right)\otimes\left(\bigoplus\limits_{n\geq 0}H_n\right)=\bigoplus\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}H_i\otimes H_j$. Für jedes $(u,v)\in\mathbb{N}^2$ sei $\pi_{u,v}$ die Projektion von der direkten Summe $\bigoplus\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}H_i\otimes H_j=H\otimes H$ auf ihren Summanden $H_u\otimes H_v$. Für jedes $y\in H\otimes H$ ist dann $y=\sum\limits_{(u,v)\in\mathbb{N}^2}\pi_{u,v}(y)$.

Sei $f:H\to H$ eine graduierte Abbildung, die $f\mid_{H_0}=\mathrm{id}_{H_0}$ erfüllt.

Wir werden jetzt eine Abbildung $g_n:H_n\to H_n$ für jedes $n\geq 0$ definieren. Dies tun wir durch Rekursion nach n:

Wir definieren eine Abbildung $g_0:H_0\to H_0$ durch $g_0=\mathrm{id}_{H_0}$.

Sei nun $n\geq 1$ beliebig. Angenommen, wir haben bereits eine Abbildung $g_m:H_m\to H_m$ für jedes $m\in\{0,1,...,n-1\}$ definiert. Jetzt definieren wir eine Abbildung $g_n:H_n\to H_n$ durch

$$g_n=-\sum_{i=0}^{n-1}\mu\circ(g_i\otimes f)\circ\pi_{i,n-i}\circ\Delta.\tag{2.50}$$

127

Auf diese Weise haben wir eine Abbildung $g_n:H_n\to H_n$ für jedes $n\geq 0$ definiert. Diese Abbildungen lassen sich zu einer Abbildung $\bigoplus\limits_{n\geq 0}g_n:\bigoplus\limits_{n\geq 0}H_n\to\bigoplus\limits_{n\geq 0}H_n$ zusammenbauen. Wir bezeichnen diese Abbildung $\bigoplus\limits_{n\geq 0}g_n$ mit g. Wegen $\bigoplus\limits_{n\geq 0}H_n=H$ ist also g eine Abbildung von H nach H. Da $g=\bigoplus\limits_{n\geq 0}g_n$ ist, gilt $g\mid_{H_\ell}=g_\ell$ für alle $\ell\geq 0$. Insbesondere gilt $g\mid_{H_0}=g_0=\mathrm{id}_{H_0}$.

---

[127] Daß diese Abbildung g_n wohldefiniert ist, ist leicht zu sehen:

Sei $i\in\{0,1,...,n-1\}$. Die Abbildung $\pi_{i,n-i}\circ\Delta$ sendet H_n nach $H_i\otimes H_{n-i}$. Die Abbildung $g_i\otimes f$ sendet $H_i\otimes H_{n-i}$ nach $H_i\otimes H_{n-i}$ (denn g_i sendet H_i nach H_i, und f sendet H_{n-i} nach H_{n-i} (da f graduiert ist)). Die Abbildung μ ist graduiert und sendet daher $H_i\otimes H_{n-i}$ nach $H_{i+(n-i)}=H_n$. All dies zusammen zeigt, daß die Abbildung $\mu\circ(g_i\otimes f)\circ\pi_{i,n-i}\circ\Delta$ den Raum H_n nach H_n sendet. Da dies für alle $i\in\{0,1,...,n-1\}$ gilt, folgt hieraus, daß die Abbildung $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\mu\circ(g_i\otimes f)\circ\pi_{i,n-i}\circ\Delta$ den Raum H_n nach H_n sendet. Daher ist g_n wohldefiniert.

Wir werden jetzt zeigen, daß $g * f = \mathrm{id}$ ist.

Dazu wählen wir zuerst ein beliebiges $n \geq 0$ und ein beliebiges $x \in H_n$.

Laut **3)** gilt $\Delta(x) - x \otimes 1 \in \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$ und damit

$$\begin{aligned}
&\pi_{n,0}\left(\Delta(x) - x \otimes 1\right) \\
&\in \pi_{n,0}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} H_\ell \otimes H_{n-\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \pi_{n,0}\left(H_\ell \otimes H_{n-\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1} 0 \\
&\quad \left(\begin{array}{c} \text{denn für jedes } \ell \in \{0,1,...,n-1\} \text{ ist } \pi_{n,0}\left(H_\ell \otimes H_{n-\ell}\right) = 0 \text{ (denn wegen} \\ \ell \in \{0,1,...,n-1\} \text{ ist } \ell \neq n\text{, und somit sind } H_\ell \otimes H_{n-\ell} \text{ und } H_n \otimes H_0 \\ \text{zwei verschiedene Summanden der direkten Summe } \bigoplus\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} H_i \otimes H_j\text{, und} \\ \text{somit überführt die Projektion } \pi_{n,0} \text{ auf den Summanden } H_n \otimes H_0 \text{ den} \\ \text{Summanden } H_\ell \otimes H_{n-\ell} \text{ in } 0) \end{array}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also $\pi_{n,0}\left(\Delta(x) - x \otimes 1\right) = 0$. Das heißt, $\pi_{n,0}\left(\Delta(x)\right) = \pi_{n,0}\left(x \otimes 1\right)$. Wegen $\pi_{n,0}\left(x \otimes 1\right) = x \otimes 1$ (denn wegen $x \in H_n$ und $1 \in H_0$ ist $x \otimes 1 \in H_n \otimes H_0$, und somit überführt die Projektion $\pi_{n,0}$ auf den Summanden $H_n \otimes H_0$ das Element $x \otimes 1$ in sich selbst) wird dies zu $\pi_{n,0}\left(\Delta(x)\right) = x \otimes 1$. Nun ist

$$\begin{aligned}
&\left(\mu \circ (g_n \otimes f) \circ \pi_{n,0} \circ \Delta\right)(x) \\
&= \mu\left((g_n \otimes f)\left(\underbrace{\pi_{n,0}\left(\Delta(x)\right)}_{=x\otimes 1}\right)\right) = \mu\left(\underbrace{(g_n \otimes f)(x \otimes 1)}_{=g_n(x)\otimes f(1)}\right) \\
&= \mu\left(g_n(x) \otimes f(1)\right) = g_n(x) \cdot \underbrace{f(1)}_{\substack{=\left(f|_{H_0}\right)(1) \\ (\text{denn } 1\in H_0)}} = g_n(x) \cdot \underbrace{\left(f\mid_{H_0}\right)}_{=\mathrm{id}_{H_0}}(1) = g_n(x).
\end{aligned}$$

Nun ist $\Delta(x) \in \Delta(H_n) \subseteq \sum\limits_{\ell=0}^{n} H_\ell \otimes H_{n-\ell}$. Somit ist $\pi_{u,v}\left(\Delta(x)\right) = 0$ für jedes $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ mit $u + v \neq n$ (denn für jedes $\ell \in \{0,1,...,n\}$ ist $\pi_{u,v}\left(H_\ell \otimes H_{n-\ell}\right) = 0$

[128]). Daher ist

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \sum_{(u,v)\in\mathbb{N}^2} \pi_{u,v}(\Delta(x)) \qquad \left(\text{denn } y = \sum_{(u,v)\in\mathbb{N}^2} \pi_{u,v}(y) \text{ für jedes } y \in H\otimes H\right) \\
&= \sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{N}^2;\\ u+v\neq n}} \underbrace{\pi_{u,v}(\Delta(x))}_{=0 \text{ (da } u+v\neq n)} + \sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{N}^2;\\ u+v=n}} \pi_{u,v}(\Delta(x)) = \underbrace{\sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{N}^2;\\ u+v\neq n}} 0}_{=0} + \sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{N}^2;\\ u+v=n}} \pi_{u,v}(\Delta(x)) \\
&= \sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{N}^2;\\ u+v=n}} \pi_{u,v}(\Delta(x)) = \sum_{\ell=0}^{n} \pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x)) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir } (u,v) \text{ durch } (\ell,n-\ell) \text{ substituiert, da nur} \\ \text{über } (u,v) \text{ mit } u+v=n \text{ summiert wurde}\end{array}\right).
\end{aligned}$$

Für jedes $\ell \in \{0,1,...,n\}$ ist

$$\begin{aligned}
\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x)) &\in H_\ell \otimes H_{n-\ell} \qquad (\text{denn } \pi_{\ell,n-\ell} \text{ ist eine Projektion auf } H_\ell\otimes H_{n-\ell}) \\
&\subseteq H_\ell \otimes H
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
(g\otimes f)(\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x))) &= \underbrace{((g\otimes f)\mid_{H_\ell\otimes H})}_{=g|_{H_\ell}\otimes f}(\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x))) \\
&= \left(\underbrace{g\mid_{H_\ell}}_{=g_\ell}\otimes f\right)(\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x))) = (g_\ell\otimes f)(\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x))).
\end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, daß $n \geq 1$ ist. Nach der Definition der Faltung $*$ gilt $g * f =$

---

[128] *Beweis:* Wegen $u+v \neq n = \ell + (n-\ell)$ ist $(u,v) \neq (\ell, n-\ell)$, und somit sind $H_\ell \otimes H_{n-\ell}$ und $H_u \otimes H_v$ zwei verschiedene Summanden der direkten Summe $\bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} H_i \otimes H_j$, und somit überführt die Projektion $\pi_{u,v}$ auf den Summanden $H_u \otimes H_v$ den Summanden $H_\ell \otimes H_{n-\ell}$ in 0. Das heißt, $\pi_{u,v}(H_\ell \otimes H_{n-\ell}) = 0$.

$\mu \circ (g \otimes f) \circ \Delta$. Also ist

$$
\begin{aligned}
(g * f)(x) &= (\mu \circ (g \otimes f) \circ \Delta)(x) = \mu((g \otimes f)(\Delta(x))) \\
&= \mu\left((g \otimes f)\left(\sum_{\ell=0}^{n} \pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x))\right)\right) \qquad \left(\text{denn } \Delta(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x))\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \mu\left(\underbrace{(g \otimes f)(\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x)))}_{=(g_\ell \otimes f)\left(\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x))\right)}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \mu((g_\ell \otimes f)(\pi_{\ell,n-\ell}(\Delta(x)))) \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{n} \mu \circ (g_\ell \otimes f) \circ \pi_{\ell,n-\ell} \circ \Delta\right)(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \mu \circ (g_i \otimes f) \circ \pi_{i,n-i} \circ \Delta\right)(x) \\
&\qquad \text{(hier haben wir in der Summe } \ell \text{ in } i \text{ umbenannt)} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu \circ (g_i \otimes f) \circ \pi_{i,n-i} \circ \Delta + \mu \circ (g_n \otimes f) \circ \pi_{n,0} \circ \Delta\right)(x) \\
&= \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \mu \circ (g_i \otimes f) \circ \pi_{i,n-i} \circ \Delta}_{=-g_n \text{ (nach (2.50))}}\right)(x) + \underbrace{(\mu \circ (g_n \otimes f) \circ \pi_{n,0} \circ \Delta)(x)}_{=g_n(x)} \\
&= -g_n(x) + g_n(x) = 0 = \eta(\varepsilon(x)) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn nach } \mathbf{1)} \text{ (angewandt auf } i = n) \text{ ist } \varepsilon(H_n) = 0 \\ \text{und somit } \varepsilon(x) = 0 \text{ (weil } x \in H_n) \end{array}\right) \\
&= (\eta \circ \varepsilon)(x).
\end{aligned}
$$

Wir haben also gezeigt: Für jedes $n \geq 1$ gilt $(g * f)(x) = (\eta \circ \varepsilon)(x)$ für jedes $x \in H_n$. Doch auch für $n = 0$ gilt dies (wie man sich leicht überlegt, da $H_0 = k \cdot 1_H$ und $f \mid_{H_0} = g \mid_{H_0} = \mathrm{id}_{H_0}$ gilt). Somit wissen wir: Für jedes $n \geq 0$ gilt $(g * f)(x) = (\eta \circ \varepsilon)(x)$ für jedes $x \in H_n$. Da die Vektoren $x \in H_n$ für $n \geq 0$ den Vektorraum H erzeugen (denn $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$), folgt hieraus, daß $g * f = \eta \circ \varepsilon$.

Somit hat das Element $f \in \operatorname{Hom}(H, H)$ ein Linksinverses bezüglich der Konvolution $*$. Analog zeigt man, daß das Element f auch ein Rechtsinverses bezüglich $*$ hat. Somit hat das Element f ein Inverses bezüglich $*$ (denn ein Element eines Monoids, das sowohl ein Linksinverses als auch ein Rechtsinverses hat, muß ein Inverses haben), und dieses Inverse ist g (wegen $g * f = \eta \circ \varepsilon$). Somit ist dieses Inverse graduiert (denn g ist graduiert, weil $g = \bigoplus_{n \geq 0} g_n$ ist und die Abbildungen g_n jeweils von H_n nach H_n gehen). Damit ist Satz 2.45 **5)** bewiesen.

6) Die Abbildung $\mathrm{id} : H \to H$ ist graduiert und erfüllt $\mathrm{id} \mid_{H_0} = \mathrm{id} \mid_{H_0}$. Nach **5)** (angewandt auf $f = \mathrm{id}$) existiert also ein $*$-Inverses von id, und dieses $*$-Inverse ist graduiert. Mit anderen Worten: Die Bialgebra H hat eine Antipode, und diese Antipode ist graduiert. Damit ist $\left(H, (H_n)_{n \geq 0}\right)$ eine graduierte Hopfalgebra, was zu beweisen war.

7) Wir zeigen zuallererst Hilfsaussagen über die Abbildung E:

a) Für jedes $v \in H_1$ und $t \in H$ ist $E(vt) = vE(t) + vt$.

Beweis: Sei $v \in H_1$ beliebig. Sei $L_v : H \to H$ die Abbildung

$$L_v : H \to H, \qquad x \mapsto vx.$$

Sei $R_v : H \to H$ die Abbildung

$$R_v : H \to H, \qquad x \mapsto vx.$$

Beide Abbildungen L_v und R_v sind k-linear.

Sei $n \geq 0$ beliebig. Sei $x \in H_n$ beliebig. Dann ist $\underbrace{v}_{\in H_1}\underbrace{x}_{\in H_n} \in H_1 H_n \subseteq H_{1+n}$ (denn $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ ist eine graduierte Algebra). Wegen $E = \bigoplus_{n\geq 0} E_n$ führt dies auf $E(vx) = E_{1+n}(vx) = E_{n+1}(vx) = (n+1)\,vx$ (nach der Definition von E_{n+1}). Andererseits ist $x \in H_n$ und damit $E(x) = E_n(x)$ (weil $E = \bigoplus_{n\geq 0} E_n$), was zu $E(x) = nx$ wird (denn $E_n(x) = nx$ nach der Definition von E_n). Somit ist

$$\begin{aligned}
&(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v)(x) \\
&= (E \circ L_v)(x) - (L_v \circ E)(x) - L_v(x) = E\left(\underbrace{L_v(x)}_{=vx}\right) - \underbrace{L_v(E(x))}_{\substack{=vE(x) \\ \text{(nach der} \\ \text{Definition von } L_v)}} - \underbrace{L_v(x)}_{\substack{=vx \\ \text{(nach der} \\ \text{Definition von } L_v)}} \\
&= \underbrace{E(vx)}_{=(n+1)vx} - v\underbrace{E(x)}_{=nx} - vx = (n+1)\,vx - vnx - vx = 0,
\end{aligned}$$

also $x \in \operatorname{Ker}(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v)$. Wir haben damit gezeigt: Für jedes $n \geq 0$ gilt $x \in \operatorname{Ker}(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v)$ für jedes $x \in H_n$. Das heißt: Für jedes $n \geq 0$ ist $H_n \subseteq \operatorname{Ker}(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v)$.

Da $E \circ L_v - L_v \circ E - L_v$ eine k-lineare Abbildung ist (denn E und L_v sind k-linear), ist aber $\operatorname{Ker}(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v)$ ein Untervektorraum von H.

Da $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ ein graduierter Vektorraum ist, ist

$$\begin{aligned}
H &= \bigoplus_{n\geq 0} H_n = \sum_{n\geq 0} \underbrace{H_n}_{\subseteq \operatorname{Ker}(E\circ L_v - L_v \circ E - L_v)} \qquad \text{(denn direkte Summen sind Summen)} \\
&\subseteq \sum_{n\geq 0} \operatorname{Ker}(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v) = \operatorname{Ker}(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v) \\
&\qquad \left(\text{denn } \operatorname{Ker}(E \circ L_v - L_v \circ E - L_v) \text{ ist ein Untervektorraum von } H\right),
\end{aligned}$$

also $E \circ L_v - L_v \circ E - L_v = 0$. Das heißt, $E \circ L_v = L_v \circ E + L_v$. Für jedes $t \in H$ ist also $(E \circ L_v)(t) = (L_v \circ E + L_v)(t)$. Wegen $(E \circ L_v)(t) = E\left(\underbrace{L_v(t)}_{=vt}\right) = E(vt)$ und $(L_v \circ E + L_v)(t) = (L_v \circ E)(t) + L_v(t) = \underbrace{L_v(E(t))}_{=vE(t)} + \underbrace{L_v(t)}_{=vt} = vE(t) + vt$ wird dies zu $E(vt) = vE(t) + vt$.

Damit ist **a)** bewiesen.

b) Für jedes $v \in H_1$ und $s \in H$ ist $S(vs) = -S(s)v$.

Beweis: Wegen $v \in H_1$ ist v primitiv (nach **1)**), also $(1,1)$-primitiv. Nach $2.11\frac{1}{2}$ **2)** (angewandt auf $g = 1$ und $h = 1$) folgt hieraus $S(v) = -1^{-1}v1^{-1} = -v$.

Da S ein Antialgebrahomomorphismus ist, gilt aber $S(vs) = S(s)\underbrace{S(v)}_{=-v} = S(s) \cdot (-v) = -S(s)v$. Damit ist **b)** bewiesen.

c) Für jedes $v \in H_1$ und jedes $T \in H \otimes H$ gilt

$$(\mu \circ (E \otimes S))(\Delta(v) \cdot T) = [v, (\mu \circ (E \otimes S))(T)] + v \cdot (\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S))(T).$$

Beweis: Sei $v \in H_1$. Dann ist v primitiv (laut **1)**). Das heißt, $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$.

Wir definieren eine Abbildung $\Phi_1 : H \otimes H \to H$ durch

$$\Phi_1(T) = (\mu \circ (E \otimes S))(\Delta(v) \cdot T) \qquad \text{für alle } T \in H \otimes H.$$

Ferner definieren wir eine Abbildung $\Phi_2 : H \otimes H \to H$ durch

$$\Phi_2(T) = [v, (\mu \circ (E \otimes S))(T)] + v \cdot (\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S))(T) \qquad \text{für alle } T \in H \otimes H.$$

Diese Abbildungen Φ_1 und Φ_2 sind beide k-linear (denn die Abbildungen μ, $E \otimes S$, $\operatorname{id} \otimes S$ und auch die Abbildung $H \to H$, $x \mapsto [v, x]$ sowie die Abbildung $H \otimes H \to H \otimes H$, $x \mapsto \Delta(v) \cdot x$ sind alle k-linear).

Wir werden nun zeigen: Für jede $t \in H$ und $s \in H$ gilt $\Phi_1(t \otimes s) = \Phi_2(t \otimes s)$. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t \otimes s) &= (\mu \circ (E \otimes S))\left(\underbrace{\Delta(v)}_{=v\otimes 1 + 1 \otimes v} \cdot (t \otimes s)\right) \\
&\qquad \text{(nach der Definition von } \Phi_1\text{)} \\
&= (\mu \circ (E \otimes S))\left(\underbrace{(v \otimes 1 + 1 \otimes v) \cdot (t \otimes s)}_{=(v\otimes 1)\cdot(t\otimes s) + (1\otimes v)\cdot(t\otimes s)}\right) \\
&= (\mu \circ (E \otimes S))\left(\underbrace{(v \otimes 1) \cdot (t \otimes s)}_{=vt\otimes s} + \underbrace{(1 \otimes v) \cdot (t \otimes s)}_{=t\otimes vs}\right) \\
&= (\mu \circ (E \otimes S))(vt \otimes s + t \otimes vs) = \mu\left(\underbrace{(E \otimes S)(vt \otimes s + t \otimes vs)}_{=E(vt)\otimes S(s) + E(t)\otimes S(vs)}\right) \\
&= \mu(E(vt) \otimes S(s) + E(t) \otimes S(vs)) \\
&= \underbrace{E(vt)}_{\substack{=vE(t)+vt \\ \text{(nach } \mathbf{a)}\text{)}}} S(s) + E(t) \underbrace{S(vs)}_{\substack{=-S(s)v \\ \text{(nach } \mathbf{b)}\text{)}}} \qquad \text{(da } \mu \text{ die Multiplikationsabbildung ist)} \\
&= (vE(t) + vt)S(s) + E(t)(-S(s)v) = (vE(t) + vt)S(s) - E(t)S(s)v \\
&= vE(t)S(s) + vtS(s) - E(t)S(s)v = \underbrace{vE(t)S(s) - E(t)S(s)v}_{=[v, E(t)S(s)]} + vtS(s) \\
&= [v, E(t)S(s)] + vtS(s)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Phi_2(t\otimes s) &= \left[v, \underbrace{(\mu\circ(E\otimes S))(t\otimes s)}_{=\mu((E\otimes S)(t\otimes s))}\right] + v\cdot \underbrace{(\mu\circ(\operatorname{id}\otimes S))(t\otimes s)}_{=\mu((\operatorname{id}\otimes S)(t\otimes s))} \\
&\qquad \text{(nach der Definition von } \Phi_2\text{)} \\
&= \left[v, \mu\left(\underbrace{(E\otimes S)(t\otimes s)}_{=E(t)\otimes S(s)}\right)\right] + v\cdot\mu\left(\underbrace{(\operatorname{id}\otimes S)(t\otimes s)}_{=t\otimes S(s)}\right) \\
&= \left[v, \underbrace{\mu(E(t)\otimes S(s))}_{\substack{=E(t)S(s) \\ \text{(denn } \mu \text{ ist die} \\ \text{Multiplikationsabbildung)}}}\right] + v\cdot \underbrace{\mu(t\otimes S(s))}_{\substack{=tS(s) \\ \text{(denn } \mu \text{ ist die} \\ \text{Multiplikationsabbildung)}}} \\
&= [v, E(t)S(s)] + vtS(s),
\end{aligned}$$

und folglich ist $\Phi_1(t\otimes s) = \Phi_2(t\otimes s)$.

Nun sind Φ_1 und Φ_2 zwei lineare Abbildungen von $H\otimes H$ nach H, die auf jedem reinen Tensor übereinstimmen (denn $\Phi_1(t\otimes s) = \Phi_2(t\otimes s)$ für jede $t\in H$ und $s\in H$). Somit müssen diese Abbildungen Φ_1 und Φ_2 gleich sein (denn zwei lineare Abbildungen aus einem Tensorprodukt, die auf jedem reinen Tensor übereinstimmen, müssen gleich sein). Das heißt, $\Phi_1 = \Phi_2$. Für jedes $T\in H\otimes H$ gilt also

$$(\mu\circ(E\otimes S))(\Delta(v)\cdot T) = \underbrace{\Phi_1}_{=\Phi_2}(T) = \Phi_2(T) = [v, (\mu\circ(E\otimes S))(T)] + v\cdot(\mu\circ(\operatorname{id}\otimes S))(T).$$

Damit ist **c)** gezeigt.

Jetzt wollen wir zum eigentlichen Beweis von **7)** kommen. Wir stellen dazu erst einmal fest, daß die Elemente x_1, x_2, ..., x_n von H alle primitiv sind (laut **1)**, denn sie liegen in H_1). Das heißt, $\Delta(x_i) = x_i\otimes 1 + 1\otimes x_i$ für alle $i\in\{1,2,...,n\}$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
E(1) &= E_0(1) && \left(\text{denn } E = \bigoplus_{n\geq 0} E_n \text{ und } 1\in H_0\right) \\
&= 0\cdot 1 && \text{(nach der Definition von } E_0\text{)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E(x_i) &= E_1(x_i) && \left(\text{denn } E = \bigoplus_{n\geq 0} E_n \text{ und } x_i\in H_1\right) \\
&= 1\cdot x_i && \text{(nach der Definition von } E_1\text{)} \\
&= x_i
\end{aligned}$$

für jedes $i\in\{1,2,...,n\}$.

Jetzt werden wir zeigen: Für jedes $\ell \in \{0, 1, ..., n-1\}$ gilt

$$(E * S)(x_{n-\ell}x_{n-\ell+1}...x_n) = [x_{n-\ell}, [x_{n-\ell+1}, [x_{n-\ell+2}, ..., [x_{n-1}, x_n]]]]. \tag{2.51}$$

Beweis von (2.51): Wir zeigen (2.51) durch vollständige Induktion nach ℓ:

Induktionsanfang: Für $\ell = 0$ ist (2.51) trivial zu zeigen (denn für $\ell = 0$ vereinfacht sich (2.51) zu $(E * S)(x_n) = x_n$, und dies folgt daraus, daß

$$\begin{aligned}
(E * S)(x_n) &= (\mu \circ (E \otimes S) \circ \Delta)(x_n) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } E * S = \mu \circ (E \otimes S) \circ \Delta \text{ nach} \\ \text{der Definition der Faltung } *\end{array}\right) \\
&= \mu\left((E \otimes S)\left(\underbrace{\Delta(x_n)}_{\substack{= x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n \\ (\text{denn } \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i \\ \text{für alle } i \in \{1,2,...,n\})}}\right)\right) = \mu\left(\underbrace{(E \otimes S)(x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n)}_{= E(x_n) \otimes S(1) + E(1) \otimes S(x_n)}\right) \\
&= \mu(E(x_n) \otimes S(1) + E(1) \otimes S(x_n)) = \underbrace{E(x_n)}_{\substack{= x_n \\ (\text{denn } E(x_i) = x_i \text{ für} \\ \text{alle } i \in \{1,2,...,n\})}} \cdot \underbrace{S(1)}_{=1} + \underbrace{E(1)}_{=0} \cdot S(x_n) \\
&= x_n \cdot 1 + 0 \cdot S(x_n) = x_n
\end{aligned}$$

gilt). Damit ist der Induktionsanfang erledigt.

Induktionsschritt: Sei $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ beliebig. Angenommen, (2.51) gilt für $\ell = j - 1$. Wir müssen nun zeigen, daß (2.51) auch für $\ell = j$ gilt.

Da (2.51) für $\ell = j - 1$ gilt, ist

$$(E * S)\left(x_{n-(j-1)}x_{n-(j-1)+1}...x_n\right) = \left[x_{n-(j-1)}, \left[x_{n-(j-1)+1}, \left[x_{n-(j-1)+2}, ..., [x_{n-1}, x_n]\right]\right]\right]. \tag{2.52}$$

Bezeichnen wir das Element $x_{n-(j-1)}x_{n-(j-1)+1}...x_n \in H$ mit x. Sei ferner $i = n - j$. Schließlich setzen wir $v = x_i$ (dies ist erlaubt, denn $x_i \in H_1$).

Da Δ ein Algebrahomomorphismus ist, gilt $\Delta(vx) = \Delta(v) \cdot \Delta(x)$.

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ist x_i primitiv (nach **1)**, da $x_i \in H_1$), also $(1,1)$-schiefprimitiv. Nach $2.11\frac{1}{2}$ **2)** folgt hieraus $\varepsilon(x_i) = 0$. Wegen $x = x_{n-(j-1)}x_{n-(j-1)+1}...x_n$ ist also

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x) &= \varepsilon\left(x_{n-(j-1)}x_{n-(j-1)+1}...x_n\right) = \underbrace{\varepsilon\left(x_{n-(j-1)}\right)}_{=0}\underbrace{\varepsilon\left(x_{n-(j-1)+1}\right)}_{=0}...\underbrace{\varepsilon(x_n)}_{=0} \\
&\qquad (\text{denn } \varepsilon \text{ ist ein Algebrahomomorphismus}) \\
&= \underbrace{0 \cdot 0 \cdot ... \cdot 0}_{j \text{ Nullen}} = 0 \qquad (\text{da } j \geq 1).
\end{aligned}$$

Da $E * S = \mu \circ (E \otimes S) \circ \Delta$ nach der Definition der Faltung $*$ ist, gilt

$$(E * S)(vx)$$

$$= (\mu \circ (E \otimes S) \circ \Delta)(vx) = (\mu \circ (E \otimes S)) \left(\underbrace{\Delta(vx)}_{=\Delta(v)\cdot\Delta(x)} \right) = (\mu \circ (E \otimes S))(\Delta(v) \cdot \Delta(x))$$

$$= \left[v, \underbrace{(\mu \circ (E \otimes S))(\Delta(x))}_{=(\mu\circ(E\otimes S)\circ\Delta)(x)} \right] + v \cdot \underbrace{(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S))(\Delta(x))}_{=(\mu\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ\Delta)(x)}$$

(nach **c)**, angewandt auf $T = \Delta(x)$)

$$= \left[v, \underbrace{(\mu \circ (E \otimes S) \circ \Delta)}_{=E*S}(x) \right] + v \cdot \underbrace{(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta)}_{=\eta\varepsilon \text{ (denn } H \text{ ist eine Hopfalgebra)}} (x)$$

$$= \left[\underbrace{v}_{\substack{=x_i=x_{n-j} \\ (\text{da } i=n-j)}}, (E * S)(x) \right] + v \cdot \eta \underbrace{\varepsilon(x)}_{=0} = [x_{n-j}, (E * S)(x)] + \underbrace{v \cdot \eta(0)}_{=0}$$

$$= [x_{n-j}, (E * S)(x)] = \left[x_{n-j}, (E * S)\left(x_{n-(j-1)}x_{n-(j-1)+1}...x_n\right)\right]$$

$\left(\text{denn } x = x_{n-(j-1)}x_{n-(j-1)+1}...x_n\right)$

$$= \left[x_{n-j}, \left[\underbrace{x_{n-(j-1)}}_{=x_{n-j+1}}, \left[\underbrace{x_{n-(j-1)+1}}_{=x_{n-j+2}}, \left[\underbrace{x_{n-(j-1)+2}}_{=x_{n-j+3}}, ..., [x_{n-1}, x_n] \right] \right] \right] \right] \qquad \text{(nach (2.52))}$$

$$= [x_{n-j}, [x_{n-j+1}, [x_{n-j+2}, ..., [x_{n-1}, x_n]]]] .$$

Das heißt, (2.51) gilt auch für $\ell = j$. Somit ist der Induktionsschritt gemacht, und der Induktionsbeweis von (2.51) ist fertig.

Anwendung von (2.51) auf $\ell = n-1$ liefert $(E * S)(x_1 x_2 ... x_n) = [x_1, [x_2, [x_3, ..., [x_{n-1}, x_n]]]]$ (denn für $\ell = n - 1$ ist $n - \ell = 1$). Damit ist Satz 2.45 **7)** bewiesen.

Die Tensorhopfalgebra

Wir werden jetzt eine Familie von graduierten Hopfalgebren vorstellen, die sogenannten *Tensorhopfalgebren*:

2.50. Beispiel: Sei V ein beliebiger Vektorraum. In Beispiel 2.1. **5)** wurde der Tensormodul TV des Vektorraums V definiert. (Zur Wiederholung: Er wurde definiert als der Vektorraum $V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ...$)

Bekanntlich läßt sich dieser Tensormodul TV zu einer k-Algebra machen, indem man

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n) \cdot (b_1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_m) = a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes ... \otimes b_m$$
$$\text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ und alle } a_1, a_2, ..., a_n \in V \text{ und alle } b_1, b_2, ..., b_m \in V$$

setzt. Diese k-Algebra heißt die *Tensoralgebra* des Vektorraums V, und wir bezeichnen sie mit $T^{\otimes}V$. (In den meisten Texten wird diese Algebra einfach mit TV oder mit $\otimes V$ bezeichnet; jedoch ziehen wir hier die Notation $T^{\otimes}V$ vor, um sie von einer anderen

k-Algebra zu unterscheiden, die ebenfalls als Vektorraum gleich TV ist (und die wir in Beispiel 2.60 untersuchen werden).) Als k-Vektorraum ist natürlich $T^{\otimes}V = TV$.

Wir bezeichnen die Multiplikationsabbildung $(TV) \otimes (TV) \to TV$ der k-Algebra $T^{\otimes}V$ mit μ, und wir bezeichnen die Einsabbildung $k \to TV$ der k-Algebra $T^{\otimes}V$ mit ε.

Betrachten wir ferner die in Beispiel 2.1. **7)** definierten Abbildungen $\Delta' : TV \to (TV) \otimes (TV)$ und $\varepsilon : TV \to k$, welche (2.8) und (2.9) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllen. Laut Beispiel 2.1. **7)** ist dann $(TV, \Delta', \varepsilon)$ eine Coalgebra.

Wir behaupten nun:

1) Das 5-Tupel $(TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$ ist eine cokommutative Hopfalgebra.

Wir bezeichnen diese Hopfalgebra mit $T^{\otimes}V$ und nennen sie die *Tensorhopfalgebra* von V.

2) Das Paar $\left(T^{\otimes}V, (V^{\otimes n})_{n\geq 0}\right)$ ist eine zusammenhängende graduierte Hopfalgebra (wobei $T^{\otimes}V$ als die Tensorhopfalgebra von V zu verstehen ist, also als das 5-Tupel $(TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$).

3) Sei S die Antipode der Hopfalgebra $T^{\otimes}V = (TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$. Dann gilt

$$S\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n\right) = (-1)^n v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

4) Sei S die Antipode der Hopfalgebra $T^{\otimes}V = (TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$. Für jedes $n \geq 0$ sei $E_n : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ die Abbildung, die jedes $x \in V^{\otimes n}$ auf $nx \in V^{\otimes n}$ abbildet. Sei E die direkte Summe $\bigoplus\limits_{n\geq 0} E_n : \bigoplus\limits_{n\geq 0} V^{\otimes n} \to \bigoplus\limits_{n\geq 0} V^{\otimes n}$ dieser Abbildungen. Wegen $\bigoplus\limits_{n\geq 0} V^{\otimes n} = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV$ ist also E eine Abbildung von TV nach TV.

Für je zwei Elemente x und y von $T^{\otimes}V$ bezeichnen wir mit $[x, y]$ die Differenz $xy - yx$.

Für jedes $n \geq 1$ und beliebige n Elemente x_1, x_2, ..., x_n von V gilt dann

$$(E * S)\left(x_1 x_2 ... x_n\right) = [x_1, [x_2, [x_3, ..., [x_{n-1}, x_n]]]]$$

(wobei wir Elemente von V als Elemente von $T^{\otimes}V$ auffassen, da $V = V^{\otimes 1} \subseteq V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$ ist).

Bemerkung: Laut Beispiel 2.50. **1)** ist $(TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$ eine cokommutative Hopfalgebra. Wir werden weiter unten in Beispiel 2.60. **1)** eine weitere Hopfalgebra $(TV, \mu', \eta, \Delta, \varepsilon)$ kennenlernen, die ebenfalls TV als zugrundeliegenden Vektorraum hat. Diese Hopfalgebra unterscheidet sich von der Hopfalgebra $(TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$ sowohl in ihrer Comultiplikation, als auch in ihrer Multiplikation. Die Comultiplikation Δ ist die in Beispiel 2.1. **5)** definierte Abbildung Δ, während die Multiplikation μ' das sogenannte Shuffleprodukt ist. Diese Hopfalgebra $(TV, \mu', \eta, \Delta, \varepsilon)$ ist im Allgemeinen nicht mehr cokommutativ, aber dafür kommutativ.

Bevor wir Beispiel 2.50 beweisen, zeigen wir ein Lemma (welches als eine Verallgemeinerung der binomischen Formel betrachtet werden kann):

2.51. Lemma: Sei A ein Ring. Sei $k \geq 0$ eine natürliche Zahl. Seien $a_1, a_2, ..., a_k$ beliebige Elemente von A, und seien $b_1, b_2, ..., b_k$ beliebige Elemente von A so, daß $a_i b_j = b_j a_i$ für alle $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$ gilt. Dann ist

$$\left(a_1 + b_1\right)\left(a_2 + b_2\right) ... \left(a_k + b_k\right) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,k-i)} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} ... a_{\sigma(i)} \cdot b_{\sigma(i+1)} b_{\sigma(i+2)} ... b_{\sigma(k)}.$$

Hierbei ist bezüglich der Definition von $\operatorname{Sh}(i, k-i)$ (und, allgemeiner, bezüglich der Definition von $\operatorname{Sh}(p, q)$ für beliebige $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$) auf Beispiel 2.1. **7)** zu verweisen.

Beweis von Lemma 2.51:

Zuerst vereinbaren wir eine Notation:

- Sei T eine endliche Menge natürlicher Zahlen. Unter einer *aufsteigenden Auflistung* der Menge T verstehen wir dabei eine Liste $(t_1, t_2, ..., t_k)$ von Elementen von T, die $t_1 < t_2 < ... < t_k$ und $\{t_1, t_2, ..., t_k\} = T$ erfüllt. Es ist klar, daß jede endliche Menge T natürlicher Zahlen genau eine aufsteigende Auflistung hat; deshalb können wir von "*der* aufsteigenden Auflistung von T" sprechen.

- Ist T eine endliche Menge natürlicher Zahlen, und ist $(u_t)_{t \in T}$ eine Familie von Elementen von A, dann bezeichnen wir mit $\overrightarrow{u}_T$ das Produkt $u_{t_1} u_{t_2} ... u_{t_k}$, wobei $(t_1, t_2, ..., t_k)$ die aufsteigende Auflistung der Menge T ist. Dieses Produkt $\overrightarrow{u}_T$ heißt *aufsteigendes Produkt* der Elemente u_t für $t \in T$ (und wird auch $\overrightarrow{\prod\limits_{t \in T}} u_t$ genannt).

Beispielsweise ist also $\overrightarrow{v}_{\{1,2,...,n\}} = v_1 v_2 ... v_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in A$.

Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : \bigcup_{j=0}^{k} (\{j\} \times \operatorname{Sh}(j, k-j)) \to \mathcal{P}(\{1, 2, ..., k\});$$

$$(i, \sigma) \mapsto \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\} \quad (\text{wobei } \sigma \in \operatorname{Sh}(i, k-i)).$$

Diese Abbildung ist bijektiv (wie bereits im Beweis von Beispiel 2.1. **7)** bewiesen wurde).

Für jedes $i \in \{0, 1, ..., k\}$ und jedes $\sigma \in \operatorname{Sh}(i, k-i)$ ist nun

$$\begin{aligned}
& a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} ... a_{\sigma(i)} \\
&= \overrightarrow{a}_{\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\}} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)) \text{ ist die aufsteigende Auflistung der Menge} \\ \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\}, \text{ weil} \\ \sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(i) \text{ (denn } \sigma \in \operatorname{Sh}(i, k-i)) \text{ ist} \end{array}\right) \\
&= \overrightarrow{a}_{\Phi(i,\sigma)} \qquad (\text{denn } \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\} = \Phi(i, \sigma))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& b_{\sigma(i+1)} b_{\sigma(i+2)} ... b_{\sigma(k)} \\
&= \overrightarrow{b}_{\{\sigma(i+1), \sigma(i+2), ..., \sigma(k)\}} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } (\sigma(i+1), \sigma(i+2), ..., \sigma(k)) \text{ ist die aufsteigende Auflistung} \\ \text{der Menge } \{\sigma(i+1), \sigma(i+2), ..., \sigma(k)\}, \text{ weil} \\ \sigma(i+1) < \sigma(i+2) < ... < \sigma(k) \text{ (denn } \sigma \in \operatorname{Sh}(i, k-i)) \text{ ist} \end{array}\right) \\
&= \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,k\} \setminus \Phi(i,\sigma)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn da } \sigma \text{ eine Permutation von } \{1, 2, ..., k\} \text{ ist, gilt} \\ \{\sigma(i+1), \sigma(i+2), ..., \sigma(k)\} = \{1, 2, ..., k\} \setminus \underbrace{\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\}}_{=\Phi(i,\sigma)} \\ = \{1, 2, ..., k\} \setminus \Phi(i, \sigma) \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\sum_{\sigma\in\operatorname{Sh}(i,k-i)}}_{=\sum\limits_{(i,\sigma)\in\bigcup\limits_{j=0}^{k}(\{j\}\times\operatorname{Sh}(j,k-j))}} \underbrace{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(i)}}_{=\overrightarrow{a}_{\Phi(i,\sigma)}} \cdot \underbrace{b_{\sigma(i+1)}b_{\sigma(i+2)}...b_{\sigma(k)}}_{=\overrightarrow{b}_{\{1,2,...,k\}\setminus\Phi(i,\sigma)}}$$

$$= \sum_{(i,\sigma)\in\bigcup\limits_{j=0}^{k}(\{j\}\times\operatorname{Sh}(j,k-j))} \overrightarrow{a}_{\Phi(i,\sigma)} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,k\}\setminus\Phi(i,\sigma)} = \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,k\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,k\}\setminus I}$$

$$\text{(hier haben wir } \Phi(i,\sigma) \text{ durch } I \text{ substituiert, da } \Phi \text{ bijektiv ist)}. \qquad (2.59)$$

Jetzt werden wir nachweisen, daß

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_k+b_k) = \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,k\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,k\}\setminus I}$$

gilt.

Dazu zeigen wir die (augenscheinlich allgemeinere) Aussage, daß

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_\nu+b_\nu) = \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,\nu\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,\nu\}\setminus I} \qquad (2.60)$$

für jedes $\nu\in\{0,1,...,k\}$ ist.

Beweis von (2.60): Wir beweisen (2.60) durch vollständige Induktion nach ν:

Induktionsanfang: Für $\nu=0$ ist $(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_\nu+b_\nu) = (\text{leeres Produkt}) = 1$ und

$$\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,\nu\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,\nu\}\setminus I} = \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,0\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,0\}\setminus I} = \underbrace{\overrightarrow{a}_{\varnothing}}_{=1} \cdot \underbrace{\overrightarrow{b}_{\varnothing}}_{=1} = 1.$$

Daher gilt (2.60) für $\nu=0$. Damit ist der Induktionsanfang erledigt.

Induktionsschritt: Sei $n\in\{1,2,...,k\}$ beliebig. Angenommen, (2.60) gälte für $\nu=n-1$. Wir müssen dann zeigen, daß (2.60) auch für $\nu=n$ gilt.

Sei $\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\})$ die Menge aller Teilmengen von $\{1,2,...,n\}$, welche n enthalten. Sei $\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,...,n\})$ die Menge aller Teilmengen von $\{1,2,...,n\}$, welche n nicht enthalten. Dann ist $\mathcal{P}(\{1,2,...,n\}) = \mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\}) \cup \mathcal{P}_{-n}(\{1,2,...,n\})$ (denn jede Teilmenge von $\{1,2,...,n\}$ ist entweder eine Teilmenge von $\{1,2,...,n\}$, welche n enthält, oder eine Teilmenge von $\{1,2,...,n\}$, welche n nicht enthält) und $\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\})\cap\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,...,n\}) = \varnothing$ (denn es gibt keine Teilmenge von $\{1,2,...,n\}$, welche gleichzeitig n enthält und n nicht enthält). Die Mengen $\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\})$ und $\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,...,n\})$ bilden also eine Partition der Menge $\mathcal{P}(\{1,2,...,n\})$. Folglich ist

$$\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,n\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n\}\setminus I}$$

$$= \sum_{I\in\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n\}\setminus I} + \sum_{I\in\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,...,n\})} \overrightarrow{a}_{I} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n\}\setminus I}. \qquad (2.61)$$

Nun ist $\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,...,n\}) = \mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})$ (denn die Teilmengen von $\{1,2,...,n\}$, welche n nicht enthalten, sind nichts anderes als die Teilmengen von $\{1,2,...,n-1\}$).

Andererseits ist die Abbildung $\varrho : \mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\}) \to \mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\})$, die durch

$$\varrho(I) = I \cup \{n\} \qquad \text{für alle } I \in \mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})$$

definiert ist, eine Bijektion[129]. Folglich ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\in\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\})} \overrightarrow{a}_I \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n\}\setminus I} \\
&= \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})} \overrightarrow{a}_{\varrho(I)} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n\}\setminus(\varrho(I))} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir } I \text{ durch } \varrho(I) \text{ substituiert,}\\ \text{denn } \varrho \text{ ist eine Bijektion}\end{array}\right) \\
&= \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})} \overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{b}_{(\{1,2,...,n-1\}\cup\{n\})\setminus(I\cup\{n\})}}_{\substack{=\overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n-1\}\setminus I} \\ \text{(denn wegen } \{1,2,...,n-1\}\cap\{n\}=\varnothing \text{ ist} \\ (\{1,2,...,n-1\}\cup\{n\})\setminus(I\cup\{n\})=\{1,2,...,n-1\}\setminus I)}} \\
&\qquad (\text{denn } \varrho(I) = I\cup\{n\} \text{ und } \{1,2,...,n\} = \{1,2,...,n-1\}\cup\{n\}) \\
&= \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})} \overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}} \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n-1\}\setminus I}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Da (2.60) für $\nu = n-1$ gilt (laut Annahme), ist

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_{n-1}+b_{n-1}) = \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})} \overrightarrow{a}_I \cdot \overrightarrow{b}_{\{1,2,...,n-1\}\setminus I}.$$

---

[129] *Beweis:* Betrachte die Abbildung $\varrho' : \mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})$, die durch

$$\varrho'(J) = J\setminus\{n\} \qquad \text{für alle } J \in \mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})$$

definiert ist. Für jedes $I \in \mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\})$ ist dann

$$\begin{aligned}
(\varrho'\circ\varrho)(I) &= \varrho'\Bigg(\underbrace{\varrho(I)}_{=I\cup\{n\}}\Bigg) = \varrho'(I\cup\{n\}) = (I\cup\{n\})\setminus\{n\} \qquad (\text{nach der Definition von } \varrho') \\
&= I \qquad (\text{denn } I \in \mathcal{P}(\{1,2,...,n-1\}) \text{ und daher } n \notin I).
\end{aligned}$$

Das heißt, $\varrho'\circ\varrho = \mathrm{id}$. Für jedes $J \in \mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\})$ ist aber

$$\begin{aligned}
(\varrho\circ\varrho')(J) &= \varrho\Bigg(\underbrace{\varrho'(J)}_{=J\setminus\{n\}}\Bigg) = \varrho(J\setminus\{n\}) = (J\setminus\{n\})\cup\{n\} \qquad (\text{nach der Definition von } \varrho) \\
&= J \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } n\in J \text{ (denn } J\in\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\}), \text{ doch } \mathcal{P}_{+n}(\{1,2,...,n\}) \\ \text{ist die Menge aller Teilmengen von } \{1,2,...,n\}, \text{ welche } n \text{ enthalten)}\end{array}\right).
\end{aligned}$$

Das heißt, $\varrho\circ\varrho' = \mathrm{id}$. Zusammen mit $\varrho'\circ\varrho = \mathrm{id}$ ergibt dies, daß die Abbildungen ϱ und ϱ' zueinander invers sind. Folglich ist ϱ bijektiv, was zu beweisen war.

Nun ist

$$
\begin{aligned}
&(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n) \\
&= \underbrace{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_{n-1}+b_{n-1})}_{=\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})} \overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}}(a_n+b_n) \\
&= \left(\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})} \overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\right)(a_n+b_n) \\
&= \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})} \overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot a_n + \sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})} \overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot b_n.
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Wir stellen nun folgendes fest:

- Für jedes $I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})$ gilt $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot a_n = a_n\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}$. [130]

- Für jedes $I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})$ gilt $\overrightarrow{a}_I\cdot a_n = \overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}}$. [131]

- Für jedes $I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})$ gilt $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot b_n = \overrightarrow{b}_{(\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I)\cup\{n\}}$. [132]

---

[130] *Beweis:* Sei $(u_1,u_2,\dots,u_\alpha)$ die aufsteigende Auflistung der Menge $\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I$. Laut der Definition von $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}$ ist dann $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I} = b_{u_1}b_{u_2}\dots b_{u_\alpha}$. Nun kommutiert b_{u_τ} mit a_n für jedes $\tau\in\{1,2,\dots,\alpha\}$ (denn da $a_ib_j=b_ja_i$ für alle $i,j\in\{1,2,\dots,k\}$ gilt, gilt insbesondere $a_nb_{u_\tau}=b_{u_\tau}a_n$). Folglich kommutiert auch das Produkt $b_{u_1}b_{u_2}\dots b_{u_\alpha}$ mit a_n (denn jeder der Faktoren b_{u_τ} von diesem Produkt kommutiert mit a_n). Das heißt, $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}$ kommutiert mit a_n (denn $b_{u_1}b_{u_2}\dots b_{u_\alpha} = \overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}$). Das heißt, $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot a_n = a_n\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}$.

[131] *Beweis:* Sei $(u_1,u_2,\dots,u_\alpha)$ die aufsteigende Auflistung der Menge I. Laut der Definition von $\overrightarrow{a}_I$ ist dann $\overrightarrow{a}_I = a_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_\alpha}$. Nun ist aber $(u_1,u_2,\dots,u_\alpha,n)$ die aufsteigende Auflistung der Menge $I\cup\{n\}$ (denn $(u_1,u_2,\dots,u_\alpha)$ ist die aufsteigende Auflistung der Menge I, und das Element n ist größer als jedes der Elemente u_1, u_2, ..., u_α). Somit ist $\overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}} = a_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_\alpha}a_n$ nach der Definition von $\overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}}$. Das heißt, $\overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}} = \underbrace{a_{u_1}a_{u_2}\dots a_{u_\alpha}}_{=\overrightarrow{a}_I}\cdot a_n = \overrightarrow{a}_I\cdot a_n$.

[132] *Beweis:* Sei $(u_1,u_2,\dots,u_\alpha)$ die aufsteigende Auflistung der Menge $\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I$. Laut der Definition von $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}$ ist dann $\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I} = b_{u_1}b_{u_2}\dots b_{u_\alpha}$. Nun ist aber $(u_1,u_2,\dots,u_\alpha,n)$ die aufsteigende Auflistung der Menge $(\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I)\cup\{n\}$ (denn $(u_1,u_2,\dots,u_\alpha)$ ist die aufsteigende Auflistung der Menge $\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I$, und das Element n ist größer als jedes der Elemente u_1, u_2, ..., u_α). Folglich ist $\overrightarrow{b}_{(\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I)\cup\{n\}} = b_{u_1}b_{u_2}\dots b_{u_\alpha}b_n$. Das heißt, $\overrightarrow{b}_{(\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I)\cup\{n\}} = \underbrace{b_{u_1}b_{u_2}\dots b_{u_\alpha}}_{=\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}}\cdot b_n = \overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot b_n$.

Aus (2.63) wird nun

$$\begin{aligned}
&(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)\\
&=\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\underbrace{\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot a_n}_{=a_n\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}}+\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\underbrace{\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\cdot b_n}_{=\overrightarrow{b}_{(\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I)\cup\{n\}}}\\
&=\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})}\underbrace{\overrightarrow{a}_I\cdot a_n}_{=\overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}}}\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}\\
&\qquad+\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\underbrace{\overrightarrow{b}_{(\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I)\cup\{n\}}}_{\substack{=\overrightarrow{b}_{(\{1,2,\dots,n-1\}\cup\{n\})\setminus I}\\ \text{(denn wegen } I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})\\ \text{ist } n\notin I\text{, also } I\cap\{n\}=\varnothing\text{, und somit}\\ (\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I)\cup\{n\}=(\{1,2,\dots,n-1\}\cup\{n\})\setminus I)}}\\
&=\underbrace{\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})}\overrightarrow{a}_{I\cup\{n\}}\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n-1\}\setminus I}}_{\substack{=\sum\limits_{I\in\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,\dots,n\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n\}\setminus I}\\ \text{(nach (2.62))}}}\\
&\qquad+\underbrace{\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})}}_{\substack{=\sum\limits_{I\in\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,\dots,n\})}\\ \text{(weil } \mathcal{P}(\{1,2,\dots,n-1\})=\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,\dots,n\}))}}\overrightarrow{a}_I\cdot\underbrace{\overrightarrow{b}_{(\{1,2,\dots,n-1\}\cup\{n\})\setminus I}}_{\substack{=\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n\}\setminus I}\\ \text{(da } \{1,2,\dots,n-1\}\cup\{n\}=\{1,2,\dots,n\})}}\\
&=\sum_{I\in\mathcal{P}_{+n}(\{1,2,\dots,n\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n\}\setminus I}+\sum_{I\in\mathcal{P}_{-n}(\{1,2,\dots,n\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n\}\setminus I}\\
&=\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,n\}\setminus I}
\end{aligned}$$

(nach (2.61)). Mit anderen Worten: Die Gleichung (2.60) gilt für $\nu=n$. Damit ist der Induktionsschritt fertig, und die Gleichung (2.60) ist für alle $\nu\in\{0,1,\dots,k\}$ bewiesen.

Somit können wir (2.60) auf $\nu=k$ anwenden, und erhalten

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_k+b_k)=\sum_{I\in\mathcal{P}(\{1,2,\dots,k\})}\overrightarrow{a}_I\cdot\overrightarrow{b}_{\{1,2,\dots,k\}\setminus I}.$$

Vergleichen wir dies mit (2.59), bekommen wir

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_k+b_k)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(i,k-i)}a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\dots a_{\sigma(i)}\cdot b_{\sigma(i+1)}b_{\sigma(i+2)}\dots b_{\sigma(k)}.$$

Damit ist Lemma 2.51 bewiesen.

Jetzt noch ein weiteres Lemma:

2.52. Lemma: Seien A und B zwei k-Algebren, und sei $\zeta:A\to B$ eine k-lineare Abbildung. Sei M ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra A. Angenommen, für jedes $n\in\mathbb{N}$ und jede $v_1,v_2,\dots,v_n\in M$ gilt

$$\zeta(v_1v_2\dots v_n)=\zeta(v_1)\cdot\zeta(v_2)\cdot\dots\cdot\zeta(v_n). \tag{2.70}$$

(Im Falle von $n = 0$ bedeutet diese Gleichung, daß $\zeta(1) = 1$ ist!) Dann ist ζ ein k-Algebrahomomorphismus.

Beweis von Lemma 2.52: **a)** Erstmal ist $\zeta(1) = 1$ (denn (2.70) (angewandt auf $n = 0$) ergibt $\zeta(\text{leeres Produkt}) = (\text{leeres Produkt})$, also $\zeta(1) = 1$ (weil das leere Produkt gleich 1 ist)).

b) Da M ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra A ist, gilt $A = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} M^{\ell}$, wobei M^{ℓ} den Untervektorraum $\langle m_1 m_2 ... m_\ell \mid m_1, m_2, ..., m_\ell \in M\rangle$ von A bezeichnet.

Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ sei M_{pure}^{ℓ} die Teilmenge $\{m_1 m_2 ... m_\ell \mid m_1, m_2, ..., m_\ell \in M\}$ von A. Dann ist

$$\begin{aligned} M^{\ell} &= \langle m_1 m_2 ... m_\ell \mid m_1, m_2, ..., m_\ell \in M\rangle \\ &= \left\langle \underbrace{\{m_1 m_2 ... m_\ell \mid m_1, m_2, ..., m_\ell \in M\}}_{=M_{\text{pure}}^{\ell}} \right\rangle = \left\langle M_{\text{pure}}^{\ell} \right\rangle \end{aligned}$$

für jedes $\ell \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$A = \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{M^{\ell}}_{=\left\langle M_{\text{pure}}^{\ell}\right\rangle} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\langle M_{\text{pure}}^{\ell} \right\rangle = \left\langle \bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell} \right\rangle$$

(denn sind S_0, S_1, S_2, ... irgendwelche Teilmengen eines k-Vektorraums W, dann gilt immer $\sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \langle S_\ell \rangle = \left\langle \bigcup\limits_{\ell=0}^{\infty} S_\ell \right\rangle$).

c) Wir werden jetzt zeigen, daß

$$\zeta(ab) = \zeta(a) \cdot \zeta(b) \qquad \text{für alle } a \in \bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell} \text{ und } b \in \bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell} \tag{2.71}$$

gilt.

Beweis von (2.71): Seien $a \in \bigcup\limits_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$ und $b \in \bigcup\limits_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$ beliebig.

Wegen $a \in \bigcup\limits_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $a \in M_{\text{pure}}^{\alpha}$. Betrachten wir dieses α. Dann ist $a \in M_{\text{pure}}^{\alpha} = \{m_1 m_2 ... m_\alpha \mid m_1, m_2, ..., m_\alpha \in M\}$ (nach Definition von M_{pure}^{α}). Das heißt, es gibt Elemente $x_1, x_2, ..., x_\alpha \in M$ mit $a = x_1 x_2 ... x_\alpha$. Betrachten wir diese $x_1, x_2, ..., x_\alpha$.

Wegen $b \in \bigcup\limits_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$ gibt es ein $\beta \in \mathbb{N}$ mit $b \in M_{\text{pure}}^{\beta}$. Betrachten wir dieses β. Dann ist $b \in M_{\text{pure}}^{\beta} = \{m_1 m_2 ... m_\beta \mid m_1, m_2, ..., m_\beta \in M\}$ (nach Definition von M_{pure}^{β}). Das heißt, es gibt Elemente $y_1, y_2, ..., y_\beta \in M$ mit $b = y_1 y_2 ... y_\beta$. Betrachten wir diese $y_1, y_2, ..., y_\beta$.

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., \alpha + \beta\}$ definiere man ein Element z_i von M durch $z_i = \begin{cases} x_i, & \text{wenn } i \leq \alpha; \\ y_{i-\alpha}, & \text{wenn } i > \alpha \end{cases}$.

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., \alpha\}$ ist dann $z_i = \begin{cases} x_i, & \text{wenn } i \leq \alpha; \\ y_{i-\alpha}, & \text{wenn } i > \alpha \end{cases} = x_i$ (da $i \leq \alpha$). Das heißt, die Gleichungen $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, ..., $z_\alpha = x_\alpha$ gelten. Multiplizieren wir diese

Gleichungen miteinander, so erhalten wir $z_1 z_2 ... z_\alpha = x_1 x_2 ... x_\alpha$. Vergleichen wir dies mit $a = x_1 x_2 ... x_\alpha$, dann erhalten wir $z_1 z_2 ... z_\alpha = a$.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., \beta\}$ gilt ferner $z_{\alpha+j} = y_j$ [133]. Das heißt, die Gleichungen $z_{\alpha+1} = y_1$, $z_{\alpha+2} = y_2$, ..., $z_{\alpha+\beta} = y_\beta$ gelten. Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, so erhalten wir $z_{\alpha+1} z_{\alpha+2} ... z_{\alpha+\beta} = y_1 y_2 ... y_\beta$. Vergleichen wir dies mit $b = y_1 y_2 ... y_\beta$, dann bekommen wir $z_{\alpha+1} z_{\alpha+2} ... z_{\alpha+\beta} = b$.

Anwendung von (2.70) auf $n = \alpha$ und $(v_1, v_2, ..., v_n) = (z_1, z_2, ..., z_\alpha)$ ergibt $\zeta(z_1 z_2 ... z_\alpha) = \zeta(z_1) \cdot \zeta(z_2) \cdot ... \cdot \zeta(z_\alpha)$.

Anwendung von (2.70) auf $n = \beta$ und $(v_1, v_2, ..., v_n) = (z_{\alpha+1}, z_{\alpha+2}, ..., z_{\alpha+\beta})$ ergibt $\zeta(z_{\alpha+1} z_{\alpha+2} ... z_{\alpha+\beta}) = \zeta(z_{\alpha+1}) \cdot \zeta(z_{\alpha+2}) \cdot ... \cdot \zeta(z_{\alpha+\beta})$.

Anwendung von (2.70) auf $n = \alpha + \beta$ und $(v_1, v_2, ..., v_n) = (z_1, z_2, ..., z_{\alpha+\beta})$ ergibt $\zeta(z_1 z_2 ... z_{\alpha+\beta}) = \zeta(z_1) \cdot \zeta(z_2) \cdot ... \cdot \zeta(z_{\alpha+\beta})$.

Wegen $a = z_1 z_2 ... z_\alpha$ und $b = z_{\alpha+1} z_{\alpha+2} ... z_{\alpha+\beta}$ ist nun $ab = (z_1 z_2 ... z_\alpha)(z_{\alpha+1} z_{\alpha+2} ... z_{\alpha+\beta}) = z_1 z_2 ... z_{\alpha+\beta}$ und damit

$$\begin{aligned}
\zeta(ab) &= \zeta(z_1 z_2 ... z_{\alpha+\beta}) = \zeta(z_1) \cdot \zeta(z_2) \cdot ... \cdot \zeta(z_{\alpha+\beta}) \\
&= \underbrace{(\zeta(z_1) \cdot \zeta(z_2) \cdot ... \cdot \zeta(z_\alpha))}_{=\zeta(z_1 z_2 ... z_\alpha)} \cdot \underbrace{(\zeta(z_{\alpha+1}) \cdot \zeta(z_{\alpha+2}) \cdot ... \cdot \zeta(z_{\alpha+\beta}))}_{=\zeta\left(z_{\alpha+1} z_{\alpha+2} ... z_{\alpha+\beta}\right)} \\
&= \zeta\left(\underbrace{z_1 z_2 ... z_\alpha}_{=a}\right) \cdot \zeta\left(\underbrace{z_{\alpha+1} z_{\alpha+2} ... z_{\alpha+\beta}}_{=b}\right) = \zeta(a) \cdot \zeta(b).
\end{aligned}$$

Damit ist (2.71) bewiesen.

d) Wir werden nun zeigen, daß

$$\zeta(ab) = \zeta(a) \cdot \zeta(b) \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und } b \in A \tag{2.72}$$

gilt.

Beweis von (2.72): Seien $a \in A$ und $b \in A$ beliebig.

Wegen $a \in A = \left\langle \bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell} \right\rangle$ ist a eine k-Linearkombination von Elementen von $\bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$. Das heißt, es gibt ein $\alpha \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\alpha$ von k und Elemente $a_1, a_2, ..., a_\alpha$ von $\bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$, welche $a = \sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i a_i$ erfüllen. Betrachten wir dieses α, diese Elemente $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\alpha$ und diese Elemente $a_1, a_2, ..., a_\alpha$.

Wegen $b \in A = \left\langle \bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell} \right\rangle$ ist b eine k-Linearkombination von Elementen von $\bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$. Das heißt, es gibt ein $\beta \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\beta$ von k und Elemente

[133] *Beweis:* Wir setzen $i = \alpha + j$. Dann gilt $i \in \{\alpha+1, \alpha+2, ..., \alpha+\beta\}$ und $i > \alpha$, und somit ist $z_i = \begin{cases} x_i, & \text{wenn } i \leq \alpha; \\ y_{i-\alpha}, & \text{wenn } i > \alpha \end{cases} = y_{i-\alpha}$ (da $i > \alpha$), also

$$\begin{aligned}
z_{\alpha+j} &= z_i \qquad (\text{denn } \alpha + j = i) \\
&= y_{i-\alpha} = y_j \qquad (\text{denn } i = \alpha + j \text{ ergibt } i - \alpha = j).
\end{aligned}$$

$b_1, b_2, ..., b_\beta$ von $\bigcup\limits_{\ell=0}^{\infty} M_{\text{pure}}^{\ell}$, welche $b = \sum\limits_{j=1}^{\beta} \mu_j b_j$ erfüllen. Betrachten wir dieses β, diese Elemente $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\beta$ und diese Elemente $b_1, b_2, ..., b_\beta$.

Aus $a = \sum\limits_{i=1}^{\alpha} \lambda_i a_i$ und $b = \sum\limits_{j=1}^{\beta} \mu_j b_j$ erhalten wir $ab = \sum\limits_{i=1}^{\alpha} \lambda_i a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{\beta} \mu_j b_j = \sum\limits_{i=1}^{\alpha} \sum\limits_{j=1}^{\beta} \lambda_i \mu_j a_i b_j$ und damit

$$\zeta(ab) = \zeta\left(\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_i \mu_j a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_i \mu_j \underbrace{\zeta(a_i b_j)}_{\substack{=\zeta(a_i)\cdot\zeta(b_j) \\ \text{(nach (2.71) (angewandt auf} \\ a_i \text{ und } b_j \text{ statt } a \text{ bzw. } b))}} \qquad \text{(denn } \zeta \text{ ist } k\text{-linear)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta} \lambda_i \mu_j \zeta(a_i) \cdot \zeta(b_j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i \zeta(a_i)}_{\substack{=\zeta\left(\sum\limits_{i=1}^{\alpha} \lambda_i a_i\right) \\ \text{(denn } \zeta \text{ ist } k\text{-linear)}}} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j \zeta(b_j)}_{\substack{=\zeta\left(\sum\limits_{j=1}^{\beta} \mu_j b_j\right) \\ \text{(denn } \zeta \text{ ist } k\text{-linear)}}}$$

$$= \zeta\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i a_i}_{=a}\right) \cdot \zeta\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j b_j}_{=b}\right) = \zeta(a) \cdot \zeta(b).$$

Damit ist (2.72) bewiesen.

e) Aus $\zeta(1) = 1$ und (2.72) folgt, daß ζ ein k-Algebrahomomorphismus ist. Damit ist Lemma 2.52 gezeigt.

Beweis von Beispiel 2.50: **a)** Wir betrachten im Folgenden V als Untervektorraum von $T^{\otimes}V$ (vermöge der Inklusion $V = V^{\otimes 1} \subseteq V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$). Somit wird jedes Element von V auch als ein Element von $T^{\otimes}V$ angesehen. Dies ist manchmal (aber nicht immer!) nützlich. Konkret legen wir folgendes fest:

- Wenn wir von dem Produkt mehrerer Elemente von V sprechen, dann betrachten wir diese Elemente als Elemente der k-Algebra $T^{\otimes}V$ (denn sonst wäre das Produkt nicht definiert). Das heißt: Ist $\tau \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, v_2, ..., v_\tau$ Elemente von V, dann verstehen wir unter $v_1 v_2 ... v_\tau$ das Produkt der Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$, das man erhält, wenn man sie als Elemente der k-Algebra $T^{\otimes}V$ betrachtet.

- Wenn wir aber vom *Tensorprodukt* mehrerer Elemente von V sprechen, dann betrachten wir diese Elemente als Elemente des Vektorraums V und *nicht* als Elemente der k-Algebra $T^{\otimes}V$. Das heißt: Ist $\tau \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, v_2, ..., v_\tau$ Elemente von V, dann verstehen wir unter $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$ das Tensorprodukt der Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$, das man erhält, wenn man sie als Elemente des Vektorraums V (und nicht der k-Algebra $T^{\otimes}V$) betrachtet. Dieses Tensorprodukt $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$ ist dann ein Element der Tensorpotenz $V^{\otimes \tau}$, die wiederum ein Summand der direkten Summe $V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$ ist.

b) Für jedes $\tau \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$ von V gilt $v_1 v_2 ... v_\tau = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$. (Hierbei sind die Terme $v_1 v_2 ... v_\tau$ und $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$ gemäß der Festlegungen in Punkt **a)** zu verstehen.)

Beweis: Dies folgt nach Induktion über τ aus der Definition der Multiplikation auf der k-Algebra $T^{\otimes}V$.

c) Nun wollen wir zeigen: Für jedes $v \in V$ ist $\Delta'(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$. Hierbei wird v als Element von TV betrachtet (gemäß Punkt **a)**).

Beweis: Sei $v_1 = v$. Nach (2.8) (angewandt auf $n = 1$) ist dann

$$\begin{aligned}
\Delta'(v_1) &= \sum_{i=0}^{1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(1)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(0,1)} \underbrace{\left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(0)}\right)}_{=(\text{leeres Produkt})=1} \otimes \underbrace{\left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(1)}\right)}_{=v_{\sigma(1)}} \\
&\qquad + \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(1,0)} \underbrace{\left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(1)}\right)}_{=v_{\sigma(1)}} \otimes \underbrace{\left(v_{\sigma(2)} \otimes v_{\sigma(3)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(1)}\right)}_{=(\text{leeres Produkt})=1} \\
&= \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(0,1)} 1 \otimes v_{\sigma(1)}}_{\substack{=1 \otimes v_{\mathrm{id}(1)} \\ (\text{denn die Menge } \mathrm{Sh}(0,1) \\ \text{enthält nur ein Element, nämlich id})}} + \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(1,0)} v_{\sigma(1)} \otimes 1}_{\substack{=v_{\mathrm{id}(1)} \otimes 1 \\ (\text{denn die Menge } \mathrm{Sh}(1,0) \\ \text{enthält nur ein Element, nämlich id})}} \\
&= 1 \otimes \underbrace{v_{\mathrm{id}(1)}}_{=v_1=v} + \underbrace{v_{\mathrm{id}(1)}}_{=v_1=v} \otimes 1 = 1 \otimes v + v \otimes 1 = v \otimes 1 + 1 \otimes v.
\end{aligned}$$

Wegen $v_1 = v$ wird dies zu $\Delta'(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, was zu beweisen war.

d) Nun wollen wir zeigen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ gilt

$$\Delta'(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n) = \Delta'(v_1) \cdot \Delta'(v_2) \cdot \ldots \cdot \Delta'(v_n).$$

Hierbei ist die Multiplikation auf der rechten Seite als die Multiplikation in der Algebra $(T^{\otimes}V) \otimes (T^{\otimes}V)$ zu lesen.

Beweis: Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definiere man zwei Elemente a_i und b_i von $(T^{\otimes}V) \otimes (T^{\otimes}V)$ durch $a_i = v_i \otimes 1$ und $b_i = 1 \otimes v_i$. Dann gilt $a_i b_j = b_j a_i$ für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (denn $\underbrace{a_i}_{=v_i \otimes 1} \underbrace{b_j}_{=1 \otimes v_j} = (v_i \otimes 1)(1 \otimes v_j) = v_i \otimes v_j = \underbrace{(1 \otimes v_j)}_{=b_j} \underbrace{(v_i \otimes 1)}_{=a_i} = b_j a_i$).

Laut Lemma 2.51 (angewandt auf $A = (T^{\otimes}V) \otimes (T^{\otimes}V)$ und $k = n$) gilt also

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(i)} \cdot b_{\sigma(i+1)} b_{\sigma(i+2)} \ldots b_{\sigma(n)}.$$

Doch für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$\underbrace{a_i}_{=v_i \otimes 1} + \underbrace{b_i}_{=1 \otimes v_i} = v_i \otimes 1 + 1 \otimes v_i = \Delta'(v_i)$$

(denn **c)** (angewandt auf $v = v_i$) ergibt $\Delta'(v_i) = v_i \otimes 1 + 1 \otimes v_i$). Das heißt, es gelten die Gleichungen $a_1 + b_1 = \Delta'(v_1)$, $a_2 + b_2 = \Delta'(v_2)$, ..., $a_n + b_n = \Delta'(v_n)$. Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, so erhalten wir

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n) = \Delta'(v_1) \cdot \Delta'(v_2) \cdot \ldots \cdot \Delta'(v_n).$$

Nun ist $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(i)} = \left(v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}...v_{\sigma(i)}\right) \otimes 1$ für jedes $i \in \{0,1,...,n\}$. [134]
Ferner ist $b_{\sigma(i+1)}b_{\sigma(i+2)}...b_{\sigma(n)} = 1 \otimes \left(v_{\sigma(i+1)}v_{\sigma(i+2)}...v_{\sigma(n)}\right)$ für jedes $i \in \{0,1,...,n\}$. [135]

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\Delta'(v_1) \cdot \Delta'(v_2) \cdot ... \cdot \Delta'(v_n) \\
&= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \operatorname{Sh}(i,n-i)} \underbrace{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(i)}}_{=\left(v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}...v_{\sigma(i)}\right)\otimes 1} \cdot \underbrace{b_{\sigma(i+1)}b_{\sigma(i+2)}...b_{\sigma(n)}}_{=1\otimes\left(v_{\sigma(i+1)}v_{\sigma(i+2)}...v_{\sigma(n)}\right)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \operatorname{Sh}(i,n-i)} \underbrace{\left(\left(v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}...v_{\sigma(i)}\right) \otimes 1\right) \cdot \left(1 \otimes \left(v_{\sigma(i+1)}v_{\sigma(i+2)}...v_{\sigma(n)}\right)\right)}_{=\left(v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}...v_{\sigma(i)}\right)\otimes\left(v_{\sigma(i+1)}v_{\sigma(i+2)}...v_{\sigma(n)}\right)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \operatorname{Sh}(i,n-i)} \underbrace{\left(v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}...v_{\sigma(i)}\right)}_{\substack{=v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes...\otimes v_{\sigma(i)} \\ (\text{nach } \mathbf{b)})}} \otimes \underbrace{\left(v_{\sigma(i+1)}v_{\sigma(i+2)}...v_{\sigma(n)}\right)}_{\substack{=v_{\sigma(i+1)}\otimes v_{\sigma(i+2)}\otimes...\otimes v_{\sigma(n)} \\ (\text{nach } \mathbf{b)})}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \operatorname{Sh}(i,n-i)} \left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right) \\
&= \Delta'(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n)
\end{aligned}$$

(nach (2.8)), was zu beweisen war.

e) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $V^{\otimes n}_{\text{pure}}$ die Teilmenge von $V^{\otimes n}$, die aus allen reinen n-Tensoren (also allen Tensoren der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ für irgendwelche $v_1, v_2, ..., v_n \in V$) in $V^{\otimes n}$ besteht. Dann ist $V^{\otimes n}_{\text{pure}}$ ein Erzeugendensystem des k-Vektorraums $V^{\otimes n}$ (weil die n-fache Tensorpotenz $V^{\otimes n}$ bekanntlich von den reinen n-Tensoren erzeugt ist). Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist also $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}_{\text{pure}}$ ein Erzeugendensystem des k-Vektorraums $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n} = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$ (denn um ein Erzeugendensystem der direkten Summe mehrerer Vektorräume zu finden, reicht es aus, die Vereinigung von Erzeugendensystemen dieser Vektorräume zu nehmen).

f) Die Teilmenge V von $T^{\otimes}V$ ist ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra $T^{\otimes}V$.

Beweis: Sei $a \in T^{\otimes}V$ beliebig. Dann ist $a \in T^{\otimes}V = \left\langle \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}_{\text{pure}} \right\rangle$ (denn nach **e)** ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}_{\text{pure}}$ ein Erzeugendensystem des k-Vektorraums $T^{\otimes}V$). Folglich gibt es ein

[134] *Beweis:* Sei $i \in \{0,1,...,n\}$ beliebig. Dann gelten die Gleichungen $a_{\sigma(1)} = v_{\sigma(1)} \otimes 1$, $a_{\sigma(2)} = v_{\sigma(2)} \otimes 1$, ..., $a_{\sigma(i)} = v_{\sigma(i)} \otimes 1$. Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, dann ergibt sich

$$a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}...a_{\sigma(i)} = \left(v_{\sigma(1)} \otimes 1\right)\left(v_{\sigma(2)} \otimes 1\right)...\left(v_{\sigma(i)} \otimes 1\right) = \left(v_{\sigma(1)}v_{\sigma(2)}...v_{\sigma(i)}\right) \otimes 1.$$

[135] *Beweis:* Sei $i \in \{0,1,...,n\}$ beliebig. Dann gelten die Gleichungen $b_{\sigma(i+1)} = 1 \otimes v_{\sigma(i+1)}$, $b_{\sigma(i+2)} = 1 \otimes v_{\sigma(i+2)}$, ..., $b_{\sigma(n)} = 1 \otimes v_{\sigma(n)}$. Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, dann ergibt sich

$$b_{\sigma(i+1)}b_{\sigma(i+2)}...b_{\sigma(n)} = \left(1 \otimes v_{\sigma(i+1)}\right)\left(1 \otimes v_{\sigma(i+2)}\right)...\left(1 \otimes v_{\sigma(n)}\right) = 1 \otimes \left(v_{\sigma(i+1)}v_{\sigma(i+2)}...v_{\sigma(n)}\right).$$

$\kappa \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa$ von k und Elemente $p_1, p_2, ..., p_\kappa$ von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\text{pure}}^{\otimes n}$, die $a = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i p_i$ erfüllen. Betrachten wir dieses κ und diese Elemente $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa$ und $p_1, p_2, ..., p_\kappa$.

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., \kappa\}$ ist p_i ein Produkt von Elementen von V (wobei wir Elemente von V als Elemente von $T^{\otimes}V$ betrachten (gemäß Punkt **a)**)).[136] Da a eine k-Linearkombination der Elemente p_i ist (denn $a = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i p_i$), ist also a eine k-Linearkombination von Produkten von Elementen von V.

Da dies für alle $a \in T^{\otimes}V$ gilt, ist also gezeigt, daß jedes Element von $T^{\otimes}V$ eine k-Linearkombination von Produkten von Elementen von V ist. Folglich ist die Teilmenge V von $T^{\otimes}V$ ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra $T^{\otimes}V$, was zu beweisen war.

g) Für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ gilt

$$\Delta' \left(\underbrace{v_1 v_2 ... v_n}_{\substack{= v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \\ \text{(nach } \mathbf{b)}\text{)}}} \right) = \Delta' \left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \right) = \Delta' \left(v_1 \right) \cdot \Delta' \left(v_2 \right) \cdot ... \cdot \Delta' \left(v_n \right)$$

(nach **d)**). Nach Lemma 2.52 (angewandt auf Δ', $T^{\otimes}V$, $(T^{\otimes}V) \otimes (T^{\otimes}V)$ und V statt ζ, A, B bzw. M) folgt hieraus, daß Δ' ein k-Algebrahomomorphismus ist (denn nach **f)** ist V ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra $T^{\otimes}V$).

h) Für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ gilt

$$\varepsilon \left(v_1 v_2 ... v_n \right) = \varepsilon \left(v_1 \right) \cdot \varepsilon \left(v_2 \right) \cdot ... \cdot \varepsilon \left(v_n \right).$$

[137] Nach Lemma 2.52 (angewandt auf ε, $T^{\otimes}V$, k und V statt ζ, A, B bzw. M) folgt hieraus, daß ε ein k-Algebrahomomorphismus ist (denn nach **f)** ist V ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra $T^{\otimes}V$).

i) Wir wissen, daß $T^{\otimes}V = (TV, \mu, \eta)$ eine k-Algebra ist. Wir wissen ferner, daß $(TV, \Delta', \varepsilon)$ eine k-Coalgebra ist (laut Beispiel 2.1. **7)**). Da wir ferner wissen, daß

---

[136] *Beweis:* Sei $i \in \{1, 2, ..., \kappa\}$ beliebig. Dann existiert ein $\tau \in \mathbb{N}$ mit $p_i \in V_{\text{pure}}^{\otimes \tau}$ (denn $p_i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\text{pure}}^{\otimes n}$). Betrachten wir dieses τ. Wegen $p_i \in V_{\text{pure}}^{\otimes \tau}$ ist p_i ein reiner τ-Tensor in $V^{\otimes \tau}$. Das heißt, es gibt Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$ von V mit $p_i = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$. Betrachten wir diese Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$. Nach **b)** ist $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau = v_1 v_2 ... v_\tau$, und damit $p_i = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau = v_1 v_2 ... v_\tau$. Somit ist p_i ein Produkt von Elementen von V (denn $v_1, v_2, ..., v_\tau$ sind Elemente von V), was zu beweisen war.

[137] *Beweis:* Seien $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ beliebig. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt dann $\varepsilon(v_i) = 0$ (denn (2.9) ergibt $\varepsilon(v_i) = \delta_{1,0} = 0$). Das heißt, die Gleichungen $\varepsilon(v_1) = 0$, $\varepsilon(v_2) = 0$, ..., $\varepsilon(v_n) = 0$ gelten. Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, dann erhalten wir $\varepsilon(v_1) \cdot \varepsilon(v_2) \cdot ... \cdot \varepsilon(v_n) = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot ... \cdot 0}_{n \text{ mal}} = \delta_{n,0}$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\underbrace{v_1 v_2 ... v_n}_{\substack{= v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \\ \text{(nach } \mathbf{b)}\text{)}}} \right) &= \varepsilon \left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \right) = \delta_{n,0} \qquad \text{(nach (2.9))} \\ &= \varepsilon \left(v_1 \right) \cdot \varepsilon \left(v_2 \right) \cdot ... \cdot \varepsilon \left(v_n \right). \end{aligned}$$

Δ' und ε zwei k-Algebrahomomorphismen sind (laut **g)** und **h)**), folgt hieraus, daß $(TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$ eine k-Bialgebra ist.

j) Bezeichnen wir fortan mit $T^{\otimes}V$ die k-Bialgebra $(TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon)$.

Bekanntlich ist $\left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right) = \left((TV, \mu, \eta), \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte k-Algebra.

k) Wir werden nun zeigen, daß $\left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right) = \left((TV, \Delta', \varepsilon), \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte k-Coalgebra ist. (Dies haben wir bereits in Beispiel 2.40. **2)** behauptet, dort aber nicht bewiesen.)

Beweis: Wir müssen zeigen, daß $\left((TV, \Delta', \varepsilon), \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte k-Coalgebra ist. Dazu müssen wir nachweisen, daß $\Delta'\left(V^{\otimes n}\right) \subseteq \sum\limits_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes(n-\ell)}$ für alle $n \geq 0$ ist, und daß $\varepsilon\left(V^{\otimes n}\right) = 0$ für alle $n \geq 1$ ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Wir betrachten $V^{\otimes n}$ als Untervektorraum von TV (vermöge der Inklusion $V^{\otimes n} \subseteq V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV$). Es gilt $V^{\otimes n} = \left\langle V^{\otimes n}_{\text{pure}}\right\rangle$ (denn $V^{\otimes n}_{\text{pure}}$ ist ein Erzeugendensystem des k-Vektorraums $V^{\otimes n}$). Da Δ' eine k-lineare Abbildung ist, gilt $\Delta'\left(\left\langle V^{\otimes n}_{\text{pure}}\right\rangle\right) = \left\langle \Delta'\left(V^{\otimes n}_{\text{pure}}\right)\right\rangle$.

Wir wollen nun zeigen, daß

$$x \in \sum_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes(n-\ell)} \qquad \text{für jedes } x \in \Delta'\left(V^{\otimes n}_{\text{pure}}\right) \tag{2.75}$$

gilt.

Beweis von (2.75): In der Tat sei $x \in \Delta'\left(V^{\otimes n}_{\text{pure}}\right)$ beliebig. Dann gibt es ein $\xi \in V^{\otimes n}_{\text{pure}}$ mit $x = \Delta'(\xi)$. Betrachte dieses ξ. Wegen $\xi \in V^{\otimes n}_{\text{pure}}$ ist ξ ein reiner n-Tensor. Das heißt, es gibt Elemente $v_1, v_2, ..., v_n$ von V mit $\xi = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$. Betrachte diese Elemente $v_1, v_2, ..., v_n$. Nun ist

$$\begin{aligned}
x &= \Delta'\left(\underbrace{\xi}_{=v_1\otimes v_2\otimes ...\otimes v_n}\right) = \Delta'\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma\in \operatorname{Sh}(i,n-i)} \underbrace{\left(v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(i)}\right)}_{\in V^{\otimes i}} \otimes \underbrace{\left(v_{\sigma(i+1)} \otimes v_{\sigma(i+2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}\right)}_{\in V^{\otimes(n-i)}} \\
&\qquad \text{(nach (2.8))} \\
&\in \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\sum_{\sigma\in \operatorname{Sh}(i,n-i)} V^{\otimes i} \otimes V^{\otimes(n-i)}}_{\substack{\subseteq V^{\otimes i}\otimes V^{\otimes(n-i)} \\ \text{(denn } V^{\otimes i}\otimes V^{\otimes(n-i)} \text{ ist ein Vektorraum)}}} \subseteq \sum_{i=0}^{n} V^{\otimes i} \otimes V^{\otimes(n-i)} = \sum_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes(n-\ell)}
\end{aligned}$$

(hier haben wir den Summationsindex i in ℓ umbenannt). Wir haben damit (2.75) bewiesen.

Aus (2.75) folgt $\Delta'\left(V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right) \subseteq \sum\limits_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes (n-\ell)}$. Nun ist

$$\Delta'\left(\underbrace{V^{\otimes n}}_{=\left\langle V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right\rangle}\right) = \Delta'\left(\left\langle V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right\rangle\right) = \left\langle \underbrace{\Delta'\left(V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right)}_{\subseteq \sum\limits_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell}\otimes V^{\otimes (n-\ell)}} \right\rangle \subseteq \left\langle \sum_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes (n-\ell)} \right\rangle$$
$$\subseteq \sum_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes (n-\ell)} \qquad \left(\text{denn } \sum_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes (n-\ell)} \text{ ist ein Vektorraum}\right).$$

Wir haben damit gezeigt, daß $\Delta'\left(V^{\otimes n}\right) \subseteq \sum\limits_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes (n-\ell)}$ für alle $n \geq 0$ ist.

Jetzt werden wir zeigen, daß $\varepsilon\left(V^{\otimes n}\right) = 0$ für alle $n \geq 1$ ist. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ beliebig.

Wieder betrachten wir $V^{\otimes n}$ als Untervektorraum von TV. Wieder gilt $V^{\otimes n} = \left\langle V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right\rangle$. Da ε eine k-lineare Abbildung ist, gilt $\varepsilon\left(\left\langle V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right\rangle\right) = \left\langle \varepsilon\left(V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right)\right\rangle$.

Wir wollen nun zeigen, daß

$$x = 0 \qquad \text{für jedes } x \in \varepsilon\left(V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right) \tag{2.76}$$

gilt.

Beweis von (2.76): In der Tat sei $x \in \varepsilon\left(V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right)$ beliebig. Dann gibt es ein $\xi \in V_{\text{pure}}^{\otimes n}$ mit $x = \varepsilon(\xi)$. Betrachte dieses ξ. Wegen $\xi \in V_{\text{pure}}^{\otimes n}$ ist ξ ein reiner n-Tensor. Das heißt, es gibt Elemente $v_1, v_2, ..., v_n$ von V mit $\xi = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$. Betrachte diese Elemente $v_1, v_2, ..., v_n$. Nun ist

$$x = \varepsilon\left(\underbrace{\xi}_{=v_1\otimes v_2\otimes ...\otimes v_n}\right) = \varepsilon\left(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n\right) = \delta_{n,0} \qquad (\text{nach } (2.9))$$
$$= 0 \qquad (\text{denn } n \geq 1 \text{ ergibt } n \neq 0).$$

Damit ist (2.76) bewiesen.

Aus (2.76) folgt $\varepsilon\left(V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right) = 0$. Daher ist

$$\varepsilon\left(\underbrace{V^{\otimes n}}_{=\left\langle V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right\rangle}\right) = \varepsilon\left(\left\langle V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right\rangle\right) = \left\langle \underbrace{\varepsilon\left(V_{\text{pure}}^{\otimes n}\right)}_{=0}\right\rangle = \langle 0\rangle = 0.$$

Wir haben damit gezeigt, daß $\varepsilon\left(V^{\otimes n}\right) = 0$ für alle $n \geq 1$ ist. Zusammen mit der bereits gezeigten Tatsache, daß $\Delta'\left(V^{\otimes n}\right) \subseteq \sum\limits_{\ell=0}^{n} V^{\otimes \ell} \otimes V^{\otimes (n-\ell)}$ für alle $n \geq 0$ ist, ergibt dies, daß $\left(\left(TV, \Delta', \varepsilon\right), \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte k-Coalgebra ist, was zu beweisen war.

l) Betrachten wir die k-Bialgebra $T^{\otimes}V = \left(TV, \mu, \eta, \Delta', \varepsilon\right)$. Laut **j)** ist $\left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte k-Algebra, und laut **k)** ist $\left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte k-Coalgebra. Somit ist $\left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte k-Bialgebra. Diese graduierte k-Bialgebra ist ferner zusammenhängend, da $V^{\otimes 0} = k = k \cdot 1_{T^{\otimes}V}$ gilt.

Laut Satz 2.45 **6)** (angewandt auf $\left(H, \left(H_n\right)_{n\geq 0}\right) = \left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$) ist also $\left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte Hopfalgebra. Damit ist Beispiel 2.50 **2)** bewiesen.

m) Wenden wir Satz 2.45 **7)** auf $\left(H, \left(H_n\right)_{n\geq 0}\right) = \left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ an, dann erhalten wir direkt die Aussage von Beispiel 2.50 **4)** (denn für $\left(H, \left(H_n\right)_{n\geq 0}\right) = \left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ gilt $H_1 = V^{\otimes 1} = V$). Damit ist auch Beispiel 2.50 **4)** bewiesen.

n) Wir wollen jetzt zeigen, daß die Coalgebra $(TV, \Delta', \varepsilon)$ cokommutativ ist.

Beweis: Wir betrachten V als Teilmenge von $T^{\otimes}V$ vermöge der Inklusion $V = V^{\otimes 1} \subseteq V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$. Laut **f)** ist die Teilmenge V von $T^{\otimes}V$ ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra $T^{\otimes}V$.

Nach **c)** gilt $\Delta'(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ für alle $v \in V$.

Sei $\tau : (T^{\otimes}V) \otimes (T^{\otimes}V) \to (T^{\otimes}V) \otimes (T^{\otimes}V)$ die durch

$$\tau(x \otimes y) = y \otimes x \qquad \text{für alle } x, y \in T^{\otimes}V$$

definierte k-lineare Abbildung. Für alle $v \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned}\tau\left(\underbrace{\Delta'(v)}_{=v\otimes 1+1\otimes v}\right) &= \tau(v \otimes 1 + 1 \otimes v) = \underbrace{\tau(v \otimes 1)}_{=1\otimes v} + \underbrace{\tau(1 \otimes v)}_{=v\otimes 1} \qquad (\text{denn } \tau \text{ ist } k\text{-linear}) \\ &= 1 \otimes v + v \otimes 1 = v \otimes 1 + 1 \otimes v = \Delta'(v).\end{aligned}$$

Benennen wir in diesem Resultat v in x um, so erhalten wir: Für alle $x \in V$ gilt $\tau(\Delta'(x)) = \Delta'(x)$.

Gemäß Folgerung 2.16 **3)** (angewandt auf $T^{\otimes}V$, Δ' und V statt H, Δ bzw. M) folgt hieraus, daß $T^{\otimes}V$ eine cokommutative Bialgebra ist. Da wir wissen, daß $T^{\otimes}V$ eine Hopfalgebra ist (denn laut **l)** ist $\left(T^{\otimes}V, \left(V^{\otimes n}\right)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte Hopfalgebra), erhalten wir also, daß $T^{\otimes}V$ eine cokommutative Hopfalgebra ist. Damit ist Beispiel 2.50 **1)** bewiesen.

o) Sei S die Antipode der Hopfalgebra $T^{\otimes}V$. Sei $n \in \mathbb{N}$.

Für beliebige n Elemente $v_1, v_2, ..., v_n$ von V gilt $v_1 v_2 ... v_n = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ (gemäß **b)**, angewandt auf n statt τ) und $v_n v_{n-1} ... v_1 = v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_1$ (gemäß **b)**, angewandt auf die Zahl n und die Vektoren $v_n, v_{n-1}, ..., v_1$ statt der Zahl τ und den Vektoren $v_1, v_2, ..., v_\tau$).

Für jedes $v \in V$ ist v ein primitives Element der Hopfalgebra $T^{\otimes}V$ (denn nach **c)** ist $\Delta'(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$) und erfüllt somit $S(v) = -v$ (nach Folgerung $2.11\frac{1}{2}$ **3)**, angewandt auf $x = v$). Hieraus folgt $S(v_i) = -v_i$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (denn $v_i \in V$). Also gelten die Gleichungen $S(v_n) = -v_n$, $S(v_{n-1}) = -v_{n-1}$, ..., $S(v_1) = -v_1$. Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, dann erhalten wir $S(v_n) S(v_{n-1}) ... S(v_1) = (-v_n)(-v_{n-1}) ... (-v_1) = (-1)^n v_n v_{n-1} ... v_1$.

Nun ist

$$\begin{aligned}S\left(\underbrace{v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n}_{=v_1 v_2 ... v_n}\right) &= S(v_1 v_2 ... v_n) = S(v_n) S(v_{n-1}) ... S(v_1) \\ &\qquad (\text{denn } S \text{ ist ein Antialgebrahomomorphismus}) \\ &= (-1)^n \underbrace{v_n v_{n-1} ... v_1}_{=v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_1} = (-1)^n v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_1.\end{aligned}$$

Dies beweist Beispiel 2.50. **3)**.

Damit ist Beispiel 2.50 komplett bewiesen.

Die Shufflehopfalgebra

In Beispiel 2.50 haben wir die Tensoralgebra (TV, μ, η) eines Vektorraumes V mit seiner Shufflecoalgebra $(TV, \Delta', \varepsilon)$ verknüpft und eine Hopfalgebra bekommen - die Tensorhopfalgebra $T^{\otimes}V$. Man kann sich nun fragen, ob ähnliches mit der Tensorcoalgebra $(TV, \Delta, \varepsilon)$ (die in Beispiel 2.1. **5)** konstruiert wurde) möglich ist. Wenn wir die Tensoralgebra (TV, μ, η) mit der Tensorcoalgebra $(TV, \Delta, \varepsilon)$ verknüpfen, erhalten wir *keine* Hopfalgebra (nicht einmal eine Bialgebra), außer wenn $V = 0$ ist. Doch es gibt eine andere k-Algebrastruktur auf dem Vektorraum TV, die wir mit der Tensorcoalgebra $(TV, \Delta, \varepsilon)$ verknüpfen können und eine Hopfalgebra erhalten:

2.60. Beispiel: Sei V ein beliebiger Vektorraum. In Beispiel 2.1. **5)** wurde der Tensormodul TV des Vektorraums V definiert. (Zur Wiederholung: Er wurde definiert als der Vektorraum $V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ...$)

1) Es gibt genau eine k-lineare Abbildung $\mu_{\text{shf}} : (TV) \otimes (TV) \to TV$, welche

$$\begin{aligned} & \mu_{\text{shf}} \left((a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes ... \otimes a_n) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}(i,n-i)} a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes ... \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ alle } i \in \{0, 1, ..., n\} \text{ und alle } a_1, a_2, ..., a_n \in V$$

erfüllt (wobei $a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_i$ und $a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes ... \otimes a_n$ als Elemente von TV zu verstehen sind, und daher $(a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes ... \otimes a_n)$ als ein Element von $(TV) \otimes (TV)$ zu lesen ist). Diese k-lineare Abbildung μ_{shf} macht den Vektorraum TV zu einer kommutativen k-Algebra mit dem Einselement 1. Mit anderen Worten: Das Tripel $(TV, \mu_{\text{shf}}, \eta)$ ist eine k-Algebra, wobei η die Abbildung $k \to TV$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1$ ist.

Wir bezeichnen diese k-Algebra mit $T^{\text{shf}}V$ (um sie von der Tensoralgebra $T^{\otimes}V$ zu unterscheiden, welche als Vektorraum (aber nicht als Algebra) identisch mit $T^{\text{shf}}V$ ist) und nennen sie die *Shufflealgebra* des Vektorraums V.

Betrachten wir ferner die in Beispiel 2.1. **5)** definierten Abbildungen $\Delta : TV \to (TV) \otimes (TV)$ und $\varepsilon : TV \to k$, welche (2.6) und (2.7) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ erfüllen. Laut Beispiel 2.1. **5)** ist dann $(TV, \Delta, \varepsilon)$ eine Coalgebra.

Wir behaupten nun:

2) Das 5-Tupel $(TV, \mu_{\text{shf}}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ ist eine kommutative Hopfalgebra.

Wir bezeichnen diese Hopfalgebra mit $T^{\text{shf}}V$ und nennen sie die *Shufflehopfalgebra* von V.

3) Das Paar $\left(T^{\text{shf}}V, (V^{\otimes n})_{n \geq 0}\right)$ ist eine zusammenhängende graduierte Hopfalgebra (wobei $T^{\text{shf}}V$ als die Shufflehopfalgebra von V zu verstehen ist, also als das 5-Tupel $(TV, \mu_{\text{shf}}, \eta, \Delta, \varepsilon)$).

4) Sei S die Antipode der Hopfalgebra $T^{\text{shf}}V = (TV, \mu_{\text{shf}}, \eta, \Delta, \varepsilon)$. Dann gilt

$$S(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = (-1)^n \, v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

Es gibt zwei Methoden, diese Eigenschaften zu beweisen. Wir werden die erste nur sehr grob skizzieren, die zweite aber ausführen.

Erster Beweis von Beispiel 2.60 (skizziert): Zuerst muß alles auf den Fall $\dim V < \infty$ zurückgeführt werden (dies ist nicht schwer, da T^{shf} ein Funktor ist, und man lauter Gleichungen beweisen muss in denen nur endlich viele Elemente von V vorkommen - sodass man eigentlich immer in endlich erzeugten Untervektorräumen von V arbeitet). In dem Fall $\dim V < \infty$ zeigt man dann, daß TV das graduierte Duale zu TV^* ist[138], und die Shufflehopfalgebra von V (wir wissen noch nicht, daß sie eine Hopfalgebra ist) graduiert dual zur Tensorhopfalgebra von V^* ist - und damit kann man **1)**, **2)** und **3)** durch Dualität ableiten. Auch **4)** kann man mit etwas Arbeit aus dieser Dualität erhalten. Ein alternatives Argument für **4)** ist folgendes: Man definiere eine k-lineare Abbildung $S' : TV \to TV$ durch $S'(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n) = (-1)^n v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, und zeige, daß $S' * \text{id} = \text{id} * S' = \eta\varepsilon$ ist. Dazu prüfe man nach, daß

$$\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \mu_{\text{shf}} ((v_\ell \otimes v_{\ell-1} \otimes ... \otimes v_1) \otimes (v_{\ell+1} \otimes v_{\ell+2} \otimes ... \otimes v_n))$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{n-\ell} \mu_{\text{shf}} ((v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\ell) \otimes (v_n \otimes v_{n-1} \otimes ... \otimes v_\ell)) = 0$$

für alle $n \geq 1$ und alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ ist. Dazu zeigt man (mithilfe elementarer Kombinatorik), daß in jedem dieser Produkte nach Ausmultiplikation jeder Tensor doppelt vorkommt, und zwar mit entgegengesetzten Vorzeichen. Geht das einfacher?

Zweiter Beweis von Beispiel 2.60: Wir werden Beispiel 2.60 Schritt für Schritt beweisen. Wir beginnen mit vorbereitenden Schritten:

a) Es ist eins unserer Ziele, auf dem Vektorraum TV eine Algebrastruktur einzuführen, die *nicht* mit der Algebrastruktur auf $T^{\otimes}V$ übereinstimmt. Doch dies wird uns nicht daran hindern, folgende Festlegung zu machen:

- Wenn a und b zwei Elemente von TV sind, dann bezeichnen wir mit $a \cdot b$ (oder auch mit ab) das Produkt der Elemente a und b *bezüglich der Algebrastruktur auf* $T^{\otimes}V$ (und nicht bezüglich der Algebrastruktur auf $T^{\text{shf}}V$, die wir später einführen werden).

Diese Festlegung führt natürlich dazu, daß wir das Produkt zweier Elemente a und b von TV *bezüglich der Algebrastruktur auf* $T^{\text{shf}}V$ (wenn diese Algebrastruktur

---

[138] Unter dem "graduierten Dualen" eines graduierten Vektorraumes $\left(P, (P_n)_{n\geq 0}\right)$ verstehen wir die direkte Summe $\bigoplus_{n\geq 0} P_n^*$ (die wiederum als graduierter Vektorraum anzusehen ist, mit Graduierung $(P_n^*)_{n\geq 0}$). Diese direkte Summe läßt sich kanonisch in den Dualraum P^* einbetten (indem für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Vektorraum P_n^* mit dem Untervektorraum $\{f \in P^* \mid f(P_m) = 0 \text{ für jedes } m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}\}$ von P^* identifiziert wird), und wird dadurch als Untervektorraum von P^* betrachtet. Dieser Untervektorraum ist oft wesentlich handlicher als der ganze Raum P^*. So ist beispielsweise das graduierte Duale des graduierten Dualen von P isomorph zu P, falls P_n für jedes $n \geq 0$ endlichdimensional ist. Währenddessen gilt $P^{**} \cong P$ nur, wenn P selber endlichdimensional ist (und dies ist eine deutlich stärkere Bedingung als die Endlichdimensionalität von P_n für jedes $n \geq 0$). Eine weitere nützliche Eigenschaft des graduierten Dualen ist: Ist $\left(H, (H_n)_{n\geq 0}\right)$ eine graduierte Hopfalgebra, und ist H_n für jedes $n \geq 0$ endlichdimensional, dann wird auch das graduierte Duale von H kanonisch zu einer graduierten Hopfalgebra. Diese Eigenschaft ermöglicht es uns hier, durch Betrachtung von TV als das graduierte Duale zu T^*V eine Hopfalgebrastruktur auf TV zu bekommen.

erst einmal definiert ist) nicht mehr mit $a \cdot b$ oder mit ab bezeichnen können, sondern anders nennen werden müssen. (Und zwar werden wir es $a \Cup b$ nennen.)

b) Wir betrachten im Folgenden V als Untervektorraum von $T^{\otimes}V$ (vermöge der Inklusion $V = V^{\otimes 1} \subseteq V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$). Somit wird jedes Element von V auch als ein Element von $T^{\otimes}V$ angesehen. Dies ist manchmal (aber nicht immer!) nützlich. Konkret legen wir folgendes fest:

- Wenn wir von dem Produkt mehrerer Elemente von V sprechen, dann betrachten wir diese Elemente als Elemente der k-Algebra $T^{\otimes}V$ (denn sonst wäre das Produkt nicht definiert). Das heißt: Ist $\tau \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, v_2, ..., v_\tau$ Elemente von V, dann verstehen wir unter $v_1 v_2 ... v_\tau$ das Produkt der Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$, das man erhält, wenn man sie als Elemente der k-Algebra $T^{\otimes}V$ betrachtet.

- Wenn wir aber vom *Tensorprodukt* mehrerer Elemente von V sprechen, dann betrachten wir diese Elemente als Elemente des Vektorraums V und *nicht* als Elemente der k-Algebra $T^{\otimes}V$. Das heißt: Ist $\tau \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, v_2, ..., v_\tau$ Elemente von V, dann verstehen wir unter $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$ das Tensorprodukt der Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$, das man erhält, wenn man sie als Elemente des Vektorraums V (und nicht der k-Algebra $T^{\otimes}V$) betrachtet. Dieses Tensorprodukt $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$ ist dann ein Element der Tensorpotenz $V^{\otimes \tau}$, die wiederum ein Summand der direkten Summe $V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$ ist.

Diese beiden Festlegungen sind genau die gleichen, die wir bereits in Punkt **b)** des Beweises von Beispiel 2.50 gemacht haben.

c) Für jedes $\tau \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $v_1, v_2, ..., v_\tau$ von V gilt $v_1 v_2 ... v_\tau = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$. (Hierbei sind die Terme $v_1 v_2 ... v_\tau$ und $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_\tau$ gemäß der Festlegungen in Punkt **b)** zu verstehen.)

Beweis: Siehe Punkt **b)** des Beweises von Beispiel 2.50.

d) Nun wollen wir zeigen: Für jedes $v \in V$ ist $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$. Hierbei wird v als Element von TV betrachtet (gemäß Punkt **b)**).

Beweis: Sei $v_1 = v$. Nach (2.6) (angewandt auf $n = 1$) ist dann

$$\begin{aligned}
\Delta(v_1) &= \sum_{i=0}^{1} (v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_n) \\
&= \underbrace{(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_0)}_{=(\text{leeres Produkt})=1} \otimes \underbrace{(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_1)}_{=v_1=v} \\
&\qquad + \underbrace{(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_1)}_{=v_1=v} \otimes \underbrace{(v_2 \otimes v_3 \otimes ... \otimes v_1)}_{=(\text{leeres Produkt})=1} \\
&= 1 \otimes v + v \otimes 1 = v \otimes 1 + 1 \otimes v.
\end{aligned}$$

Wegen $v_1 = v$ wird dies zu $\Delta'(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, was zu beweisen war.

e) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $V_{\text{pure}}^{\otimes n}$ die Teilmenge von $V^{\otimes n}$, die aus allen reinen n-Tensoren (also allen Tensoren der Form $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ für irgendwelche $v_1, v_2, ..., v_n \in V$) in $V^{\otimes n}$ besteht. Dann ist $V_{\text{pure}}^{\otimes n}$ ein Erzeugendensystem des k-Vektorraums $V^{\otimes n}$ (weil die n-fache Tensorpotenz $V^{\otimes n}$ bekanntlich von den reinen n-Tensoren erzeugt ist). Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\text{pure}}^{\otimes n}$ ein Erzeugendensystem des k-Vektorraums

$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n} = V^{\otimes 0} \oplus V^{\otimes 1} \oplus V^{\otimes 2} \oplus ... = TV = T^{\otimes}V$ (denn um ein Erzeugendensystem der direkten Summe mehrerer Vektorräume zu finden, reicht es aus, die Vereinigung von Erzeugendensystemen dieser Vektorräume zu nehmen).

f) Die Teilmenge V von $T^{\otimes}V$ ist ein Algebraerzeugendensystem der k-Algebra $T^{\otimes}V$.

Beweis: Siehe Punkt **f)** des Beweises von Beispiel 2.50.

g) Wir wollen jetzt zeigen, daß es genau eine k-lineare Abbildung $\mu_{\mathrm{shf}} : (TV) \otimes (TV) \to TV$ gibt, welche (2.80) erfüllt.

Seien $n \geq 0$ und $i \in \{0, 1, ..., n\}$ beliebig. Dann definieren wir eine Abbildung $\mathrm{shf}_{n,i} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ durch

$$\mathrm{shf}_{n,i}(a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(i,n-i)} a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes ... \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} \qquad \text{für alle } a_1, a_2, ..., a_n \in V.$$

(Diese Abbildung $\mathrm{shf}_{n,i}$ ist hierdurch wohldefiniert, denn die rechte Seite $\sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(i,n-i)} a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes ... \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$ hängt multilinear von $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ab.) Ferner definieren wir eine Abbildung $\mu_{\mathrm{shf},n,i} : V^{\otimes i} \otimes V^{\otimes(n-i)} \to V^{\otimes n}$ durch

$$\begin{aligned} &\mu_{\mathrm{shf},n,i}((a_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes ... \otimes a_n)) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(i,n-i)} a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes ... \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} \\ &\qquad\qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ alle } i \in \{0, 1, ..., n\} \text{ und alle } a_1, a_2, ..., a_n \in V \end{aligned} \tag{2.80}$$

[...]

3. H-Modulalgebren und Smash-Produkt

Wir betrachten weiterhin Algebren, Coalgebren, Bialgebren und Hopfalgebren über dem festen Körper k.

H-Modulalgebren

Wir werden nun eine Operation von Bialgebren auf Algebren definieren, die ähnlich zur Operation von Gruppen auf Mengen ist:

Definition: a) Sei H eine Bialgebra, und sei A eine Algebra. Angenommen, A ist ein H-Linksmodul. Betrachten wir dann die k-lineare Abbildung $H \otimes A \to A$, die $h \otimes a$ auf $h \cdot a$ abbildet für alle $h \in H$ und $a \in A$. Dabei bezeichnen wir mit $h \cdot a$ das Bild von a unter der Wirkung von h auf A. Falls wir dieses Bild nicht mit $h \cdot a$ bezeichnen können (z. B. weil $A = H$ ist und $h \cdot a$ als Produkt der Elemente h und a mißverstanden werden könnte), schreiben wir stattdessen $h \rhd a$.

Man nennt die Algebra A (zusammen mit der H-Linksmodulstruktur auf A) eine *H-Linksmodulalgebra*, wenn folgende zwei Axiome erfüllt sind:

- Für alle $x \in H$ und $a, b \in A$ ist $x \cdot (ab) = \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right)$.
- Für alle $x \in H$ ist $x \cdot 1 = \varepsilon(x) \cdot 1$.

Die k-lineare Abbildung $H \otimes A \to A$, die $h \otimes a$ auf $h \cdot a$ abbildet, heißt die *Strukturabbildung* der H-Linksmodulalgebra A.

b) Seien A und A' zwei Algebren. Sind $\sigma, \tau \in \operatorname{Alg}(A, A')$, und ist $\delta \in \operatorname{Hom}(A, A')$, dann heißt δ eine (σ, τ)-*Derivation*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\tau(b)$. Im Falle von $A' = A$ und $\sigma = \tau = \mathrm{id}$ nennt man (σ, τ)-Derivationen auch einfach *Derivationen*.

3.1. Bemerkung: 0) Sind A und A' zwei Algebren, und sind $\sigma, \tau \in \operatorname{Alg}(A, A')$, und ist $\delta \in \operatorname{Hom}(A, A')$ eine (σ, τ)-Derivation, dann ist $\delta(1) = 0$.

Beweis: Da δ eine (σ, τ)-Derivation ist, gilt $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\tau(b)$ für $a = b = 1$, also

$$\delta(1 \cdot 1) = \underbrace{\sigma(1)}_{=1}\delta(1) + \delta(1)\underbrace{\tau(1)}_{=1} = 2\delta(1),$$

also $\delta(1) = 2\delta(1)$, also $\delta(1) = 0$.

1) Sind A und A' zwei Algebren, und sind $\sigma, \tau \in \operatorname{Alg}(A, A')$, und ist $\delta \in \operatorname{Hom}(A, A')$, dann gilt:

Genau dann ist δ eine (σ, τ)-Derivation, wenn die Abbildung $\varphi_\delta : A \to \mathrm{M}_2(A')$, die durch

$$\varphi_\delta(a) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \delta(a) \\ 0 & \tau(a) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } a \in A$$

definiert ist, ein Algebrahomomorphismus ist.

Beweis: **a)** Daß φ_δ stets eine k-lineare Abbildung ist, ist klar.

b) Genau dann ist $\varphi_\delta(1) = 1$, wenn $\delta(1) = 0$ ist. (Dies ist klar, denn $\sigma(1) = \tau(1) = 1$.)

c) Genau dann gilt $\varphi_\delta(ab) = \varphi_\delta(a)\varphi_\delta(b)$ für alle $a, b \in A$, wenn $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\tau(b)$ für alle $a, b \in A$ gilt (denn

$$\varphi_\delta(a)\varphi_\delta(b) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \delta(a) \\ 0 & \tau(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma(b) & \delta(b) \\ 0 & \tau(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(a)\sigma(b) & \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\tau(b) \\ 0 & \tau(a)\tau(b) \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi_\delta(ab) = \begin{pmatrix} \sigma(ab) & \delta(ab) \\ 0 & \tau(ab) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(a)\sigma(b) & \delta(ab) \\ 0 & \tau(a)\tau(b) \end{pmatrix}$$

).

Zum Beweis von **1)** müssen wir nun zwei Aussagen beweisen:

Aussage 1: Ist δ eine (σ, τ)-Derivation, dann ist φ_δ ein Algebrahomomorphismus.

Aussage 2: Ist φ_δ ein Algebrahomomorphismus, dann ist δ eine (σ, τ)-Derivation.

Beweis von Aussage 1: Angenommen, δ ist eine (σ, τ)-Derivation. Dann gilt $\delta(1) = 0$ (nach **0)**) und $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\tau(b)$ für alle $a, b \in A$, und nach **b)** und **c)** folgt daraus, daß $\varphi_\delta(1) = 1$ und $\varphi_\delta(ab) = \varphi_\delta(a)\varphi_\delta(b)$ für alle $a, b \in A$ gilt. Somit ist φ_δ ein Algebrahomomorphismus. Aussage 1 ist damit bewiesen.

Beweis von Aussage 2: Angenommen, φ_δ ist ein Algebrahomomorphismus. Dann gilt $\varphi_\delta(ab) = \varphi_\delta(a)\varphi_\delta(b)$ für alle $a, b \in A$. Nach **c)** folgt hieraus $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\tau(b)$ für alle $a, b \in A$. Somit ist δ eine (σ, τ)-Derivation, und Aussage 2 ist bewiesen.

Damit ist der Beweis von **1)** abgeschlossen.

2) Sei H eine Bialgebra, und A eine H-Linksmodulalgebra.

a) Sei $g \in G(H)$. Dann operiert g als Algebraendomorphismus auf A. Das heißt, $g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b)$ für alle $a, b \in A$, und $g \cdot 1 = 1$. Ist H eine Hopfalgebra, so operiert g sogar als Algebraautomorphismus.

b) Seien $g, h \in G(H)$, und sei $x \in H$ ein (g, h)-schiefprimitives Element (also $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h$). Dann operiert x auf A als eine (σ, τ)-Derivation, wobei $\sigma = g\cdot$ und $\tau = h\cdot$ ist (wobei $g\cdot$ die Multiplikation mit g von links bezeichnet, und $h\cdot$ die Multiplikation mit h von links). Das heißt, für alle $a, b \in A$ ist $x \cdot (ab) = (g \cdot a)(x \cdot b) + (x \cdot a)(h \cdot b)$.

Beweis: **a)** Da $g \in G(H)$ ist, gilt $\Delta(g) = g \otimes g$. Für alle $a, b \in A$ gilt also $g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b)$, und $g \cdot 1 = 1$. Ist H eine Hopfalgebra, dann prüft man leicht nach, daß g und $g^{-1} = S(g)$ invers operieren.

b) Da $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h$ ist, gilt für alle $a, b \in A$ die Gleichung $x \cdot (ab) = (g \cdot a)(x \cdot b) + (x \cdot a)(h \cdot b)$.

3) Sei H eine Bialgebra. Sei A gleichzeitig ein H-Linksmodul und eine k-Algebra. Sei $M \subseteq H$ ein Erzeugendensystem von H als Algebra. Für alle $x \in M$ und $a, b \in A$ gelte:

$$x \cdot (ab) = \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right) \qquad \text{und} \qquad x \cdot 1 = \varepsilon(x).$$

Dann ist A eine H-Linksmodulalgebra.

Beweis: Sei

$$H' = \left\{x \in H \mid \text{ für alle } a, b \in A \text{ gilt } x \cdot (ab) = \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right) \text{ und } x \cdot 1 = \varepsilon(x)\right\}.$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß H' eine Unteralgebra von H ist.

In der Tat ist $H' \subseteq H$ ein Untervektorraum[139].

Außerdem gilt $1 \in H'$ (wie man leicht einsieht), und für alle $x, y \in H'$ ist auch $xy \in H'$ (denn für alle $a, b \in A$ ist

$$\begin{aligned}
(xy) \cdot (ab) &= x \cdot \underbrace{(y \cdot (ab))}_{\substack{=\left(y_{(1)} \cdot a\right)\left(y_{(2)} \cdot b\right) \\ (\text{denn } y \in H')}} = x \cdot \left(\left(y_{(1)} \cdot a\right)\left(y_{(2)} \cdot b\right)\right) \\
&= \left(x_{(1)} \cdot \left(y_{(1)} \cdot a\right)\right)\left(x_{(2)} \cdot \left(y_{(2)} \cdot b\right)\right) \qquad (\text{denn } x \in H') \\
&= \left(\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) \cdot a\right)\left(\left(x_{(2)}y_{(2)}\right) \cdot b\right) = \left((xy)_{(1)} \cdot a\right)\left((xy)_{(2)} \cdot b\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)} = (xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)}\right)
\end{aligned}$$

---

[139]Denn für jede festen $a, b \in A$ sind die Abbildungen

$$H \to A, \quad x \mapsto x \cdot (ab)$$

und

$$H \to A, \quad x \mapsto \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right)$$

beide k-linear (für $x \mapsto x \cdot (ab)$ ist dies klar, und $x \mapsto \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right)$ ist k-linear als Verkettung der k-linearen Abbildungen $H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \xrightarrow{(\cdot a) \otimes (\cdot b)} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$).

und

$$(xy)\cdot 1 = x\cdot \underbrace{(y\cdot 1)}_{\substack{=\varepsilon(y)\\ (\text{denn } y\in H')}} = x\cdot\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\cdot \underbrace{x\cdot 1}_{\substack{=\varepsilon(x)\\ (\text{denn } x\in H')}} = \varepsilon(y)\cdot\varepsilon(x) = \varepsilon(x)\,\varepsilon(y) = \varepsilon(xy)$$

). Somit ist H' eine Unteralgebra von H.

Nun ist aber $M \subseteq H'$ (denn laut Annahme gilt

$$x\cdot(ab) = \left(x_{(1)}\cdot a\right)\left(x_{(2)}\cdot b\right) \qquad \text{und} \qquad x\cdot 1 = \varepsilon(x).$$

für alle $x \in M$ und $a, b \in A$). Die Unteralgebra H' von H enthält also M als Teilmenge. Somit muß H' auch H als Teilmenge enthalten (denn M ist ein Erzeugendensystem von H als Algebra). Für alle $x \in H$ und $a, b \in A$ gilt also

$$x\cdot(ab) = \left(x_{(1)}\cdot a\right)\left(x_{(2)}\cdot b\right) \qquad \text{und} \qquad x\cdot 1 = \varepsilon(x)$$

(denn $x \in H \subseteq M$). Mit anderen Worten: A ist eine H-Linksmodulalgebra. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Smash-Produkte

Definition: Sei H eine Bialgebra, und sei A eine H-Linksmodulalgebra.

Dann definieren wir eine Algebra $A\sharp H$ als Vektorraum $A\otimes H$ mit folgender Algebrastruktur[140]:

Wir schreiben $a\sharp h$ für das Element $a\otimes h$ von $A\sharp H$ für alle $a\in A$ und $h\in H$. Für alle $a, b\in A$ und $g, h\in H$ definieren wir jetzt

$$(a\sharp g)(b\sharp h) = a\left(g_{(1)}\cdot b\right)\sharp g_{(2)}h.$$

Auf diese Weise haben wir auf einem Erzeugendensystem des Vektorraumes $A\sharp H$ eine Multiplikation definiert. Diese Multiplikation setzen wir k-linear zu einer Multiplikation auf ganz $A\sharp H$ fort. Damit wird $A\sharp H$ zu einer Algebra. Diese Algebra nennen wir das *Smash-Produkt* von A und H.

Bemerkung zur Notation: Solange wir nur von der Vektorraumstruktur und nicht von der Algebrastruktur auf $A\otimes H$ und auf $A\sharp H$ reden, können wir $A\otimes H$ und $A\sharp H$ als Synonyme betrachten. Doch die Algebra $A\otimes H$ ist (im Allgemeinen) nicht mehr das Gleiche wie die Algebra $A\sharp H$. Ähnliches müssen wir beachten, wenn wir mit Elementen von $A\otimes H$ arbeiten: Laut Definition ist $a\sharp h$ eine andere Schreibweise für das Element $a\otimes h$ von $A\sharp H$, und solange wir solche Elemente nur addieren und mit Skalaren multiplizieren, können wir $a\sharp h$ und $a\otimes h$ als Synonyme betrachten. Doch das Produkt $(a\sharp g)(b\sharp h)$ (mit $a, b\in A$ und $g, h\in H$) ist im Allgemeinen nicht gleich dem Produkt $(a\otimes g)(b\otimes h)$, weil die Multiplikation in der Algebra $A\sharp H$ nicht die gleiche wie die von $A\otimes H$ ist.

3.2. Bemerkung: 1) Sei A eine H-Linksmodulalgebra. Dann ist $A\sharp H$ eine Algebra, und es gilt:

$$\begin{aligned}(a\sharp 1)(b\sharp h) &= ab\sharp h && \text{für alle } a, b\in A \text{ und } h\in H;\\ (a\sharp g)(1\sharp h) &= a\sharp gh && \text{für alle } a\in A \text{ und } g, h\in H.\end{aligned}$$

[140] Das ist (im Allgemeinen) *nicht* die in Kapitel 1 (Proposition 1.11) definierte Algebrastruktur auf $A\otimes H$.

Ferner ist $1\sharp 1$ das 1-Element der Algebra $A\sharp H$.

Oft wird $a\sharp 1$ mit a für alle $a \in A$ identifiziert, und $1\sharp g$ mit g für alle $g \in H$ identifiziert. Für alle $a \in A$ und $g \in H$ können wir daher auch ag statt $a\sharp g$ schreiben (denn $a\sharp g = (a\sharp 1)(1\sharp g)$). Dann gilt die Regel $ha = \left(h_{(1)} \cdot a\right) h_{(2)}$ für alle $a \in A$ und $h \in H$. Wir müssen bei unserer Notation aufpassen, daß wir ga (eine Abkürzung für $(1\sharp g)(a\sharp 1)$) nicht mit $g \cdot a$ (der Wirkung von g auf a) verwechseln.

Beweis: Die k-lineare Multiplikationsabbildung

$$(A\sharp H) \otimes (A\sharp H) \to A\sharp H, \qquad (a\sharp g) \otimes (b\sharp h) \mapsto a\left(g_{(1)} \cdot b\right) \sharp g_{(2)} h$$

ist wohldefiniert. Es gilt

$$(a\sharp 1)(b\sharp h) = a \underbrace{(1 \cdot b)}_{=b} \sharp \underbrace{1h}_{=h} = ab\sharp h \qquad \text{und}$$

$$(a\sharp g)(1\sharp h) = a \left(\underbrace{g_{(1)} \cdot 1}_{=\varepsilon\left(g_{(1)}\right) \cdot 1} \right) \sharp g_{(2)} h = a\sharp \underbrace{\varepsilon\left(g_{(1)}\right) g_{(2)}}_{=g} h = a\sharp gh.$$

Daß die Multiplikation assoziativ ist, können wir nachrechnen: Für alle $a, b, c \in A$ und $g, h, k \in H$ ist

$$((a\sharp g)(b\sharp h))(c\sharp k) = \left(a\left(g_{(1)} \cdot b\right) \sharp g_{(2)} h\right)(c\sharp k) = a\left(g_{(1)} \cdot b\right)\left(\left(g_{(2)} h_{(1)}\right) \cdot c\right) \sharp g_{(3)} h_{(2)} k$$

und

$$\begin{aligned}(a\sharp g)((b\sharp h)(c\sharp k)) &= (a\sharp g)\left(b\left(h_{(1)} \cdot c\right) \sharp h_{(2)} k\right) = a\left(g_{(1)} \cdot \left(b\left(h_{(1)} \cdot c\right)\right)\right) \sharp g_{(2)} h_{(2)} k \\ &= a\left(g_{(1)} \cdot b\right) \left(\underbrace{g_{(2)} \cdot \left(h_{(1)} \cdot c\right)}_{=\left(g_{(2)} h_{(1)}\right) \cdot c} \right) \sharp g_{(3)} h_{(2)} k.\end{aligned}$$

Daß $1\sharp 1$ das 1-Element der Algebra $A\sharp H$ ist, ist sehr leicht nachzurechnen.

Die Regel $ha = \left(h_{(1)} \cdot a\right) h_{(2)}$ folgt aus $ha = (h\sharp 1)(a\sharp 1) = h_{(1)} \cdot a\sharp h_{(2)}$.

2) Man kann die Definition der Algebra $A\sharp H$ auch folgendermaßen umformulieren:

Sei $\tau : H \otimes A \to A \otimes H$ die k-lineare Abbildung, die durch $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ für alle $x \in H$ und $y \in A$ festgelegt ist.

Sei $m_A : H \otimes A \to A$ die Strukturabbildung der H-Linksmodulalgebra A (das heißt, $m_A(h \otimes a) = ha$ für alle $h \in H$ und $a \in A$).

Die Algebra $A\sharp H$ ist dann der Vektorraum $A \otimes H$ mit einer Multiplikationsabbildung $\mu_{A\sharp H} : (A \otimes H) \otimes (A \otimes H) \to A \otimes H$, die als Verkettung

$$\begin{tikzcd} A \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"] & A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m_A \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"'] \\ & A \otimes H & A \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[l, "\mu_A \otimes \mu_H"] \end{tikzcd}$$

definiert wird, und mit der Einsabbildung

$$\eta_{A\sharp H} : k \to A \otimes H, \qquad \lambda \mapsto \lambda \cdot 1 \otimes 1.$$

(Diese Einsabbildung $\eta_{A\sharp H}$ stimmt mit der Einsabbildung $\eta_{A\otimes H}$ der Algebra $A \otimes H$ überein, aber die Multiplikationsabbildung $\mu_{A\sharp H}$ ist (im Allgemeinen) ungleich der Multiplikationsabbildung $\mu_{A\otimes H}$ der Algebra $A \otimes H$.)

Beweis: Daß

$$\eta_{A\sharp H} : k \to A \otimes H, \qquad \lambda \mapsto \lambda \cdot 1 \otimes 1$$

wirklich die Einsabbildung der Algebra $A\sharp H$ ist, folgt daraus daß $1 \otimes 1 = 1\sharp 1$ die Eins der Algebra $A\sharp H$ ist (was wir in **1)** nachgewiesen haben).

Wir müssen also nur noch beweisen, daß die Verkettung

$$\begin{tikzcd} A \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"] & A \otimes H \otimes H \otimes A \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] & A \otimes H \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m_A \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"'] \\ & A \otimes H & A \otimes A \otimes H \otimes H \arrow[l, "\mu_A \otimes \mu_H"] \end{tikzcd}$$

tatsächlich die Multiplikationsabbildung der Algebra $A\sharp H$ ist, also mit der Abbildung

$$(A\sharp H) \otimes (A\sharp H) \to A\sharp H, \qquad (a\sharp g) \otimes (b\sharp h) \mapsto a \left(g_{(1)} \cdot b\right) \sharp g_{(2)} h$$

übereinstimmt (wobei wir $A\sharp H$ und $A\otimes H$ als Synonyme verwenden, solange wir nur die Vektorraumstrukturen und nicht die Algebrastrukturen auf $A\sharp H$ und $A\otimes H$ benötigen). Wir müssen also zeigen: Für alle $a, b \in A$ und $g, h \in H$ gilt

$$\begin{aligned} &(\mu_A \otimes \mu_H)(\mathrm{id} \otimes m_A \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(a \otimes g \otimes b \otimes h) \\ &= a\left(g_{(1)} \cdot b\right) \otimes g_{(2)} h. \end{aligned}$$

Doch dies folgt aus

$$\begin{aligned} &(\mu_A \otimes \mu_H)(\mathrm{id} \otimes m_A \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\underbrace{(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(a \otimes g \otimes b \otimes h)}_{=a\otimes g_{(1)}\otimes g_{(2)}\otimes b\otimes h} \\ &= (\mu_A \otimes \mu_H)(\mathrm{id} \otimes m_A \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\underbrace{(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})\left(a \otimes g_{(1)} \otimes g_{(2)} \otimes b \otimes h\right)}_{=a\otimes g_{(1)}\otimes b\otimes g_{(2)}\otimes h} \\ &= (\mu_A \otimes \mu_H)\underbrace{(\mathrm{id} \otimes m_A \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\left(a \otimes g_{(1)} \otimes b \otimes g_{(2)} \otimes h\right)}_{=a\otimes g_{(1)}\cdot b\otimes g_{(2)}\otimes h} \\ &= (\mu_A \otimes \mu_H)\left(a \otimes g_{(1)} \cdot b \otimes g_{(2)} \otimes h\right) = a\left(g_{(1)} \cdot b\right) \otimes g_{(2)} h. \end{aligned}$$

Damit ist **2)** bewiesen.

3) Mithilfe von Smash-Produkten lassen sich die sogenannten *Ore-Erweiterungen* definieren. Dazu betrachten wir einen Sonderfall des Smash-Produktes:

Sei $H = k\langle g, x\rangle$ die freie Algebra in zwei Variablen g und x. Wir können auf H eine Bialgebrastruktur einführen durch

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g \otimes g; \qquad & \varepsilon(g) &= 1; \\ \Delta(x) &= g \otimes x + x \otimes 1; \qquad & \varepsilon(x) &= 0. \end{aligned}$$

(Diese Bialgebra haben wir in Beispiel 2.18. **9)** eingeführt.)

Sei A eine Algebra, sei $\sigma : A \to A$ ein Algebrahomomorphismus, und sei $\delta : A \to A$ eine (σ, id)-Derivation (das heißt, für alle $a, b \in A$ gilt: $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$).

Dann ist A eine H-Linksmodulalgebra durch $g \cdot a = \sigma(a)$ und $x \cdot a = \delta(a)$ für alle $a \in A$.

Dann ist $A \sharp k[x] \subseteq A \sharp H$ eine Unteralgebra, wobei $k[x]$ den *kommutativen* Polynomring in einer Variablen x über k bezeichnet. (Denn $\Delta(k[x]) \subseteq H \otimes k[x]$.)

Die Algebraerweiterung $A \subseteq A \sharp k[x]$ (eigentlich eine Injektion von A nach $A \sharp k[x]$, gegeben durch $a \mapsto a \sharp 1$) heißt eine *Ore-Erweiterung* von A und wird mit $A[x; \sigma, \delta]$ bezeichnet.

In $A \sharp k[x]$ verwendet man, wie oben, die Kurzschreibweise a für $a \sharp 1$ und ax^n für $a \sharp x^n$, wobei x^n wiederum kurz für $\underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ mal}}$ steht.

Jedes Element von $A[x; \sigma, \delta]$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_0, a_1, ..., a_n \in A$. Man bezeichnet die Elemente von $A[x; \sigma, \delta]$ deshalb als *Linkspolynome* in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in A. Sie verhalten sich allerdings nicht wie gewöhnliche Polynome über kommutativen Ringen, denn ax ist im Allgemeinen nicht gleich xa. Stattdessen gilt die *Vertauschungsregel*: Für alle $a \in A$ gilt $xa = \sigma(a) x + \delta(a)$.

Beweis: Erstmal ist A ein H-Linksmodul durch $g \cdot a = \sigma(a)$ und $x \cdot a = \delta(a)$ für alle $a \in A$, denn wir können einen Algebrahomomorphismus $H \to \operatorname{End} A$ definieren durch $g \mapsto \sigma$ und $x \mapsto \delta$ (denn $H = k\langle g, x\rangle$ ist eine freie Algebra). Somit ist A eine H-Linksmodulalgebra wegen 3.1. **3)**, denn die Axiome einer H-Linksmodulalgebra gelten für die Erzeugenden g und x (denn für alle $a \in A$ und $b \in A$ ist

$$\begin{aligned} g \cdot (ab) &= \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \qquad\qquad (\text{da } \sigma \text{ ein Algebrahomomorphismus ist}) \\ &= (g \cdot a)(g \cdot b) = \left(g_{(1)} \cdot a\right)\left(g_{(2)} \cdot b\right) \qquad\qquad \left(\text{da } g \otimes g = \Delta(g) = g_{(1)} \otimes g_{(1)}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \cdot (ab) &= \delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\operatorname{id}(b) \qquad\qquad (\text{denn } \delta \text{ ist eine } (\sigma, \operatorname{id})\text{-Derivation}) \\ &= (g \cdot a)(x \cdot b) + (x \cdot a)(1 \cdot b) = \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right) \\ &\qquad \left(\text{denn } g \otimes x + x \otimes 1 = \Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) \end{aligned}$$

).

Elemente in $A \sharp H$ haben die Form $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \sharp x^i$ mit $a_0, a_1, ..., a_n \in A$.

Wegen $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1 \in H \otimes k[x]$ gilt $\Delta(k[x]) \subseteq H \otimes k[x]$. Also ist $(a \sharp g)(b \sharp h) = a\left(g_{(1)} \cdot b\right) \sharp \left(g_{(2)} \cdot h\right) \in A \sharp k[x]$ für alle $a, b \in A$ und $g, h \in k[x]$. Zusammen mit $1 \in A \sharp k[x]$ ergibt dies, daß $A \sharp k[x]$ eine Unteralgebra der Algebra $A \sharp H$ ist.

Die Vertauschungsregel ergibt sich aus

$$(1 \sharp x)(a \sharp 1) = x_{(1)} \cdot a \sharp x_{(2)} = \underbrace{g \cdot a}_{=\sigma(a)} \sharp x + \underbrace{x \cdot a}_{=\delta(a)} \sharp 1 = \sigma(a) \sharp x + \delta(a) \sharp 1,$$

also in abkürzender Schreibweise $xa = \sigma(a) x + \delta(a)$.

3.3. Beispiele: 1) Die Algebra $k\langle x, t \mid xt = tx + 1\rangle$ heißt *Weyl-Algebra*. Betrachten wir $k[t]$ (die Polynomalgebra über k in einer Unbestimmten t). Sei der Endomorphismus σ von $k[t]$ durch $\sigma = \operatorname{id}$ gegeben, und sei $\delta : k[t] \to k[t]$ die formale Ableitung nach t (also $\delta = \frac{d}{dt}$). Dann ist δ eine Derivation (d. h. eine $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$-Derivation). Nach Bemerkung 3.2. **3)** ist dann eine Ore-Erweiterung $k[t][x; \mathrm{id}, \delta]$ definiert.

Dann gibt es einen Algebraisomorphismus $k\langle x, t \mid xt = tx + 1\rangle \to k[t][x; \mathrm{id}, \delta]$, gegeben durch $x \mapsto x$ und $t \mapsto t$. Insbesondere ist $\{t^i x^j \mid i, j \geq 0\}$ eine k-Basis der Weyl-Algebra.

Beweis: Da in der Ore-Erweiterung gilt: $xt = \underbrace{\sigma(t)}_{=t} x + \underbrace{\delta(t)}_{=1} = tx + 1$, existiert ein Algebrahomomorphismus $k\langle x, t \mid xt = tx + 1\rangle \to k[t][x; \mathrm{id}, \delta]$ mit $x \mapsto x$ und $t \mapsto t$. Dieser Algebrahomomorphismus ist surjektiv (da x und t Algebraerzeugende sind). Er ist auch injektiv, denn in der Weyl-Algebra ist offenbar $\{t^i x^j \mid i, j \geq 0\}$ ein k-Erzeugendensystem, und in der Ore-Erweiterung ist $\{t^i x^j \mid i, j \geq 0\}$ eine linear unabhängige Menge. Letzteres Argument zeigt auch, daß in der Weyl-Algebra $\{t^i x^j \mid i, j \geq 0\}$ eine k-Basis ist.

2) Sei $q \in k$. Die Algebra $k\langle g, x \mid gx = qxg\rangle$ heißt eine *Quantenebene*.

Betrachte $k[x]$ (die Polynomalgebra in einer Variablen x) als Algebra, und betrachte $k[g]$ (die Polynomalgebra in einer Variablen g) als Bialgebra mit $\Delta(g) = g \otimes g$.

Dann ist $k[x]$ eine $k[g]$-Linksmodulalgebra mit $g \cdot x = qx$. (Genauer gesagt: Es gibt genau eine $k[g]$-Linksmodulalgebrastruktur auf $k[x]$, die $g \cdot x = qx$ erfüllt.[141])

Dann ist der durch $g \mapsto 1\sharp g$ und $x \mapsto x\sharp 1$ definierte Algebrahomomorphismus $k\langle g, x \mid gx = qxg\rangle \to k[x] \sharp k[g]$ ein Algebraisomorphismus.

Und $k[x] \sharp k[g] = k[x][g, \sigma, 0]$ ist eine Ore-Erweiterung, wobei σ durch $\sigma(x) = qx$ definiert ist.

Beweis: Die Algebraabbildung $k[g] \to \mathrm{End}(k[x])$, die $k[x]$ zu einem $k[g]$-Modul macht, wird durch $g \mapsto (x \mapsto qx)$ eindeutig festgelegt. Daß $k[x]$ eine $k[g]$-Linksmodulalgebra ist, prüft man wieder nach 3.1. Die Behauptung folgt wie in **1)**.

3) Sei $q \in k$ von 0 verschieden, und sei $H = k\langle g, h, x \mid gh = 1,\ hg = 1,\ gx = qxg\rangle$. Dann ist H eine Hopfalgebra wie in Beispiel 2.18 **11)**.

Dann operiert $k[g, h]$ [142] auf $k[x]$ wie in **2)** durch $g \cdot x = qx$ und $h \cdot x = q^{-1}x$. (Es sei angemerkt, daß $k[g, h] \cong k[\mathbb{Z}]$ ist, und $k[x]$ isomorph zur Polynomalgebra über k in einer Variablen ist.)

Wieder ist dann der Algebrahomomorphismus

$$k\langle g, h, x \mid gh = 1,\ hg = 1,\ gx = qxg\rangle \to k[x] \sharp k[g, h],$$

der durch $g \mapsto 1\sharp g$, $h \mapsto 1\sharp h$ und $x \mapsto x\sharp 1$ definiert ist, ein Algebraisomorphismus.

Insbesondere ist $(x^i g^j)_{i\in\mathbb{N},\ j\in\mathbb{Z}}$ eine k-Basis von H.

4) Sei $n \geq 1$, und sei $q \in k$ eine primitive n-te Einheitswurzel (also eine n-te Einheitswurzel mit Ordnung n). Sei $H = k\langle g, x \mid g^n = 1,\ x^n = 0,\ gx = qxg\rangle$ die in Beispiel 2.18. **12)** eingeführte Taft-Hopfalgebra.

Die Hopfalgebra $k[G] \diagup (G^n - 1) \cong k[\mathbb{Z} \diagup (n)]$ operiert auf $k[X] \diagup (X^n)$ als Modulalgebra durch $\overline{G} \cdot \overline{X} = q\overline{X}$, und dies führt zu einem Algebraisomorphismus

$$k\langle g, x \mid g^n = 1,\ x^n = 0,\ gx = qxg\rangle \to k[X] \diagup (X^n)\ \sharp\ k[G] \diagup (G^n - 1)$$

mit $g \mapsto 1\sharp\overline{G}$ und $x \mapsto \overline{X}\sharp 1$. Insbesondere folgt hieraus $\dim H = n^2$.

---

[141] Diese Struktur ist durch $g \cdot x^k = q^k x^k$ für alle $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ definiert.

[142] Hier meinen wir mit $k[g, h]$ *nicht* eine Polynomalgebra in zwei Variablen über k, sondern die von g und h erzeugte Unteralgebra von H.

5) a) In **4)** ist $H' = k[g]$ eine Unterhopfalgebra der Hopfalgebra H, und es gibt einen surjektiven Hopfalgebrahomomorphismus $\pi : H \to H'$ mit $\pi(x) = 0$ und $\pi(g) = g$, und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H' \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[d, "="] \\ H \arrow[r, "\pi"'] & H' \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei $\iota : H' \to H$ die kanonische Inklusionsabbildung ist. (Dies ist die gleiche Situation wie beim semidirekten Produkt von Gruppen.)

b) Eine analoge Eigenschaft gilt für Beispiel **3)** statt Beispiel **4)**:

In **3)** ist $H' = k[g,h]$ eine Unterhopfalgebra der Hopfalgebra H, und es gibt einen surjektiven Hopfalgebrahomomorphismus $\pi : H \to H'$ mit $\pi(x) = 0$, $\pi(g) = g$ und $\pi(h) = h$, und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H' \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[d, "="] \\ H \arrow[r, "\pi"'] & H' \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei $\iota : H' \to H$ die kanonische Inklusionsabbildung ist.

6) Sei $q \in k \setminus \{0, 1, -1\}$. Unter $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ verstehen wir die Hopfalgebra

$$\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2) = k\left\langle E, F, K, K^{-1} \mid KK^{-1} = 1 = K^{-1}K,\ KEK^{-1} = q^2E, \right.$$
$$\left. KFK^{-1} = q^{-2}F,\ EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \right\rangle$$

[143] mit

$$\begin{aligned} \Delta(K) &= K \otimes K, & \varepsilon(K) &= 1, & S(K) &= K^{-1}, \\ \Delta\left(K^{-1}\right) &= K^{-1} \otimes K^{-1}, & \varepsilon\left(K^{-1}\right) &= 1, & S\left(K^{-1}\right) &= K, \\ \Delta(E) &= K \otimes E + E \otimes 1, & \varepsilon(E) &= 0, & S(E) &= -K^{-1}E, \\ \Delta(F) &= 1 \otimes F + F \otimes K^{-1}, & \varepsilon(F) &= 0, & S(F) &= -FK. \end{aligned}$$

Sei $A = k\langle K, K^{-1}, F \mid KK^{-1} = 1 = K^{-1}K,\ KFK^{-1} = q^{-2}F\rangle$.

Dann gibt es einen Algebrahomomorphismus $\sigma : A \to A$ mit $\sigma(F) = F$ und $\sigma(K) = q^{-2}K$. Sei $\delta : A \to A$ die (σ, id)-Derivation mit $\delta(K) = 0 = \delta(K^{-1})$ und $\delta(F) = \dfrac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$.

Dann gibt es einen Algebraisomorphismus $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \to A[E; \sigma, \delta]$ mit $F \mapsto F$, $E \mapsto E$, $K \mapsto K$ und $K^{-1} \mapsto K^{-1}$. Dabei ist $A[E; \sigma, \delta]$ eine Ore-Erweiterung von A, wobei E statt dem Symbol x geschrieben wird. Insbesondere ist $\left(F^iK^jE^l\right)_{i,l \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}}$ eine k-Basis von $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Beweis: Daß $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ eine Bialgebra ist, ist leicht nachzurechnen. Daß σ ein wohldefinierter Algebrahomomorphismus ist, gleichfalls. Daß δ eine wohldefinierte

[143] Hierbei ist K^{-1} erst einmal als ein (von E, F und K unabhängiger) Variablenbezeichner zu deuten, der aber durch die Relation $KK^{-1} = 1 = K^{-1}K$ seinen Namen rechtfertigt.

(σ, id)-Derivation ist, folgt (gemäß Bemerkung 3.1. **1)**) daraus, daß die Abbildung $\varphi_\delta : A \to \mathrm{M}_2(A)$, die durch

$$\varphi_\delta(a) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \delta(a) \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } a \in A$$

definiert ist, ein Algebrahomomorphismus ist; auch das folgt aus einer Rechnung.[144] Auch daß die definierenden Relationen von $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ in der Ore-Erweiterung $A[E;\sigma,\delta]$ gelten, können wir direkt nachrechnen: Für $KK^{-1} = 1$, $K^{-1}K = 1$ und $KF = q^{-2}FK$ ist dies klar. Für $KE = q^2EK$ folgt dies aus der Gleichung $E\underbrace{K}_{\in A} = \underbrace{\sigma(K)}_{=q^{-2}K}E + \underbrace{\delta(K)}_{=0}$, die in der Ore-Erweiterung gilt (laut der Vertauschungsregel). Die Gleichung $EF - FE = \dfrac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$ gilt, denn in der Ore-Erweiterung ist $E\underbrace{F}_{\in A} = \underbrace{\sigma(F)}_{=F}E + \underbrace{\delta(F)}_{=(K-K^{-1})/(q-q^{-1})}$ (laut der Vertauschungsregel).

Daß der Algebrahomomorphismus $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2) \to A[E;\sigma,\delta]$ mit $F \mapsto F$, $E \mapsto E$, $K \mapsto K$ und $K^{-1} \mapsto K^{-1}$ ein Algebraisomorphismus ist, folgt daraus, daß die Bilder der Vektorraumerzeuger $F^iK^jE^l$ eine Basis der Ore-Erweiterung bilden.

Bemerkung: Die Algebra $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ ist eine sogenannte "Quantendeformation" (eine Art Quanten-Analogon) der Hopfalgebra $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$. Um diese Hopfalgebra $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$ zu definieren, betrachten wir zuerst die Liealgebra $\mathfrak{sl}_2$ (siehe Kapitel II weiter unten für den Begriff einer Liealgebra):

Diese Liealgebra $\mathfrak{sl}_2 = \{A \in \mathrm{M}_2(k) \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$ hat die Basis

$$\left(e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

und eine durch $[A,B] = AB - BA$ für alle $A, B \in \mathfrak{sl}_2$ definierte Lie-Klammer. Diese Lie-Klammer ist eine Bilinearform[145] und erfüllt

$$[h,e] = 2e, \qquad [h,f] = -2f, \qquad [e,f] = h.$$

---

[144] In der Tat ist $\varphi_\delta(K) = \begin{pmatrix} q^{-2}K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$, $\varphi_\delta(K^{-1}) = \begin{pmatrix} q^2K^{-1} & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}$ und $\varphi_\delta(F) = \begin{pmatrix} F & \dfrac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} \\ 0 & F \end{pmatrix}$. Dann ist offensichtlich $\varphi_\delta(K)\varphi_\delta(K^{-1}) = E = \varphi_\delta(K^{-1})\varphi_\delta(K)$, ferner

$$\varphi_\delta(K)\varphi_\delta(F) = \begin{pmatrix} q^{-2}K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & \dfrac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-2}KF & q^{-2}K\dfrac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} \\ 0 & KF \end{pmatrix}$$

und

$$q^{-2}\varphi_\delta(F)\varphi_\delta(K) = q^{-2}\begin{pmatrix} F & \dfrac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} \\ 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^{-2}K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = q^{-2}\begin{pmatrix} q^{-2}FK & \dfrac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}K \\ 0 & FK \end{pmatrix},$$

also $\varphi_\delta(K)\varphi_\delta(F) = q^{-2}\varphi_\delta(F)\varphi_\delta(K)$ wegen $KF = q^{-2}FK$.

[145] aber nicht assoziativ - deshalb ist $\mathfrak{sl}_2$ nur eine Liealgebra, keine Algebra!

Für die universelle Einhüllende $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$ gilt (siehe unten für den Begriff der universellen Einhüllenden):

$$\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2) = k\left\langle e, f, h \mid ef - fe = h,\ he - eh = 2e,\ hf - fh = -2f \right\rangle$$

ist eine cokommutative Hopfalgebra, wobei e, f und h primitiv sind (das heißt, $\Delta(e) = e \otimes 1 + 1 \otimes e$ und analog für f und h).

4. Comoduln und H-Comodulalgebren

Comoduln

Definition: Sei C eine Coalgebra.

1) Sei V ein Vektorraum; sei $\delta : V \to V \otimes C$ eine k-lineare Abbildung. Wir schreiben $\delta(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}$ für alle $v \in V$ ähnlich zur summenlosen Sweedler-Notation (nur mit Indizes 0 und 1 statt 1 und 2).

Dann heißt (V, δ) ein *C-Rechtscomodul*, wenn für alle $v \in V$ gilt: $\delta\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)} = v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right)$ (mit anderen Worten: $\left(v_{(0)}\right)_{(0)} \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(1)} \otimes v_{(1)} = v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right)$) und $v = v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$. Die Abbildung δ heißt dann die *C-Rechtscomodulstruktur* (oder auch kurz *Comodulstruktur* oder *Costruktur*) dieses C-Rechtscomoduls.

Entsprechend sind C-Linkscomoduln definiert: Dies sind Vektorräume V mit einer k-linearen Abbildung $\delta : V \to C \otimes V$ und ähnlichen Axiomen. Für C-Linkscomoduln schreibt man $\delta(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)}$ für alle $v \in V$.

Bemerkung: Ist V ein Vektorraum, und ist $\delta : V \to V \otimes C$ eine k-lineare Abbildung, dann heißt die Abbildung δ *coassoziativ*, wenn $\delta\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)} = v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right)$ für alle $v \in V$ gilt, und δ heißt *counitär*, wenn $v = v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$ für alle $v \in V$ gilt (wobei wir $\delta(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}$ für alle $v \in V$ schreiben, ähnlich zur summenlosen Sweedler-Notation). Somit ist (V, δ) genau dann ein C-Rechtscomodul, wenn die Abbildung δ coassoziativ und counitär ist.

2) Seien V und W zwei C-Rechtscomoduln, und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt f eine *C-rechtscolineare Abbildung* (auch *C-colineare Abbildung* oder auch ein *C-Comodulhomomorphismus* genannt), wenn für alle $v \in V$ die Gleichung $\delta_W(f(v)) = f\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$ gilt.

Mit anderen Worten: Genau dann ist f eine C-rechtscolineare Abbildung, wenn $\delta_W \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_V$ ist.

Analog definieren wir C-linkscolineare Abbildungen zwischen C-Linkscomoduln.

3) Wir bezeichnen die Kategorie der C-Rechtscomoduln (mit C-Comodulhomomorphismen als Morphismen) mit $\mathcal{M}^C$. Ebenso sei ${}^C\mathcal{M}$ die Kategorie der C-Linkscomoduln.

4) Ist $V \in \mathcal{M}^C$, und ist V' ein Untervektorraum von V, so nennen wir V' einen *Untercomodul* von V, wenn für alle $v \in V'$ gilt: $\delta(v) \in V' \otimes C$.

Mit anderen Worten: Ist $V \in \mathcal{M}^C$, und ist V' ein Untervektorraum von V, so nennen wir V' einen *Untercomodul* von V, wenn $\delta(V') \subseteq V' \otimes C$ ist (also wenn V' ein C-Rechtscomodul ist und die Inklusion $V' \to V$ eine C-colineare Abbildung ist).

5) Sei V ein Vektorraum; sei $\delta : V \to V \otimes C$ eine k-lineare Abbildung. Die Abbildung δ heißt eine *C-Rechtscomodulstruktur*, wenn (V, δ) ein C-Rechtscomodul ist. Mit anderen Worten: Die Abbildung δ heißt eine *C-Rechtscomodulstruktur*, wenn sie coassoziativ und counitär ist.

Analog definieren wir den Begriff einer C-Linkscomodulstruktur.

4.1. Bemerkung: **1)** Seien C und D zwei Coalgebren, sei $\varphi : C \to D$ ein Coalgebrahomomorphismus, und sei V ein C-Rechtscomodul. Dann wird V zu einem D-Rechtscomodul, wenn man die Abbildung $\delta_\varphi : V \to V \otimes D$ als $(\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \delta_V$ definiert

(also als Verkettung der Abbildungen $\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta_V"'] \arrow[rr, bend left, "\delta_\varphi"] & V \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varphi"'] & V \otimes D \end{tikzcd}$).

2) Ist H eine Bialgebra, und sind $V, W \in \mathcal{M}^H$, dann wird auch $V \otimes W$ zu einem H-Rechtscomodul durch die k-lineare Abbildung $\delta_{V \otimes W} : V \otimes W \to V \otimes W \otimes H$, welche definiert wird durch

$$\delta_{V \otimes W} (v \otimes w) = v_{(0)} \otimes w_{(0)} \otimes v_{(1)} w_{(1)} \qquad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Außerdem wird k zu einem H-Rechtscomodul durch die k-lineare Abbildung $\delta : k \to k \otimes H$, die 1 auf $1 \otimes 1$ abbildet.

3) Man kann obige Definition eines C-Rechtscomoduls auch mit kommutativen Diagrammen umformulieren:

Sei C eine Coalgebra. Sei V ein Vektorraum; sei $\delta : V \to V \otimes C$ eine k-lineare Abbildung. Dann heißt (V, δ) ein *C-Rechtscomodul*, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & V \otimes C \arrow[d, "\delta \otimes \mathrm{id}"] \\ V \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] & V \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & V \otimes C \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ V \otimes k & \end{tikzcd}$$

kommutativ sind. Man kann analog den Begriff eines Moduls über kommutative Diagramme definieren, und man erkennt, daß es genau die gleichen Diagramme sind, mit dem einzigen Unterschied, daß die Pfeile in die umgekehrte Richtung weisen (daher auch der Name "Comodul").

4) Sei C eine Coalgebra, und seien V und W zwei C-Rechtscomoduln. Sei $f : V \to W$ eine C-colineare Abbildung. Sei $W' \subseteq W$ ein Untercomodul von W. Dann ist $f^{-1}(W')$ ein Untercomodul von V.

Beweis: Da W' ein Untercomodul von W ist, gilt $\delta_W (W') \subseteq W' \otimes C$.

Wir werden zuerst zeigen, daß $(f \otimes \mathrm{id})^{-1} (W' \otimes C) = f^{-1}(W') \otimes C$ ist.

Dazu sei π der kanonische Epimorphismus $W \to W \diagup W'$. Die Folge

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & f^{-1}(W') \arrow[r, hook] & V \arrow[r, "\pi f"] & W/W' \end{tikzcd}$$

ist exakt, denn $\mathrm{Ker}(\pi f) = f^{-1}\left(\underbrace{\mathrm{Ker}\,\pi}_{=W'}\right) = f^{-1}(W')$. Da Tensorieren über einem Körper exakt ist, ist daher auch die Folge

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & f^{-1}(W') \otimes C \arrow[r, hook] & V \otimes C \arrow[r, "\pi f \otimes \mathrm{id}"] & (W/W') \otimes C \end{tikzcd}$$

exakt. Das heißt,

$$\begin{aligned} f^{-1}(W') \otimes C &= \mathrm{Ker}(\pi f \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}((\pi \otimes \mathrm{id})(f \otimes \mathrm{id})) \\ &= (f \otimes \mathrm{id})^{-1} (\mathrm{Ker}(\pi \otimes \mathrm{id})) = (f \otimes \mathrm{id})^{-1} (W' \otimes C) \end{aligned}$$

(denn $\operatorname{Ker}(\pi \otimes \mathrm{id}) = W' \otimes C$, weil $(W \diagup W') \otimes C$ kanonisch isomorph zu $(W \otimes C) \diagup (W' \otimes C)$ ist).

Nun ist

$$\begin{aligned}\delta_V\left(f^{-1}(W')\right) &\subseteq (f \otimes \mathrm{id})^{-1}\left(\underbrace{((f \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_V)}_{=\delta_W \circ f}\left(f^{-1}(W')\right)\right) \\ &= (f \otimes \mathrm{id})^{-1}\left(\delta_W\left(\underbrace{f\left(f^{-1}(W')\right)}_{\subseteq W'}\right)\right) \subseteq (f \otimes \mathrm{id})^{-1}\left(\underbrace{\delta_W(W')}_{\subseteq W' \otimes C}\right) \\ &\subseteq (f \otimes \mathrm{id})^{-1}(W' \otimes C) = f^{-1}(W') \otimes C.\end{aligned}$$

Somit ist $f^{-1}(W')$ ein Untercomodul von V, was zu beweisen war.

4.2. Lemma: Sei C eine Coalgebra, und sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $v_1, v_2, ..., v_n$.

1) Sei $\delta : V \to V \otimes C$ eine k-lineare Abbildung. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

a) Die Abbildung δ ist eine C-Rechtscomodulstruktur auf V (das heißt, (V, δ) ist ein C-Rechtscomodul).

b) Die Matrix $(c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(C)$, die durch $\delta(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}$ für alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$ definiert ist[146], erfüllt

$$\Delta(c_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} c_{i,l} \otimes c_{l,j} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(c_{i,j}) = \delta_{i,j} \qquad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

2) Die Abbildung

$$\{\delta : V \to V \otimes C \mid \delta \text{ ist eine } C\text{-Rechtscomodulstruktur auf } V\} \to \operatorname{Coalg}(\mathrm{M}_n(k)^*, C), \\ \delta \mapsto (x_{i,j} \mapsto c_{i,j}),$$

wobei die $c_{i,j}$ wie in Aussage **1)** definiert werden, ist bijektiv.

Hierbei bedeutet $\operatorname{Coalg}(\mathrm{M}_n(k)^*, C)$ die Menge aller Coalgebrahomomorphismen von $\mathrm{M}_n(k)^*$ nach C, und unter $\mathrm{M}_n(k)^*$ verstehen wir die Coalgebra C aus Beispiel 2.1. **2)** (daß wir sie mit $\mathrm{M}_n(k)^*$ bezeichnen, kommt daher, daß sie dual zu der Matrixalgebra $\mathrm{M}_n(k)$ ist, wie wir in Beispiel 2.4. **2)** gesehen haben).

Beweis: **1)** Sei $\delta : V \to V \otimes C$ eine k-lineare Abbildung, und sei $\delta(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}$ für alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Die Axiome eines Comoduls müssen nur auf einer Basis des Vektorraums V überprüft werden - gelten sie nämlich auf einer Basis, dann gelten sie (wegen der Linearität von δ) auch auf ganz V. Hieraus folgt: Genau dann ist δ eine C-Comodulstruktur auf V,

[146] Diese Formulierung ist sinnvoll, denn für jedes j existiert genau ein n-Tupel $(c_{1,j}, c_{2,j}, ..., c_{n,j})$, das $\delta(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}$ erfüllt.

wenn für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta\left(v_i\right) \otimes c_{i,j}}_{=\sum\limits_{i,l} v_l \otimes c_{l,i} \otimes c_{i,j}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \Delta\left(c_{i,j}\right)}_{=\sum\limits_{l=1}^{n} v_l \otimes \Delta\left(c_{l,j}\right)} \qquad \text{und}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \varepsilon\left(c_{i,j}\right) = v_j.$$

Aber diese zwei Gleichungen sind äquivalent zu Aussage *b)* (da $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis von V ist).

Damit ist die Aussage **1)** bewiesen. Die Aussage **2)** ist eine Umformulierung von **1)**.

4.2$\frac{1}{2}$. Bemerkung: Der Begriff eines Comoduls ermöglicht es uns, den Beweis von Satz 2.21$\frac{15}{20}$. zu Ende zu führen. Wir erinnern uns an die Aussage des Satzes:

Sei H eine Bialgebra. Genau dann ist H eine Hopfalgebra, wenn die lineare Abbildung

$$\Phi : H \otimes H \to H \otimes H, \qquad x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Wir haben zum Beweis dieses Satzes folgende zwei Aussagen formuliert:

Aussage 1: Ist H eine Hopfalgebra, dann ist Φ ein Vektorraumisomorphismus.

Aussage 2: Ist Φ ein Vektorraumisomorphismus, dann ist H eine Hopfalgebra.

Aussage 1 haben wir bereits vollständig nachgewiesen; Aussage 2 allerdings nur im Fall $\dim H < \infty$. Um den Beweis von 2.21$\frac{15}{20}$. abzuschließen, müssen wir Aussage 2 nun auch im allgemeinen Fall beweisen.

Beweis von Aussage 2: Wir erinnern uns an eine Definition, die wir in 2.21$\frac{15}{20}$. gegeben haben:

Ist $f : H \to H$ eine lineare Abbildung, dann bezeichne Φ_f die lineare Abbildung $H \otimes H \to H \otimes H$, die durch

$$\Phi_f\left(x \otimes y\right) = xf\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} \qquad \text{für alle } x, y \in H$$

definiert ist. Offensichtlich ist $\Phi_{\mathrm{id}} = \Phi$. Wir haben in 2.21$\frac{15}{20}$. folgende Lemmata bewiesen:

Lemma 1: Seien $f : H \to H$ und $g : H \to H$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist $\Phi_f \circ \Phi_g = \Phi_{g*f}$. Ferner ist $\Phi_{\eta\varepsilon} = \mathrm{id}_{H \otimes H}$.

Lemma 2: Seien $f : H \to H$ und $g : H \to H$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist $\Phi_f + \Phi_g = \Phi_{f+g}$. Für jede lineare Abbildung $f : H \to H$ und jedes $\lambda \in k$ gilt $\lambda\Phi_f = \Phi_{\lambda f}$.

Lemma 3: Die Abbildung

$$\left(\mathrm{Hom}\left(H, H\right)\right)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}\left(H \otimes H\right), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

ist ein injektiver Algebrahomomorphismus, wobei die Multiplikation auf $\operatorname{Hom}(H, H)$ die Faltung $*$ ist, während die Multiplikation auf $\operatorname{End}(H \otimes H)$ die Verkettung $\circ$ ist.[147]

Nun betrachten wir auf dem Vektorraum $H \otimes H$ die H-Linksmodulstruktur, die durch

$$tv = (t \otimes 1)\, v \qquad \text{für alle } t \in H \text{ und } v \in H \otimes H$$

definiert ist. Ferner betrachten wir auf dem Vektorraum $H \otimes H$ die H-Rechtscomodulstruktur

$$\operatorname{id} \otimes \Delta : H \otimes H \to H \otimes H \otimes H.$$

(Mit der Sweedler-Notation ausgedrückt ist $\operatorname{id} \otimes \Delta$ diejenige lineare Abbildung $H \otimes H \to H \otimes H \otimes H$, die jeden reinen Tensor $x \otimes y \in H \otimes H$ auf $x \otimes y_{(1)} \otimes y_{(2)}$ abbildet. Es ist leicht zu sehen, daß $\operatorname{id} \otimes \Delta$ wirklich eine H-Rechtscomodulstruktur ist.)

Sei ${}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H)$ die Menge aller Vektorraumendomorphismen von $H \otimes H$, welche gleichzeitig H-Linksmodulendomorphismen und H-Rechtscomodulendomorphismen sind. Es ist leicht zu sehen, daß ${}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H)$ eine Algebra (bezüglich der Verkettung $\circ$) ist. Wir zeigen nun eine Verstärkung von Lemma 3:

Lemma 5: Die Abbildung

$$(\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}} \to {}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

ist ein Algebraisomorphismus, wobei die Multiplikation auf $\operatorname{Hom}(H, H)$ die Faltung $*$ ist, während die Multiplikation auf ${}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H)$ die Verkettung $\circ$ ist.[148]

Beweis von Lemma 5: **(a)** Erstmal müssen wir zeigen, daß die Abbildung

$$(\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}} \to {}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

überhaupt wohldefiniert ist, d. h. daß $\Phi_f \in {}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H)$ für jedes $f \in (\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}}$ ist.

In der Tat sei $f \in (\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}}$ beliebig. Wir wollen dann erstmal zeigen, daß Φ_f ein H-Linksmodulhomomorphismus ist. Dazu müssen wir nachprüfen, daß $\Phi_f(tv) = t\Phi_f(v)$ für alle $t \in H$ und $v \in H \otimes H$ gilt. Um diese Gleichung zu beweisen, reicht es (wegen ihrer Linearität in v) aus, sie nur für den Fall $v = x \otimes y$, wobei $x \in H$ und $y \in H$ gilt, nachzuprüfen (denn jeder Tensor $v = H \otimes H$ ist eine Linearkombination reiner Tensoren der Form $x \otimes y$ mit $x \in H$ und $y \in H$). In diesem Fall folgt sie aber

[147] Dies sind zwei unterschiedliche Arten von Multiplikation! Dies ist auch der Grund, wieso wir $\operatorname{Hom}(H, H)$ anstelle von $\operatorname{End} H$ schreiben: Denn als Vektorräume sind $\operatorname{Hom}(H, H)$ und $\operatorname{End} H$ zwar identisch, doch die Notation $\operatorname{End} H$ trägt eine starke Ähnlichkeit zu $\operatorname{End}(H \otimes H)$, und könnte daher nahelegen, daß wir die Multiplikation auf $\operatorname{End} H$ ähnlich zu der auf $\operatorname{End}(H \otimes H)$ definieren, was aber nicht der Fall ist.

[148] Dies sind zwei unterschiedliche Arten von Multiplikation! Dies ist auch der Grund, wieso wir $\operatorname{Hom}(H, H)$ anstelle von $\operatorname{End} H$ schreiben: Denn als Vektorräume sind $\operatorname{Hom}(H, H)$ und $\operatorname{End} H$ zwar identisch, doch die Notation $\operatorname{End} H$ trägt eine starke Ähnlichkeit zu $\operatorname{End}(H \otimes H)$, und könnte daher nahelegen, daß wir die Multiplikation auf $\operatorname{End} H$ ähnlich zu der auf $\operatorname{End}(H \otimes H)$ definieren, was aber nicht der Fall ist.

aus

$$
\begin{aligned}
\Phi_f(tv) &= \Phi_f(t(x\otimes y)) = \Phi_f(tx\otimes y) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn nach der Definition der } H\text{-Linksmodulstruktur auf } H\otimes H \\ \text{ist } t(x\otimes y) = (t\otimes 1)(x\otimes y) = tx\otimes y\end{array}\right) \\
&= txf\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)} = (t\otimes 1)\underbrace{\left(xf\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)}\right)}_{=\Phi_f(x\otimes y)} = (t\otimes 1)\,\Phi_f(x\otimes y) \\
&= t\Phi_f(x\otimes y) \\
&\qquad (\text{wieder nach der Definition der } H\text{-Linksmodulstruktur auf } H\otimes H) \\
&= t\Phi_f(v).
\end{aligned}
$$

Somit ist $\Phi_f(tv) = t\Phi_f(v)$ für alle $t\in H$ und $v\in H\otimes H$ nachgewiesen. Das heißt, die Abbildung Φ_f ist ein H-Linksmodulhomomorphismus.

Jetzt wollen wir zeigen, daß Φ_f ein H-Rechtscomodulhomomorphismus ist. Dazu müssen wir nachweisen, daß für alle $v\in H\otimes H$ die Gleichung $(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Phi_f(v)) = \left(\Phi_f\left(v_{(0)}\right)\right)\otimes v_{(1)}$ gilt. Da diese Gleichung in v linear ist, reicht es wieder aus, sie nur für den Fall $v = x\otimes y$, wobei $x\in H$ und $y\in H$ gilt, nachzuprüfen (denn jeder Tensor $v = H\otimes H$ ist eine Linearkombination reiner Tensoren der Form $x\otimes y$ mit $x\in H$ und $y\in H$). In diesem Fall folgt sie aber aus

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Phi_f(v)) \\
&= (\mathrm{id}\otimes\Delta)\left(\underbrace{\Phi_f(x\otimes y)}_{=xf\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)}}\right) = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\left(xf\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)}\right) = xf\left(y_{(1)}\right)\otimes\Delta\left(y_{(2)}\right) \\
&= \underbrace{xf\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)}}_{=\Phi_f\left(x\otimes y_{(1)}\right)}\otimes y_{(3)} = \left(\Phi_f\left(x\otimes y_{(1)}\right)\right)\otimes y_{(2)} = \left(\Phi_f\left(v_{(0)}\right)\right)\otimes v_{(1)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } \left(x\otimes y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)} = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\underbrace{(x\otimes y)}_{=v} = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\,v = v_{(0)}\otimes v_{(1)}, \\ \text{da } \mathrm{id}\otimes\Delta \text{ die } H\text{-Rechtscomodulstruktur auf } H\otimes H \text{ ist}\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Damit ist $(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Phi_f(v)) = \left(\Phi_f\left(v_{(0)}\right)\right)\otimes v_{(1)}$ für alle $v\in H\otimes H$ gezeigt, und hieraus folgt, daß Φ_f ein H-Rechtscomodulhomomorphismus ist.

Wir haben also gezeigt, daß Φ_f gleichzeitig ein H-Linksmodulendomorphismus und ein H-Rechtscomodulendomorphismus ist. Somit ist $\Phi_f \in {}_H\mathrm{End}^H(H\otimes H)$ (laut der Definition von ${}_H\mathrm{End}^H(H\otimes H)$).

Damit ist bewiesen, daß die Abbildung

$$
(\mathrm{Hom}(H,H))^{\mathrm{op}} \to {}_H\mathrm{End}^H(H\otimes H), \qquad f\mapsto\Phi_f
$$

wohldefiniert ist.

(b) Diese Abbildung ist ein Algebrahomomorphismus (nach Lemma 3).

(c) Diese Abbildung ist injektiv (nach Lemma 3).

(d) Jetzt wollen wir beweisen, daß diese Abbildung surjektiv ist. Dazu müssen wir zeigen: Für jedes $\Psi\in{}_H\mathrm{End}^H(H\otimes H)$ gibt es ein $f\in(\mathrm{Hom}(H,H))^{\mathrm{op}}$ mit $\Psi = \Phi_f$.

In der Tat sei $\Psi \in {}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H)$ beliebig. Sei $\iota_1 : H \to H \otimes H$ die durch $x \mapsto 1 \otimes x$ definierte Abbildung, und sei $f = (\operatorname{id} \otimes \varepsilon) \circ \Psi \circ \iota_1$. Wir wollen nun zeigen, daß $\Psi = \Phi_f$ ist.

Da $\Psi \in {}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H)$ ist, ist Ψ ein H-Rechtscomodulendomorphismus, d. h. es gilt $(\operatorname{id} \otimes \Delta)(\Psi(v)) = \left(\Psi\left(v_{(0)}\right)\right) \otimes v_{(1)}$ für alle $v \in H \otimes H$. Sei nun $y \in H$. Anwendung der Gleichung $(\operatorname{id} \otimes \Delta)(\Psi(v)) = \left(\Psi\left(v_{(0)}\right)\right) \otimes v_{(1)}$ auf $v = 1 \otimes y$ ergibt

$$(\operatorname{id} \otimes \Delta)(\Psi(1 \otimes y)) = \left(\Psi\left(1 \otimes y_{(1)}\right)\right) \otimes y_{(2)}$$

(denn für $v = 1 \otimes y$ ist $v_{(0)} \otimes v_{(1)} = (\operatorname{id} \otimes \Delta)(v) = (\operatorname{id} \otimes \Delta)(1 \otimes y) = 1 \otimes y_{(1)} \otimes y_{(2)}$). Dies ist eine Gleichung zwischen zwei Elementen von $H \otimes H \otimes H$. Wenden wir die Abbildung $\operatorname{id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{id}$ auf beide Seiten dieser Gleichung an, so erhalten wir

$$(\operatorname{id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{id})((\operatorname{id} \otimes \Delta)(\Psi(1 \otimes y))) = (\operatorname{id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{id})\left(\Psi\left(1 \otimes y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}\right).$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{id})((\operatorname{id} \otimes \Delta)(\Psi(1 \otimes y))) \\
&= \left(\underbrace{(\operatorname{id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{id}) \circ (\operatorname{id} \otimes \Delta)}_{=\operatorname{id} \otimes ((\varepsilon \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta)}\right)(\Psi(1 \otimes y)) \\
&= \left(\operatorname{id} \otimes \underbrace{((\varepsilon \otimes \operatorname{id}) \circ \Delta)}_{=\operatorname{id}\ \text{(denn } H \text{ ist eine Coalgebra)}}\right)(\Psi(1 \otimes y)) = \Psi(1 \otimes y)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{id})\left(\Psi\left(1 \otimes y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}\right) \\
&= (\operatorname{id} \otimes \varepsilon)\left(\Psi\left(1 \otimes y_{(1)}\right)\right) \otimes y_{(2)} \\
&= \underbrace{(\operatorname{id} \otimes \varepsilon)\left(\Psi\left(\iota_1\left(y_{(1)}\right)\right)\right)}_{=((\operatorname{id} \otimes \varepsilon) \circ \Psi \circ \iota_1)\left(y_{(1)}\right)} \otimes y_{(2)} \\
&\qquad \left(\text{denn nach der Definition von } \iota_1 \text{ ist } 1 \otimes y_{(1)} = \iota_1\left(y_{(1)}\right)\right) \\
&= \underbrace{((\operatorname{id} \otimes \varepsilon) \circ \Psi \circ \iota_1)}_{=f}\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} = f\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}
\end{aligned}$$

wird dies zu

$$\Psi(1 \otimes y) = f\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}.$$

Für alle $x \in H$ und $y \in H$ ist nun

$$\begin{aligned}
\Psi(x \otimes y) &= \Psi(x(1 \otimes y)) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn nach der Definition der } H\text{-Linksmodulstruktur auf } H \otimes H \text{ ist} \\ x(1 \otimes y) = (x \otimes 1)(1 \otimes y) = x \otimes y, \text{ also } \Psi(x(1 \otimes y)) = \Psi(x \otimes y)\end{array}\right) \\
&= x\Psi(1 \otimes y) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } \Psi \in {}_H\operatorname{End}^H(H \otimes H)\text{, und somit ist } \Psi \text{ ein} \\ H\text{-Linksmodulendomorphismus}\end{array}\right) \\
&= xf\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} \qquad \left(\text{denn } \Psi(1 \otimes y) = f\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}\right) \\
&= \Phi_f(x \otimes y).
\end{aligned}$$

Da die reinen Tensoren der Form $x \otimes y$ mit $x \in H$ und $y \in H$ den gesamten Vektorraum $H \otimes H$ erzeugen, folgt hieraus, daß $\Psi = \Phi_f$ ist. Wir haben damit gezeigt, daß es für jedes $\Psi \in {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H)$ ein $f \in (\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}}$ mit $\Psi = \Phi_f$ gibt. Daher ist die Abbildung

$$(\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}} \to {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

surjektiv.

Insgesamt wissen wir nun: Die Abbildung

$$(\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}} \to {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

ist wohldefiniert (gemäß **(a)**), ein Algebrahomomorphismus (gemäß **(b)**), injektiv (gemäß **(c)**) und surjektiv (gemäß **(d)**). Somit ist diese Abbildung ein Algebraisomorphismus, und Lemma 5 ist bewiesen.

Ein beinahe triviales Lemma:

Lemma 6: Ist Γ ein Element von ${}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H)$ und gleichzeitig ein Vektorraumisomorphismus, dann ist auch das Inverse Γ^{-1} ein Element von ${}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H)$.

Beweis von Lemma 6: Dies ist klar, denn das Inverse eines H-Linksmodulendomorphismus ist wieder ein H-Linksmodulendomorphismus, und das Inverse eines H-Rechtscomodulhomomorphismus ist wieder ein H-Rechtscomodulhomomorphismus.

Nun zum eigentlichen und endgültigen *Beweis von Aussage 2:* Angenommen, Φ ist ein Vektorraumisomorphismus. Wir wollen zeigen, daß H eine Hopfalgebra ist.

Nach Lemma 5 ist $\Phi_{\mathrm{id}} \in {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H)$ (denn Φ_{id} ist das Bild von $\mathrm{id} \in (\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}}$ unter der Abbildung

$$(\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}} \to {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

). Wegen $\Phi_{\mathrm{id}} = \Phi$ ist also $\Phi \in {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H)$. Somit ist auch $\Phi^{-1} \in {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H)$ (nach Lemma 6, angewandt auf $\Gamma = \Phi$). Somit gibt es ein $f \in (\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}}$ mit $\Phi^{-1} = \Phi_f$ (denn nach Lemma 5 ist die Abbildung

$$(\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}} \to {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

surjektiv). Wir haben also $\Phi_{\mathrm{id}}^{-1} = \Phi^{-1} = \Phi_f$, und daher $\Phi_{\mathrm{id}} \circ \Phi_f = \Phi_f \circ \Phi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{H \otimes H}$. Nach Lemma 1 wird dies zu $\Phi_{f * \mathrm{id}} = \Phi_{\mathrm{id} * f} = \Phi_{\eta\varepsilon}$. Da die Abbildung

$$(\operatorname{Hom}(H, H))^{\mathrm{op}} \to {}_H \operatorname{End}^H (H \otimes H), \qquad f \mapsto \Phi_f$$

injektiv ist, folgt hieraus $f * \mathrm{id} = \mathrm{id} * f = \eta\varepsilon$. Das heißt, f ist ein $*$-Inverses zu id. Somit ist H eine Hopfalgebra mit Antipode f, und Aussage 2 ist bewiesen. Mithin ist der Beweis von Satz $2.21\frac{15}{20}$ komplett.

Der Endlichkeitssatz

Eine wichtige Eigenschaft von Comoduln und Coalgebren, die *keine* Entsprechung bei Moduln und Algebren findet, ist eine Art automatische Endlichkeitseigenschaft:

4.3. Satz (Endlichkeitssatz): Sei C eine Coalgebra, und $V \in \mathcal{M}^C$.

1) *a)* Für jedes $v \in V$ gibt es einen endlichdimensionalen Untercomodul V' von V mit $v \in V'$.

b) Es gilt

$$V = \bigcup_{\substack{V' \subseteq V \\ \text{endlichdimensionaler} \\ \text{Untercomodul}}} V'.$$

2) *a)* Für jedes $c \in C$ gibt es eine endlichdimensionale[149] Untercoalgebra[150] C' von C mit $c \in C'$.

b) Es gilt

$$C = \bigcup_{\substack{C' \subseteq C \\ \text{endlichdimensionale} \\ \text{Untercoalgebra}}} C'.$$

Beweis: **1)** *a)* Sei $(c_i)_{i\in I}$ eine Basis von C, und sei $\delta(v) = \sum\limits_{i\in I} v_i \otimes c_i$, wobei $v_i \in V$ für alle $i \in I$, und $v_i \neq 0$ nur für endlich viele i. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} \delta(v_j) \otimes c_j = \sum_{i\in I} \delta(v_i) \otimes c_i = \delta\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)} & \qquad \left(\text{denn } \sum_{i\in I} v_i \otimes c_i = \delta(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}\right) \\
= v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right) & \qquad (\text{denn } V \text{ ist ein } C\text{-Rechtscomodul}) \\
= \sum_{i\in I} v_i \otimes \Delta(c_i) & \qquad \left(\text{denn } v_{(0)} \otimes v_{(1)} = \sum_{i\in I} v_i \otimes c_i\right).
\end{aligned}$$

Schreiben wir den Tensor $\Delta(c_i) \in C \otimes C$ in der Form $\Delta(c_i) = \sum\limits_{j\in I} c_{i,j} \otimes c_j$ für jedes $i \in I$, wobei $c_{i,j} \in C$ für alle $j \in I$ und $c_{i,j} \neq 0$ nur für endlich viele j (bei festem i). Dann wird $\sum\limits_{j\in I} \delta(v_j) \otimes c_j = \sum\limits_{i\in I} v_i \otimes \Delta(c_i)$ zu $\sum\limits_{j\in I} \delta(v_j) \otimes c_j = \sum\limits_{i,j\in I} v_i \otimes c_{i,j} \otimes c_j$. Da $(c_i)_{i\in I}$ eine Basis von C ist, ergibt sich aus dieser Gleichung durch Koeffizientenvergleich[151], daß $\delta(v_j) = \sum\limits_{i\in I} v_i \otimes c_{i,j}$ für alle $j \in I$ gilt.

Wegen $\delta(v) = \sum\limits_{i\in I} v_i \otimes c_i$ ist $v = \sum\limits_{i\in I} v_i \varepsilon(c_i)$ (denn da V ein C-Rechtscomodul ist, gilt $v = v_{(0)} \varepsilon\left(v_{(1)}\right)$).

Setze nun $V' = \sum\limits_{i\in I} kv_i$. Dann ist V' ein Untercomodul von V (denn für jedes $j \in I$ ist $\delta(v_j) = \sum\limits_{i\in I} \underbrace{v_i}_{\in V'} \otimes \underbrace{c_{i,j}}_{\in C} \in V' \otimes C$) und erfüllt $v = \sum\limits_{i\in I} v_i \varepsilon(c_i) \in V'$. Ferner ist $\dim V' < \infty$, denn nur endlich viele i erfüllen $v_i \neq 0$. Damit ist Satz **1)** *a)* gezeigt.

1) *b)* ist nur eine Umformulierung von **1)** *a)*.

2) *a)* Betrachten wir C als C-Rechtscomodul vermöge $\delta_C = \Delta$. Laut Satz **1)** *a)* gibt es einen endlichdimensionalen C-Rechtsuntercomodul C' von C mit $c \in C'$. Sei $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis von C'.

Da $\Delta(C') = \delta_C(C') \subseteq C' \otimes C$ gilt, folgt hieraus: Es gibt für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ Elemente $c_{i,j} \in C$ für alle $1 \leq i \leq n$ so, daß $\Delta(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}$ gilt (und für jedes

[149] Wie immer bedeutet "Dimension" die Dimension eines Vektorraumes über k.

[150] Für die Definition einer Untercoalgebra siehe den Anfang von Kapitel 2.

[151] Mit "Koeffizientenvergleich" meinen wir hierbei die Anwendung von Folgerung 1.8 **2)** aus Kapitel I (und zwar wenden wir in diesem Fall die Eindeutigkeit der Darstellung an).

$j \in \{1, 2, ..., n\}$ nur endlich viele $c_{i,j}$ von 0 verschieden sind). Betrachten wir diese Elemente $c_{i,j} \in C$.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ist $\Delta(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}$. Mit anderen Worten: Für jedes $l \in \{1, 2, ..., n\}$ ist $\Delta(v_l) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,l}$. Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ist nun

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \left(\sum_{l=1}^{n} c_{i,l} \otimes c_{l,j}\right) = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,l}}_{=\Delta(v_l)} \otimes c_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} \Delta(v_l) \otimes c_{l,j} = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{n} v_l \otimes c_{l,j}\right)}_{=\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j} = \Delta(v_j)}$$

$$= (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(v_j)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(v_j)) \qquad \text{(denn } C \text{ ist eine Coalgebra)}$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}\right) \qquad \left(\text{denn } \Delta(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \Delta(c_{i,j}).$$

Da $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis von C' ist, liefert Koeffizientenvergleich hieraus, daß $\Delta(c_{i,j}) = \sum\limits_{l=1}^{n} c_{i,l} \otimes c_{l,j}$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ und alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt.[152]

Sei nun $C'' = \sum\limits_{i=1}^{n} kv_i + \sum\limits_{i,j} kc_{i,j} \subseteq C$. Dann ist $\Delta(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{v_i}_{\in C''} \otimes \underbrace{c_{i,j}}_{\in C''} \in C'' \otimes C''$ für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$, und $\Delta(c_{i,j}) = \sum\limits_{l=1}^{n} \underbrace{c_{i,l}}_{\in C''} \otimes \underbrace{c_{l,j}}_{\in C''} \in C'' \otimes C''$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ und alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Somit ist $C'' = \sum\limits_{i=1}^{n} kv_i + \sum\limits_{i,j} kc_{i,j}$ eine Untercoalgebra von C mit $c \in C' \subseteq C''$ und $\dim C'' < \infty$ (weil wieder nur endlich viele v_i und auch endlich viele $c_{i,j}$ ungleich 0 sind).

---

[152] An dieser Stelle kann man eine weitere (aber nicht mehr zum Beweis notwendige) Eigenschaft der $c_{i,j}$ zeigen: Für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ und alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ist $\varepsilon(c_{i,j}) = \delta_{i,j}$.

Beweis: Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \varepsilon(c_{i,j}) = (\mathrm{kan} \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)) \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_{i,j}}_{=\Delta(v_j)}\right)$$

(wobei kan den kanonischen Isomorphismus $C \otimes k \to C$ bezeichnet)

$$= (\mathrm{kan} \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon))(\Delta(v_j)) = \underbrace{(\mathrm{kan} \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta)}_{=\mathrm{id}\ \text{(denn } C \text{ ist eine Coalgebra)}} (v_j) = \mathrm{id}(v_j) = v_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \delta_{i,j}.$$

Da $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis von C' ist, folgt hieraus, daß $\varepsilon(c_{i,j}) = \delta_{i,j}$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ und alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ist.

2) *b)* ist wieder nur eine Umformulierung von **2)** *a)*.

$\boxed{\textbf{$H$-Comodulalgebren}}$

In Kapitel 3 haben wir H-Modulalgebren definiert. Nachdem wir nun Comoduln kennen, können wir eine analoge Struktur auf Comoduln einführen:

Definition: Sei H eine Bialgebra, und sei A eine Algebra. Angenommen, A ist ein H-Rechtscomodul; das heißt, es gibt eine k-lineare Abbildung $\delta : A \to A \otimes H$, die eine H-Rechtscomodulstruktur auf A ist. Dann bezeichnet man (A, δ) oder kurz auch A als eine *H-Rechtscomodulalgebra*, wenn δ ein Algebrahomomorphismus ist.

Wir werden gleich eine alternative Definition von H-Rechtscomodulalgebren geben (und dabei gleich noch eine alternative Definition von H-Linksmodulalgebren); dafür benötigen wir einen Begriff:

Wir sagen, auf einer Kategorie $\mathcal{C}$ sei ein *Tensorprodukt* definiert, wenn es eine Abbildung $\otimes : \operatorname{Ob} \mathcal{C} \times \operatorname{Ob} \mathcal{C} \to \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ gibt, die je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ ein "Tensorprodukt" $X \otimes Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ zuordnet, sowie ein ausgewähltes Objekt $k \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ existiert, und diese Abbildung $\otimes$ und dieses Objekt k einige bestimmte Eigenschaften erfüllen (nämlich soll es *kanonische* Isomorphismen $(X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z)$ und $X \otimes k \cong X \cong k \otimes X$ geben, und für diese Isomorphismen sollen einige Diagramme kommutieren[153]). Wir wollen uns nicht tiefer in die Details dieser Definition begeben, denn in unserem Falle wird dieses Tensorprodukt $\otimes$ immer einfach das Tensorprodukt von k-Moduln sein.

Angenommen, wir haben nun eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem Tensorprodukt $\otimes$ (also eine Kategorie $\mathcal{C}$, auf der ein Tensorprodukt $\otimes$ definiert ist). Unter einer *Algebra* in der Kategorie $\mathcal{C}$ verstehen wir dann ein Tripel (A, μ, η), wobei A ein Objekt von $\mathcal{C}$ ist, und $\mu : A \otimes A \to A$ und $\eta : k \to A$ Morphismen sind so, daß die Diagramme (1.1), (1.2) und (1.3) kommutativ sind.

Offensichtlich ist dieser Begriff einer "Algebra in der Kategorie $\mathcal{C}$" an den Begriff einer Algebra (genauer gesagt, einer k-Algebra$_3$, so wie wir sie in Kapitel 1 definiert haben) über einem kommutativen Ring k angelehnt. Und in der Tat ist letzterer Begriff ein Sonderfall des ersteren - denn k-Algebren$_3$ über einem kommutativen Ring k sind nichts anderes als Algebren in der Kategorie $\mathcal{M}_k$ (mit dem gewöhnlichen Tensorprodukt $\otimes$).

Nun können wir alternative Definitionen von H-Linksmodulalgebren und H-Rechtscomodulalgebren angeben:

4.4. Bemerkung: 1) Sei H eine Bialgebra, und sei A eine Algebra. Dann ist A genau dann eine H-Linksmodulalgebra, wenn A eine Algebra in ${}_H\mathcal{M}$ bezüglich $\otimes$ (wie oben) ist. Ferner ist A genau dann eine H-Rechtscomodulalgebra, wenn A eine Algebra in $\mathcal{M}^H$ bezüglich $\otimes$ (wie oben) ist. Dabei ist auf jeder der Kategorien ${}_H\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^H$ ein Tensorprodukt $\otimes$ definiert - nämlich das gewöhnliche Tensorprodukt von k-Moduln, mit einer (für ${}_H\mathcal{M}$ in Bemerkung 2.22. **1)** und für $\mathcal{M}^H$ in Bemerkung 4.1. **2)** definierten) zusätzlichen Struktur.

Beweis: Trivial (man schreibe beide Definitionen explizit hin und überzeuge sich, daß sie dann identisch sind).

[153] Wir wollen an dieser Stelle nicht genauer spezifizieren, was für Diagramme wir dabei meinen, denn in unserem Fall wird das Tensorprodukt $\otimes$ sowieso immer das ganz gewöhnliche Tensorprodukt von k-Moduln sein.

2) Sei H eine Bialgebra, und sei A eine Algebra. Sei $\delta : A \to A \otimes H$ ein Algebrahomomorphismus. Dann gilt: Genau dann ist A eine H-Rechtscomodulalgebra, wenn die Comodulaxiome für die Elemente eines Algebraerzeugendensystems von A gelten (d. h. wenn es ein Algebraerzeugendensystem $(u_i)_{i\in I}$ von A gibt so, daß $\delta\left((u_i)_{(0)}\right) \otimes (u_i)_{(1)} = (u_i)_{(0)} \otimes \Delta\left((u_i)_{(1)}\right)$ und $u_i = (u_i)_{(0)}\,\varepsilon\left((u_i)_{(1)}\right)$ für jedes $i \in I$ gelten).

Beweis: Offensichtlich ist A genau dann eine H-Rechtscomodulalgebra, wenn A ein H-Rechtscomodul ist. Letzteres gilt aber (wegen Bemerkung 4.1 **3)**) genau dann, wenn die Gleichungen $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta_H) \circ \delta = (\delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \delta$ und $(\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon_H) \circ \delta = \mathrm{kan}$ gelten. Diese beiden Gleichungen sind Gleichungen zwischen Algebrahomomorphismen (da Δ_H, ε_H und δ sämltlich Algebrahomomorphismen sind), und lassen sich daher auf einem Algebraerzeugendensystem von A überprüfen (d. h.: wenn es ein Algebraerzeugendensystem $(u_i)_{i\in I}$ von A gibt so, daß $((\mathrm{id}_A \otimes \Delta_H) \circ \delta)(u_i) = ((\delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \delta)(u_i)$ und $((\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon_H) \circ \delta)(u_i) = \mathrm{kan}(u_i)$ für alle $i \in I$ gelten, dann sind diese Gleichungen erfüllt). Fassen wir all dies zusammen und schreiben wir die Gleichungen mithilfe der Sweedler-Notation um, so erhalten wir, daß A genau dann eine H-Rechtscomodulalgebra ist, wenn es ein Algebraerzeugendensystem $(u_i)_{i\in I}$ von A gibt so, daß $\delta\left((u_i)_{(0)}\right) \otimes (u_i)_{(1)} = (u_i)_{(0)} \otimes \Delta\left((u_i)_{(1)}\right)$ und $u_i = (u_i)_{(0)}\,\varepsilon\left((u_i)_{(1)}\right)$ für jedes $i \in I$ gelten.

3) Sind H und H' Bialgebren, ist $\varphi : H \to H'$ ein Bialgebrahomomorphismus, und ist A eine H-Rechtscomodulalgebra, dann wird A zu einer H'-Rechtscomodulalgebra, wenn man die Abbildung $\delta' : A \to A \otimes H'$ als $(\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \delta$ definiert (also als Verkettung der Abbildungen $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"'] \arrow[rr, bend left, "\delta'"] & A \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varphi"'] & A \otimes H' \end{tikzcd}$).

Warnung: Eine H-Rechtscomodulalgebra ist (trotz des etwas irreführenden Namens) im Allgemeinen keine H-Algebra, sondern nur eine k-Algebra!

4.5. Beispiele: 1) Sei H eine Bialgebra, und sei A eine H-Linksmodulalgebra. Dann ist $A\sharp H$ eine H-Rechtscomodulalgebra vermöge

$$\delta = \mathrm{id} \otimes \Delta : A\sharp H \to (A\sharp H) \otimes H.$$

Beweis: Offensichtlich ist δ eine H-Rechtscomodulstruktur. Daß δ ein Algebrahomomorphismus ist, zeigen wir folgendermaßen: Für alle $a, b \in A$ und $g, h \in H$ ist

$$\delta\left(\underbrace{(a\sharp g)(b\sharp h)}_{=a\left(g_{(1)}\cdot b\right)\sharp g_{(2)}h}\right) = \left(a\left(g_{(1)}\cdot b\right)\ \sharp\ g_{(2)}h_{(1)}\right) \otimes g_{(3)}h_{(2)}$$

und

$$\begin{aligned}\delta(a\sharp g)\,\delta(b\sharp h) &= \left(\left(a\sharp g_{(1)}\right) \otimes g_{(2)}\right) \cdot \left(\left(b\sharp h_{(1)}\right) \otimes h_{(2)}\right) = \left(a\sharp g_{(1)}\right)\left(b\sharp h_{(1)}\right) \otimes g_{(2)}h_{(2)} \\ &= \left(a\left(g_{(1)}\cdot b\right)\ \sharp\ g_{(2)}h_{(1)}\right) \otimes g_{(3)}h_{(2)},\end{aligned}$$

und daher $\delta((a\sharp g)(b\sharp h)) = \delta(a\sharp g)\,\delta(b\sharp h)$. Außerdem ist $\delta(1\sharp 1) = (1\sharp 1) \otimes 1$.

2) Sei G eine Gruppe, und sei $N \lhd G$. Betrachte die Gruppenalgebra $A = k[G]$ von G (als Algebra), und betrachte $H = k[G \diagup N]$ als Bialgebra. Dann ist A eine H-Rechtscomodulalgebra vermöge der linearen Abbildung $\delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G \diagup N]$, die durch $\delta(g) = g \otimes \overline{g}$ für alle $g \in G$ definiert ist.

Beweis: Klar.

3) Sind H und H' zwei Bialgebren, und ist $\varphi : H \to H'$ ein Bialgebrahomomorphismus, dann ist H eine H'-Rechtscomodulalgebra vermöge der linearen Abbildung $\delta : H \to H \otimes H'$, die durch $\delta(x) = x_{(1)} \otimes \varphi\left(x_{(2)}\right)$ für alle $x \in H$ definiert ist.

Beweis: Folgt aus Bemerkung 4.4. **3)**, da (H, Δ) eine H-Rechtscomodulalgebra ist.

4) Sei $n \geq 0$. Setze $A = k[x_1, x_2, ..., x_n]$ (die kommutative Polynomalgebra über k in n Variablen). Sei $H = k[X_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ (eine kommutative Polynomalgebra über k in n^2 Variablen) eine Bialgebra vermöge

$$\Delta(X_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} X_{i,l} \otimes X_{l,j} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(X_{i,j}) = \delta_{i,j} \qquad \text{für alle } 1 \leq i,j \leq n.$$

Dann wird A zu einer H-Rechtscomodulalgebra vermöge des Algebrahomomorphismus $\delta : k[x_1, x_2, ..., x_n] \to k[x_1, x_2, ..., x_n] \otimes k[X_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, welcher durch

$$\delta(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes X_{i,j} \qquad \text{für alle } j \in \{1, 2, ..., n\}$$

definiert ist.

Beweis: Nachrechnen mit Bemerkung 4.4. **2)** und Lemma 4.2.

5) Betrachten wir in Beispiel **4)** zusätzlich die Hopfalgebra

$$k[x_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} = k[X_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \diagup \left(\det\left((X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}\right) - 1\right)$$

(wobei $x_{i,j} = \overline{X_{i,j}}$), dann wird $A = k[x_1, x_2, ..., x_n]$ auch zu einer $k[x_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$-Rechtscomodulalgebra vermöge des Algebrahomomorphismus $\widetilde{\delta} : k[x_1, x_2, ..., x_n] \to k[x_1, x_2, ..., x_n] \otimes k[x_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, welcher durch

$$\widetilde{\delta}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_{i,j} \qquad \text{für alle } j \in \{1, 2, ..., n\}$$

definiert ist.

Adjungierte Modul- und Comodulstrukturen

Wir werden nun sehen, daß die Begriffe "Comodul" und "Modul" so unterschiedlich nicht sind - zumindest für endlichdimensionale Coalgebren bzw. Algebren werden wir sehen, daß es dazwischen eine Isomorphie gibt.

Definition: Sei C eine Coalgebra. Sei V ein C-Rechtscomodul, also ein Vektorraum mit einer linearen Abbildung $\delta : V \to V \otimes C$. Wir schreiben $\delta(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}$ gemäß der summenlosen Sweedler-Notation.

Dann läßt sich eine lineare Abbildung $\mu : C^* \otimes V \to V$ durch

$$\mu(f \otimes v) = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) \qquad \text{für alle } f \in C^* \text{ und } v \in V$$

definieren.[154] Diese lineare Abbildung μ heißt die *zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur.*

Wir werden in Satz 4.6 **a)** zeigen, daß diese lineare Abbildung μ den Vektorraum V zu einem C^*-Linksmodul macht. Diesen C^*-Linksmodul bezeichnen wir mit $\operatorname{adj}_C V$. Dieser C^*-Linksmodul $\operatorname{adj}_C V$ ist also als Vektorraum gleich V, und die Wirkung von C^* ist gegeben durch

$$f \cdot v = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) \qquad \text{für alle } f \in C^* \text{ und } v \in \operatorname{adj}_C V.$$

4.6. Satz: a) Die lineare Abbildung μ aus der vorigen Definition macht V zu einem C^*-Linksmodul.

b) Sind V und W zwei C-Rechtscomoduln, dann ist $\mathcal{M}^C(V,W) = \operatorname{Hom}_{C^*}(\operatorname{adj}_C V, \operatorname{adj}_C W)$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{M}^C(V,W)$ (wie immer) die Menge der C-Rechtscomodulhomomorphismen von V nach W.

Beweis von Satz 4.6: **a)** Die Modulaxiome sind erfüllt, denn für alle $f, g \in C^*$ und $v \in V$ ist

$$\begin{aligned} f \cdot \underbrace{(g \cdot v)}_{=v_{(0)} g\left(v_{(1)}\right)} &= f \cdot \left(v_{(0)} g\left(v_{(1)}\right)\right) = \underbrace{\left(f \cdot v_{(0)}\right)}_{=\left(v_{(0)}\right)_{(0)} f\left(\left(v_{(0)}\right)_{(1)}\right)} g\left(v_{(1)}\right) = \left(v_{(0)}\right)_{(0)} f\left(\left(v_{(0)}\right)_{(1)}\right) g\left(v_{(1)}\right) \\ &= v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) g\left(v_{(2)}\right) = v_{(0)} \underbrace{(fg)}_{\substack{\text{das heißt} \\ \text{hier } f*g}} \left(v_{(1)}\right) = (fg) \cdot v, \end{aligned}$$

und für alle $v \in V$ ist $\underbrace{1_{C^*}}_{=\varepsilon} \cdot v = \varepsilon v = v_{(0)} \varepsilon\left(v_{(1)}\right) = v$. Satz 4.6 **a)** ist also gezeigt.

b) Sei $F \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Wir müssen zeigen, daß F genau dann C-colinear ist (als Abbildung zwischen den C-Rechtscomoduln V und W), wenn F eine C^*-lineare Abbildung ist (als Abbildung zwischen den C^*-Linksmoduln $\operatorname{adj}_C V$ und $\operatorname{adj}_C W$).

Beweis: Genau dann ist F eine C-colineare Abbildung, wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\delta_V"'] & W \arrow[d, "\delta_W"] \\ V \otimes C \arrow[r, "F \otimes \mathrm{id}"] & W \otimes C \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d. h. wenn für alle $v \in V$ gilt: $\delta(F(v)) = F\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$. Wegen $\delta(F(v)) = (F(v))_{(0)} \otimes (F(v))_{(1)}$ läßt sich dies umschreiben als $(F(v))_{(0)} \otimes (F(v))_{(1)} = F\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$. Doch genau dann gilt $(F(v))_{(0)} \otimes (F(v))_{(1)} = F\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$ für alle $v \in V$, wenn $(F(v))_{(0)} f\left((F(v))_{(1)}\right) = F\left(v_{(0)}\right) f\left(v_{(1)}\right)$ für alle $v \in V$ und $f \in C^*$ ist[155]. Doch wegen

$$F\left(v_{(0)}\right) f\left(v_{(1)}\right) = F\left(\underbrace{v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right)}_{=f \cdot v}\right) = F(f \cdot v) \qquad \text{und}$$

$$(F(v))_{(0)} f\left((F(v))_{(1)}\right) = f \cdot F(v)$$

---

[154] Dieses μ ist nicht zu verwechseln mit μ_{C^*}, der Multiplikationsabbildung von C^*.

[155] Dies folgt aus Lemma $1.9\frac{2}{20}$ (angewandt auf f, C, $(F(v))_{(0)} \otimes (F(v))_{(1)}$ und $F\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$ statt g, W, α bzw. β).

ist dies wiederum äquivalent dazu, daß $f \cdot F(v) = F(f \cdot v)$ für alle $v \in V$ und $f \in C^*$ ist, und dies bedeutet nichts anderes, als daß F eine C^*-lineare Abbildung ist. Damit ist Satz 4.6 **b)** gezeigt.

Man kann die zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur auch ein wenig abstrakter beschreiben:

4.7. Bemerkung: Sei C eine Coalgebra. Sei V ein C-Rechtscomodul, also ein Vektorraum mit einer linearen Abbildung $\delta : V \to V \otimes C$. Definiere eine k-lineare Abbildung

$$\Phi : \operatorname{Hom}(V, V \otimes C) \to \operatorname{Hom}(C^* \otimes V, V)$$

durch

$$\Phi(F) = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ F)(x)) \qquad \text{für jedes } F \in \operatorname{Hom}(V, V \otimes C),$$

wobei $\operatorname{kan} : V \otimes k \to V$ die kanonische Abbildung ist. Dann ist die zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur die Abbildung $\Phi(\delta) : C^* \otimes V \to V$.

Beweis: Die zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur wurde definiert als die lineare Abbildung $\mu : C^* \otimes V \to V$, die

$$\mu(f \otimes v) = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) \qquad \text{für alle } f \in C^* \text{ und } v \in V$$

erfüllt. Wir müssen nun zeigen, daß diese Abbildung μ mit der Abbildung $\Phi(\delta)$ identisch ist.

In der Tat erfüllt diese Abbildung μ die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\mu(f \otimes v) &= v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) = \operatorname{kan}\left(v_{(0)} \otimes f\left(v_{(1)}\right)\right) \\ &= \operatorname{kan}\left((\operatorname{id} \otimes f) \underbrace{\left(v_{(0)} \otimes v_{(1)}\right)}_{=\delta(v)}\right) = (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ \delta)(v)\end{aligned}$$

für alle $f \in C^*$ und $v \in V$. Das heißt, μ ist die k-lineare Abbildung

$$C^* \otimes V \to V, \qquad f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ \delta)(x).$$

Nach der Definition von Φ ist aber $\Phi(\delta)$ die k-lineare Abbildung

$$C^* \otimes V \to V, \qquad f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ \delta)(x).$$

Somit ist $\mu = \Phi(\delta)$. Da μ die zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur ist, erhalten wir also: Die zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur ist $\Phi(\delta)$. Damit ist Bemerkung 4.7 bewiesen.

Wir werden später zeigen:

4.8. Satz: 1) Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra, und V ein Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}&\{\delta : V \to V \otimes C \mid \delta \text{ ist eine } C\text{-Rechtscomodulstruktur auf } V\} \\ &\to \{\mu : C^* \otimes V \to V \mid \mu \text{ ist eine } C^*\text{-Linksmodulstruktur auf } V\},\end{aligned}$$

die jeder C-Rechtscomodulstruktur δ auf V die zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur μ zuordnet, bijektiv.

2) Sei H eine endlichdimensionale Bialgebra, und A ein Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\{\delta : A \to A \otimes H \mid \delta \text{ ist eine } H\text{-Rechtscomodulalgebrastruktur auf } A\}$$
$$\to \{\mu : H^* \otimes A \to A \mid \mu \text{ ist eine } H^*\text{-Linksmodulalgebrastruktur auf } A\},$$

die jeder H-Rechtscomodulalgebrastruktur δ auf A die zu δ adjungierte H^*-Modulstruktur μ zuordnet, wohldefiniert (d. h.: für jede H-Rechtscomodulalgebrastruktur δ auf A ist die zu δ adjungierte H^*-Modulstruktur μ auch tatsächlich eine H^*-Linksmodulalgebrastruktur!) und bijektiv.

Um dies zu beweisen, wollen wir die weiter oben gegebene Definition der zu δ adjungierten C^*-Modulstruktur umkehren, und aus C^*-Linksmoduln C-Rechtscomoduln machen. Dies ist aber nur möglich, wenn C endlichdimensional ist (Satz 4.8 wäre ohne diese Bedingung auch nicht richtig), und selbst dann ist es nicht mehr so einfach. Wir brauchen folgendes Lemma aus der Linearen Algebra:

4.9. Lemma: Seien X, Y und Z drei Vektorräume, wobei Z endlichdimensional ist. Sei $\mathrm{kan} : Y \otimes k \to Y$ die kanonische Abbildung. Definiere eine k-lineare Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Hom}\,(X, Y \otimes Z) \to \mathrm{Hom}\,(Z^* \otimes X, Y)$$

durch

$$\Phi\,(F) = (f \otimes x \mapsto (\mathrm{kan} \circ (\mathrm{id} \otimes f) \circ F)\,(x)) \qquad \text{für jedes } F \in \mathrm{Hom}\,(X, Y \otimes Z)\,,$$

wobei $\mathrm{kan} : V \otimes k \to V$ die kanonische Abbildung ist. Dann ist diese Abbildung Φ bijektiv.

Erster Beweis des Lemmas 4.9: Sei $z_1, z_2, ..., z_n$ eine Basis von Z, und sei $f_1, f_2, ..., f_n$ die zu ihr duale Basis von Z^*.

Für jedes Element F von $\mathrm{Hom}\,(X, Y \otimes Z)$ lassen sich eindeutig n lineare Abbildungen F_1, F_2, ..., F_n von X nach Y finden, die $F\,(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i\,(x) \otimes z_i$ für alle $x \in X$ erfüllen.[156] Wir nennen diese Abbildungen F_1, F_2, ..., F_n die *Komponentenabbildungen* der Abbildung $F \in \mathrm{Hom}\,(X, Y \otimes Z)$.

Wir haben $\Phi\,(F) = (f \otimes x \mapsto (\mathrm{kan} \circ (\mathrm{id} \otimes f) \circ F)\,(x))$. Für alle $f \in Z^*$ und $x \in X$ ist also

$$\begin{aligned}(\Phi\,(F))\,(f \otimes x) &= (\mathrm{kan} \circ (\mathrm{id} \otimes f) \circ F)\,(x) = \mathrm{kan}\,((\mathrm{id} \otimes f)\,(F\,(x))) \\ &= \mathrm{kan}\left((\mathrm{id} \otimes f)\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\,(x) \otimes z_i\right)\right) \qquad \left(\text{da } F\,(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i\,(x) \otimes z_i\right) \\ &= \mathrm{kan}\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\,(x) \otimes f\,(z_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} F_i\,(x)\, f\,(z_i)\,.\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Abbildung Φ injektiv und surjektiv ist.

[156] Denn da $z_1, z_2, ..., z_n$ eine Basis von Z ist, haben wir einen Isomorphismus $Z \cong k^n$, und damit $Y \otimes Z \cong Y \otimes k^n \cong Y^n$, also $\mathrm{Hom}\,(X, Y \otimes Z) \cong \mathrm{Hom}\,(X, Y^n) \cong (\mathrm{Hom}\,(X, Y))^n$. Die n linearen Abbildungen F_1, F_2, ..., F_n erhalten wir nun als die n Komponenten des Bildes von $F \in \mathrm{Hom}\,(X, Y \otimes Z)$ unter diesem Isomorphismus $\mathrm{Hom}\,(X, Y \otimes Z) \to (\mathrm{Hom}\,(X, Y))^n$.

Beweis der Injektivität von Φ: Sei $F \in \operatorname{Hom}(X, Y \otimes Z)$ gegeben, das $\Phi(F) = 0$ erfüllt. Damit ist auch $0 = (\Phi(F))(f \otimes x) = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i(x) f(z_i)$ für alle $f \in Z^*$ und $x \in X$. Wenn wir hier $f = f_k$ für irgendein $k \in \{1, 2, ..., n\}$ einsetzen, dann erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) f_k(z_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \delta_{k,i} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } f_k(z_i) = \delta_{k,i}, \text{ weil } z_1, z_2, ..., z_n \text{ und} \\ f_1, f_2, ..., f_n \text{ duale Basen sind} \end{array} \right)$$
$$= F_k(x).$$

Da dies für alle $k \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt, ist also $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{F_i(x)}_{=0} \otimes z_i = 0$ für alle $x \in X$, also $F = 0$.

Wir haben damit gezeigt: Für jedes $F \in \operatorname{Hom}(X, Y \otimes Z)$, das $\Phi(F) = 0$ erfüllt, ist $F = 0$. Folglich ist die Abbildung Φ injektiv.

Beweis der Surjektivität von Φ: Sei $G \in \operatorname{Hom}(Z^* \otimes X, Y)$ beliebig. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ definieren wir eine Abbildung $G_i : X \to Y$ durch

$$G_i(x) = G(f_i \otimes x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Diese Abbildung G_i ist offensichtlich k-linear.

Sei nun eine Abbildung $F : X \to Y \otimes Z$ definiert durch

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x) \otimes z_i \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Auch diese Abbildung F ist trivialerweise k-linear; das heißt, $F \in \operatorname{Hom}(X, Y \otimes Z)$. Aus der Formel $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} G_i(x) \otimes z_i$ folgt, daß die Abbildungen G_1, G_2, ..., G_n die Komponentenabbildungen der Abbildung F sind. Damit können wir die weiter oben gezeigte Formel

$$(\Phi(F))(f \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) f(z_i)$$

auf G_1, G_2, ..., G_n statt F_1, F_2, ..., F_n anwenden, und erhalten

$$(\Phi(F))(f \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x) f(z_i)$$

für alle $f \in Z^*$ und $x \in X$. Damit ist

$$(\Phi(F))(f \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{G_i(x)}_{=G(f_i \otimes x)} f(z_i) = \sum_{i=1}^{n} G(f_i \otimes x) f(z_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} G(f_i f(z_i) \otimes x) = G\left(\sum_{i=1}^{n} f_i f(z_i) \otimes x\right) = G(f \otimes x)$$

(denn da $z_1, z_2, ..., z_n$ und $f_1, f_2, ..., f_n$ duale Basen sind, gilt $\sum_{i=1}^{n} f_i f(z_i) = f$). Da dies für alle $f \in Z^*$ und $x \in X$ gilt, ist also $\Phi(F) = G$.

Wir haben damit gezeigt: Für jedes $G \in \operatorname{Hom}(Z^* \otimes X, Y)$ gibt es ein $F \in \operatorname{Hom}(X, Y \otimes Z)$ mit $\Phi(F) = G$. Daher ist Φ surjektiv.

Nachdem wir jetzt wissen, daß Φ injektiv und surjektiv ist, folgt, daß Φ bijektiv ist, und Lemma 4.9 ist gezeigt.

Zweiter Beweis des Lemmas 4.9 (skizziert): Es gibt eine Kette kanonischer Isomorphismen:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}(Z^* \otimes X, Y) \\
&\cong \operatorname{Hom}(Z^*, \operatorname{Hom}(X, Y)) \qquad \text{(nach Satz 1.20)} \\
&\cong (Z^*)^* \otimes \operatorname{Hom}(X, Y) \qquad \text{(denn } Z^* \text{ ist endlichdimensional)} \\
&\cong Z \otimes \operatorname{Hom}(X, Y) \qquad \text{(denn } Z \text{ ist endlichdimensional, also } (Z^*)^* \cong Z\text{)} \\
&\cong \operatorname{Hom}(X, Y) \otimes Z \cong \operatorname{Hom}(X, Y) \otimes \operatorname{Hom}(k, Z) \qquad \text{(da } Z \cong \operatorname{Hom}(k, Z)\text{)} \\
&\cong \operatorname{Hom}(X \otimes k, Y \otimes Z) \qquad \text{(denn } k \text{ und } Z \text{ sind endlichdimensional)} \\
&\cong \operatorname{Hom}(X, Y \otimes Z),
\end{aligned}$$

und man sieht leicht, daß der resultierende Isomorphismus genau der in Lemma 4.9. angegebene ist.

Hierbei haben wir die Tatsache benutzt, daß für je vier Vektorräume A, B, C und D mit $\dim C < \infty$ und $\dim D < \infty$ gilt:

$$\operatorname{Hom}(A, B) \otimes \operatorname{Hom}(C, D) \cong \operatorname{Hom}(A \otimes C, B \otimes D).$$

Nachdem wir jetzt Lemma 4.9 gezeigt haben, folgt unsere Definition:

Definition: Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Sei V ein C^*-Linksmodul, also ein Vektorraum mit einer linearen Abbildung $\mu_V : C^* \otimes V \to V$. Definiere eine k-lineare Abbildung

$$\Phi : \operatorname{Hom}(V, V \otimes C) \to \operatorname{Hom}(C^* \otimes V, V)$$

durch

$$\Phi(F) = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ F)(x)) \qquad \text{für jedes } F \in \operatorname{Hom}(V, V \otimes C),$$

wobei $\operatorname{kan} : V \otimes k \to V$ die kanonische Abbildung ist. Dann ist diese Abbildung Φ bijektiv (laut Lemma 4.9). Sei also $\delta_V : V \to V \otimes C$ definiert durch $\delta_V = \Phi^{-1}(\mu_V)$. Diese lineare Abbildung δ_V heißt die *zu μ_V adjungierte C-Rechtscomodulstruktur*.

Wir werden in Satz 4.10 **a)** zeigen, daß diese lineare Abbildung δ_V den Vektorraum V zu einem C-Rechtscomodul macht. Diesen C-Rechtscomodul bezeichnen wir mit $\operatorname{adj}^C V$.

4.10. Satz: a) Die lineare Abbildung δ_V aus der vorigen Definition macht V zu einem C-Rechtscomodul.

b) Sind V und W zwei C^*-Linksmoduln, dann ist $\operatorname{Hom}_{C^*}(V, W) = \mathcal{M}^C\left(\operatorname{adj}^C V, \operatorname{adj}^C W\right)$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{M}^C\left(\operatorname{adj}^C V, \operatorname{adj}^C W\right)$ (wie immer) die Menge der C-Rechtscomodulhomomorphismen von $\operatorname{adj}^C V$ nach $\operatorname{adj}^C W$.

Beweis von Satz 4.10: **a)** Wir müssen beweisen, daß die Abbildung $\delta_V : V \to V \otimes C$ den Vektorraum V zu einem C-Rechtscomodul macht. Dazu müssen wir zeigen, daß für jedes $v \in V$ die Gleichungen

$$\delta_V\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)} = v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right) \qquad \text{und} \qquad v = v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$$

gelten, wobei wir wieder (wie bei der Sweedler-Notation) $v_{(0)} \otimes v_{(1)}$ für den Tensor $\delta_V(v)$ schreiben[157] (denn so wurde der Begriff eines Comoduls definiert).

Wir haben δ_V durch $\delta_V = \Phi^{-1}(\mu_V)$ definiert, wobei Φ die durch

$$\Phi(F) = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ F)(x)) \qquad \text{für jedes } F \in \operatorname{Hom}(V, V \otimes C)$$

definierte k-lineare Abbildung von $\operatorname{Hom}(V, V \otimes C)$ nach $\operatorname{Hom}(C^* \otimes V, V)$ ist, und $\operatorname{kan} : V \otimes k \to V$ die kanonische Abbildung ist. Daher ist

$$\mu_V = \Phi(\delta_V) = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ \delta_V)(x)) \qquad \text{(nach der Definition von } \Phi).$$

Für alle $g \in C^*$ und $v \in V$ ist also

$$\begin{aligned}\mu_V(g \otimes v) &= (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes g) \circ \delta_V)(v) = (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes g))\left(\underbrace{\delta_V(v)}_{=v_{(0)} \otimes v_{(1)}}\right) \\ &= \operatorname{kan}\left(\underbrace{(\operatorname{id} \otimes g)\left(v_{(0)} \otimes v_{(1)}\right)}_{=v_{(0)} \otimes g\left(v_{(1)}\right)}\right) = v_{(0)} g\left(v_{(1)}\right).\end{aligned}$$

Für alle $h, g \in C^*$ und $v \in V$ ist nun

$$\begin{aligned}h \cdot gv &= \mu_V(h \otimes gv) = (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes h) \circ \delta_V)(gv) \\ &\qquad \left(\text{denn } \mu_V = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ \delta_V)(x))\right) \\ &= (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes h))\left(\delta_V\left(\underbrace{gv}_{=\mu_V(g \otimes v) = v_{(0)} g\left(v_{(1)}\right)}\right)\right) = (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes h))\left(\underbrace{\delta_V\left(v_{(0)} g\left(v_{(1)}\right)\right)}_{=\delta_V\left(v_{(0)}\right) g\left(v_{(1)}\right)}\right) \\ &= (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes h))\left(\delta_V\left(v_{(0)}\right) g\left(v_{(1)}\right)\right) = \operatorname{kan}\left((\operatorname{id} \otimes h)\left(\delta_V\left(v_{(0)}\right) g\left(v_{(1)}\right)\right)\right),\end{aligned}$$

[157] Wir sollten jedoch mit dieser Notation darauf achten, daß wir nicht den Term $v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$ zu v "vereinfachen", oder die Terme $\delta_V\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$ und $v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right)$ beide zu $v_{(0)} \otimes v_{(1)} \otimes v_{(2)}$ "vereinfachen". Denn wir haben *noch nicht bewiesen*, daß $v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right) = v$ und $\delta_V\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)} = v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right)$ ist!

aber andererseits

$$\begin{aligned}
h \cdot gv &= (hg) \cdot v \qquad\qquad (\text{denn } V \text{ ist ein } C^*\text{-Linksmodul}) \\
&= \mu_V (hg \otimes v) = (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes hg) \circ \delta_V)(v) \\
&\qquad (\text{denn } \mu_V = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ \delta_V)(x))) \\
&= \operatorname{kan}\left((\operatorname{id} \otimes hg) \left(\underbrace{\delta_V (v)}_{= v_{(0)} \otimes v_{(1)}} \right) \right) = \operatorname{kan}\left(\underbrace{(\operatorname{id} \otimes hg) \left(v_{(0)} \otimes v_{(1)} \right)}_{= v_{(0)} \otimes (hg)\left(v_{(1)}\right)} \right) \\
&= \operatorname{kan}\left(v_{(0)} \otimes \underbrace{(hg) \left(v_{(1)} \right)}_{\substack{= h\left(\left(v_{(1)}\right)_{(1)} \right) g\left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right), \\ \text{denn } hg = h * g \text{ ist die Konvolution}}} \right) = \operatorname{kan}\left(v_{(0)} \otimes \underbrace{h\left(\left(v_{(1)}\right)_{(1)} \right) g \left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right)}_{= h\left(\left(v_{(1)}\right)_{(1)} g\left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right) \right)} \right) \\
&= \operatorname{kan}\left(\underbrace{v_{(0)} \otimes h\left(\left(v_{(1)}\right)_{(1)} g \left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right) \right)}_{= (\operatorname{id} \otimes h)\left(v_{(0)} \otimes \left(v_{(1)}\right)_{(1)} g\left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right) \right)} \right) = \operatorname{kan}\left((\operatorname{id} \otimes h) \left(v_{(0)} \otimes \left(v_{(1)}\right)_{(1)} g \left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\operatorname{kan}\left((\operatorname{id} \otimes h) \left(\delta_V \left(v_{(0)} \right) g \left(v_{(1)} \right) \right) \right) = \operatorname{kan}\left((\operatorname{id} \otimes h) \left(v_{(0)} \otimes \left(v_{(1)}\right)_{(1)} g \left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right) \right) \right).$$

Da kan injektiv ist (denn kan ist ein Isomorphismus), folgt hieraus

$$(\operatorname{id} \otimes h) \left(\delta_V \left(v_{(0)} \right) g \left(v_{(1)} \right) \right) = (\operatorname{id} \otimes h) \left(v_{(0)} \otimes \left(v_{(1)}\right)_{(1)} g \left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right) \right).$$

Da dies *für alle* $h \in C^*$ gilt, folgt hieraus

$$\delta_V \left(v_{(0)} \right) g \left(v_{(1)} \right) = v_{(0)} \otimes \left(v_{(1)}\right)_{(1)} g \left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)} \right)$$

(denn sind α und β zwei Elemente von $V \otimes C$, die $(\operatorname{id} \otimes h)(\alpha) = (\operatorname{id} \otimes h)(\beta)$ *für alle* $h \in C^*$ erfüllen, dann gilt $\alpha = \beta$ [158]). Definieren wir die kanonische lineare Abbildung

$$\operatorname{kan}' : V \otimes C \otimes k \to V \otimes C, \qquad p \otimes \lambda \mapsto p\lambda \qquad (\text{wobei } p \in V \otimes C),$$

[158] Dies folgt aus Lemma 1.9$\frac{2}{20}$ (angewandt auf C und h statt W bzw. g).

dann ist kan' ein Isomorphismus, und wir haben

$$\operatorname{kan}'\left(\underbrace{\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)\left(\delta_V\left(v_{(0)}\right)\otimes v_{(1)}\right)}_{=\delta_V\left(v_{(0)}\right)\otimes g\left(v_{(1)}\right)}\right)$$
$$=\operatorname{kan}'\left(\delta_V\left(v_{(0)}\right)\otimes g\left(v_{(1)}\right)\right)=\delta_V\left(v_{(0)}\right)g\left(v_{(1)}\right)=v_{(0)}\otimes\left(v_{(1)}\right)_{(1)}g\left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)}\right)$$
$$=\operatorname{kan}'\left(\underbrace{v_{(0)}\otimes\left(v_{(1)}\right)_{(1)}\otimes g\left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)}\right)}_{=\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)\left(v_{(0)}\otimes\left(v_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(v_{(1)}\right)_{(2)}\right)}\right)$$
$$=\operatorname{kan}'\left(\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)\underbrace{\left(v_{(0)}\otimes\left(v_{(1)}\right)_{(1)}\otimes\left(v_{(1)}\right)_{(2)}\right)}_{=v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right)}\right)=\operatorname{kan}'\left(\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)\left(v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right)\right)\right).$$

Da kan' injektiv ist (denn kan' ist ein Isomorphismus), folgt hieraus

$$\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)\left(\delta_V\left(v_{(0)}\right)\otimes v_{(1)}\right)=\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)\left(v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right)\right).$$

Da dies *für alle* $g\in C^*$ gilt, folgt hieraus

$$\delta_V\left(v_{(0)}\right)\otimes v_{(1)}=v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right)$$

(denn sind α und β zwei Elemente von $V\otimes C\otimes C$, die $\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)(\alpha)=\left(\operatorname{id}_{V\otimes C}\otimes g\right)(\beta)$ *für alle* $g\in C^*$ erfüllen, dann gilt $\alpha=\beta$ [159]).

Wir haben damit gezeigt, daß $\delta_V\left(v_{(0)}\right)\otimes v_{(1)}=v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right)$ für alle $v\in V$ ist. Es bleibt uns nur noch zu zeigen, daß $v=v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$ für alle $v\in V$ ist. Dies ist aber einfach: Wir haben oben gezeigt, daß $\mu_V(g\otimes v)=v_{(0)}g\left(v_{(1)}\right)$ für alle $g\in C^*$ und $v\in V$ ist. Angewandt auf $g=\varepsilon$ ergibt dies $\mu_V(\varepsilon\otimes v)=v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$. Doch wegen $\mu_V(\varepsilon\otimes v)=\varepsilon\cdot v=v$ (denn ε ist die Eins der Algebra C^*) wird dies zu $v=v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$. Damit ist gezeigt, daß die Abbildung $\delta_V:V\to V\otimes C$ den Vektorraum V zu einem C-Rechtscomodul macht. Das heißt, Satz 4.10 **a)** ist bewiesen.

Bevor wir Satz 4.10 **b)** beweisen, lassen wir die Katze aus dem Sack, und zeigen, daß adj^C und adj_C zueinander inverse Isomorphismen von Kategorien sind:

4.11. Satz: a) Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Sei V ein C^*-Linksmodul. Dann ist $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right)=V$ als C^*-Linksmoduln (das heißt, $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right)$ und V sind der gleiche Vektorraum mit derselben C^*-Linksmodulstruktur).

b) Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Sei V ein C-Rechtscomodul. Dann ist $\operatorname{adj}^C\left(\operatorname{adj}_C V\right)=V$ als C-Rechtscomoduln (das heißt, $\operatorname{adj}^C\left(\operatorname{adj}_C V\right)$ und V sind der gleiche Vektorraum mit derselben C-Rechtscomodulstruktur).

Beweis von Satz 4.11: **a)** Als Vektorraum ist $\operatorname{adj}^C V=V$ (laut Definition) und (ebenfalls laut Definition) $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right)=\operatorname{adj}^C V$, also $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right)=\operatorname{adj}^C V=V$.

[159] Dies folgt aus Lemma $1.9\frac{2}{20}$ (angewandt auf C und $V\otimes C$ statt W bzw. V).

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß die C^*-Linksmodulstrukturen auf $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right)$ und auf V identisch sind.

Sei $\mu_V : C^* \otimes V \to V$ die vorgegebene C^*-Linksmodulstruktur auf V. Die C-Rechtscomodulstruktur auf $\operatorname{adj}^C V$ ist dann (laut Definition von $\operatorname{adj}^C V$) die zu μ_V adjungierte C-Rechtscomodulstruktur, d. h. die durch $\delta_V = \Phi^{-1}(\mu_V)$ definierte Abbildung $\delta_V : V \to V \otimes C$, wobei die k-lineare Abbildung

$$\Phi : \operatorname{Hom}(V, V \otimes C) \to \operatorname{Hom}(C^* \otimes V, V)$$

durch

$$\Phi(F) = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ F)(x)) \qquad \text{für jedes } F \in \operatorname{Hom}(V, V \otimes C)$$

definiert ist. Die C^*-Linksmodulstruktur auf $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right)$ ist dann die zu δ_V adjungierte C^*-Modulstruktur, also (gemäß Bemerkung 4.7, angewandt auf $\operatorname{adj}_C V$ statt V) die Abbildung $\Phi(\delta_V)$. Da aber $\Phi(\delta_V) = \mu_V$ die C^*-Linksmodulstruktur auf V ist (denn $\delta_V = \Phi^{-1}(\mu_V)$), bedeutet dies: Die C^*-Linksmodulstruktur auf $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right)$ ist die C^*-Linksmodulstruktur auf V. Damit haben wir gezeigt, daß $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right) = V$ ist, und Satz 4.11 **a)** ist bewiesen.

b) Als Vektorraum ist $\operatorname{adj}_C V = V$ (laut Definition) und (ebenfalls laut Definition) $\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V) = \operatorname{adj}_C V$, also $\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V) = \operatorname{adj}_C V = V$. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß die C-Rechtscomodulstrukturen auf $\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V)$ und auf V identisch sind.

Sei $\delta_V : V \to V \otimes C$ die vorgegebene C-Rechtscomodulstruktur auf V. Die C^*-Linksmodulstruktur auf $\operatorname{adj}_C V$ ist dann die zu δ_V adjungierte C^*-Modulstruktur, also (laut Bemerkung 4.7) die Abbildung $\Phi(\delta_V)$, wobei die k-lineare Abbildung

$$\Phi : \operatorname{Hom}(V, V \otimes C) \to \operatorname{Hom}(C^* \otimes V, V)$$

durch

$$\Phi(F) = (f \otimes x \mapsto (\operatorname{kan} \circ (\operatorname{id} \otimes f) \circ F)(x)) \qquad \text{für jedes } F \in \operatorname{Hom}(V, V \otimes C)$$

definiert ist. Die C-Rechtscomodulstruktur auf $\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V)$ ist dann (laut Definition von $\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V)$) die zu $\Phi(\delta_V)$ adjungierte C-Rechtscomodulstruktur, d. h. die durch $\delta_{\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V)} = \Phi^{-1}(\Phi(\delta_V))$ definierte Abbildung $\delta_{\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V)} : V \to V \otimes C$. Wir haben also:

$$\begin{aligned}
&\left(\text{die } C\text{-Rechtscomodulstruktur auf } \operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V)\right) \\
&= \delta_{\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V)} = \Phi^{-1}(\Phi(\delta_V)) = \delta_V = (\text{die } C\text{-Rechtscomodulstruktur auf } V).
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\operatorname{adj}^C(\operatorname{adj}_C V) = V$ ist. Auch Satz 4.11 **b)** ist also gezeigt.

Jetzt holen wir den *Beweis von Satz 4.10* ***b)*** nach: Nach Satz 4.6 **b)** (angewandt auf $\operatorname{adj}^C V$ und $\operatorname{adj}^C W$ statt V bzw. W) ist

$$\mathcal{M}^C\left(\operatorname{adj}^C V, \operatorname{adj}^C W\right) = \operatorname{Hom}_{C^*}\left(\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right), \operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C W\right)\right).$$

Da $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C V\right) = V$ und $\operatorname{adj}_C\left(\operatorname{adj}^C W\right) = W$ ist (nach Satz 4.11 **a)**), vereinfacht sich dies zu $\mathcal{M}^C\left(\operatorname{adj}^C V, \operatorname{adj}^C W\right) = \operatorname{Hom}_{C^*}(V, W)$. Damit ist Satz 4.10 **b)** gezeigt.

4.12. Satz: Sei H eine endlichdimensionale Bialgebra, und A ein Vektorraum. Sei $\delta : A \to A \otimes H$ eine H-Rechtscomodulstruktur auf A, und sei $\mu : H^* \otimes A \to A$ die zu δ adjungierte H^*-Modulstruktur.

Genau dann ist (A, δ) eine H-Rechtscomodulalgebra, wenn (A, μ) eine H^*-Linksmodulalgebra ist.

Beweis von Satz 4.12: $\Longrightarrow$: Angenommen, (A, δ) ist eine H-Rechtscomodulalgebra. Gemäß der Definition einer H-Rechtscomodulalgebra bedeutet dies, daß $\delta : A \to A \otimes H$ ein Algebrahomomorphismus ist.

Für alle $f \in H^*$ und $v \in A$ ist $f \cdot v = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right)$ (gemäß der Definition der zu δ adjungierten H^*-Modulstruktur). Für alle $x \in H^*$ und alle $a, b \in A$ ist somit

$$\begin{aligned}
&x \cdot (ab) \\
&= (ab)_{(0)}\, x\left((ab)_{(1)}\right) = a_{(0)} b_{(0)} x\left(a_{(1)} b_{(1)}\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } (ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)} = a_{(0)} b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)}, \text{ weil } \delta \text{ ein Algebrahomomorphismus ist}\right) \\
&= a_{(0)} b_{(0)} x_{(1)}\left(a_{(1)}\right) x_{(2)}\left(b_{(1)}\right) \qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } x\left(a_{(1)} b_{(1)}\right) = x_{(1)}\left(a_{(1)}\right) \cdot x_{(2)}\left(b_{(1)}\right), \text{ weil} \\ \text{so die Comultiplikation auf } H^* \text{ definiert ist} \end{array}\right) \\
&= \underbrace{\left(a_{(0)} x_{(1)}\left(a_{(1)}\right)\right)}_{\substack{= x_{(1)} \cdot a \text{ (denn } v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) = f \cdot v \\ \text{für alle } f \in H^* \text{ und } v \in A)}} \underbrace{\left(b_{(0)} x_{(2)}\left(b_{(1)}\right)\right)}_{\substack{= x_{(2)} \cdot b \text{ (denn } v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) = f \cdot v \\ \text{für alle } f \in H^* \text{ und } v \in A)}} = \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right).
\end{aligned}$$

Für alle $x \in H^*$ ist ferner

$$\begin{aligned}
x \cdot 1 &= 1_{(0)} x\left(1_{(1)}\right) && \left(\text{denn } f \cdot v = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) \text{ für alle } f \in H^* \text{ und } v \in A\right) \\
&= 1 x(1) && \left(\text{denn } 1_{(0)} \otimes 1_{(1)} = 1, \text{ weil } \delta \text{ ein Algebrahomomorphismus ist}\right) \\
&= 1 \varepsilon(x) && \left(\text{denn } \varepsilon(x) = x(1) \text{ nach der Definition der Coeins } \varepsilon \text{ auf } H^*\right) \\
&= \varepsilon(x) \cdot 1.
\end{aligned}$$

Somit ist (A, μ) eine H^*-Linksmodulalgebra (denn die beiden dazu notwendigen Axiome:

$$\begin{aligned}
x \cdot (ab) &= \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right) && \text{für alle } x \in H^* \text{ und } a, b \in A; \\
x \cdot 1 &= \varepsilon(x) \cdot 1 && \text{für alle } x \in H^*
\end{aligned}$$

sind beide erfüllt). Damit ist die $\Longrightarrow$-Richtung von Satz 4.12 bewiesen.

$\Longleftarrow$: Angenommen, (A, μ) ist eine H^*-Linksmodulalgebra. Gemäß der Definition einer H^*-Linksmodulalgebra bedeutet dies, daß die zwei Axiome

$$\begin{aligned}
x \cdot (ab) &= \left(x_{(1)} \cdot a\right)\left(x_{(2)} \cdot b\right) && \text{für alle } x \in H^* \text{ und } a, b \in A; \\
x \cdot 1 &= \varepsilon(x) \cdot 1 && \text{für alle } x \in H^*
\end{aligned}$$

gelten.

Sei kan : $A \otimes k \to A$ der kanonische Algebraisomorphismus. Dann ist kan insbesondere injektiv. Seien $a, b \in A$. Wir wollen beweisen, daß $\delta(a)\,\delta(b) = \delta(ab)$ ist.

Für alle $f \in H^*$ und $v \in A$ ist $f \cdot v = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right)$ (gemäß der Definition der zu δ adjungierten H^*-Modulstruktur). Für alle $x \in H^*$ ist somit

$$x \cdot (ab) = (ab)_{(0)}\, x\left((ab)_{(1)}\right) = \operatorname{kan}\left(\underbrace{(ab)_{(0)} \otimes x\left((ab)_{(1)}\right)}_{=(\mathrm{id}\otimes x)\left((ab)_{(0)}\otimes (ab)_{(1)}\right)}\right) = \operatorname{kan}\left((\mathrm{id}\otimes x)\left(\underbrace{(ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)}}_{=\delta(ab)}\right)\right)$$
$$= \operatorname{kan}\left((\mathrm{id}\otimes x)\left(\delta\left(ab\right)\right)\right).$$

Nun ist

$$\operatorname{kan}\left((\mathrm{id}\otimes x)\left(\underbrace{\delta\left(a\right)}_{=a_{(0)}\otimes a_{(1)}}\ \underbrace{\delta\left(b\right)}_{=b_{(0)}\otimes b_{(1)}}\right)\right) = \operatorname{kan}\left((\mathrm{id}\otimes x)\left(\left(a_{(0)} \otimes a_{(1)}\right)\left(b_{(0)} \otimes b_{(1)}\right)\right)\right)$$
$$= \operatorname{kan}\left(\underbrace{(\mathrm{id}\otimes x)\left(\left(a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}\right)\right)}_{=a_{(0)}b_{(0)}\otimes x\left(a_{(1)}b_{(1)}\right)}\right) = \operatorname{kan}\left(a_{(0)}b_{(0)} \otimes x\left(a_{(1)}b_{(1)}\right)\right) = a_{(0)}b_{(0)}x\left(a_{(1)}b_{(1)}\right)$$
$$= a_{(0)}b_{(0)}x_{(1)}\left(a_{(1)}\right)x_{(2)}\left(b_{(1)}\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } x\left(a_{(1)}b_{(1)}\right) = x_{(1)}\left(a_{(1)}\right)\cdot x_{(2)}\left(b_{(1)}\right)\text{, weil}\\ \text{so die Comultiplikation auf } H^* \text{ definiert ist}\end{array}\right)$$
$$= \underbrace{\left(a_{(0)}x_{(1)}\left(a_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=x_{(1)}\cdot a \text{ (denn } v_{(0)}f\left(v_{(1)}\right)=f\cdot v\\ \text{für alle } f\in H^* \text{ und } v\in A)}}\ \underbrace{\left(b_{(0)}x_{(2)}\left(b_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=x_{(2)}\cdot b \text{ (denn } v_{(0)}f\left(v_{(1)}\right)=f\cdot v\\ \text{für alle } f\in H^* \text{ und } v\in A)}} = \left(x_{(1)}\cdot a\right)\left(x_{(2)}\cdot b\right) = x\cdot(ab)$$
$$= \operatorname{kan}\left((\mathrm{id}\otimes x)\left(\delta\left(ab\right)\right)\right).$$

Da kan injektiv ist, folgt hieraus $(\mathrm{id}\otimes x)\left(\delta\left(a\right)\delta\left(b\right)\right) = (\mathrm{id}\otimes x)\left(\delta\left(ab\right)\right)$. Da dies für alle $x \in H^*$ gilt, folgt hieraus $\delta\left(a\right)\delta\left(b\right) = \delta\left(ab\right)$ (nach Lemma $1.9\frac{2}{20}$, angewandt auf $V = A$, $W = H$, $g = x$, $\alpha = \delta\left(a\right)\delta\left(b\right)$ und $\beta = \delta\left(ab\right)$).

Für alle $x \in H^*$ ist ferner

$$\operatorname{kan}\left((\mathrm{id}\otimes x)\left(\underbrace{\delta\left(1\right)}_{=1_{(0)}\otimes 1_{(1)}}\right)\right) = \operatorname{kan}\left(\underbrace{(\mathrm{id}\otimes x)\left(1_{(0)} \otimes 1_{(1)}\right)}_{=1_{(0)}\otimes x\left(1_{(1)}\right)}\right) = 1_{(0)}x\left(1_{(1)}\right)$$
$$= x\cdot 1 \qquad \left(\text{denn } v_{(0)}f\left(v_{(1)}\right) = f\cdot v \text{ für alle } f\in H^* \text{ und } v\in A\right)$$
$$= \varepsilon\left(x\right)\cdot 1 = x\left(1\right)\cdot 1 \qquad \left(\text{denn } \varepsilon\left(x\right) = x\left(1\right) \text{ nach der Definition der Coeins } \varepsilon \text{ auf } H^*\right)$$
$$= \operatorname{kan}\left(\underbrace{1\otimes x\left(1\right)}_{=(\mathrm{id}\otimes x)(1\otimes 1)}\right) = \operatorname{kan}\left((\mathrm{id}\otimes x)\left(1\otimes 1\right)\right).$$

Da kan injektiv ist, bedeutet dies $(\mathrm{id}\otimes x)\left(\delta\left(1\right)\right) = (\mathrm{id}\otimes x)\left(1\otimes 1\right)$. Da dies für alle $x \in H^*$ gilt, folgt hieraus $\delta\left(1\right) = 1\otimes 1$ (nach Lemma $1.9\frac{2}{20}$, angewandt auf $V = A$, $W = H$, $g = x$, $\alpha = \delta\left(1\right)$ und $\beta = 1\otimes 1$). Das heißt, $\delta\left(1\right) = 1_{H\otimes A}$. Zusammen mit dem bereits bewiesenen Faktum, daß $\delta\left(a\right)\delta\left(b\right) = \delta\left(ab\right)$ für alle $a, b \in A$ gilt, ergibt dies, daß δ ein Algebrahomomorphismus ist. Also ist (A, δ) eine H-Rechtscomodulalgebra. Damit ist die $\Longleftarrow$-Richtung von Satz 4.12 bewiesen. Der Beweis von Satz 4.12 ist nun vollständig.

Beweis von Satz 4.8: **1)** Die Abbildung

$$\begin{aligned}&\{\delta : V \to V \otimes C \mid \delta \text{ ist eine } C\text{-Rechtscomodulstruktur auf } V\} \\ &\to \{\mu : C^* \otimes V \to V \mid \mu \text{ ist eine } C^*\text{-Linksmodulstruktur auf } V\},\end{aligned}$$

die jeder C-Rechtscomodulstruktur δ auf V die zu δ adjungierte C^*-Modulstruktur μ zuordnet, ist bijektiv, denn ihre Umkehrung ist die Abbildung

$$\begin{aligned}&\{\mu : C^* \otimes V \to V \mid \mu \text{ ist eine } C^*\text{-Linksmodulstruktur auf } V\} \\ &\to \{\delta : V \to V \otimes C \mid \delta \text{ ist eine } C\text{-Rechtscomodulstruktur auf } V\},\end{aligned}$$

die jeder C^*-Linksmodulstruktur μ auf V die zu μ adjungierte C-Rechtscomodulstruktur δ zuordnet (gemäß Satz 4.11).

2) Dies folgt aus **1)** und Satz 4.12.

Direkte Summen von Comoduln

Wie auch schon für Moduln lassen sich für Comoduln direkte Summen definieren:

Definition: Sei C eine Coalgebra, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien V_1, V_2, ..., V_n beliebige C-Rechtscomoduln. Dann definieren wir auf der direkten Summe $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ folgendermaßen eine C-Rechtscomodulstruktur:

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sei $\delta_i : V_i \to V_i \otimes C$ die C-Rechtscomodulstruktur des C-Rechtscomoduls V_i. Auf diese Weise haben wir eine Abbildung $\delta_i : V_i \to V_i \otimes C$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ erhalten. Aus diesen n Abbildungen läßt sich eine Abbildung $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \delta_i : \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (V_i \otimes C)$ zusammenbauen. Bezeichnen wir mit kan den kanonischen Isomorphismus $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} (V_i \otimes C) \to \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right) \otimes C$, und definieren wir eine Abbildung $\delta_\oplus : \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i \to \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right) \otimes C$ durch $\delta_\oplus = \operatorname{kan} \circ \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \delta_i\right)$, dann ist (wie wir in Bemerkung 4.20 beweisen werden) $\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i, \delta_\oplus\right)$ ein C-Rechtscomodul. Dieser C-Rechtscomodul heißt die *direkte Summe* der C-Rechtscomoduln V_1, V_2, ..., V_n.

4.20. Bemerkung: Um diese Definition zu rechtfertigen, müssen wir zeigen, daß $\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i, \delta_\oplus\right)$ tatsächlich ein C-Rechtscomodul ist. Dies werden wir jetzt erledigen:

Sei C eine Coalgebra, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien V_1, V_2, ..., V_n beliebige C-Rechtscomoduln. Unser Ziel ist es zu beweisen, daß $\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i, \delta_\oplus\right)$ ein C-Rechtscomodul ist, wobei $\delta_\oplus$ wie vorhin definiert ist. Dazu müssen wir nachweisen, daß $\delta_\oplus\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)} = v_{(0)} \otimes \Delta\left(v_{(1)}\right)$ und $v = v_{(0)} \varepsilon\left(v_{(1)}\right)$ für jedes $v \in \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ gilt, wobei wir $v_{(0)} \otimes v_{(1)}$ für $\delta_\oplus(v)$ schreiben.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sei $\operatorname{in}_j : V_j \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ die kanonische Inklusion von V_j in die direkte Summe $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$, und $\operatorname{in}_j^C : V_j \otimes C \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (V_i \otimes C)$ die kanonische Inklusion von $V_j \otimes C$ in die direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^{n} (V_i \otimes C)$. Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ist dann $\operatorname{in}_j \otimes \operatorname{id}_C = \operatorname{kan} \circ \operatorname{in}_j^C$ (denn so wird kan definiert) und $\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right) \circ \operatorname{in}_j = \operatorname{in}_j^C \circ \delta_j$ (denn so wird die direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i$ definiert) und daher

$$\underbrace{\delta_\oplus}_{= \operatorname{kan} \circ \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right)} \circ \operatorname{in}_j = \operatorname{kan} \circ \underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right) \circ \operatorname{in}_j}_{= \operatorname{in}_j^C \circ \delta_j} = \underbrace{\operatorname{kan} \circ \operatorname{in}_j^C}_{= \operatorname{in}_j \otimes \operatorname{id}_C} \circ \delta_j = (\operatorname{in}_j \otimes \operatorname{id}_C) \circ \delta_j.$$

Sei nun $v \in \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ beliebig. Dann ist $v = (w_1, w_2, ..., w_n)$ für irgendwelche $w_i \in V_i$. Mit anderen Worten: $v = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{in}_j (w_j)$. Folglich ist

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right)(v) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{in}_j (w_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right)(\operatorname{in}_j (w_j)) = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right) \circ \operatorname{in}_j}_{= \operatorname{in}_j^C \circ \delta_j}\right)(w_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{in}_j^C \circ \delta_j\right)(w_j) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{in}_j^C (\delta_j (w_j)).$$

Wegen $\delta_\oplus = \operatorname{kan} \circ \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right)$ ist nun

$$\delta_\oplus (v) = \operatorname{kan}\left(\underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \delta_i\right)(v)}_{= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{in}_j^C (\delta_j (w_j))}\right) = \operatorname{kan}\left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{in}_j^C (\delta_j (w_j))\right) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{kan}\left(\operatorname{in}_j^C (\delta_j (w_j))\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\operatorname{kan} \circ \operatorname{in}_j^C\right)}_{= \operatorname{in}_j \otimes \operatorname{id}_C} \left(\underbrace{\delta_j (w_j)}_{= (w_j)_{(0)} \otimes (w_j)_{(1)}}\right) = \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{in}_j \otimes \operatorname{id}_C)\left((w_j)_{(0)} \otimes (w_j)_{(1)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{in}_j \left((w_j)_{(0)}\right) \otimes (w_j)_{(1)}.$$

Damit ist

$$v_{(0)} \otimes v_{(1)} = \delta_\oplus (v) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{in}_j \left((w_j)_{(0)}\right) \otimes (w_j)_{(1)}.$$

Hieraus folgt einerseits

$$\begin{aligned}
\delta_{\oplus}\left(v_{(0)}\right)\otimes v_{(1)} &= \sum_{j=1}^{n}\delta_{\oplus}\left(\mathrm{in}_j\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\right)\otimes\left(w_j\right)_{(1)} = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\delta_{\oplus}\circ\mathrm{in}_j\right)}_{=(\mathrm{in}_j\otimes\mathrm{id}_C)\circ\delta_j}\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\otimes\left(w_j\right)_{(1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\mathrm{in}_j\otimes\mathrm{id}_C\right)\circ\delta_j\right)\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\otimes\left(w_j\right)_{(1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{in}_j\otimes\mathrm{id}_C\right)\left(\delta_j\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\right)\otimes\left(w_j\right)_{(1)}\\
&= \underbrace{\left(\left(\mathrm{in}_j\otimes\mathrm{id}_C\right)\otimes\mathrm{id}_C\right)}_{=\mathrm{in}_j\otimes\mathrm{id}_{C\otimes C}}\left(\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\delta_j\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\otimes\left(w_j\right)_{(1)}}_{\substack{=\left(w_j\right)_{(0)}\otimes\Delta\left(\left(w_j\right)_{(1)}\right)\\ (\text{denn } w_j\in V_j,\text{ und } V_j \text{ ist ein } C\text{-Comodul})}}\right)\\
&= \left(\mathrm{in}_j\otimes\mathrm{id}_{C\otimes C}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\right)_{(0)}\otimes\Delta\left(\left(w_j\right)_{(1)}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{in}_j\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\otimes\Delta\left(\left(w_j\right)_{(1)}\right),
\end{aligned}$$

andererseits aber

$$v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{in}_j\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\otimes\Delta\left(\left(w_j\right)_{(1)}\right),$$

und daher $\delta_{\oplus}\left(v_{(0)}\right)\otimes v_{(1)} = v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right)$.

Aus $v_{(0)}\otimes v_{(1)} = \sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{in}_j\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\otimes\left(w_j\right)_{(1)}$ folgt ferner

$$v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{in}_j\left(\left(w_j\right)_{(0)}\right)\varepsilon\left(\left(w_j\right)_{(1)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{in}_j\left(\underbrace{\left(w_j\right)_{(0)}\varepsilon\left(\left(w_j\right)_{(1)}\right)}_{\substack{=w_j\ (\text{denn } w_j\in V_j,\text{ und } V_j\\ \text{ist ein } C\text{-Comodul})}}\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{in}_j\left(w_j\right) = v.$$

Wir haben damit gezeigt: Für jedes $v\in\bigoplus\limits_{i=1}^{n}V_i$ gilt $\delta_{\oplus}\left(v_{(0)}\right)\otimes v_{(1)} = v_{(0)}\otimes\Delta\left(v_{(1)}\right)$ und $v = v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)$, wobei wir $v_{(0)}\otimes v_{(1)}$ für $\delta_{\oplus}(v)$ schreiben. Somit ist bewiesen, daß $\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n}V_i,\delta_{\oplus}\right)$ tatsächlich ein C-Rechtscomodul ist. Unsere obige Definition ist also gerechtfertigt.

4.21. Bemerkung: Sei C eine Coalgebra, sei $n\in\mathbb{N}$, und seien V_1, V_2, ..., V_n beliebige C-Rechtscomoduln. Für jedes $i\in\{1,2,...,n\}$ sei $\delta_i : V_i\to V_i\otimes C$ die C-Rechtscomodulstruktur des C-Rechtscomoduls V_i.

Wir haben weiter oben auf der direkten Summe $\bigoplus\limits_{i=1}^{n}V_i$ eine C-Rechtscomodulstruktur $\delta_{\oplus}$ definiert. Diese C-Rechtscomodulstruktur $\delta_{\oplus}$ induziert eine C^*-Linksmodulstruktur auf $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$, nämlich die zu $\delta_{\oplus}$ adjungierte C^*-Linksmodulstruktur. Auf diese Weise erhalten wir einen C^*-Linksmodul $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$.

Andererseits ist für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ eine C^*-Linksmodulstruktur auf dem Vektorraum V_i gegeben, nämlich die zu δ_i adjungierte C^*-Linksmodulstruktur. Auf diese Weise erhalten wir einen C^*-Linksmodul $\operatorname{adj}_C V_i$. Somit ist auch die direkte Summe $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i$ ein C^*-Linksmodul.

Die beiden C^*-Linksmoduln $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$ und $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i$ sind identisch (d. h. sie sind der gleiche Vektorraum mit der gleichen C^*-Linksmodulstruktur).

Beweis von Bemerkung 4.21: Daß $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$ und $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i$ als Vektorräume identisch sind, ist klar (denn als Vektorräume sind $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ und $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$). Um Bemerkung 4.21 nachzuweisen, müssen wir also nur noch zeigen, daß die C^*-Linksmodulstrukturen auf $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$ und $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i$ gleich sind.

Sei $\mu_{\oplus}$ die C^*-Linksmodulstruktur auf $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$, und sei μ die C^*-Linksmodulstruktur auf $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i$. Wir wollen also zeigen, daß $\mu = \mu_{\oplus}$ ist.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sei $\operatorname{in}_j : V_j \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ die kanonische Einbettung.

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sei μ_i die C^*-Linksmodulstruktur auf $\operatorname{adj}_C V_i$. Dann ist die C^*-Linksmodulstruktur μ auf $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i$ definiert durch

$$\mu\left(f \otimes (w_1, w_2, ..., w_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{in}_i\left(\mu_i\left(f \otimes w_i\right)\right)$$

$$\text{für jedes } f \in C^* \text{ und jedes } (w_1, w_2, ..., w_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V_i.$$

Doch μ_i ist die C^*-Linksmodulstruktur auf $\operatorname{adj}_C V_i$, also (nach der Definition von $\operatorname{adj}_C V_i$) die zu δ_i adjungierte C^*-Linksmodulstruktur. Das heißt,

$$\mu_i\left(f \otimes w\right) = w_{(0)} f\left(w_{(1)}\right) \qquad \text{für alle } f \in C^* \text{ und } w \in V_i$$

(denn so wurde die zu δ_i adjungierte C^*-Linksmodulstruktur definiert).

Andererseits ist $\mu_{\oplus}$ die C^*-Linksmodulstruktur auf $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$, also (nach der Definition von $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\right)$) die zu $\delta_{\oplus}$ adjungierte C^*-Linksmodulstruktur. Das heißt,

$$\mu_{\oplus}\left(f \otimes v\right) = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) \qquad \text{für alle } f \in C^* \text{ und } v \in \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$$

(denn so wurde die zu $\delta_\oplus$ adjungierte C^*-Linksmodulstruktur definiert).

Seien $f \in C^*$ und $v \in \bigoplus_{i=1}^n V_i$ beliebig gewählt. Wegen $v \in \bigoplus_{i=1}^n V_i$ können wir v in der Form $v = (w_1, w_2, ..., w_n)$ schreiben für irgendwelche $w_i \in V_i$. Daher ist

$$\mu\left(f \otimes v\right) = \mu\left(f \otimes (w_1, w_2, ..., w_n)\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{in}_i \left(\underbrace{\mu_i\left(f \otimes w_i\right)}_{\substack{=(w_i)_{(0)} f\left((w_i)_{(1)}\right) \\ (\text{da } \mu_i(f \otimes w) = w_{(0)} f\left(w_{(1)}\right) \\ \text{für alle } w \in V_i)}} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^n \mathrm{in}_i \left((w_i)_{(0)} f\left((w_i)_{(1)}\right)\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{in}_i \left((w_i)_{(0)}\right) f\left((w_i)_{(1)}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^n \mathrm{in}_j \left((w_j)_{(0)}\right) f\left((w_j)_{(1)}\right)$$

(hier haben wir i in der Summe durch j substituiert). Doch genauso wie im Beweis von Bemerkung 4.20 können wir zeigen, daß

$$v_{(0)} \otimes v_{(1)} = \sum_{j=1}^n \mathrm{in}_j \left((w_j)_{(0)}\right) \otimes (w_j)_{(1)}$$

ist, und hieraus folgt

$$v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) = \sum_{j=1}^n \mathrm{in}_j \left((w_j)_{(0)}\right) f\left((w_j)_{(1)}\right).$$

Damit haben wir

$$\mu\left(f \otimes v\right) = \sum_{j=1}^n \mathrm{in}_j \left((w_j)_{(0)}\right) f\left((w_j)_{(1)}\right) = v_{(0)} f\left(v_{(1)}\right) = \mu_\oplus\left(f \otimes v\right).$$

Da dies für alle $f \in C^*$ und $v \in \bigoplus_{i=1}^n V_i$ gilt, haben wir damit gezeigt: Die Abbildungen μ und $\mu_\oplus$ stimmen auf jedem reinen Tensor überein. Da aber μ und $\mu_\oplus$ zwei lineare Abbildungen sind, muss somit $\mu = \mu_\oplus$ gelten (denn zwei lineare Abbildungen, die auf jedem reinen Tensor übereinstimmen, müssen gleich sein (wegen Bemerkung 1.4 **2) b)**)). Da $\mu_\oplus$ die C^*-Linksmodulstruktur auf $\mathrm{adj}_C \left(\bigoplus_{i=1}^n V_i\right)$ ist, und μ die C^*-Linksmodulstruktur auf $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{adj}_C V_i$ ist, bedeutet dies: Die C^*-Linksmodulstruktur auf $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{adj}_C V_i$ ist gleich der C^*-Linksmodulstruktur auf $\mathrm{adj}_C \left(\bigoplus_{i=1}^n V_i\right)$. Also sind die C^*-Linksmoduln $\mathrm{adj}_C \left(\bigoplus_{i=1}^n V_i\right)$ und $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{adj}_C V_i$ identisch, und Bemerkung 4.21 ist bewiesen.

4.22. Folgerung: Sei C eine Coalgebra, sei $n \in \mathbb{N}$, und sei V ein C-Rechtscomodul. Wie wir wissen, ist dann ein C^*-Linksmodul $\operatorname{adj}_C V$ definiert.

Wir bezeichnen mit V^n die direkte Summe $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V$ der C-Rechtscomoduln $\underbrace{V, V, ..., V}_{n \text{ mal}}$. Dann ist V^n ein C-Rechtscomodul (gemäß unserer obigen Definition der direkten Summe von C-Rechtscomoduln). Daher ist $\operatorname{adj}_C (V^n)$ wiederum ein C^*-Linksmodul.

Die beiden C^*-Linksmoduln $\operatorname{adj}_C (V^n)$ und $(\operatorname{adj}_C V)^n$ sind identisch.

Beweis von Folgerung 4.22: Gemäß Bemerkung 4.21, angewandt auf $V_i = V$, sind die beiden C^*-Linksmoduln $\operatorname{adj}_C \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V \right)$ und $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V$ identisch. Wegen $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V = V^n$ und $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} \operatorname{adj}_C V = (\operatorname{adj}_C V)^n$ bedeutet dies: Die beiden C^*-Linksmoduln $\operatorname{adj}_C (V^n)$ und $(\operatorname{adj}_C V)^n$ sind identisch. Damit ist Folgerung 4.22 gezeigt.

Direkte Summen von Coalgebren

Bekanntlich kann man die direkte Summe (oder, was das gleiche bedeutet, das direkte Produkt) von endlich vielen Algebren definieren (dies ist als Vektorraum die direkte Summe, und die Algebrastruktur ist koordinatenweise). Auch für Coalgebren gibt es eine direkte Summe bzw. ein direktes Produkt (da wir nur den Fall endlich vieler Coalgebren betrachten, ist für uns der Unterschied unwesentlich):

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien C_1, C_2, ..., C_n Coalgebren. Dann definieren wir auf der direkten Summe $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ folgendermaßen eine Coalgebrastruktur:

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ bezeichnen wir (wie schon immer) die Comultiplikation der Coalgebra C_i mit $\Delta_{C_i} : C_i \to C_i \otimes C_i$, und die Coeins dieser Coalgebra mit $\varepsilon_{C_i} : C_i \to k$.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sei $\operatorname{in}_j : C_j \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ die kanonische Inklusion des j-ten Summanden in die direkte Summe.

Wir definieren eine Comultiplikation auf $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ als die Abbildung

$$\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{in}_j \otimes \operatorname{in}_j) \circ \Delta_{C_j} : \bigoplus_{i=1}^{n} C_i \to \left(\bigoplus_{i=1}^{n} C_i \right) \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{n} C_i \right)$$

(d. h. als die Summe der Abbildungen $(\operatorname{in}_j \otimes \operatorname{in}_j) \circ \Delta_{C_j} : C_j \to \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i \right) \otimes \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i \right)$) und eine Coeins auf $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ als die Abbildung $\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_{C_j} : \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i \to k$ (d. h. als die Summe der Abbildungen $\varepsilon_{C_j} : C_j \to k$). Auf diese Weise wird $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ zu einer Coalgebra.[160] Diese Coalgebra nennen wir die *direkte Summe* oder das *direkte Produkt* der Coalgebren C_1, C_2, ..., C_n.

5. Affine Schemata und affine Gruppen

[160] Der Beweis hiervon ist naheliegend und wird dem Leser überlassen.

Nun werden wir einen ganz neuen Zugang zu Hopfalgebren zeigen, zumindest zu den kommutativen - nämlich Grothendiecks Zugang über die sogenannten *Gruppenschemata*. Folgende Literatur wird zu diesem Thema empfohlen:

- William Waterhouse: *Introduction to affine group schemes*, Berlin, New York 1979.
- Michel Demazure, Peter Gabriel: *Introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, 1980.
- Jens Carsten Jantzen: *Representations of Algebraic Groups*, 2nd Edition 2003.

Das Yoneda-Lemma

Um Grothendiecks Zugang zu verstehen, benötigen wir ein sehr universelles Prinzip der Mathematik - das Yoneda-Lemma aus der Kategorientheorie. Wir beginnen mit ein paar Begriffen:

Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir bezeichnen mit Me (immer noch) die Kategorie der Mengen.

1) Für jedes Objekt $C \in \mathcal{C}$ läßt sich ein Funktor $\mathcal{C}(C,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Me}$ definieren durch

$$\begin{array}{lll} (\mathcal{C}(C,-))(D) = \mathcal{C}(C,D) & \text{für alle } D \in \mathcal{C}, & \text{und} \\ (\mathcal{C}(C,-))(f) = \mathcal{C}(C,f) & \text{für alle } f \in \mathcal{C}(D,E), & \text{wobei } D, E \in \mathcal{C}. \end{array}$$

Dabei verstehen wir unter $\mathcal{C}(C,f)$ die Abbildung von $\mathcal{C}(C,D)$ nach $\mathcal{C}(C,E)$, die jedem Morphismus $g \in \mathcal{C}(C,D)$ den Morphismus $fg \in \mathcal{C}(C,E)$ zuordnet. (Diese Abbildung $\mathcal{C}(C,f)$ ist genau die Abbildung $\mathcal{C}(\mathrm{id}_C, f)$ aus dem Abschnitt über Adjungierte Funktoren in Kapitel 1.)

Dieser Funktor $\mathcal{C}(C,-)$ heißt der Hom-*Funktor* von C. [161]

2) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Me}$ ein Funktor. Der Funktor F heißt *darstellbar*, wenn es ein Objekt $C \in \mathcal{C}$ mit $F \cong \mathcal{C}(C,-)$ gibt. (Dabei heißen zwei Funktoren isomorph, wenn es einen natürlichen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.)

5.1. Satz (Yoneda-Lemma): Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Mor}(U,V)$ die Menge aller natürlichen Transformationen von U nach V, wenn U und V zwei Funktoren sind.

1) Sei $C \in \mathcal{C}$. Für jeden Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Me}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}(C,-), F) \to F(C), \qquad \alpha \mapsto \alpha_C(\mathrm{id}_C)$$

eine Bijektion. Die Umkehrabbildung $F(C) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C}(C,-), F)$ von dieser Bijektion sendet jedes Element $a \in F(C)$ auf die natürliche Transformation $(\alpha_D : \mathcal{C}(C,D) \to F(D))_{D \in \mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}(C,-)$ nach F, wobei α_D durch

$$\alpha_D(f) = F(f)(a) \qquad \text{für alle Morphismen } f \in \mathcal{C}(C,D)$$

[161] Wir erinnern daran, daß "Funktor" bei uns immer "kovarianter Funktor" bedeutet, außer es steht das Adjektiv "kontravarianter" davor. Es gibt auch einen *kontravarianten* Hom-*Funktor* von C, nämlich den kontravarianten Funktor $\mathcal{C}(-,C)$, aber dieser wird uns im Folgenden nicht interessieren.

definiert ist.

2) Seien $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{C}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(D,C) &\to \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-),\mathcal{C}(D,-)), \\ a &\mapsto \mathcal{C}(a,-) \end{aligned}$$

ist bijektiv. Dabei verstehen wir unter $\mathcal{C}(a,-)$ die natürliche Transformation $(\mathcal{C}(a,E))_{E\in\mathcal{C}}$, wobei $\mathcal{C}(a,E) : \mathcal{C}(C,E) \to \mathcal{C}(D,E)$ die Abbildung ist, die jedem Morphismus $f \in \mathcal{C}(C,E)$ den Morphismus $fa \in \mathcal{C}(D,E)$ zuordnet.

Beweis: **1) a)** *Zeige:* Die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-),F) &\to F(C), \\ \alpha &\mapsto \alpha_C(\mathrm{id}_C) \end{aligned}$$

ist injektiv.

Beweis: Sei $\alpha \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-),F)$. Für alle $D \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(C,D)$ ist dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(C,C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\mathcal{C}(C,f)"'] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathcal{C}(C,D) \arrow[r, "\alpha_D"'] & F(D) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Das Element id_C von $\mathcal{C}(C,C)$ wird durch dieses Diagramm folgendermaßen transformiert:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_C \arrow[r, mapsto, "\alpha_C"] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(C,f)"'] & \alpha_C(\mathrm{id}_C) \arrow[d, mapsto, "F(f)"] \\ f \arrow[r, mapsto, "\alpha_D"'] & \alpha_D(f) = F(f)(\alpha_C(\mathrm{id}_C)) \end{tikzcd} .$$

Für jede $D \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{C}(C,D)$ ist also $\alpha_D(f) = F(f)(\alpha_C(\mathrm{id}_C))$. Damit ist α_D durch $\alpha_C(\mathrm{id}_C)$ eindeutig bestimmt; daher die Injektivität.

b) *Zeige:* Die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-),F) &\to F(C), \\ \alpha &\mapsto \alpha_C(\mathrm{id}_C) \end{aligned}$$

ist surjektiv.

Beweis: Sei $a \in F(C)$. Definiere eine natürliche Transformation $\alpha = (\alpha_D)_{D\in\mathcal{C}} : \mathcal{C}(C,-) \to F$, wobei für jedes $D \in \mathcal{C}$ die Abbildung $\alpha_D : \mathcal{C}(C,D) \to F(D)$ durch $\alpha_D(f) = F(f)(a)$ für alle $f \in \mathcal{C}(C,D)$ definiert ist. Diese Transformation α erfüllt dann $\alpha_C(\mathrm{id}_C) = a$ (denn $\alpha_C(\mathrm{id}_C) = F(\mathrm{id}_C)(a) = a$).

c) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-),F) &\to F(C), \\ \alpha &\mapsto \alpha_C(\mathrm{id}_C) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion (wegen **a)** und **b)**). Die Umkehrabbildung $F(C) \to \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-),F)$ von dieser Bijektion sendet jedes Element $a \in F(C)$ auf die natürliche Transformation $(\alpha_D : \mathcal{C}(C,D) \to F(D))_{D\in\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}(C,-)$ nach F, wobei α_D durch

$$\alpha_D(f) = F(f)(a) \qquad \text{für alle Morphismen } f \in \mathcal{C}(C,D)$$

definiert ist. (Dies geht aus dem Beweis von **b)** hervor.) Damit ist 5.1. **1)** gezeigt.

2) folgt aus **1)**: Sei $F = \mathcal{C}(D, -)$. Nach **1)** ist dann

$$\begin{aligned} &F(C) \to \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-), F), \\ &\quad a \mapsto (\alpha_E : \mathcal{C}(C,E) \to F(E))_{E \in \mathcal{C}}, \\ &\qquad\qquad \text{wobei } \alpha_E(f) = F(f)(a) \text{ für alle } f \in \mathcal{C}(C,E) \text{ für alle } E \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

eine Bijektion. Mit anderen Worten: Wir haben eine Bijektion

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}(D,C) \to \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-), \mathcal{C}(D,-)), \\ &\quad a \mapsto (\alpha_E : \mathcal{C}(C,E) \to \mathcal{C}(D,E))_{E \in \mathcal{C}}, \\ &\qquad\qquad \text{wobei } \alpha_E(f) = \mathcal{C}(a,E)(f) \text{ für alle } f \in \mathcal{C}(C,E) \text{ für alle } E \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

(denn $F(f)(a) = (\mathcal{C}(D,-))(f)(a) = \mathcal{C}(D,f)(a) = fa = \mathcal{C}(a,E)(f)$). Das heißt,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(D,C) &\to \operatorname{Mor}(\mathcal{C}(C,-), \mathcal{C}(D,-)), \\ a &\mapsto \mathcal{C}(a,-) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion, was zu beweisen war.

5.2. Bemerkung: 1) Nach 5.1. **2)** ist der kontravariante Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\to \mathcal{C}\,\mathrm{Me}, \\ C &\mapsto \mathcal{C}(C,-) \end{aligned}$$

volltreu. Dabei bedeutet $\mathcal{C}\,\mathrm{Me}$ die Kategorie aller Funktoren von $\mathcal{C}$ nach Me mit natürlichen Transformationen zwischen Funktoren als Morphismen.

Hierbei heißt ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *volltreu*, wenn für alle $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(C_1, C_2) &\to \mathcal{D}(F(C_1), F(C_2)), \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

bijektiv ist. Dabei sollen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei beliebige Kategorien sein.

Volltreue Abbildungen sind "fast" Äquivalenzen; genauer gesagt gilt folgendes Resultat (Beweis in den Übungen): Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien, und ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, dann ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ genau dann eine Äquivalenz, wenn F volltreu ist und für jedes $D \in \mathcal{D}$ ein $C \in \mathcal{C}$ mit $F(C) \cong D$ existiert.

2) Nach **1)** ist also der Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\to \{F : \mathcal{C} \to \mathrm{Me} \mid F \text{ ist darstellbar}\}, \\ C &\mapsto \mathcal{C}(C,-). \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Affine Schemata und affine Gruppen

Definition: Sei $\mathcal{A}_k$ die Kategorie der kommutativen k-Algebren (mit Algebrahomomorphismen als Morphismen).

1) Sei $F : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Me}$ ein Funktor. Der Funktor F heißt *affines Schema* - oder, ausführlicher, *affines k-Schema* -, wenn F darstellbar ist.

2) Sei Mon die Kategorie der Monoide (mit Monoidhomomorphismen als Morphismen) und Gr die Kategorie der Gruppen (mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen).

Ein Funktor $G : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Mon}$ heißt *affines Monoid* - oder, ausführlicher, *affines k-Monoid* -, wenn die Verkettung $\mathcal{A}_k \xrightarrow{G} \mathrm{Mon} \xrightarrow{\mathrm{Vergiss}} \mathrm{Me}$ ein affines Schema ist. Dabei bezeichnet Vergiss den Funktor $\mathrm{Mon} \to \mathrm{Me}$, der jedem Monoid die zugrundeliegende Menge zuordnet.

Ein Funktor $G : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Gr}$ heißt *affine Gruppe* - oder, ausführlicher, *affine k-Gruppe* -, wenn die Verkettung $\mathcal{A}_k \xrightarrow{G} \mathrm{Gr} \xrightarrow{\mathrm{Vergiss}} \mathrm{Me}$ ein affines Schema ist. Dabei bezeichnet Vergiss den Funktor $\mathrm{Gr} \to \mathrm{Me}$, der jeder Gruppe die zugrundeliegende Menge zuordnet.

3) Sei Sch_k die Kategorie der affinen Schemata, wobei die Morphismen von Sch_k die natürlichen Transformationen zwischen den affinen Schemata sein sollen (affine Schemata sind ja Funktoren). Entsprechend sei Mon_k die Kategorie der affinen Monoide, und Gr_k die Kategorie der affinen Gruppen.

4) Sei $A \in \mathcal{A}_k$. Dann ist der Funktor $\mathrm{Alg}(A, -) : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Me}$ identisch mit dem Funktor $\mathcal{A}_k(A, -) : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Me}$ [162], und ist daher darstellbar, d. h. ein affines k-Schema. Das affine Schema $\mathrm{Alg}(A, -) : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Me}$ wird auch mit $\mathrm{Sp}\, A$ bezeichnet und das *Spektrum* von A genannt. Sind $A, B \in \mathcal{A}_k$, und ist $f : A \to B$ ein Algebrahomomorphismus, so definieren wir eine natürliche Transformation $\mathrm{Sp}\, f : \mathrm{Sp}\, B \to \mathrm{Sp}\, A$ durch

$$(\mathrm{Sp}\, f)(X) = \mathrm{Alg}(f, X) \qquad \text{für jedes } X \in \mathcal{A}_k$$

[163]. Damit haben wir einen kontravarianten Funktor Sp von $\mathcal{A}_k$ in die Kategorie aller Funktoren von $\mathcal{A}_k$ nach Me festgelegt.

5.3. Beispiele: 1) Für jedes $n \geq 0$ kann man einen Funktor $\mathbb{A}^n : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Me}$ wie folgt definieren: Für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ sei $\mathbb{A}^n(R) = R^n$ (dies ist der n-dimensionale affine Raum über R), und für je zwei $R, S \in \mathcal{A}_k$ und jeden Algebrahomomorphismus $\varphi : R \to S$ sei $\mathbb{A}^n(\varphi) : \mathbb{A}^n(R) \to \mathbb{A}^n(S)$ einfach die Abbildung $\varphi^n : R^n \to S^n$ (wobei φ^n hier nicht die n-fache Verkettung $\varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi$, sondern das n-fache kartesische Produkt $\varphi \times \varphi \times ... \times \varphi$ bedeutet).

Wir werden jetzt zeigen, daß $\mathbb{A}^n$ ein affines Schema ist:

Sei $k[T_1, T_2, ..., T_n]$ die Polynomalgebra in n Variablen T_1, T_2, ..., T_n über k. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{A}^n \cong \mathrm{Alg}(k[T_1, T_2, ..., T_n], -)$ (denn für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Alg}(k[T_1, T_2, ..., T_n], R) \to R^n, \qquad \varphi \mapsto (\varphi(T_1), \varphi(T_2), ..., \varphi(T_n))$$

eine natürliche Bijektion[164]). Daher ist der Funktor $\mathbb{A}^n$ darstellbar. Das heißt, $\mathbb{A}^n$ ist ein affines Schema.

2) Für jedes $n \geq 0$ kann man einen Funktor $\mathrm{GL}_n : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Gr}$ wie folgt definieren: Für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ sei das Bild von R unter dem Funktor GL_n die Matrixgruppe

[162] denn für jedes $D \in \mathcal{A}_k$ ist $\mathrm{Alg}(A, D) = \mathcal{A}_k(A, D)$, und auch auf Morphismen wirken diese beiden Funktoren gleich

[163] Zur Erinnerung: Der Morphismus $\mathrm{Alg}(f, X) : \mathrm{Alg}(B, X) \to \mathrm{Alg}(A, X)$ ist definiert durch $(\mathrm{Alg}(f, X))(h) = h \circ f$ für jedes $h \in \mathrm{Alg}(B, X)$.

[164] *Beweis:* Sie ist eine Bijektion gemäß der universellen Eigenschaft der Polynomrings $k[T_1, T_2, ..., T_n]$. Sie ist natürlich, denn für je zwei $R, S \in \mathcal{A}_k$ und jeden Algebrahomomorphismus

$\mathrm{GL}_n(R)$; für je zwei $R, S \in \mathcal{A}_k$ und jeden Algebrahomomorphismus $\rho : R \to S$ sei $\mathrm{GL}_n(\rho) : \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(S)$ diejenige Abbildung, die jede Matrix $(r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(R)$ auf die Matrix $(\rho(r_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ abbildet[165].

Dieser Funktor GL_n ist eine affine Gruppe, denn der "zugehörige Mengenfunktor" (also die Verkettung $\mathcal{A}_k \xrightarrow{\mathrm{GL}_n} \mathrm{Gr} \xrightarrow{\mathrm{Vergiss}} \mathrm{Me}$) ist ein darstellbarer Funktor, denn für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ gibt es eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Alg}\left(k\left[T_{i,j}, d^{-1} \ \mid \ 1 \leq i,j \leq n\right], R\right) \to \mathrm{GL}_n(R)$$

von Mengen, wobei $d = \det\left((T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}\right)$. (Dabei bezeichnen wir mit $k\left[T_{i,j}, d^{-1} \ \mid \ 1 \leq i,j \leq n\right]$ den Ring, der aus dem Polynomring $k\left[T_{i,j} \ \mid \ 1 \leq i,j \leq n\right]$ durch Lokalisierung an der multiplikativen Teilmenge $\{d^i \mid i \geq 0\}$ entsteht.)

3) Wir können einen Funktor $\mathrm{G_a} : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Gr}$ definieren, der jeder kommutativen k-Algebra R die additive Gruppe von R zuordnet, und Morphismen zwischen kommutativen k-Algebren einfach als Morphismen zwischen ihren additiven Gruppen uminterpretiert.[166]

Auch dieser Funktor $\mathrm{G_a}$ ist eine affine Gruppe, denn für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ gibt es eine kanonische Bijektion

$$\mathrm{Alg}(k[T], R) \to R, \qquad \varphi \mapsto \varphi(T)$$

von Mengen.

Diese affine Gruppe $\mathrm{G_a}$ heißt *additive Gruppe*.

4) Angenommen, $\operatorname{char} k = p > 0$. Sei ferner $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Dann können wir einen Funktor $\alpha_{p^n} : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Gr}$ definieren mit

$$\alpha_{p^n}(R) = \left\{r \in R \mid r^{p^n} = 0\right\} \text{ als additive Gruppe}$$

für alle $R \in \mathcal{A}_k$ (und Morphismen zwischen kommutativen k-Algebren gehen in ihre Restriktionen auf die Gruppen $\left\{r \in R \mid r^{p^n} = 0\right\}$ über).

Auch dieser Funktor α_{p^n} ist eine affine Gruppe, denn für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ ist

$$\mathrm{Alg}\left(k[T] \diagup \left(T^{p^n}\right), R\right) \to \alpha_{p^n}(R), \qquad \varphi \mapsto \varphi\left(\overline{T}\right)$$

eine natürliche Bijektion von Mengen.

$\rho : R \to S$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(k[T_1, T_2, ..., T_n], R) \arrow[r, "\text{Bijektion}"] \arrow[d, "\mathrm{Alg}(\mathrm{id},\rho)"'] & R^n \arrow[d, "\rho^n"] \\
\mathrm{Alg}(k[T_1, T_2, ..., T_n], S) \arrow[r, "\text{Bijektion}"] & S^n
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

[165] Diese Abbildung $\mathrm{GL}_n(\rho)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, weil ρ ein Algebrahomomorphismus ist.

[166] Dieser Funktor $\mathrm{G_a}$ ist ein sogenannter "Vergissfunktor" - so nennt man Funktoren, die ein Objekt mit viel Struktur nehmen, und einen Teil dieser Struktur "vergessen". So wird hier eine kommutative k-Algebra genommen, und ihre k-Vektorraumstruktur und Ringstruktur vergessen - es bleibt eine additive Gruppenstruktur übrig.

Wir werden jetzt einen wichtigen Satz zeigen, der jeder kommutativen Bialgebra ein affines Monoid zuordnet und umgekehrt, und jeder kommutativen Hopfalgebra eine affine Gruppe und umgekehrt. Dies wirft ein ganz neues Licht auf kommutative Bialgebren und Hopfalgebren.

5.4. Satz: 1) a) Sei A eine kommutative Bialgebra. Dann bekommt das affine Schema $G = \operatorname{Sp} A$ wie folgt die Struktur eines affinen Monoids: Für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ ist $G(R) = \operatorname{Alg}(A, R)$ ein Monoid mit Konvolution als Produkt und 1-Element $\eta\varepsilon \in G(R)$. (Hierbei bezeichnet η die Abbildung $\eta_R : k \to R$, und ε bezeichnet die Abbildung $\varepsilon_A : A \to k$.)

Hierbei gilt: In $G(A \otimes A)$ ist $\Delta = i_1 * i_2$, wobei die Abbildungen i_1 und i_2 durch

$$\begin{aligned} i_1 &: A \to A \otimes A, & a &\mapsto a \otimes 1, \\ i_2 &: A \to A \otimes A, & a &\mapsto 1 \otimes a \end{aligned}$$

definiert sind.

In $G(k)$ ist ε das 1-Element.

b) Sei A eine kommutative Hopfalgebra. Dann bekommt das affine Schema $G = \operatorname{Sp} A$ wie folgt die Struktur einer affinen Gruppe: Für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ ist $G(R) = \operatorname{Alg}(A, R)$ eine Gruppe mit Konvolution als Produkt und 1-Element $\eta\varepsilon \in G(R)$, und für jedes $f \in G(R)$ ist $f^{-1} = fS$.

Hierbei gilt zusätzlich zu den Ergebnissen von **1) a)** noch: In $G(A)$ ist $S = \mathrm{id}^{-1}$.

2) a) Ist G ein affines Monoid, dann gibt es eine kommutative Bialgebra A so, daß $G \cong \operatorname{Sp} A$ als affines Monoid ist (wobei die Struktur eines affinen Monoids auf $\operatorname{Sp} A$ nach **1)** definiert ist).

b) Ist G eine affine Gruppe, dann gibt es eine kommutative Hopfalgebra A so, daß $G \cong \operatorname{Sp} A$ als affine Gruppe ist (wobei die Struktur einer affinen Gruppe auf $\operatorname{Sp} A$ nach **1)** definiert ist).

Beweis: **1)** Für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ haben wir schon mit Folgerung 2.15. **1)** gezeigt, daß $G(R) = \operatorname{Alg}(A, R)$ ein Monoid bzw. ein Gruppe mit Konvolution als Produkt ist (je nachdem, ob A eine kommutative Bialgebra oder eine kommutative Hopfalgebra ist). Dann gilt: In $G(A \otimes A)$ ist

$$(i_1 * i_2)(a) = i_1\left(a_{(1)}\right) i_2\left(a_{(2)}\right) = \left(a_{(1)} \otimes 1\right)\left(1 \otimes a_{(2)}\right) = a_{(1)} \otimes a_{(2)} = \Delta(a)$$

für alle $a \in A$. Somit ist $i_1 * i_2 = \Delta$ in $G(A \otimes A)$. In $G(k)$ ist ε offensichtlich das 1-Element. Für kommutative Hopfalgebren A ist $S = \mathrm{id}^{-1}$ in $G(A)$ nach Definition der Antipode, da A kommutativ ist (siehe oben).

2) Erst einmal einige Lemmata:

Lemma 1: In der Kategorie $\mathcal{A}_k$ ist $\otimes$ das Coprodukt.

Beweis: Seien $A, B \in \mathcal{A}_k$. Betrachte die Algebrahomomorphismen

$$\begin{aligned} i_1 &: A \to A \otimes B, & a &\mapsto a \otimes 1; \\ i_2 &: B \to A \otimes B, & b &\mapsto 1 \otimes b. \end{aligned}$$

Für jedes $X \in \mathcal{A}_k$ und beliebige Algebrahomomorphismen $\varphi : A \to X$ und $\psi : B \to X$ gibt es dann genau einen Algebrahomomorphismus $\Phi : A \otimes B \to X$ mit $\Phi i_1 = \varphi$ und $\Phi i_2 = \psi$. Und zwar definiert man diesen Homomorphismus Φ durch $\Phi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ (daß Φ dabei ein Algebrahomomorphismus ist, benötigt die Kommutativität von X), und die Eindeutigkeit von Φ folgt aus der Tatsache, daß

$$\Phi(a\otimes b)=\Phi((a\otimes 1)\cdot(1\otimes b))=\Phi\left(\underbrace{a\otimes 1}_{=i_1(a)}\right)\Phi\left(\underbrace{1\otimes b}_{=i_2(b)}\right)=\underbrace{(\Phi i_1)}_{=\varphi}(a)\underbrace{(\Phi i_2)}_{=\psi}(b)=\varphi(a)\,\psi(b)$$

für alle $a\in A$ und $b\in B$ gilt.

Lemma 2: Für beliebige $A,B\in\mathcal{A}_k$ gilt $\operatorname{Sp}(A\otimes B)\cong\operatorname{Sp}A\times\operatorname{Sp}B$. Dabei ist für je zwei affine Schemata F und G das affine Schema $F\times G\in\mathrm{Sch}_k$ definiert durch

$$(F\times G)(R)=F(R)\times G(R)\qquad\text{für alle } R\in\mathcal{A}_k.$$

Beweis: Nach Lemma 1 ist $\otimes$ das Coprodukt in $\mathcal{A}_k$. Für alle $R\in\mathcal{A}_k$ ist nun

$$(\operatorname{Sp}A)(R)\times(\operatorname{Sp}B)(R)\to(\operatorname{Sp}(A\otimes B))(R),\qquad(\varphi,\psi)\mapsto(a\otimes b\mapsto\varphi(a)\,\psi(b))$$

eine kanonische Bijektion; in der Tat ist diese Abbildung einfach die Abbildung

$$\operatorname{Alg}(A,R)\times\operatorname{Alg}(B,R)\to\operatorname{Alg}(A\otimes B,R)\qquad(\varphi,\psi)\mapsto(a\otimes b\mapsto\varphi(a)\,\psi(b))$$

(denn $(\operatorname{Sp}A)(R)=\operatorname{Alg}(A,R)$, $(\operatorname{Sp}B)(R)=\operatorname{Alg}(B,R)$ und $(\operatorname{Sp}(A\otimes B))(R)=\operatorname{Alg}(A\otimes B,R)$), und somit eine Bijektion (weil $\otimes$ das Coprodukt in $\mathcal{A}_k$ ist). Damit ist Lemma 2 bewiesen.

a) Wir werden nun die Behauptung von **2) a)** aus Lemma 2 nach dem Yoneda-Lemma (Satz 5.1.) herleiten. Und zwar folgendermaßen: Da G ein affines Schema ist, ist G darstellbar, d. h. es gibt ein $A\in\mathcal{A}_k$, für welches $G\cong\operatorname{Sp}A$ als Mengenfunktoren (d. h. als affine Schemata) ist. Für alle $R\in\mathcal{A}_k$ ist also

$$G(R)\cong(\operatorname{Sp}A)(R)=\operatorname{Alg}(A,R)\qquad\text{ein natürlicher Isomorphismus von Mengenfunktoren.}$$

Wir werden jetzt auf der kommutativen Algebra A eine bestimmte Bialgebrastruktur einführen, und zeigen, daß dann G und $\operatorname{Sp}A$ auch als affine Monoide (und nicht nur als affine Schemata) zueinander isomorph sind.

Da G ein affines Monoid ist, gibt es eine natürliche Transformation $\mu:G\times G\to G$ von Mengenfunktoren, wobei für alle $R\in\mathcal{A}_k$ der Morphismus $\mu_R:G(R)\times G(R)\to G(R)$ einfach die Multiplikationsabbildung im Monoid $G(R)$ ist. Wegen $G\cong\operatorname{Sp}A$ können wir also eindeutig eine natürliche Transformation $\widetilde{\mu}:\operatorname{Sp}A\times\operatorname{Sp}A\to\operatorname{Sp}A$ konstruieren, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\
\operatorname{Sp}A\times\operatorname{Sp}A \arrow[r, "\widetilde{\mu}"'] & \operatorname{Sp}A
\end{tikzcd}$$

von natürlichen Transformationen zwischen Funktoren kommutiert.

Nach dem Yoneda-Lemma und wegen $\operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} A \cong \operatorname{Sp}(A \otimes A)$ gibt es nun einen Algebrahomomorphismus $\Delta : A \to A \otimes A$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\
\operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} A \arrow[r, "\widetilde{\mu}"] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{Sp} A \\
\operatorname{Sp}(A \otimes A) \arrow[ur, dotted, "\operatorname{Sp}\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.[167]

Da G ein affines Monoid ist, ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd}$$

kommutativ (die Pfeile dieses Diagramms sind natürliche Transformationen zwischen Funktoren). Wegen $G \cong \operatorname{Sp} A$ und $\mu \cong \operatorname{Sp}\Delta$ (und wegen $\operatorname{Sp}(A \otimes B) = \operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} B$) läßt sich dieses Diagramm erweitern zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Sp}(A \otimes A \otimes A) \arrow[rrr, "\operatorname{Sp}(\Delta \otimes \mathrm{id})"] \arrow[ddd, "\operatorname{Sp}(\mathrm{id} \otimes \Delta)"'] & & & \operatorname{Sp}(A \otimes A) \arrow[ddd, "\operatorname{Sp}\Delta"] \\
& G \times G \times G \arrow[ul, "\cong"] \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] & G \times G \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[d, "\mu"] & \\
& G \times G \arrow[r, "\mu"'] \arrow[dl, "\cong"] & G \arrow[dr, "\cong"] & \\
\operatorname{Sp}(A \otimes A) \arrow[rrr, "\operatorname{Sp}\Delta"'] & & & \operatorname{Sp} A
\end{tikzcd}$$

[167]Genauer: Die Verkettung von $\widetilde{\mu}$ und dem kanonischen Isomorphismus $\operatorname{Sp}(A \otimes A) \to \operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} A$ ist eine natürliche Transformation von $\operatorname{Sp}(A \otimes A)$ nach $\operatorname{Sp} A$. Doch nach 5.1. **2)**, angewandt auf $\mathcal{C} = \mathcal{A}_k$, $D = A$ und $C = A \otimes A$, ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sp} : \mathcal{A}_k(A, A \otimes A) &\to \operatorname{Mor}(\mathcal{A}_k(A \otimes A, -), \mathcal{A}_k(A, -)), \\
a &\mapsto \mathcal{A}_k(a, -)
\end{aligned}$$

bijektiv. Wegen $\mathcal{A}_k(A, A \otimes A) = \operatorname{Alg}(A, A \otimes A)$, $\mathcal{A}_k(A \otimes A, -) = \operatorname{Alg}(A \otimes A, -) = \operatorname{Sp}(A \otimes A)$, $\mathcal{A}_k(A, -) = \operatorname{Alg}(A, -) = \operatorname{Sp} A$ und $\mathcal{A}_k(a, -) = \operatorname{Alg}(a, -) = \operatorname{Sp} a$ läßt sich dies folgendermaßen umschreiben: Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sp} : \operatorname{Alg}(A, A \otimes A) &\to \operatorname{Mor}(\operatorname{Sp}(A \otimes A), \operatorname{Sp} A), \\
a &\mapsto \operatorname{Sp} a
\end{aligned}$$

ist bijektiv, insbesondere also surjektiv. Daher gibt es ein $\Delta \in \operatorname{Alg}(A, A \otimes A)$ so, daß unsere natürliche Transformation $\operatorname{Sp}(A \otimes A) \to \operatorname{Sp} A$ die Form $\operatorname{Sp}\Delta$ hat.

Das "äußere Rechteck" dieses Diagramms ergibt mithilfe des Yoneda-Lemmas ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd} \quad ;$$

dieses Diagramm bedeutet, daß die Abbildung $\Delta : A \to A \otimes A$ coassoziativ ist.

Wir haben hiermit (ausgehend von der natürlichen Transformation $\mu : G \times G \to G$, die der Multiplikation auf G entspricht) einen Algebrahomomorphismus $\Delta : A \to A \otimes A$ konstruiert, der das Axiom der Coassoziativität erfüllt. Jetzt werden wir auf ähnliche Weise (ausgehend von dem "Einselement" von G) einen Algebrahomomorphismus $\varepsilon : A \to k$ konstruieren, und A wird damit zu einer kommutativen Bialgebra. Im Detail verläuft unser Beweis folgendermaßen:

Wir werden im Folgenden die Abkürzung 1 in unterschiedlicher Bedeutung verwenden. Und zwar bezeichnen wir mit 1 die triviale Gruppe, sowie auch die triviale affine Gruppe (d. h. die affine Gruppe, die durch $1(R) = 1$ für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ definiert ist). Dann gilt die kanonische Isomorphie $1 \cong \operatorname{Sp} k$.

Da G ein affines Monoid ist, gibt es eine natürliche Transformation $\eta : 1 \to G$ von Mengenfunktoren, wobei für alle $R \in \mathcal{A}_k$ der Morphismus $\eta_R : 1(R) \to G(R)$ einfach die Abbildung ist, die das einzige Element von $1(R)$ auf das Einselement von $G(R)$ abbildet. Wegen $G \cong \operatorname{Sp} A$ und $1 \cong \operatorname{Sp} k$ können wir also eindeutig eine natürliche Transformation $\widetilde{\eta} : \operatorname{Sp} k \to \operatorname{Sp} A$ konstruieren, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{Sp} k \arrow[r, "\widetilde{\eta}"'] & \operatorname{Sp} A \end{tikzcd}$$

von natürlichen Transformationen zwischen Funktoren kommutiert. Nach dem Yoneda-Lemma gibt es einen Algebrahomomorphismus $\varepsilon : A \to k$ mit $\widetilde{\eta} = \operatorname{Sp} \varepsilon$. Also kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{Sp} k \arrow[r, "\operatorname{Sp}\varepsilon"'] & \operatorname{Sp} A \end{tikzcd} \quad .$$

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von Funktoren $\zeta : 1 \times G \to G$, gegeben durch

$$\zeta_R : \underbrace{(1 \times G)(R)}_{=1 \times G(R)} \to G(R), \qquad (1, g) \mapsto g$$

für alle $R \in \mathcal{A}_k$. Wegen $G \cong \operatorname{Sp} A$ und $1 \cong \operatorname{Sp} k$ entspricht dieser kanonische Isomorphismus einem kanonischen Isomorphismus $\operatorname{Sp} k \times \operatorname{Sp} A \to \operatorname{Sp} A$, also einem kanonischen Isomorphismus $\operatorname{Sp}(k \otimes A) \to \operatorname{Sp} A$ (denn $\operatorname{Sp}(k \otimes A) \cong \operatorname{Sp} k \times \operatorname{Sp} A$ nach Lemma 2), und dieser Isomorphismus ist einfach $\operatorname{Sp} \mathrm{kan}$, wobei

$$\mathrm{kan} : A \to k \otimes A, \qquad x \mapsto 1 \otimes x$$

der kanonische Algebrahomomorphismus ist.

Da G ein affines Monoid ist, ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
1\times G \arrow[d, "\eta\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\cong", "\zeta"'] & \\
G\times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd}$$

kommutativ (die Pfeile dieses Diagramms sind natürliche Transformationen zwischen Funktoren). Wegen $G \cong \mathrm{Sp}\,A$, $\mu \cong \mathrm{Sp}\,\Delta$, $1 \cong \mathrm{Sp}\,k$, $\eta \cong \mathrm{Sp}\,\varepsilon$ und $\zeta \cong \mathrm{Sp}\,\mathrm{kan}$ (und wegen $\mathrm{Sp}\,(A\otimes B) = \mathrm{Sp}\,A \times \mathrm{Sp}\,B$) läßt sich dieses Diagramm erweitern zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sp}\,(k\otimes A) \arrow[ddd, "\mathrm{Sp}(\varepsilon\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dddrrr, bend left, "\mathrm{Sp}\,\mathrm{kan}"] & & & \\
 & 1\times G \arrow[ul, "\cong"'] \arrow[d, "\eta\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\cong", "\zeta"'] & & \\
 & G\times G \arrow[r, "\mu"'] \arrow[dl, "\cong"] & G \arrow[dr, "\cong"] & \\
\mathrm{Sp}\,(A\otimes A) \arrow[rrr, "\mathrm{Sp}\,\Delta"'] & & & \mathrm{Sp}\,A
\end{tikzcd}$$

.

Das "äußere Dreieck" dieses Diagramms ergibt mithilfe des Yoneda-Lemmas ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & A\otimes A \arrow[dl, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \\
k\otimes A &
\end{tikzcd}.$$

Analog beweist man, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"', "\cong"] & A\otimes A \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \\
A\otimes k &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei kan dieses Mal nicht mehr den kanonischen Homomorphismus $A \to k\otimes A$, sondern den kanonischen Homomorphismus $A \to A\otimes k$ bezeichnet. Somit ist die Abbildung Δ bezüglich ε counitär.

Insgesamt ist damit gezeigt, daß (A, Δ, ε) eine Coalgebra ist. Da Δ und ε Algebrahomomorphismen sind, ist A damit sogar eine Bialgebra. Wir wissen also, daß A eine Bialgebra ist, und daß $G \cong \mathrm{Sp}\,A$ als affine Schemata gilt. Was wir zum Beweis von **2) a)** noch zeigen müssen, ist, daß $G \cong \mathrm{Sp}\,A$ *als affine Monoide* gilt. Wir müssen also zeigen: Die Abbildung $\widetilde{\mu}_R$ hat für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ die Form

$$\widetilde{\mu}_R : \mathrm{Alg}\,(A,R)\times\mathrm{Alg}\,(A,R) \longrightarrow \mathrm{Alg}\,(A,R)\,, \qquad (\varphi,\psi)\mapsto \varphi * \psi,$$

wobei $*$ die Konvolution (bezüglich der Coalgebrastruktur auf A) ist, und die Abbildung $\widetilde{\eta}_R$ hat für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ die Form

$$\widetilde{\eta}_R : \mathrm{Alg}\,(k,R) \to \mathrm{Alg}\,(A,R)\,, \qquad \tau \mapsto \tau\circ\varepsilon.$$

Aber beides folgt trivialerweise daraus, wie wir Δ und ε definiert haben (denn nach der Definition von Δ ist $\widetilde{\mu}_R(\varphi, \psi) = \operatorname{mult}(\varphi \otimes \psi)\Delta$ für alle $R \in \mathcal{A}_k$ und $\varphi, \psi \in \operatorname{Alg}(A, R)$, wobei $\operatorname{mult} : R \otimes R \to R$ die Multiplikationsabbildung von R ist[168], und somit hat $\widetilde{\mu}_R$ die gewünschte Form; ferner hat $\widetilde{\eta}_R$ die gewünschte Form, da $\widetilde{\eta} = \operatorname{Sp}\varepsilon$ ist).

b) Nach **2) a)** wissen wir, daß es eine kommutative Bialgebra A gibt so, daß $G \cong \operatorname{Sp} A$ als affine Monoide ist. Dabei wurde die Comultiplikation $\Delta : A \to A \otimes A$ auf A mithilfe des Lemmas von Yoneda aus der Multiplikationsabbildung $\mu : G \times G \to G$ konstruiert, und die Coeins $\varepsilon : A \to k$ auf A wurde mithilfe des Lemmas von Yoneda aus dem Einselement $\eta : 1 \to G$ konstruiert. Jetzt werden wir eine Antipode $S : A \to A$ von A finden, indem wir das Lemma von Yoneda auf die Inversionsabbildung $()^{-1} : G \to G$ anwenden. Genauer gesagt machen wir folgendes:

Da G eine affine Gruppe ist, gibt es eine natürliche Transformation $()^{-1} : G \to G$ zwischen Mengenfunktoren, die

$$\left(()^{-1}\right)_R : G(R) \to G(R), \qquad\qquad g \mapsto g^{-1}$$

für alle $R \in \mathcal{A}_k$ erfüllt.

Wegen $G \cong \operatorname{Sp} A$ gibt es also genau eine natürliche Transformation $\widetilde{()^{-1}} : \operatorname{Sp} A \to \operatorname{Sp} A$ zwischen Mengenfunktoren so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "()^{-1}"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{Sp} A \arrow[r, "\widetilde{()^{-1}}"'] & \operatorname{Sp} A \end{tikzcd}$$

von natürlichen Transformationen zwischen Funktoren kommutiert. Nach dem Yoneda-Lemma gibt es einen Algebrahomomorphismus $S : A \to A$ mit $\widetilde{()^{-1}} = \operatorname{Sp} S$. Also kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "()^{-1}"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\ \operatorname{Sp} A \arrow[r, "\operatorname{Sp} S"'] & \operatorname{Sp} A \end{tikzcd}.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Abbildung $S : A \to A$ eine Antipode der Bialgebra

[168] Das heißt, mult ist die Abbildung μ_R, wenn man R als k-Algebra$_3$ auffasst. Allerdings dürfen wir diese Abbildung hier *nicht* mit μ_R bezeichnen, denn μ_R bezeichnet bei uns bereits eine ganz andere Abbildung.

A ist. Dazu müssen wir nachweisen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dd, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
A \otimes A \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & A \otimes A \arrow[dd, "S \otimes \mathrm{id}"] \\
& k \arrow[dd, "\eta_!"] & \\
A \otimes A \arrow[dr, "\mu_!"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu_!"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei die k-linearen Abbildungen $\mu_! : A \otimes A \to A$ und $\eta_! : k \to A$ durch

$$\mu_! (x \otimes y) = xy \qquad \text{für alle } x, y \in A, \text{ und}$$
$$\eta_! (1) = 1_A$$

definiert sind (diese Abbildungen $\mu_!$ und $\eta_!$ würden wir normalerweise mit μ und η oder mit μ_A bzw. η_A bezeichnen, aber leider haben wir die Bezeichnungen μ, η, μ_A und η_A bereits für etwas anderes belegt!).

Aus der Definition von $()^{-1}$ folgt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& G & \\
G \times G \arrow[ur, "\mu"] & & G \times G \arrow[ul, "\mu"'] \\
& 1 \arrow[uu, "\eta"] & \\
G \times G \arrow[uu, "\mathrm{id} \times ()^{-1}"] & & G \times G \arrow[uu, "()^{-1} \times \mathrm{id}"'] \\
& G \arrow[ul, "\blacktriangle"] \arrow[uu, "\xi"] \arrow[ur, "\blacktriangle"'] &
\end{tikzcd}$$

von natürlichen Transformationen zwischen Funktoren kommutiert, wobei die natürliche Transformation $\xi : G \to 1$ definiert ist durch

$$\xi_R : G(R) \to 1(R), \qquad g \mapsto 1$$

für alle $R \in \mathcal{A}_k$, und die natürliche Transformation $\blacktriangle : G \to G \times G$ definiert ist durch

$$\blacktriangle_R : G(R) \to G(R) \times G(R), \qquad g \mapsto (g, g)$$

für alle $R \in \mathcal{A}_k$.

Nutzen wir jetzt die Isomorphien $G \cong \mathrm{Sp}\, A$ und $1 \cong \mathrm{Sp}\, k$ und Lemma 2, sowie die Kommutativität der Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "\cong"'] & & G \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Sp}\, A \times \mathrm{Sp}\, A \arrow[d, "\cong"'] & & \mathrm{Sp}\, A \\
\mathrm{Sp}\,(A \otimes A) \arrow[urr, "\mathrm{Sp}\,\Delta"'] & &
\end{tikzcd}
\quad ; \qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Sp}\, k \arrow[r, "\mathrm{Sp}\,\varepsilon"'] & \mathrm{Sp}\, A
\end{tikzcd}
\quad ;
$$

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[d, "\cong"'] & & G \arrow[ll, "\blacktriangle"'] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Sp}\, A \times \mathrm{Sp}\, A \arrow[d, "\cong"'] & & \mathrm{Sp}\, A \arrow[dll, "\mathrm{Sp}\,\mu_!"] \\
\mathrm{Sp}\,(A \otimes A) & &
\end{tikzcd}
\quad ; \qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[l, "\xi"'] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Sp}\, k & \mathrm{Sp}\, A \arrow[l, "\mathrm{Sp}\,\eta_!"]
\end{tikzcd}
\quad ;
$$

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "()^{-1}"] \arrow[d, "\cong"'] & G \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Sp}\, A \arrow[r, "\mathrm{Sp}\, S"'] & \mathrm{Sp}\, A
\end{tikzcd}
$$

aus, so erhalten wir hieraus das kommutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Sp}\, A & \\
\mathrm{Sp}\,(A \otimes A) \arrow[ur, "\mathrm{Sp}\,\Delta"] & & \mathrm{Sp}\,(A \otimes A) \arrow[ul, "\mathrm{Sp}\,\Delta"'] \\
& \mathrm{Sp}\, k \arrow[uu, "\mathrm{Sp}\,\varepsilon"'] & \\
\mathrm{Sp}\,(A \otimes A) \arrow[uu, "\mathrm{Sp}(\mathrm{id} \otimes S)"] & & \mathrm{Sp}\,(A \otimes A) \arrow[uu, "\mathrm{Sp}(S \otimes \mathrm{id})"'] \\
& \mathrm{Sp}\, A \arrow[ul, "\mathrm{Sp}\,\mu_!"] \arrow[uu, "\mathrm{Sp}\,\eta_!"'] \arrow[ur, "\mathrm{Sp}\,\mu_!"'] &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Nach dem Yoneda-Lemma folgt hieraus, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[dd, "\varepsilon"] & \\
A \otimes A \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & A \otimes A \arrow[dd, "S \otimes \mathrm{id}"] \\
& k \arrow[dd, "\eta_!"] & \\
A \otimes A \arrow[dr, "\mu_!"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu_!"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Folglich ist S eine Antipode der Bialgebra A, und A ist daher eine Hopfalgebra. Daher ist $\operatorname{Sp} A$ eine affine Gruppe, und somit ist auch $G \cong \operatorname{Sp} A$ als affine Gruppe (denn $G \cong \operatorname{Sp} A$ als affines Monoid nach **2) a)**).

Der Beweis von 5.4. ist damit vollständig.

5.5. Folgerung: Wir haben folgende Äquivalenzen von Kategorien:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_k^{\mathrm{op}} &\cong \mathrm{Sch}_k; \\
\{\text{kommutative Bialgebren}\}^{\mathrm{op}} &\cong \mathrm{Mon}_k; \\
\{\text{kommutative Hopfalgebren}\}^{\mathrm{op}} &\cong \mathrm{Gr}_k\,.
\end{aligned}$$

5.6. Bemerkung: 1) Wir können die Äquivalenz

$$\{\text{kommutative Hopfalgebren}\}^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Gr}_k$$

auch auf eine abstraktere Weise aus der Äquivalenz $\mathcal{A}_k^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Sch}_k$ herleiten, indem wir den Begriff einer Gruppe in einer Kategorie verwenden:

Die Kategorie Sch_k ist eine Kategorie mit endlichen direkten Produkten und Endobjekt. Also sind Gruppen in der Kategorie Sch_k definiert (als Objekte G mitsamt Morphismen $G \times G \xrightarrow{\mu} G$, $1 \xrightarrow{\eta} G$ und $G \xrightarrow{\mathrm{inv}} G$, für welche die naheliegenden Diagramme kommutativ sind). Nach dem Yoneda-Lemma gilt

$$\underbrace{\{\text{Gruppen in } \mathcal{A}_k^{\mathrm{op}}\}}_{\cong\{\text{kommutative Hopfalgebren}\}^{\mathrm{op}}} \cong \underbrace{\{\text{Gruppen in } \mathrm{Sch}_k\}}_{\cong \mathrm{Gr}_k}.$$

Analog könnte man aus der Äquivalenz $\mathcal{A}_k^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Sch}_k$ auch die Äquivalenz

$$\{\text{kommutative Bialgebren}\}^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Mon}_k$$

herleiten, indem man den Begriff eines Monoids in einer Kategorie benutzt.

2) Man kann einen Funktor $\mathcal{O} : \mathrm{Sch}_k \to \mathcal{A}_k^{\mathrm{op}}$ definieren, indem man $\mathcal{O}(X) = \mathrm{Mor}\,(X, \mathbb{A}^1)$ (mit punktweiser Algebrastruktur) für jedes $X \in \mathrm{Sch}_k$ setzt. Dann sind $\operatorname{Sp} : \mathcal{A}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sch}_k$ und $\mathcal{O} : \mathrm{Sch}_k \to \mathcal{A}_k^{\mathrm{op}}$ quasiinverse Äquivalenzen.

5.7. Satz: Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$. Sei $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis von V. Sei A eine kommutative Hopfalgebra, und $G \cong \operatorname{Sp} A$ eine affine Gruppe. Dann können wir wie folgt eine natürliche Bijektion

$$\varphi : \{\delta_V : V \to V \otimes A \mid \delta_V \text{ ist eine } A\text{-Comodulstruktur auf } V\} \longrightarrow \operatorname{Gr}_k (G, \operatorname{GL}_n)$$

definieren: Sei $\delta_V : V \to V \otimes A$ eine A-Comodulstruktur auf V. Nach Lemma 4.2. **1)** gibt es dann eine Matrix $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \operatorname{M}_n (A)$ so, daß $\delta (v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes a_{i,j}$ für alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt, und diese Matrix erfüllt $\Delta (a_{i,j}) = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{i,l} \otimes a_{l,j}$ und $\varepsilon (a_{i,j}) = \delta_{i,j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist der Algebrahomomorphismus

$$k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right] \to A, \qquad T_{i,j} \mapsto a_{i,j} \qquad \left(\text{wobei } d = \det\left((T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}\right)\right)$$

ein Hopfalgebrahomomorphismus[169], und induziert nach 5.5. einen Homomorphismus $G \to \operatorname{GL}_n$ von affinen Gruppen. Diesen Homomorphismus $G \to \operatorname{GL}_n$ nennen wir dann $\varphi (\delta_V)$.

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}
&\{\delta_V : V \to V \otimes A \mid \delta_V \text{ ist eine } A\text{-Comodulstruktur auf } V\} \\
&\cong \left\{(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \operatorname{M}_n (A) \mid \Delta (a_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \otimes a_{l,j} \text{ und } \varepsilon (a_{i,j}) = \delta_{i,j} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n\right\} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{diese Isomorphie ergibt sich nach Lemma 4.2. } \mathbf{1)} \text{ via } \delta_V \mapsto (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \text{ wobei} \\ \text{die } a_{i,j} \text{ so gewählt sind, daß } \delta (v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes a_{i,j} \text{ für alle } j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ gilt} \end{array}\right) \\
&\cong \operatorname{Bialg}\left(k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right], A\right).
\end{aligned}$$

[170] Außerdem:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bialg}\left(k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right], A\right) &\cong \operatorname{Hopf}\left(k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right], A\right) \\
&\cong \operatorname{Gr}_k (G, \operatorname{GL}_n)
\end{aligned}$$

---

[169] Dabei verstehen wir unter $k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right]$ die darstellende Hopfalgebra von GL_n. Diese Hopfalgebra wird definiert als die Algebra $k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right]$, die in Beispiel 5.3 **2)** eingeführt wurde, versehen mit der Comultiplikation Δ, die durch

$$\Delta (T_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} T_{i,l} \otimes T_{l,j} \qquad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n$$

definiert wird (und wir verlangen natürlich, daß Δ ein Algebrahomomorphismus ist), und mit der Coeins ε, die durch

$$\varepsilon (T_{i,j}) = \delta_{i,j} \qquad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n$$

definiert wird (und wieder verlangen wir, daß ε ein Algebrahomomorphismus ist). Dabei bezeichnet d die Determinante $\det\left((T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}\right)$.

[170] Dabei ist der Isomorphismus

$$\begin{aligned}
&\left\{(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \operatorname{M}_n (A) \mid \Delta (a_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \otimes a_{l,j} \text{ und } \varepsilon (a_{i,j}) = \delta_{i,j} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n\right\} \\
&\to \operatorname{Bialg}\left(k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right], A\right)
\end{aligned}$$

(die letzte Isomorphie folgt dabei aus 5.5.). Somit ist

$$\{\delta_V : V \to V \otimes A \mid \delta_V \text{ ist eine } A\text{-Comodulstruktur auf } V\} \cong \mathrm{Gr}_k(G, \mathrm{GL}_n),$$

was zu beweisen war.

Definition: 1) Sei X ein affines Schema, d. h. ein Funktor $X : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Me}$ mit $X \cong \mathrm{Sp}\,A$ für eine kommutative Algebra A. Dann heißt X *algebraisch*, wenn A eine Algebra von endlichem Typ (d. h. endlich erzeugt als k-Algebra) ist, d. h. wenn A eine Faktoralgebra eines Polynomrings über k in endlich vielen Variablen ist.

Ist G eine affine Gruppe, dann heißt G *algebraisch*, wenn G als affines Schema (d. h. ohne Beachtung der Gruppenstruktur) algebraisch ist.

2) Seien X und Y zwei affine Schemata, d. h. sei $X \cong \mathrm{Sp}\,A$ und $Y \cong \mathrm{Sp}\,B$ für zwei kommutative Algebren A und B. Sei $\varphi : B \to A$ ein Algebrahomomorphismus, und sei $\alpha : X \to Y$ der "dazugehörige" Homomorphismus von Schemata (das heißt, α ist der eindeutige Homomorphismus von Schemata, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\cong"] & Y \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Sp}\,A \arrow[r, "\mathrm{Sp}\,\varphi"] & \mathrm{Sp}\,B \end{tikzcd}$$

kommutiert).

Dann heißt α eine *abgeschlossene Einbettung*, wenn φ surjektiv ist.

5.8. Bemerkung: 1) Sei $\alpha : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von affinen Schemata. Dann folgt: Für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ ist $\alpha_R : X(R) \to Y(R)$ injektiv.

Beweis: Seien A und B zwei kommutative Algebren mit $X \cong \mathrm{Sp}\,A$ und $Y \cong \mathrm{Sp}\,B$, und sei $\varphi : B \to A$ der Algebrahomomorphismus, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\cong"] & Y \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{Sp}\,A \arrow[r, "\mathrm{Sp}\,\varphi"] & \mathrm{Sp}\,B \end{tikzcd}$$

kommutiert. Da α eine abgeschlossene Einbettung ist, muß φ surjektiv sein.

Für alle $R \in \mathcal{A}_k$ ist dann die Abbildung

$$\mathrm{Alg}(A, R) \to \mathrm{Alg}(B, R), \qquad \psi \mapsto \psi\varphi$$

injektiv, da φ surjektiv ist.

2) Die Umkehrung von **1)** gilt nicht: Die kanonische Inklusionsabbildung $\varphi : k[T] \hookrightarrow k(T)$ ist nicht surjektiv (wobei $k[T]$ der Polynomring in einer Variablen, und $k(T)$ sein Quotientenkörper ist). Aber für alle $R \in \mathcal{A}_k$ ist die Abbildung

$$\mathrm{Alg}(k(T), R) \to \mathrm{Alg}(k[T], R), \qquad \psi \mapsto \psi\mid_{k[T]}$$

injektiv.

---

dadurch gegeben, daß man jeder Matrix $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(A)$, welche $\Delta(a_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \otimes a_{l,j}$ und $\varepsilon(a_{i,j}) = \delta_{i,j}$ für alle $1 \leq i,j \leq n$ erfüllt, einen Bialgebrahomomorphismus von $k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i,j \leq n\right]$ nach A zuordnet - und zwar denjenigen, der $T_{i,j}$ auf $a_{i,j}$ abbildet für alle $1 \leq i,j \leq n$. Dieser Isomorphismus ist wohldefiniert, denn jede Matrix $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(A)$, welche $\Delta(a_{i,j}) = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \otimes a_{l,j}$ und $\varepsilon(a_{i,j}) = \delta_{i,j}$ für alle $1 \leq i,j \leq n$ erfüllt, muß invertierbar sein (denn $\sum_{l=1}^{n} a_{i,l} S(a_{l,j}) = \varepsilon(a_{i,j}) = \delta_{i,j}$ für alle i,j, und somit ist $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} (S(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} = E$).

5.9. Satz: Sei G eine algebraische affine Gruppe. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Morphismus $\varphi : G \to \mathrm{GL}_n$ von affinen Gruppen so, daß φ (als Morphismus von affinen Schemata) eine abgeschlossene Einbettung ist.

(Mit etwas mehr Fachterminologie würde man dies wie folgt formulieren: Jede algebraische affine Gruppe G ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von GL_n.)

Beweis: Nach 5.4. **2) b)** ist $G \cong \mathrm{Sp}\, A$ für eine kommutative Hopfalgebra A von endlichem Typ. Man kann schreiben $A = k\left[x_1, x_2, ..., x_m\right]$, wobei $x_1, x_2, ..., x_m$ Erzeuger von A sind (solche Erzeuger existieren, denn A ist von endlichem Typ[171]). Nach Satz 4.3. **1)** *a)* gibt es also einen endlichdimensionalen A-Rechtsuntercomodul $V \subseteq A$ mit $x_1, x_2, ..., x_m \in V$ [172].

Sei $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis von V. Nach 4.2. **1)** gibt es dann eine Matrix $\left(a_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n\left(A\right)$ so, daß

$$\Delta\left(a_{i,j}\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \otimes a_{l,j}, \qquad \varepsilon\left(a_{i,j}\right) = \delta_{i,j} \qquad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n,$$

$$\text{sowie } \delta\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_{i,j} \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n$$

ist. Nach 5.7. ist dann

$$\varphi : k\left[T_{i,j}, d^{-1} \mid 1 \leq i, j \leq n\right] \to A, \qquad T_{i,j} \mapsto a_{i,j}$$

ein Hopfalgebrahomomorphismus. Dieser Homomorphismus φ ist surjektiv, denn für alle $i \in \{1, 2, ..., m\}$ gilt: $x_i \in \mathrm{Im}\, \varphi$ (da $x_i \in V$ und $V \subseteq \mathrm{Im}\, \varphi$ [173]). Nach 5.7. folgt die Behauptung.

Nun definieren wir den Begriff einer *Operation* einer affinen Gruppe auf einem affinen Schema. Dies wird einfach ein Morphismus affiner Schemata sein, der "punktweise" eine Operation einer (ganz gewöhnlichen) Gruppe auf einer Menge ist:

Definition: Sei X ein affines Schema, und G eine affine Gruppe. Sei $\mu : X \times G \to X$ ein Morphismus affiner Schemata (d. h. eine natürliche Transformation von Mengenfunktoren).

Dann heißt (X, μ) ein *G-Schema*, wenn für alle $R \in \mathcal{A}_k$ gilt: Die Abbildung $\mu_R : X\left(R\right) \times G\left(R\right) \to X\left(R\right)$ ist eine Operation der Gruppe $G\left(R\right)$ auf der Menge $X\left(R\right)$ (also assoziativ und unitär).

[171] Diese Erzeuger sind aber im Allgemeinen keine freien Variablen, d. h. die Algebra A muss keine Polynomalgebra sein.

[172] Denn nach Satz 4.3. **1)** *a)* liegt jedes x_i in einem endlichdimensionalen A-Rechtsuntercomodul V_i von A; also liegen alle diese Elemente x_1, x_2, ..., x_m in der Summe $V_1 + V_2 + ... + V_m$ dieser A-Rechtsuntercomoduln, und die Summe von A-Rechtsuntercomoduln ist wieder ein A-Rechtsuntercomodul.

[173] Daß $V \subseteq \mathrm{Im}\, \varphi$ ist, ist hierbei klar, denn für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ ist

$$v_j = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\left(\underbrace{\Delta\left(v_j\right)}_{=\delta\left(v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_{i,j}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\left(v_i\right) a_{i,j} = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon\left(v_i\right) T_{i,j}\right) \in \mathrm{Im}\, \varphi.$$

Statt zu sagen, daß (X,μ) ein G-Schema ist, kann man auch sagen, daß μ eine *Operation* der affinen Gruppe G auf dem affinen Schema X ist.

5.10. Beispiel: Wir können eine Operation $\rho : \mathbb{A}^n \times \mathrm{SL}_n \to \mathbb{A}^n$ der affinen Gruppe SL_n auf dem affinen Schema $\mathbb{A}^n$ definieren, indem wir für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ die Abbildung ρ_R wie folgt definieren:

$$\rho_R : \underbrace{\mathbb{A}^n(R)}_{=R^n} \times \mathrm{SL}_n(R) \to \underbrace{\mathbb{A}^n(R)}_{=R^n},$$
$$\left(\underbrace{(r_1, r_2, ..., r_n)}_{\in R^n}, \underbrace{(r_{i,j})_{1\le i,j\le n}}_{\in \mathrm{SL}_n(R)}\right) \mapsto (r_1, r_2, ..., r_n) \cdot (r_{i,j})_{1\le i,j\le n} \qquad \text{(Matrizenprodukt)}.$$

Nun haben wir kanonische Isomorphismen $\mathbb{A}^n(R) \cong \mathrm{Alg}(k[x_1,x_2,...,x_n], R)$ und $\mathrm{SL}_n(R) \cong \mathrm{Alg}\left(k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n}, R\right)$ (nach 2.18. **7)**), wobei $k[x_1,x_2,...,x_n]$ die Polynomalgebra in n Variablen über k ist, und

$$k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n} = \underbrace{k[X_{i,j}]_{1\le i,j\le n}}_{\text{Polynomalgebra}} \Big/ \left(\det\left((X_{i,j})_{1\le i,j\le n}\right) - 1\right)$$

ist. Also gibt es eine natürliche Transformation

$$\alpha : \mathrm{Sp}\left(k[x_1,x_2,...,x_n] \otimes k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n}\right) \to \mathrm{Sp}(k[x_1,x_2,...,x_n])$$

mit $\alpha_R : \mathrm{Alg}\left(k[x_1,x_2,...,x_n] \otimes k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n}, R\right) \to \mathrm{Alg}(k[x_1,x_2,...,x_n], R)$ so, daß

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n(R) \times \mathrm{SL}_n(R) \arrow[rr, "\rho_R"] \arrow[d, "\cong"] & & \mathbb{A}^n(R) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Alg}(k[x_1,x_2,...,x_n], R) \times \mathrm{Alg}\left(k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n}, R\right) \arrow[rr] \arrow[d, "\cong"] & & \mathrm{Alg}(k[x_1,x_2,...,x_n], R) \\
\mathrm{Alg}\left(k[x_1,x_2,...,x_n] \otimes k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n}, R\right) \arrow[urr, "\alpha_R"'] & &
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm ist.

Nach dem Yoneda-Lemma gibt es dann einen Algebrahomomorphismus

$$\delta : k[x_1,x_2,...,x_n] \to k[x_1,x_2,...,x_n] \otimes k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$$

so, daß $\alpha = \mathrm{Sp}\,\delta$ ist. Das heißt, für jedes $R \in \mathcal{A}_k$ und jedes $\varphi \in \mathrm{Alg}\left(k[x_1,x_2,...,x_n] \otimes k[x_{i,j}]_{1\le i,j\le n}, R\right)$ gilt:

$$\alpha_R(\varphi) = \varphi\delta.$$

Dann gilt $\delta(x_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes x_{i,j}$.

Dieses δ ist eine $k[x_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$-Comodulalgebrastruktur auf $k[x_1, x_2, ..., x_n]$, und zwar die gleiche, wie die in Beispiel 4.5. **5)** definierte $k[x_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$-Comodulalgebrastruktur $\widetilde{\delta}$.

5.11. Satz: Sei H eine kommutative Bialgebra, sei A eine kommutative Algebra, sei $G \cong \operatorname{Sp} H$ ein affines Monoid, und sei $X \cong \operatorname{Sp} A$ ein affines Schema. Dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\{\mu : X \times G \to X \mid \mu \text{ ist eine Operation von } G \text{ auf } X\}$$
$$\longrightarrow \{\delta : A \to A \otimes H \mid \delta \text{ ist eine } H\text{-Rechtscomodulalgebrastruktur auf } A\}.$$

Beweis: Nach dem Yoneda-Lemma wie im vorigen Beispiel, da Operationen und Comodulalgebrastrukturen jeweils durch einander entsprechende kommutative Diagramme definiert sind.

6. Einschub: Einige Resultate aus der Algebra[174]

Der folgende 6. Abschnitt von Kapitel I hat nichts mit Hopfalgebren zu tun, aber fasst einige Resultate aus der Algebra zusammen, die wir später mehrmals verwenden werden.

Das Jacobson-Radikal

Die ersten dieser Resultate handeln vom sogenannten *Jacobson-Radikal* eines Ringes.

6.1. Satz: Sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring. Dann sind die folgenden elf Teilmengen von R alle identisch:

a) Die Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R.

b) Die Schnittmenge aller maximalen Linksideale von R.

c) Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für jeden einfachen[175] R-Rechtsmodul M ist $Mr = 0$.

d) Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für jeden einfachen[176] R-Linksmodul M ist $rM = 0$.

e) Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für alle $s \in R$ ist das Element $1 - rs$ von R invertierbar.

f) Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für alle $s \in R$ ist das Element $1 - sr$ von R invertierbar.

a') Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für jedes Rechtsideal I von R mit $I + rR = R$ gilt $I = R$.

b') Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für jedes Linksideal I von R mit $I + Rr = R$ gilt $I = R$.

c') Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für jeden endlich erzeugten R-Rechtsmodul M mit $MrR = M$ ist $M = 0$.

d') Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für jeden endlich erzeugten R-Linksmodul M mit $RrM = M$ ist $M = 0$.

---

[174] Dieser Abschnitt stammt von mir (Darij).

[175] Hierbei heißt ein R-Rechtsmodul M *einfach*, wenn $M \neq 0$ ist und wenn jeder R-Untermodul von M entweder gleich 0 oder gleich M ist.

[176] Hierbei heißt ein R-Linksmodul M *einfach*, wenn $M \neq 0$ ist und wenn jeder R-Untermodul von M entweder gleich 0 oder gleich M ist.

g) Die Menge aller $r \in R$, für die gilt: für alle $s \in R$ und $t \in R$ ist das Element $1 - srt$ von R invertierbar.

Definition: Sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring. Das *Jacobson-Radikal* von R wird definiert als eine der elf Teilmengen von R, die in Satz 6.1 genannt wurden (und laut Satz 6.1 identisch sind). Wir bezeichnen das Jacobson-Radikal von R mit $\mathrm{Ra}\,(R)$.

Somit ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ra}\,(R) \\
&= (\text{Jacobson-Radikal von } R) && \text{(I.6.1)} \\
&= (\text{die Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von } R) && \text{(I.6.2)} \\
&= (\text{die Schnittmenge aller maximalen Linksideale von } R) && \text{(I.6.3)} \\
&= \{r \in R \mid \text{für jeden einfachen } R\text{-Rechtsmodul } M \text{ ist } Mr = 0\} && \text{(I.6.4)} \\
&= \{r \in R \mid \text{für jeden einfachen } R\text{-Linksmodul } M \text{ ist } rM = 0\} && \text{(I.6.5)} \\
&= \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ ist das Element } 1 - rs \text{ von } R \text{ invertierbar}\} && \text{(I.6.6)} \\
&= \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ ist das Element } 1 - sr \text{ von } R \text{ invertierbar}\} && \text{(I.6.7)} \\
&= \{r \in R \mid \text{für jedes Rechtsideal } I \text{ von } R \text{ mit } I + rR = R \text{ gilt } I = R\} \\
&= \{r \in R \mid \text{für jedes Linksideal } I \text{ von } R \text{ mit } I + Rr = R \text{ gilt } I = R\} \\
&= \{r \in R \mid \text{für jeden endlich erzeugten } R\text{-Rechtsmodul } M \text{ mit } MrR = M \text{ ist } M = 0\} \\
&= \{r \in R \mid \text{für jeden endlich erzeugten } R\text{-Linksmodul } M \text{ mit } RrM = M \text{ ist } M = 0\} \\
&= \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ und } t \in R \text{ ist das Element } 1 - srt \text{ von } R \text{ invertierbar}\}\,.
\end{aligned}$$

In jedem guten Algebratext werden zumindest Teile von Satz 6.1 bewiesen. Wir wollen diesen Satz komplett beweisen, und dabei möglichst konstruktiv vorgehen. Gewisse Teile von Satz 6.1 kann man konstruktiv nicht beweisen, weil sie das Auswahlaxiom und das Tertium Non Datur verwenden (was man am Vorkommen von maximalen Idealen erkennt), doch die Gleichheit der Mengen **a')**, **b')**, **c')**, **d')**, **e)**, **f)** und **g)** werden wir völlig konstruktiv zeigen.

Beweis von Satz 6.1: Wir definieren Mengen A, B, C, D, E, F, A', B', C', D' und G durch

$$\begin{aligned}
A &= (\text{die Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von } R)\,; \\
B &= (\text{die Schnittmenge aller maximalen Linksideale von } R)\,; \\
C &= \{r \in R \mid \text{für jeden einfachen } R\text{-Rechtsmodul } M \text{ ist } Mr = 0\}\,; \\
D &= \{r \in R \mid \text{für jeden einfachen } R\text{-Linksmodul } M \text{ ist } rM = 0\}\,; \\
E &= \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ ist das Element } 1 - rs \text{ von } R \text{ invertierbar}\}\,; \\
F &= \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ ist das Element } 1 - sr \text{ von } R \text{ invertierbar}\}\,; \\
A' &= \{r \in R \mid \text{für jedes Rechtsideal } I \text{ von } R \text{ mit } I + rR = R \text{ gilt } I = R\}\,; \\
B' &= \{r \in R \mid \text{für jedes Linksideal } I \text{ von } R \text{ mit } I + Rr = R \text{ gilt } I = R\}\,; \\
C' &= \{r \in R \mid \text{für jeden endlich erzeugten } R\text{-Rechtsmodul } M \text{ mit } MrR = M \text{ ist } M = 0\}\,; \\
D' &= \{r \in R \mid \text{für jeden endlich erzeugten } R\text{-Linksmodul } M \text{ mit } RrM = M \text{ ist } M = 0\}\,; \\
G &= \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ und } t \in R \text{ ist das Element } 1 - srt \text{ von } R \text{ invertierbar}\}\,.
\end{aligned}$$

Die Aussage von Satz 6.1 besteht dann darin, daß $A = B = C = D = A' = B' = C' = D' = E = F = G$ gilt. Um Satz 6.1 zu beweisen, müssen wir also nachprüfen, daß

$A = B = C = D = A' = B' = C' = D' = E = F = G$ gilt. Dies erledigen wir in vielen kleinen Schritten:

Beweis von $E \subseteq F$: Sei $r \in E$ beliebig. Nach der Definition von E gilt dann: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - rs$ von R invertierbar (denn $r \in E$). Sei $s \in R$ beliebig. Das Element $1 - rs$ von R ist also invertierbar; sei x das Inverse. Dann ist $(1 - rs)\, x = x\,(1 - rs) = 1$.

Nun ist

$$(1 - sr)\,(1 + sxr) = 1 - sr + \underbrace{sxr - srsxr}_{=s(1-rs)xr} = 1 - sr + s\,\underbrace{(1 - rs)\,x}_{=1}\,r = 1 - sr + sr = 1$$

und

$$(1 + sxr)\,(1 - sr) = 1 - sr + \underbrace{sxr - sxrsr}_{=sx(1-rs)r} = 1 - sr + s\,\underbrace{x\,(1 - rs)}_{=1}\,r = 1 - sr + sr = 1.$$

Somit ist das Element $1 - sr$ von R invertierbar (und zwar ist sein Inverses $1 + sxr$).

Wir haben also gezeigt: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - sr$ von R invertierbar. Gemäß der Definition von F bedeutet dies, daß $r \in F$ ist.

Damit haben wir bewiesen: Für jedes $r \in E$ ist $r \in F$. Das heißt, $E \subseteq F$.

Beweis von $F \subseteq E$: Die Aussage $F \subseteq E$ ist nichts anderes als die Aussage $E \subseteq F$, angewandt auf den Ring R^{op} statt dem Ring R.

Beweis von $E \subseteq G$: Sei $r \in E$ beliebig. Sei $t \in R$ beliebig.

Nach der Definition von E ist für alle $s \in R$ das Element $1 - rs$ von R invertierbar (denn $r \in E$). Wenden wir dies auf ts statt s an, so erhalten wir: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - rts$ von R invertierbar. Das heißt, $rt \in E$ (wiederum nach der Definition von E). Wegen $E \subseteq F$ ist also $rt \in F$. Nach der Definition von F bedeutet dies: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - srt$ von R invertierbar. Da wir dies für alle $t \in R$ gezeigt haben, erhalten wir hieraus: Für alle $s \in R$ und $t \in R$ ist das Element $1 - srt$ von R invertierbar. Nach der Definition von G bedeutet dies aber genau, daß $r \in G$ ist.

Wir haben damit bewiesen, daß $r \in G$ für jedes $r \in E$ gilt. Also ist $E \subseteq G$ gezeigt.

Beweis von $G \subseteq F$: Sei $r \in G$ beliebig. Nach der Definition von G folgt hieraus: Für alle $s \in R$ und $t \in R$ ist das Element $1 - srt$ von R invertierbar. Angewandt auf $t = 1$ bedeutet dies: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - sr$ von R invertierbar. Doch dies bedeutet genau, daß $r \in F$ ist (nach der Definition von F). Da wir dies für jedes $r \in G$ gezeigt haben, ist also $G \subseteq F$.

Beweis von $E = F = G$: Wir haben nun gezeigt, daß $E \subseteq F$ und $F \subseteq E$ ist. Hieraus folgt $E = F$. Wir haben ferner gezeigt, daß $E \subseteq G$ und $G \subseteq F$ ist. Wegen $E = F$ wird dies zu $F \subseteq G$ und $G \subseteq F$. Das heißt, $F = G$. Insgesamt wissen wir jetzt also, daß $E = F = G$ gilt.

Beweis, daß E ein Rechtsideal ist: Wir wollen jetzt zeigen, daß E ein Rechtsideal von R ist.

In der Tat gilt:

- Für alle $r \in E$ und alle $t \in R$ ist $rt \in E$. [177]

[177] *Beweis:* Aus $r \in E$ folgt: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - rs$ von R invertierbar (laut der Definition von E). Wenden wir dies auf ts statt s an, so erhalten wir: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - rts$ von R invertierbar. Nach der Definition von E bedeutet dies aber genau, daß $rt \in E$ ist.

- Für alle $r \in E$ und alle $r' \in E$ ist $r + r' \in E$. [178]

Diese beiden Eigenschaften ergeben, daß E ein Rechtsideal von R ist.

Beweis, daß F ein Linksideal ist: Wenden wir die (bereits bewiesene) Tatsache, daß E ein Rechtsideal von R ist, auf den Ring R^{op} statt dem Ring R an, so erhalten wir sehr schnell, daß F ein Linksideal von R ist.

Beweis, daß F ein beidseitiges Ideal ist: Da wir wissen, daß E ein Rechtsideal von R ist, können wir aus $E = F$ folgern, daß F ein Rechtsideal von R ist. Andererseits wissen wir, daß F ein Linksideal von R ist. Zusammengefasst ergibt dies, daß F ein beidseitiges Ideal von R ist.

Beweis von $F \subseteq C'$: Sei $r \in F$ beliebig.

Sei nun M ein endlich erzeugter R-Rechtsmodul mit $MrR = M$. Wir wollen zeigen, daß $M = 0$ ist.

Aus $r \in F$ folgt $rR \subseteq F$ (denn F ist ein Rechtsideal von R). Somit ist $M = M \underbrace{rR}_{\subseteq F} \subseteq MF$. Zusammen mit $MF \subseteq M$ (was klar ist, da M ein R-Rechtsmodul ist) ergibt dies $MF = M$.

Wir sind also in folgender Situation: Wir haben einen endlich erzeugten R-Rechtsmodul M mit $MF = M$. Wir wollen zeigen, daß $M = 0$ ist.

Sei $(e_1, e_2, ..., e_n)$ ein endliches Erzeugendensystem des R-Rechtsmoduls M (so ein Erzeugendensystem existiert, da M endlich erzeugt ist). Dann ist $M = e_1R + e_2R + ... + e_nR$. Wir werden nun durch vollständige Induktion nach i beweisen, daß $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ für alle $i \in \{0, 1, ..., n\}$ gilt.

Beweis von $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ für alle $i \in \{0, 1, ..., n\}$ durch vollständige Induktion nach i:

Induktionsanfang: Für $i = 0$ ist $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ trivialerweise erfüllt (denn $M = e_1R + e_2R + ... + e_nR$). Damit ist der Induktionsanfang erledigt.

Induktionsschritt: Sei $j \in \{1, 2, ..., n\}$ beliebig. Angenommen, $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ gelte für $i = j - 1$. Wir müssen dann beweisen, daß $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ auch für $i = j$ gilt.

Sei $M' = e_1R + e_2R + ... + e_{n-j}R$.

---

[178] *Beweis:* Aus $r \in E$ folgt, daß für alle $s \in R$ das Element $1 - rs$ von R invertierbar ist (laut der Definition von E). Sei $x_s \in R$ das Inverse von $1 - rs$. Dann ist $(1 - rs)\, x_s = x_s\, (1 - rs) = 1$.

Aus $r' \in E$ folgt, daß für alle $s \in R$ das Element $1 - r's$ von R invertierbar ist (laut der Definition von E). Angewandt auf sx_s statt s ergibt dies: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - r'sx_s$ von R invertierbar. Bezeichnen wir mit $y_s \in R$ das Inverse von $1 - r'sx_s$. Dann ist $(1 - r'sx_s)\, y_s = y_s\, (1 - r'sx_s) = 1$.

Für jedes $s \in R$ gilt nun

$$\left(\underbrace{1 - (r + r')\, s}_{=(1-rs)-r's} \right) x_s y_s = ((1 - rs) - r's)\, x_s y_s = \left(\underbrace{(1 - rs)\, x_s}_{=1} - r'sx_s \right) y_s = (1 - r'sx_s)\, y_s = 1.$$

Da $x_s y_s$ invertierbar ist (denn x_s und y_s sind invertierbar, weil $(1 - rs)\, x_s = x_s\, (1 - rs) = 1$ und $(1 - r'sx_s)\, y_s = y_s\, (1 - r'sx_s) = 1$), folgt hieraus, daß $1 - (r + r')\, s$ das Inverse von $x_s y_s$ ist. Folglich ist das Element $1 - (r + r')\, s$ invertierbar (und zwar ist $x_s y_s$ sein Inverses) für jedes $s \in R$. Nach der Definition von E bedeutet dies aber nichts anderes, als daß $r + r' \in E$ gilt. Wir haben damit $r + r' \in E$ bewiesen.

Da $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ für $i = j-1$ ist, gilt

$$\begin{aligned} M &= e_1R + e_2R + ... + e_{n-(j-1)}R = e_1R + e_2R + ... + e_{n-j+1}R \\ &= \underbrace{(e_1R + e_2R + ... + e_{n-j}R)}_{=M'} + e_{n-j+1}R = M' + e_{n-j+1}R, \end{aligned}$$

also

$$MF = (M' + e_{n-j+1}R)\, F = \underbrace{M'F}_{\subseteq M'} + e_{n-j+1}RF \subseteq M' + e_{n-j+1}RF.$$

Wegen $MF = M$ und $RF = F$ (letzteres weil F ein Linksideal von R ist) vereinfacht sich dies zu $M \subseteq M' + e_{n-j+1}F$.

Wegen $e_{n-j+1} \in M \subseteq M' + e_{n-j+1}F$ gibt es nun ein $\rho \in F$ mit $e_{n-j+1} \in M' + e_{n-j+1}\rho$. Laut der Definition von F gilt für dieses $\rho \in F$ also: Für alle $s \in R$ ist das Element $1 - s\rho$ von R invertierbar. Angewandt auf $s = 1$ ergibt dies, daß das Element $1 - \rho$ von R invertierbar ist. Sei $x \in R$ das Inverse von $1 - \rho$ (dieses x existiert, denn, wie wir wissen, ist $1 - \rho$ invertierbar). Dann ist $(1 - \rho)\, x = 1$.

Doch $e_{n-j+1}(1 - \rho) = e_{n-j+1} - e_{n-j+1}\rho \in M'$ (denn $e_{n-j+1} \in M' + e_{n-j+1}\rho$). Also ist $e_{n-j+1}(1 - \rho)\, x \in M'$ (denn M' ist ein R-Rechtsmodul). Wegen $e_{n-j+1}\underbrace{(1 - \rho)\, x}_{=1} = e_{n-j+1}$ wird dies zu $e_{n-j+1} \in M'$. Folglich ist $e_{n-j+1}R \subseteq M'$ (denn M' ist ein R-Rechtsmodul), und damit wird $M = M' + e_{n-j+1}R$ zu $M \subseteq M' + M' = M'$ (wieder weil M' ein R-Rechtsmodul ist). Wegen $M' = e_1R + e_2R + ... + e_{n-j}R$ bedeutet dies $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-j}R$. Das heißt, $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ gilt für $i = j$. Damit ist der Induktionsschritt komplett.

Wir haben also durch Induktion nach i gezeigt, daß $M = e_1R + e_2R + ... + e_{n-i}R$ für alle $i \in \{0, 1, ..., n\}$ gilt. Angewandt auf $i = n$ ergibt dies $M = (\text{leere Summe}) = 0$.

Damit ist gezeigt: Für jeden endlich erzeugten R-Rechtsmodul M mit $MrR = M$ ist $M = 0$. Nach der Definition von C' bedeutet dies nichts anderes, als daß $r \in C'$ gilt. Wir haben also gezeigt: Für jedes $r \in F$ ist $r \in C'$. Damit ist $F \subseteq C'$ bewiesen.

Beweis von $E \subseteq D'$: Die Aussage $E \subseteq D'$ ist nichts anderes als die Aussage $F \subseteq C'$, angewandt auf den Ring R^{op} statt dem Ring R.

Beweis von $C' \subseteq A'$: Sei $r \in C'$ beliebig gewählt. Laut der Definition von C' muß dieses r dann die Eigenschaft haben, daß $M = 0$ für jeden endlich erzeugten R-Rechtsmodul M mit $MrR = M$ gilt.

Sei I ein beliebiges Rechtsideal von R mit $I + rR = R$. Dann ist $1 \in R = I + rR$. Das heißt, es gibt ein $s \in R$ mit $1 \in I + rs$. Für dieses s gilt also $1 - rs \in I$.

Sei M der R-Rechtsmodul $R\diagup I$. Dann ist M endlich erzeugt (und zwar ist $\left(\overline{1}\right)$ ein Erzeugendensystem von M) und erfüllt $MrR = M$. [179] Wie wir wissen, folgt hieraus $M = 0$, also $R\diagup I = M = 0$ und damit $I = R$.

Unser Element r hat also folgende Eigenschaft: Für jedes Rechtsideal I von R mit $I + rR = R$ gilt $I = R$. Also ist $r \in A'$ (laut der Definition von A').

[179] *Beweis:* Sei $m \in M$. Dann ist $m = \overline{\rho}$ für irgendein $\rho \in R$ (denn $M = R\diagup I$). Für dieses ρ muß dann $\rho - rs\rho = (1 - rs)\, \rho \in I$ gelten (denn $1 - rs \in I$, und I ist ein Rechtsideal), also $\rho \equiv rs\rho \mod I$. In $R\diagup I = M$ gilt also $\overline{\rho} = \overline{rs\rho}$. Wir haben also $m = \overline{\rho} = \overline{rs\rho} = \overline{1rs\rho} = \underbrace{\overline{1}}_{\in M} \cdot r \underbrace{s\rho}_{\in R} \in MrR$. Da dies für jedes $m \in M$ gilt, ist also $M \subseteq MrR$. Da trivialerweise $MrR \subseteq M$ gilt, ist also $MrR = M$.

Wir haben damit gezeigt, daß $r \in A'$ für jedes $r \in C'$ gilt. Also ist $C' \subseteq A'$ bewiesen.

Beweis von $D' \subseteq B'$: Die Aussage $D' \subseteq B'$ ist äquivalent zur Aussage $C' \subseteq A'$, angewandt auf den Ring R^{op} statt dem Ring R.

Beweis von $A' \subseteq E$: Sei $r \in A'$ beliebig. Gemäß der Definition von A' bedeutet dies: Für jedes Rechtsideal I von R mit $I + rR = R$ gilt $I = R$.

Sei $s \in R$ beliebig.

Sei I_1 das Rechtsideal $(1 - rs)\, R$ von R. Dann ist $1 = \underbrace{(1 - rs)}_{\in I_1} + r \underbrace{s}_{\in R} \in I_1 + rR$, und somit ist $\rho = \underbrace{1}_{\in I_1 + rR} \cdot \rho \in I_1 + rR$ für jedes $\rho \in R$ (weil $I_1 + rR$ ein Rechtsideal von R ist). Das heißt, $I_1 + rR = R$.

Wir wissen nun: Für jedes Rechtsideal I von R mit $I + rR = R$ gilt $I = R$. Wenden wir dies auf $I = I_1$ an, so erhalten wir $I_1 = R$. Daraus folgt $1 \in R = I_1 = (1 - rs)\, R$. Somit gibt es ein $x \in R$ mit $1 = (1 - rs)\, x$.

Sei I_2 das Rechtsideal xR von R. Dann ist $1 = (1 - rs)\, x = \underbrace{x}_{\in I_2} - r \underbrace{sx}_{\in R} \in I_2 + rR$, und somit ist $\rho = \underbrace{1}_{\in I_2 + rR} \cdot \rho \in I_2 + rR$ für jedes $\rho \in R$ (weil $I_2 + rR$ ein Rechtsideal von R ist). Das heißt, $I_2 + rR = R$.

Wir wissen nun: Für jedes Rechtsideal I von R mit $I + rR = R$ gilt $I = R$. Wenden wir dies auf $I = I_2$ an, so erhalten wir $I_2 = R$. Daraus folgt $1 \in R = I_2 = xR$. Somit gibt es ein $y \in R$ mit $1 = xy$.

Nun ist $\underbrace{(1 - rs)\, x}_{=1} y = y$ und $(1 - rs) \underbrace{xy}_{=1} = 1 - rs$, also $y = (1 - rs)\, xy = 1 - rs$. Aus $1 = xy$ wird also $1 = x\,(1 - rs)$. Zusammen mit $(1 - rs)\, x = 1$ ergibt dies, daß das Element $1 - rs$ invertierbar ist (sein Inverses ist x).

Wir haben damit gezeigt: Für jedes $s \in R$ ist das Element $1 - rs$ von R invertierbar. Laut der Definition von E bedeutet dies, daß $r \in E$ ist.

Wir haben also nachgewiesen, daß $r \in E$ für jedes $r \in A'$ gilt. Also ist $A' \subseteq E$.

Beweis von $B' \subseteq F$: Die Aussage $B' \subseteq F$ ist äquivalent zur Aussage $A' \subseteq E$, angewandt auf den Ring R^{op} statt dem Ring R.

Beweis von $A' = B' = C' = D' = E = F = G$: Wir wissen nun insgesamt, daß $E = F = G$, $F \subseteq C'$, $E \subseteq D'$, $C' \subseteq A'$, $D' \subseteq B'$, $A' \subseteq E$ und $B' \subseteq F$ ist. Also haben wir $F \subseteq C' \subseteq A' \subseteq E \subseteq D' \subseteq B' \subseteq F$. Aus dieser Kette von Inklusionen folgt $F = C' = A' = E = D' = B' = F$. Zusammen mit $E = F = G$ führt dies auf $A' = B' = C' = D' = E = F = G$.

Jetzt müssen wir nur noch $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ und $D = D'$ beweisen. Im Gegensatz zu $A' = B' = C' = D' = E = F = G$ lassen sich diese Identitäten nicht mehr konstruktiv beweisen.

Beweis von $A' \subseteq A$: Sei $r \in A'$ beliebig. Für jedes Rechtsideal I von R mit $I + rR = R$ gilt dann $I = R$ (nach der Definition von A').

Sei nun I ein maximales Rechtsideal von R. Das Rechtsideal $I + rR$ des Rings R enthält das Rechtsideal I, und muß folglich entweder $I + rR = I$ oder $I + rR = R$ erfüllen (denn I ist ein maximales Ideal). Da $I + rR = R$ nicht möglich ist (denn wäre $I + rR = R$, dann würde $I = R$ folgen, im Widerspruch dazu, daß I ein maximales Ideal von R ist), muß also $I + rR = I$ gelten. Hieraus folgt $r \in rR \subseteq I + rR = I$.

Wir haben damit gezeigt: $r \in I$ für jedes maximale Rechtsideal I von R. Somit liegt das Element r in der Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R. Mit anderen Worten: $r \in A$ (denn die Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R ist A).

Da wir dies für jedes $r \in A'$ gezeigt haben, ist also $A' \subseteq A$ bewiesen.

Beweis von $A \subseteq A'$: Sei $r \in A$ beliebig. Da A die Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R ist, liegt also r in der Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R. Das heißt, r liegt in jedem maximalen Rechtsideal von R.

Sei nun I ein Rechtsideal von R mit $I + rR = R$. Angenommen, $I \neq R$. Dann gibt es ein maximales Rechtsideal von R, das das Rechtsideal I enthält[180]. Sei J ein solches maximales Rechtsideal. Dann ist $r \in J$ (denn r liegt in jedem maximalen Rechtsideal von R), also $rR \subseteq J$ (denn J ist ein Rechtsideal), und somit $R = \underbrace{I}_{\subseteq J} + \underbrace{rR}_{\subseteq J} \subseteq J + J = J$ (denn J ist ein Rechtsideal), im Widerspruch dazu, daß J ein maximales Rechtsideal von R ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme $I \neq R$ falsch war. Es muß also $I = R$ gelten.

Wir haben damit gezeigt: Für jedes Rechtsideal I von R mit $I + rR = R$ gilt $I = R$. Mit anderen Worten: $r \in A'$ (denn so wurde die Menge A' definiert).

Da wir dies für alle $r \in A$ gezeigt haben, ist damit $A \subseteq A'$ bewiesen.

Beweis von $A = A'$: Wir wissen nun, daß $A \subseteq A'$ und $A' \subseteq A$ ist. Also ist $A = A'$.

Beweis von $B = B'$: Die Aussage $B = B'$ ist äquivalent zur Aussage $A = A'$, angewandt auf den Ring R^{op} statt dem Ring R.

Beweis von $C' \subseteq C$: Sei $r \in C'$ beliebig. Für jeden endlich erzeugten R-Rechtsmodul M mit $MrR = M$ ist dann $M = 0$ (gemäß der Definition von C').

Sei nun M ein einfacher R-Rechtsmodul. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $m \neq 0$. Für dieses m ist mR ein Untermodul von M, und muß somit $mR = 0$ oder $mR = M$ erfüllen (denn M ist ein einfacher R-Rechtsmodul). Doch da $mR = 0$ unmöglich ist (da $m \neq 0$), ist also $mR = M$, und somit ist der Modul M endlich erzeugt (nämlich ist (m) ein Erzeugendensystem von M).

Nun ist MrR ein Untermodul von M, und muß somit $MrR = 0$ oder $MrR = M$ erfüllen (denn M ist ein einfacher R-Rechtsmodul). Da $MrR = M$ nicht gelten kann (denn aus $MrR = M$ würde $M = 0$ folgen, im Widerspruch dazu, daß M einfach ist), muß also $MrR = 0$ sein. Daher ist $Mr \subseteq MrR = 0$, also $Mr = 0$.

Wir haben damit gezeigt: Für jeden einfachen R-Rechtsmodul M ist $Mr = 0$. Das heißt, $r \in C$ (nach der Definition von C).

Nunmehr wissen wir, daß $r \in C$ für alle $r \in C'$ gilt. Also ist $C' \subseteq C$.

Beweis von $C \subseteq A$: Sei $r \in C$ willkürlich gewählt. Nach der Definition von C ist dann $Mr = 0$ für jeden einfachen R-Rechtsmodul M.

Sei nun I ein maximales Rechtsideal von R. Wir wollen dann zeigen, daß $r \in I$ ist.

Sei M der R-Rechtsmodul $R \diagup I$. Dann ist M einfach.[181] Somit ist $Mr = 0$. Folglich

[180] Dies kann man mithilfe des Zornschen Lemmas beweisen (genauso wie man in der Kommutativen Algebra beweist, daß für jeden kommutativen Ring K und jedes von K verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ des Ringes K ein maximales Ideal von K existiert, welches $\mathfrak{a}$ enthält).

[181] *Beweis:* Sei N ein R-Untermodul von M mit $N \neq 0$. Sei $\pi : R \to R \diagup I$ die kanonische Projektion von R auf $R \diagup I$. Dann ist π ein R-Rechtsmodulhomomorphismus, und somit ist $\pi^{-1}(N)$ ein R-Untermodul von R (da N ein R-Untermodul von M ist), also ein Rechtsideal von R. Wegen $I = \operatorname{Ker} \pi \subseteq \pi^{-1}(N)$ muß also $\pi^{-1}(N) = I$ oder $\pi^{-1}(N) = R$ gelten (denn I ist ein maximales Rechtsideal von R). Da aber $\pi^{-1}(N) = I$ unmöglich ist (denn wäre $\pi^{-1}(N) = I$, dann wäre $N = \pi(I)$ (weil π

gilt $\overline{1}r = 0$, wobei $\overline{1}$ die Restklasse von $1 \in R$ modulo dem Ideal I bezeichnet. Das heißt, $0 = \overline{1}r = \overline{r}$ in $R\diagup I$, also $0 \equiv r \bmod I$. Mit anderen Worten: $r \in I$.

Wir haben also gezeigt: Für jedes maximale Rechtsideal I von R gilt $r \in I$. Das heißt, das Element r liegt in der Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R. Mit anderen Worten: $r \in A$ (denn die Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R ist A).

Da wir dies für jedes $r \in C$ gezeigt haben, ist also $C \subseteq A$ bewiesen.

Beweis von $C = C'$: Aus $C \subseteq A$, $A = A'$ und $A' = C'$ folgt $C \subseteq C'$. Zusammen mit $C' \subseteq C$ führt dies auf $C = C'$.

Beweis von $D = D'$: Die Aussage $D = D'$ ist äquivalent zur Aussage $C = C'$, angewandt auf den Ring R^{op} statt dem Ring R.

Beweis von $A = B = C = D = A' = B' = C' = D' = E = F = G$: Insgesamt haben wir nun bewiesen, daß $A' = B' = C' = D' = E = F = G$, $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ und $D = D'$ gilt. Wenn wir diese Gleichheiten zusammenführen, erhalten wir $A = B = C = D = A' = B' = C' = D' = E = F = G$. Damit ist Satz 6.1 bewiesen.

Nun einige weitere Eigenschaften von $\mathrm{Ra}\,(R)$:

6.2. Bemerkung: Sei R ein Ring.

a) Dann ist $\mathrm{Ra}\,(R)$ ein beidseitiges Ideal von R, und $R\diagup \mathrm{Ra}\,(R)$ ist ein Faktorring von R.

b) Dieser Faktorring erfüllt $\mathrm{Ra}\,(R\diagup \mathrm{Ra}\,(R)) = 0$.

c) Für jedes $n \in \mathrm{Ra}\,(R)$ ist das Element $1 - n$ von R invertierbar.

Beweis von Bemerkung 6.2: **a)** *Erster Beweis von Bemerkung 6.2* ***a):*** Nach (I.6.2) ist $\mathrm{Ra}\,(R)$ ist die Schnittmenge aller maximalen Rechtsideale von R. Somit ist $\mathrm{Ra}\,(R)$ ein Rechtsideal von R (denn die Schnittmenge von Rechtsidealen ist stets ein Rechtsideal). Analog ist $\mathrm{Ra}\,(R)$ ein Linksideal von R. Folglich ist $\mathrm{Ra}\,(R)$ ein beidseitiges Ideal von R, und somit ist $R\diagup \mathrm{Ra}\,(R)$ ein Faktorring von R.

Zweiter Beweis von Bemerkung 6.2 ***a):*** Im Beweis von Satz 6.1 wurde gezeigt, daß F ein beidseitiges Ideal von R ist, wobei F die Menge F ist, die in jenem Beweis eingeführt wurde. Wie wir (aus der Definition von $\mathrm{Ra}\,(R)$) wissen, ist diese Menge F gleich $\mathrm{Ra}\,(R)$. Somit ist $\mathrm{Ra}\,(R)$ ein beidseitiges Ideal von R, und daher ist $R\diagup \mathrm{Ra}\,(R)$ ein Faktorring von R.

c) Wir haben

$$n \in \mathrm{Ra}\,(R) = \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ ist das Element } 1 - sr \text{ von } R \text{ invertierbar}\}$$

(nach (I.6.7)). Somit ist für alle $s \in R$ das Element $1 - sn$ von R invertierbar. Angewandt auf $s = 1$ ergibt dies, daß das Element $1 - n$ von R invertierbar ist. Bemerkung 6.2 **c)** ist also gezeigt.

b) Sei $J = \mathrm{Ra}\,(R)$. Da J ein Ideal von R ist, ist $R\diagup J$ ein Ring.

Sei $t \in \mathrm{Ra}\,(R\diagup J)$. Dann gibt es natürlich ein $\rho \in R$ mit $\overline{\rho} = t$ (wobei $\overline{r}$ die

---

surjektiv ist) und somit $N = 0$ (denn $\pi(I) = 0$) im Widerspruch zu $N \neq 0$), muß also $\pi^{-1}(N) = R$ gelten. Daraus folgt $\pi(R) \subseteq N$, also $M \subseteq N$ (denn $M = R\diagup I = \pi(R)$) und damit $N = M$ (denn $N \subseteq M$).

Wir haben damit gezeigt: Für jeden R-Untermodul N von M mit $N \neq 0$ gilt $N = M$. Mit anderen Worten: Für jeden R-Untermodul N von M gilt $N = 0$ oder $N = M$. Das heißt, M ist ein einfacher R-Rechtsmodul.

Restklasse von r modulo dem Ideal J bezeichnet). Nun ist aber

$$t \in \operatorname{Ra}(R \diagup J)$$
$$= \{r \in R \diagup J \mid \text{für alle } s \in R \diagup J \text{ ist das Element } 1 - sr \text{ von } R \diagup J \text{ invertierbar}\}$$

(nach (I.6.7), angewandt auf $R \diagup J$ statt R), und somit ist für alle $u \in R \diagup J$ das Element $1 - tu$ von $R \diagup J$ invertierbar.

Wir werden nun beweisen, daß für alle $s \in R$ das Element $1 - \rho s$ von R invertierbar ist. Dazu sei $s \in R$ beliebig gewählt. Sei $u = \overline{s}$. Dann ist das Element $1 - tu$ von $R \diagup J$ invertierbar, d. h. es gibt ein $p \in R \diagup J$ mit $(1 - tu)\, p = p\,(1 - tu) = 1$ in $R \diagup J$. Offensichtlich existiert ein $q \in R$ mit $p = \overline{q}$. Wir haben nun $t = \overline{\rho}$, $u = \overline{s}$ und $p = \overline{q}$. Damit ist $(1 - tu)\, p = (1 - \overline{\rho s})\, \overline{q} = \overline{(1 - \rho s)\, q}$ und $p\,(1 - tu) = \overline{q}\,(1 - \overline{\rho s}) = \overline{q\,(1 - \rho s)}$. Somit wird $(1 - tu)\, p = p\,(1 - tu) = 1$ zu $\overline{(1 - \rho s)\, q} = \overline{q\,(1 - \rho s)} = 1$. Das bedeutet: $(1 - \rho s)\, q \equiv q\,(1 - \rho s) \equiv 1 \bmod J$. Folglich ist $1 - (1 - \rho s)\, q \in J$ und $1 - q\,(1 - \rho s) \in J$.

Anwendung von 6.2 **c)** auf $n = 1 - (1 - \rho s)\, q$ ergibt, daß das Element $1 - (1 - (1 - \rho s)\, q)$ von R invertierbar ist (denn $1 - (1 - \rho s)\, q \in J = \operatorname{Ra}(R)$). Wegen $1 - (1 - (1 - \rho s)\, q) = (1 - \rho s)\, q$ bedeutet dies, daß $(1 - \rho s)\, q$ invertierbar ist. Es gibt also ein $v \in R$ mit $(1 - \rho s)\, qv = 1$. Daher hat das Element $1 - \rho s$ ein Rechtsinverses (nämlich qv).

Anwendung von 6.2 **c)** auf $n = 1 - q\,(1 - \rho s)$ ergibt, daß das Element $1 - (1 - q\,(1 - \rho s))$ von R invertierbar ist (denn $1 - q\,(1 - \rho s) \in J = \operatorname{Ra}(R)$). Wegen $1 - (1 - q\,(1 - \rho s)) = q\,(1 - \rho s)$ bedeutet dies, daß $q\,(1 - \rho s)$ invertierbar ist. Es gibt also ein $w \in R$ mit $wq\,(1 - \rho s) = 1$. Daher hat das Element $1 - \rho s$ ein Linksinverses (nämlich wq).

Das Element $1 - \rho s$ hat also sowohl ein Rechtsinverses, als auch ein Linksinverses. Folglich ist dieses Element $1 - \rho s$ in R invertierbar. Da dies für alle $s \in R$ gilt, haben wir also:

$$\rho \in \{r \in R \mid \text{für alle } s \in R \text{ ist das Element } 1 - rs \text{ von } R \text{ invertierbar}\} = \operatorname{Ra}(R)$$

(nach (I.6.6)). Daher ist $t = \overline{\rho} = 0$ (da $\rho \in \operatorname{Ra}(R) = J$). Für jedes $t \in \operatorname{Ra}(R \diagup J)$ haben wir also gezeigt, daß $t = 0$ ist. Damit ist $\operatorname{Ra}(R \diagup J) = 0$. Wegen $J = \operatorname{Ra}(R)$ wird dies zu $\operatorname{Ra}(R \diagup \operatorname{Ra}(R)) = 0$. Bemerkung 6.2 **b)** ist damit bewiesen.

Nun eine Definition:

Definition: 1) Ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring R heißt *linksartinsch*, wenn er folgendes Axiom erfüllt: Für jede Familie $(I_n)_{n \geq 0}$ von Linksidealen I_n von R, die $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ erfüllt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I_n = I_{n+1}$.

2) Ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring R heißt *rechtsartinsch*, wenn er folgendes Axiom erfüllt: Für jede Familie $(J_n)_{n \geq 0}$ von Rechtsidealen J_n von R, die $J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq ...$ erfüllt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J_n = J_{n+1}$.

3) Ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring R heißt *artinsch*, wenn er linksartinsch und rechtsartinsch ist.

Es ist offensichtlich, daß für jeden Körper k jede endlichdimensionale k-Algebra artinsch ist[182]. Aber es gibt auch viele artinsche Ringe, die keine endlichdimensionalen Vektorräume über Körpern sind (z. B. alle endlichen Ringe).

---

[182] *Beweis:* Dies folgt aus den folgenden zwei offensichtlichen Tatsachen:

- Jedes Linksideal und jedes Rechtsideal einer endlichdimensionalen k-Algebra ist stets ein Untervektorraum dieser Algebra.
- Für jede Familie $(U_n)_{n \geq 0}$ von Untervektorräumen einer endlichdimensionalen k-Algebra, die $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq ...$ erfüllt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n = U_{n+1}$.

Nun formulieren wir den **Satz von Artin-Wedderburn**, oder zumindest eine Version von diesem Satz (es gibt auch eine Reihe von anderen, teilweise stärkeren Versionen):

6.3. Satz (Artin-Wedderburn): Sei R ein artinscher Ring. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ sowie r Schiefkörper D_1, D_2, ..., D_r und r positive ganze Zahlen n_1, n_2, ..., n_r, die

$$R \diagup \operatorname{Ra}(R) \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_r}(D_r)$$

(als Ringe) erfüllen.

Wir werden nun einige Resultate über einfache Ringe verwenden. Zuerst definieren wir den Begriff eines einfachen Ringes:

Definition: Ein Ring S heißt *einfach*, wenn $S \neq 0$ ist und jedes Ideal J von S die Aussage ($J = 0$ oder $J = S$) erfüllt.

Der gerade definierte Begriff eines einfachen Ringes hat folgende Eigenschaft:

6.4. Lemma: Sei R ein Ring, und sei $I \subseteq R$ ein Ideal[183]. Genau dann ist I ein maximales Ideal von R, wenn $R \diagup I$ ein einfacher Ring ist.

Beweis von Lemma 6.4: $\Longrightarrow$: Angenommen, I ist ein maximales Ideal von R. Wir wollen zeigen, daß $R \diagup I$ ein einfacher Ring ist.

Offensichtlich ist $R \diagup I \neq 0$ (denn I ist ein maximales Ideal von R, also nicht ganz R).

Sei U ein Ideal des Rings $R \diagup I$. Wir wollen zeigen, daß $U = 0$ oder $U = R \diagup I$ ist.

Beweis: Sei $\pi : R \to R \diagup I$ die kanonische Projektion. Dann ist π ein Ringhomomorphismus, und somit ist $\pi^{-1}(U)$ ein Ideal des Rings R. Da $I \subseteq \pi^{-1}(U)$ ist (denn $\pi(I) = 0 \subseteq U$), folgt hieraus, daß $\pi^{-1}(U) = I$ oder $\pi^{-1}(U) = R$ ist (denn I ist ein maximales Ideal).

Es sind also zwei Fälle möglich: der Fall $\pi^{-1}(U) = I$ und der Fall $\pi^{-1}(U) = R$. Doch in beiden diesen Fällen gilt $U = 0$ oder $U = R \diagup I$ (denn im Fall $\pi^{-1}(U) = I$ gilt $U = 0$ [184], und im Fall $\pi^{-1}(U) = R$ gilt $U = R \diagup I$ [185]). Damit haben wir gezeigt, daß $U = 0$ oder $U = R \diagup I$ in jedem Fall gilt.

Wir haben also gezeigt: Der Ring $R \diagup I$ erfüllt $R \diagup I \neq 0$, und für jedes Ideal U des Rings $R \diagup I$ ist $U = 0$ oder $U = R \diagup I$. Dies bedeutet, daß $R \diagup I$ ein einfacher Ring ist. Die $\Longrightarrow$-Richtung von Lemma 6.4 ist also bewiesen.

$\Longleftarrow$: Angenommen, $R \diagup I$ ist ein einfacher Ring. Wir müssen dann nachweisen, daß I ein maximales Ideal von R ist.

Da $R \diagup I$ einfach ist, ist $R \diagup I \neq 0$ und damit $I \neq R$.

Sei J ein Ideal von R mit $I \subseteq J$. Sei $\pi : R \to R \diagup I$ die kanonische Projektion. Da π ein surjektiver Ringhomomorphismus und J ein Ideal von R ist, ist $\pi(J)$ ein Ideal von $R \diagup I$. Da $R \diagup I$ ein einfacher Ring ist, gilt folglich $\pi(J) = 0$ oder $\pi(J) = R \diagup I$.

Es sind also zwei Fälle möglich: der Fall $\pi(J) = 0$ und der Fall $\pi(J) = R \diagup I$. Doch

[183] Wir erinnern uns nochmal daran, daß "Ideal" für uns immer "zweiseitiges Ideal" bedeutet.

[184] *Beweis:* Angenommen, $\pi^{-1}(U) = I$. Da π surjektiv ist, gilt dann $U = \pi\left(\underbrace{\pi^{-1}(U)}_{=I}\right) = \pi(I) = 0$.

[185] *Beweis:* Angenommen, $\pi^{-1}(U) = R$. Dann ist $R \diagup I = \pi\left(\underbrace{R}_{=\pi^{-1}(U)}\right) = \pi\left(\pi^{-1}(U)\right) \subseteq U$, also $U = R \diagup I$.

in beiden diesen Fällen gilt $J = I$ oder $J = R$ (denn im Fall $\pi(J) = 0$ gilt $J = I$ [186], und im Fall $\pi(J) = R\diagup I$ gilt $J = R$ [187]). Damit haben wir gezeigt, daß $J = I$ oder $J = R$ in jedem Fall gilt.

Wir haben also gezeigt: Das Ideal I erfüllt $I \neq R$, und für jedes Ideal J von R mit $I \subseteq J$ ist $J = I$ oder $J = R$. Dies bedeutet, daß I ein maximales Ideal von R ist. Die $\Longleftarrow$-Richtung von Lemma 6.4 ist also bewiesen.

Somit ist der Beweis von Lemma 6.4 fertig.

Wir haben ferner:

6.4$\frac{1}{3}$. Proposition: Sei D ein Schiefkörper. Sei $r \in \mathbb{N}$ eine positive ganze Zahl. Dann ist $\mathrm{M}_r(D)$ ein einfacher Ring.

Wir werden diese Proposition nicht beweisen; sie ist allerdings nicht schwer und wird in gängigen Algebratexten gezeigt. Zumindest für artinsche Ringe hat diese Proposition eine Umkehrung:

6.4$\frac{1}{2}$. Proposition: Sei R ein artinscher einfacher Ring. Dann gibt es einen Schiefkörper D und eine positive ganze Zahl r, die $R \cong \mathrm{M}_r(D)$ (als Ringe) erfüllen.

Aus Satz 6.3 können wir nun folgende Konsequenz ziehen:

6.4$\frac{2}{3}$. Folgerung: Sei R ein artinscher Ring. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ sowie r einfache Ringe $E_1, E_2, ..., E_r$, die $R\diagup \mathrm{Ra}(R) \cong E_1 \times E_2 \times ... \times E_r$ (als Ringe) erfüllen.

Beweis von Folgerung 6.4$\frac{2}{3}$: Nach Satz 6.3 gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ sowie r Schiefkörper $D_1, D_2, ..., D_r$ und r positive ganze Zahlen $n_1, n_2, ..., n_r$, die

$$R\diagup \mathrm{Ra}(R) \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_r}(D_r)$$

(als Ringe) erfüllen. Betrachten wir dieses r, diese Schiefkörper $D_1, D_2, ..., D_r$ und diese positiven ganzen Zahlen $n_1, n_2, ..., n_r$. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., r\}$ sei $E_i = \mathrm{M}_{n_i}(D_i)$. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., r\}$ ist dann E_i ein einfacher Ring (denn Proposition 6.4$\frac{1}{3}$ (angewandt auf $D = D_i$ und $r = n_i$) ergibt, daß $\mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ ein einfacher Ring ist). Da $E_i = \mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ für alle $i \in \{1, 2, ..., r\}$ gilt, ist $\mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_r}(D_r) = E_1 \times E_2 \times ... \times E_r$. Wir haben also

$$R\diagup \mathrm{Ra}(R) \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_r}(D_r) = E_1 \times E_2 \times ... \times E_r.$$

Damit ist Folgerung 6.4$\frac{2}{3}$ gezeigt.

Nun aber weiter mit einem elementaren Satz:

6.5. Satz (Lemma von Nakayama für nichtkommutative Ringe): Sei R ein Ring, und sei M ein endlich erzeugter R-Rechtsmodul. Wenn $M \cdot \mathrm{Ra}(R) = M$ ist, dann ist $M = 0$.

---

[186] *Beweis:* Angenommen, $\pi(J) = 0$. Dann ist $J \subseteq \pi^{-1}\left(\underbrace{\pi(J)}_{=0}\right) = \mathrm{Ker}\,\pi = I$, also $J = I$ (denn $I \subseteq J$ und $J \subseteq I$).

[187] *Beweis:* Angenommen, $\pi(J) = R\diagup I$. Da π die Projektionsabbildung vom Ring R in den Faktorring $R\diagup I$ ist, können wir $\pi(J)$ auch als $J\diagup I$ schreiben, wobei wir $J\diagup I$ kanonisch mit einem Ideal von $R\diagup I$ identifizieren. Nach den Isomorphiesätzen gilt $(R\diagup I)\diagup(J\diagup I) \cong R\diagup J$. Wegen $(R\diagup I)\diagup \underbrace{(J\diagup I)}_{=\pi(J)=R\diagup I} = 0$ ist also $R\diagup J = 0$ und damit $J = R$.

Beweis von Satz 6.5: Dies haben wir eigentlich bereits im Beweis von Satz 6.1 (genauer gesagt, im Beweis von $F \subseteq C'$) nachgewiesen (wobei wir dort $\operatorname{Ra}(R)$ mit F bezeichnet haben).

6.6. Satz: Sei R ein rechtsartinscher Ring. Dann ist $\operatorname{Ra}(R)$ ein nilpotentes Ideal (d. h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(\operatorname{Ra}(R))^N = 0$).

Wir werden diesen Satz hier nicht vollständig beweisen[188], sondern nur einen Sonderfall (der für unsere Zwecke allerdings vollständig ausreicht):

6.7. Lemma: Sei R ein rechtsartinscher Ring.

(a) Sei J eine endlich erzeugte Untergruppe von $(\operatorname{Ra}(R), +)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $J^N = 0$. Hierbei verwenden wir folgende Notation:

- Sind U und V zwei Untergruppen von $(R, +)$, dann bezeichne UV die Untergruppe von $(R, +)$, die von den Elementen uv mit $(u, v) \in U \times V$ erzeugt wird.

- Ist U eine Untergruppe von $(R, +)$, und n eine natürliche Zahl, so bezeichne U^n die Untergruppe $\begin{cases} \underbrace{UU...U}_{n \text{ mal}}, \text{ wenn } n \geq 1; \\ \mathbb{Z}_R, \text{ wenn } n = 0 \end{cases}$ von $(R, +)$. Dabei bedeutet $\mathbb{Z}_R$ die Untergruppe von $(R, +)$, die von der Eins von R erzeugt wird.

(b) Jedes Element a von $\operatorname{Ra}(R)$ ist nilpotent.

Beweis von Lemma 6.7: **(a)** Wir betrachten die Familie $(J^n R)_{n \geq 0}$ von Rechtsidealen von R. Diese Familie erfüllt $J^0 R \supseteq J^1 R \supseteq J^2 R \supseteq ...$, und somit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J^n R = J^{n+1} R$ (denn der Ring R ist rechtsartinsch). Bezeichnen wir dieses n mit N; dann ist also $J^N R = J^{N+1} R$. Bezeichnen wir den R-Rechtsmodul $J^N R$ mit M, dann ist

$$M = J^N R = J^{N+1} R = J^N J R \subseteq \underbrace{J^N R}_{=M} J R \qquad \left(\text{denn } J^N \subseteq J^N R\right)$$
$$= M J R \subseteq M \cdot \operatorname{Ra}(R) \qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } J \subseteq \operatorname{Ra}(R) \text{ ergibt } JR \subseteq \operatorname{Ra}(R) \cdot R \subseteq \operatorname{Ra}(R) \\ \text{(da } \operatorname{Ra}(R) \text{ ein Ideal ist)} \end{array}\right).$$

Zusammen mit $M \cdot \operatorname{Ra}(R) \subseteq M$ (was offensichtlich ist) ergibt dies $M \cdot \operatorname{Ra}(R) = M$, und laut Satz 6.5 folgt hieraus $M = 0$ (denn der R-Rechtsmodul $M = J^N R$ ist endlich erzeugt, da die abelsche Gruppe J^N endlich erzeugt ist[189]). Also ist $J^N \subseteq J^N R = M = 0$. Lemma 6.7 **(a)** ist damit bewiesen.

(b) Sei J die von a erzeugte Untergruppe von $(\operatorname{Ra}(R), +)$. Dann ist J eine endlich erzeugte Untergruppe von $(\operatorname{Ra}(R), +)$ (denn $a \in \operatorname{Ra}(R)$). Laut Lemma 6.7 **(a)** gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $J^N = 0$. Für dieses N gilt wegen $a \in J$ offensichtlich $a^N \in J^N = 0$, also $a^N = 0$. Das heißt, a ist nilpotent. Somit ist Lemma 6.7 **(b)** bewiesen.

(Wenn wir Satz 6.6 bewiesen hätten, könnten wir natürlich auch einen schnelleren Beweis von Lemma 6.7 **(b)** liefern:

*Zweiter Beweis von Lemma 6.7 **(b)**:* Nach Satz 6.6 ist $\operatorname{Ra}(R)$ ein nilpotentes Rechtsideal von R; das heißt, es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(\operatorname{Ra}(R))^N = 0$. Für dieses N gilt

[188] Einen Beweis von 6.6. findet man in "Algebra: A Graduate Course" von Isaacs (als Theorem (14.2)). Dieser ist aber nichtkonstruktiv und verwendet das Auswahlaxiom.

[189] Daß die abelsche Gruppe J^N endlich erzeugt ist, folgt schnell aus der Bedingung, daß die abelsche Gruppe J endlich erzeugt ist.

$a^N \in (\mathrm{Ra}\,(R))^N = 0$, also $a^N = 0$. Das heißt, a ist nilpotent. Somit ist Lemma 6.7 **(b)** bewiesen.

Dieser Beweis von Lemma 6.7 **(b)** ist ein wenig kürzer als der vorher gegebene, doch er verwendet Satz 6.6, welchen wir nicht bewiesen haben, und welcher auch deutlich schwieriger zu zeigen ist als Lemma 6.7 **(a)**.)

6.8. Folgerung: Sei R ein artinscher Ring. Dann ist die Schnittmenge aller maximalen Ideale von R gleich $\mathrm{Ra}\,(R)$.

Beweis von Folgerung 6.8: **a)** Nach Folgerung $6.4\frac{2}{3}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ sowie r einfache Ringe E_1, E_2, ..., E_r, die

$$R\diagup \mathrm{Ra}\,(R) \cong E_1 \times E_2 \times ... \times E_r$$

erfüllen. Betrachten wir dieses r und diese einfachen Ringe E_1, E_2, ..., E_r.

Wegen $R\diagup \mathrm{Ra}\,(R) \cong E_1 \times E_2 \times ... \times E_r$ gibt es einen Ringisomorphismus $\iota : R\diagup \mathrm{Ra}\,(R) \to E_1 \times E_2 \times ... \times E_r$. Sei ferner $\pi : R \to R\diagup \mathrm{Ra}\,(R)$ die kanonische Projektion. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., r\}$ sei π_i die kanonische Projektion aus dem direkten Produkt $E_1 \times E_2 \times ... \times E_r$ auf den Faktor E_i. Offensichtlich ist

$$\{y \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_r \mid \pi_i\,(y) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, 2, ..., r\}\} = 0.$$

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., r\}$ ist ferner $\pi_i \circ \iota \circ \pi : R \to E_i$ ein surjektiver Ringhomomorphismus (denn π_i, ι und π sind surjektive Ringhomomorphismen). Nach dem Homomorphiesatz ist also $R\diagup \mathrm{Ker}\,(\pi_i \circ \iota \circ \pi) \cong E_i$ als Ringe. Folglich ist der Ring $R\diagup \mathrm{Ker}\,(\pi_i \circ \iota \circ \pi)$ einfach (denn er ist isomorph zum einfachen Ring E_i). Laut Lemma 6.4 (angewandt auf $I = \mathrm{Ker}\,(\pi_i \circ \iota \circ \pi)$) bedeutet dies, daß $\mathrm{Ker}\,(\pi_i \circ \iota \circ \pi)$ ein maximales Ideal von R ist. Nun haben wir

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{i=1}^{r} \underbrace{\mathrm{Ker}\,(\pi_i \circ \iota \circ \pi)}_{=\{x\in R \mid (\pi_i\circ\iota\circ\pi)(x)=0\}} \\
&= \bigcap_{i=1}^{r} \{x \in R \mid (\pi_i \circ \iota \circ \pi)\,(x) = 0\} = \left\{ x \in R \mid \underbrace{(\pi_i \circ \iota \circ \pi)\,(x)}_{=\pi_i(\iota(\pi(x)))} = 0 \text{ für alle } i \in \{1, 2, ..., r\} \right\} \\
&= \{x \in R \mid \pi_i\,(\iota\,(\pi\,(x))) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, 2, ..., r\}\} \\
&= \pi^{-1} \left(\iota^{-1} \left(\underbrace{\{y \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_r \mid \pi_i\,(y) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, 2, ..., r\}\}}_{=0} \right) \right) \\
&= \pi^{-1} \left(\underbrace{\iota^{-1}\,(0)}_{=0 \text{ (denn } \iota \text{ ist ein Isomorphismus)}} \right) = \mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ra}\,(R)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{Ra}\,(R) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(\pi_i \circ \iota \circ \pi) \supseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ ist ein maximales} \\ \text{Ideal von } R}} \mathfrak{m}.$$

(denn für jedes $i \in \{1, 2, ..., r\}$ ist $\mathrm{Ker}\,(\pi_i \circ \iota \circ \pi)$ ein maximales Ideal von R).

b) Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. Dann ist $\mathfrak{m} \neq R$ und somit $1 \notin \mathfrak{m}$ (denn sonst wäre $\mathfrak{m} = R$). Somit kann $\mathfrak{m}$ kein invertierbares Element enthalten (denn sonst wäre mit diesem inventierbaren Element auch sein Vielfaches 1 in $\mathfrak{m}$ enthalten, im Widerspruch zu $1 \notin \mathfrak{m}$).

Wir werden nun zeigen, daß $\operatorname{Ra}(R) \subseteq \mathfrak{m}$ gilt.

In der Tat ist $\mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R)$ ein Ideal von R, welches $\mathfrak{m}$ enthält. Da $\mathfrak{m}$ maximal ist, ist also entweder $\mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R) = \mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R) = R$. Da aber $\mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R) = R$ unmöglich ist[190], muß also $\mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R) = \mathfrak{m}$ sein, und damit $\operatorname{Ra}(R) \subseteq \mathfrak{m}$.

Da dies für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R gilt, ist also $\operatorname{Ra}(R)$ enthalten in der Schnittmenge aller maximalen Ideale von R.

Umgekehrt ist aber die Schnittmenge aller maximalen Ideale von R enthalten in $\operatorname{Ra}(R)$ (denn $\operatorname{Ra}(R) \supseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ ist ein maximales} \\ \text{Ideal von } R}} \mathfrak{m}$, wie wir in **a)** bewiesen haben). Somit ist die Schnittmenge aller maximalen Ideale von R gleich $\operatorname{Ra}(R)$. Folgerung 6.8 ist nun bewiesen.

Wir wollen noch eine einfache Konsequenz aus Satz 6.5 ziehen, die wir später brauchen werden:

6.9. Folgerung: Sei R ein Ring, und sei V ein endlich erzeugter R-Rechtsmodul. Seien $v_1, v_2, ..., v_n$ irgendwelche Elemente von V, und seien $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ die Restklassen dieser Elemente modulo dem Untermodul $V \cdot \operatorname{Ra}(R)$. Wenn die Restklassen $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ den R-Rechtsmodul $V \diagup (V \cdot \operatorname{Ra}(R))$ erzeugen, dann erzeugen die Elemente $v_1, v_2, ..., v_n$ den R-Rechtsmodul V.

Beweis von Folgerung 6.9: Angenommen, die Restklassen $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ erzeugen den R-Rechtsmodul $V \diagup (V \cdot \operatorname{Ra}(R))$.

Sei W der R-Untermodul $v_1R + v_2R + ... + v_nR$ von V. Sei M der R-Rechtsmodul $V \diagup W$. Dann ist $M \cdot \operatorname{Ra}(R) = M$ [191]. Der R-Rechtsmodul $M = V \diagup W$ ist endlich erzeugt (denn der R-Rechtsmodul V ist endlich erzeugt). Laut Satz 6.5 ist also $M = 0$. Damit ist $V \diagup W = M = 0$, also $V = W = v_1R + v_2R + ... + v_nR$. Mit anderen Worten:

[190] *Beweis, daß $\mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R) = R$ unmöglich ist:* Angenommen, $\mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R) = R$. Dann ist $1 \in R = \mathfrak{m} + \operatorname{Ra}(R)$, also $1 = m + a$ für ein $m \in \mathfrak{m}$ und $a \in \operatorname{Ra}(R)$. Folglich ist $m = 1 - a$ invertierbar (laut Bemerkung 6.2 **c)**, angewandt auf $n = a$), im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{m}$ kein invertierbares Element enthalten kann.

[191] *Beweis:* Sei $\pi : V \to V \diagup W$ die kanonische Projektion. Offensichtlich ist diese Projektion π surjektiv; das heißt, $\pi(V) = V \diagup W$.

Sei $m \in M$ beliebig. Da $m \in M = V \diagup W = \pi(V)$ ist, gibt es ein $v \in V$ mit $m = \pi(v)$. Bezeichnen wir mit $\overline{v}$ die Restklasse dieses Elementes v modulo dem Untermodul $V \cdot \operatorname{Ra}(R)$, dann ist $\overline{v} \in V \diagup (V \cdot \operatorname{Ra}(R))$. Da die Restklassen $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ den R-Rechtsmodul $V \diagup (V \cdot \operatorname{Ra}(R))$ erzeugen, gibt es also Elemente $r_1, r_2, ..., r_n$ von R mit $\overline{v} = \overline{v_1}r_1 + \overline{v_2}r_2 + ... + \overline{v_n}r_n$. Für diese Elemente $r_1, r_2, ..., r_n$ gilt nun $\overline{v} = \overline{v_1}r_1 + \overline{v_2}r_2 + ... + \overline{v_n}r_n = \overline{v_1r_1 + v_2r_2 + ... + v_nr_n}$. Mit anderen Worten: $v \equiv v_1r_1 + v_2r_2 + ... + v_nr_n \mod V \cdot \operatorname{Ra}(R)$. Das heißt, es gibt ein Element w von $V \cdot \operatorname{Ra}(R)$, das $v = (v_1r_1 + v_2r_2 + ... + v_nr_n) + w$ erfüllt. Daher ist $v \equiv w \mod W$ (denn $v_1r_1 + v_2r_2 + ... + v_nr_n \in v_1R + v_2R + ... + v_nR = W$). Es gilt also $\pi(v) = \pi(w)$ (da π die kanonische Projektion von V auf $V \diagup W$ ist). Doch $w \in V \cdot \operatorname{Ra}(R)$ führt auf $\pi(w) \in \pi(V \cdot \operatorname{Ra}(R)) = \pi(V) \cdot \operatorname{Ra}(R)$ (denn π ist ein R-Rechtsmodulhomomorphismus). Wir haben also

$$m = \pi(v) = \pi(w) \in \underbrace{\pi(V)}_{= V \diagup W = M} \cdot \operatorname{Ra}(R) = M \cdot \operatorname{Ra}(R).$$

Da wir dies für jedes $m \in M$ gezeigt haben, ist also $M \subseteq M \cdot \operatorname{Ra}(R)$. Zusammen mit der trivialen Inklusion $M \cdot \operatorname{Ra}(R) \subseteq M$ erhalten wir also $M \cdot \operatorname{Ra}(R) = M$.

Die Elemente v_1, v_2, ..., v_n erzeugen den R-Rechtsmodul V. Damit ist Folgerung 6.9 bewiesen.

Ein weiteres Korollar aus dem Obigen:

6.10. Folgerung: Sei R ein Ring. Sei I ein nilpotentes Ideal von R, und sei M ein maximales Ideal von R. Dann ist $I \subseteq M$.

Beweis von Folgerung 6.10: Nach Lemma 6.4 (angewandt auf I statt M) ist $R \diagup M$ ein einfacher Ring (da M ein maximales Ideal von R ist). Sei π die kanonische Projektion von R auf $R \diagup M$. Dann ist $\pi(I) = I \diagup M$ ein Ideal des Rings $R \diagup M$. Da I nilpotent ist, muß auch $\pi(I)$ nilpotent sein (denn π ist ein Ringhomomorphismus[192]).

Da $\pi(I)$ ein Ideal von $R \diagup M$ ist, gilt entweder $\pi(I) = 0$ oder $\pi(I) = R \diagup M$ (da $R \diagup M$ ein einfacher Ring ist). Doch $\pi(I) = R \diagup M$ ist unmöglich (denn $\pi(I)$ ist nilpotent, während $R \diagup M$ nicht nilpotent ist (da $1 \in R \diagup M$ und $R \diagup M \neq 0$)). Somit muß $\pi(I) = 0$ gelten, also $I \subseteq \operatorname{Ker} \pi = M$. Folgerung 6.10 ist nunmehr gezeigt.

Der Satz von Krull-Remak-Schmidt

Im folgenden kurzen Abschnitt wollen wir die Zerlegung von Moduln in unzerlegbare Moduln studieren. Erstmal eine (sehr naheliegende) Definition:

Definition: Sei A eine Algebra über einem Körper k.

Ein A-Modul heißt *unzerlegbar*, wenn er nicht als direkte Summe zweier von 0 verschiedener Untermoduln geschrieben werden kann.

Als nächstes zitieren wir ein bekanntes Resultat der Modultheorie, den sogenannten **Satz von Krull-Remak-Schmidt**, meistens kurz **Satz von Krull-Schmidt** genannt. Dieses Resultat existiert in unterschiedlich starken Formen; wir werden eine der schwächsten verwenden:

6.30. Satz (Satz von Krull-Remak-Schmidt): Sei A eine Algebra über einem Körper k.

(a) Für jeden endlichdimensionalen[193] A-Linksmodul V gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sowie N unzerlegbare A-Untermoduln V_1, V_2, ..., V_N von V mit $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_N$.

(b) Sei m eine positive ganze Zahl; seien V_1, V_2, ..., V_m beliebige unzerlegbare endlichdimensionale A-Linksmoduln. Sei ferner n eine positive ganze Zahl; seien W_1, W_2, ..., W_n unzerlegbare endlichdimensionale A-Linksmoduln.

Angenommen, $V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_m \cong W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ als A-Linksmoduln.

Dann gilt $m = n$, und es gibt eine Permutation $\pi \in S_m$, die $V_i \cong W_{\pi(i)}$ (als A-Linksmoduln) für alle $i \in \{1, 2, ..., m\}$ erfüllt.

Wir wollen diesen Satz nicht beweisen, sondern verweisen auf die klassische Algebraliteratur. Dort wird dieser Satz zuweilen in allgemeineren Versionen formuliert; diese benötigen wir aber nicht.

Kürzung für A-Linksmoduln

Wir wollen jetzt Kürzungssätze für A-Linksmoduln studieren.

Zuerst treffen wir eine *Vereinbarung*: Wenn A eine Algebra über einem Körper k ist, und V und W zwei A-Linksmoduln sind, dann verstehen wir unter "$V \cong W$" die Aussage "V und W sind zueinander isomorph als A-Linskmoduln" (und nicht die

[192] da π die kanonische Projektion von R auf $R \diagup M$ ist

[193] Zur Erinnerung: Wenn wir von einem "endlichdimensionalen" Modul sprechen, meinen wir immer einen Modul, der als *k-Vektorraum* endlichdimensional ist.

deutlich schwächere Aussage "V und W sind zueinander isomorph als k-Vektorräume"). Diese Vereinbarung ist von hier an bis zum Ende des Beweises von Satz 6.44 gültig.

Nun unser erster Kürzungssatz:

6.40. Satz (Potenzkürzungssatz für A-Linksmoduln): Sei A eine Algebra über einem Körper k.

Seien V und W zwei endlichdimensionale A-Linksmoduln. Sei $t \geq 1$ eine natürliche Zahl. Angenommen, $V^t \cong W^t$ als A-Linksmoduln. Dann ist $V \cong W$ als A-Linksmoduln.

Bevor wir diesen Satz beweisen, eine einfache Definition:

Definition: Sei A eine Algebra über einem Körper k. Sei V ein endlichdimensionaler A-Linksmodul.

(a) Unter einer *vollständigen Zerlegung* von V verstehen wir eine Liste $(V_1, V_2, ..., V_N)$ von unzerlegbaren A-Untermoduln V_1, V_2, ..., V_N von V, die $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_N$ erfüllen. Laut Satz 6.30 **(a)** hat V eine vollständige Zerlegung. (Im Allgemeinen ist diese aber nicht eindeutig festgelegt.)

(b) Sei E ein endlichdimensionaler unzerlegbarer A-Linksmodul. Wir definieren eine Zahl $\operatorname{mult}(E, V) \in \mathbb{N}$ wie folgt:

Für jede vollständige Zerlegung $(V_1, V_2, ..., V_N)$ von V bezeichnen wir mit $\operatorname{mult}_E(V_1, V_2, ..., V_N)$ die Anzahl aller $i \in \{1, 2, ..., N\}$, welche $V_i \cong E$ erfüllen[194]. Diese Anzahl $\operatorname{mult}_E(V_1, V_2, ..., V_N)$ hängt nur von E und V ab und nicht von der konkreten Wahl der vollständigen Zerlegung $(V_1, V_2, ..., V_N)$ [195]; somit können wir diese Anzahl mit $\operatorname{mult}(E, V)$ bezeichnen.

Diese Anzahl $\operatorname{mult}(E, V)$ heißt die *Vielfachheit* des A-Linksmoduls E im A-Linksmodul V. Nach ihrer Definition ist also

$$\begin{aligned} \operatorname{mult}(E, V) &= \operatorname{mult}_E(V_1, V_2, ..., V_N) \\ &= (\text{die Anzahl aller } i \in \{1, 2, ..., N\}, \text{ welche } V_i \cong E \text{ erfüllen}) \end{aligned} \tag{I.6.39}$$

für jede vollständige Zerlegung $(V_1, V_2, ..., V_N)$ von V.

6.41. Bemerkung: Sei A eine Algebra über einem Körper k. Seien V und W zwei endlichdimensionale A-Linksmoduln. Genau dann gilt $V \cong W$, wenn jeder endlichdi-

[194] Wie vereinbart, verstehen wir unter $V_i \cong E$ die Aussage "V_i und E sind zueinander isomorph als A-Linksmoduln".

[195] *Beweis:* Wir müssen nachweisen, daß für je zwei vollständige Zerlegungen $(V_1, V_2, ..., V_m)$ und $(W_1, W_2, ..., W_n)$ des A-Linksmoduls V notwendigerweise $\operatorname{mult}_E(V_1, V_2, ..., V_m) = \operatorname{mult}_E(W_1, W_2, ..., W_n)$ gelten muss.

Dies beweisen wir folgendermaßen:

Da $(V_1, V_2, ..., V_m)$ eine vollständige Zerlegung von V ist, sind V_1, V_2, ..., V_m unzerlegbare Untermoduln von V, die $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_m$ erfüllen. Diese Moduln V_1, V_2, ..., V_m sind ferner endlichdimensional (weil sie Untermoduln von V sind).

Da $(W_1, W_2, ..., W_n)$ eine vollständige Zerlegung von V ist, sind W_1, W_2, ..., W_n unzerlegbare Untermoduln von V, die $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ erfüllen. Diese Moduln W_1, W_2, ..., W_n sind ferner endlichdimensional (weil sie Untermoduln von V sind).

Ferner gilt $V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_m = V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$. Aus Satz 6.30 **(b)** folgt somit, daß $m = n$ gilt, und daß es eine Permutation $\pi \in S_m$ gibt, die $V_i \cong W_{\pi(i)}$ (als A-Linksmoduln) für alle $i \in \{1, 2, ..., m\}$ erfüllt. Diese Permutation π ist eine Bijektion (wie jede Permutation).

Nach der Definition von $\operatorname{mult}_E(V_1, V_2, ..., V_m)$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{mult}_E(V_1, V_2, ..., V_m) &= (\text{die Anzahl aller } i \in \{1, 2, ..., m\}, \text{ welche } V_i \cong E \text{ erfüllen}) \\ &= |\{i \in \{1, 2, ..., m\} \mid V_i \cong E\}| . \end{aligned}$$

Analog ist

$$\operatorname{mult}_E(W_1, W_2, ..., W_n) = |\{i \in \{1, 2, ..., n\} \mid W_i \cong E\}| .$$

mensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E,V) = \operatorname{mult}(E,W)$ erfüllt.

Beweis von Bemerkung 6.41: $\Longrightarrow$: Angenommen, $V \cong W$. Dann gibt es einen A-Linksmodulisomorphismus $\phi : V \to W$.

Sei E ein endlichdimensionaler unzerlegbarer A-Linksmodul.

Sei $(V_1, V_2, ..., V_N)$ eine vollständige Zerlegung von V. Dann ist $(\phi(V_1), \phi(V_2), ..., \phi(V_N))$ eine vollständige Zerlegung von W (denn ϕ ist ein A-Linksmodulisomorphismus).

Nach (I.6.39) (angewandt auf den A-Linksmodul W mit der vollständigen Zerlegung $(\phi(V_1), \phi(V_2), ..., \phi(V_N))$ statt des A-Linksmoduls V mit der vollständigen Zerlegung $(V_1, V_2, ..., V_N)$) gilt also

$$\begin{aligned}
\operatorname{mult}(E,W) &= (\text{die Anzahl aller } i \in \{1,2,...,N\}, \text{ welche } \phi(V_i) \cong E \text{ erfüllen}) \\
&= (\text{die Anzahl aller } i \in \{1,2,...,N\}, \text{ welche } V_i \cong E \text{ erfüllen}) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn für jedes } i \in \{1,2,...,N\} \text{ ist } \phi(V_i) \cong E \text{ äquivalent zu } V_i \cong E \\ (\text{denn da } \phi \text{ ein } A\text{-Linksmodulisomorphismus ist, gilt } \phi(V_i) \cong V_i) \end{array}\right) \\
&= \operatorname{mult}(E,V) \qquad\qquad (\text{nach (I.6.39)}).
\end{aligned}$$

Also erfüllt jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E,V) = \operatorname{mult}(E,W)$. Damit ist die $\Longrightarrow$-Richtung von Bemerkung 6.41 gezeigt.

$\Longleftarrow$: Angenommen, jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E erfüllt die Gleichung $\operatorname{mult}(E,V) = \operatorname{mult}(E,W)$.

Sei $(V_1, V_2, ..., V_N)$ eine vollständige Zerlegung von V. Dann sind die A-Linksmoduln V_1, V_2, ..., V_N unzerlegbar und erfüllen $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_N$. Folglich sind die A-Linksmoduln V_1, V_2, ..., V_N endlichdimensional (da sie Untermoduln des endlichdimensionalen A-Linksmoduls V sind).

Sei ferner $(W_1, W_2, ..., W_M)$ eine vollständige Zerlegung von W. Dann sind die A-Linksmoduln W_1, W_2, ..., W_M unzerlegbar und erfüllen $W = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_M$. Folglich sind die A-Linksmoduln W_1, W_2, ..., W_M endlichdimensional (da sie Untermoduln des endlichdimensionalen A-Linksmoduls W sind).

Sei $\mathcal{P}$ die Menge $\{V_1, V_2, ..., V_N\} \cup \{W_1, W_2, ..., W_M\}$. Dann gilt $\{V_1, V_2, ..., V_N\} \subseteq \mathcal{P}$ und $\{W_1, W_2, ..., W_M\} \subseteq \mathcal{P}$. Ferner ist jedes Element von $\mathcal{P}$ ein endlichdimensionaler unzerlegbarer A-Linksmodul (denn die A-Linksmoduln V_1, V_2, ..., V_N sind endlichdimensional und unzerlegbar, und selbiges gilt für die A-Linksmoduln W_1, W_2, ..., W_M).

Die Relation $\cong$ (Isomorphie von A-Linksmoduln) ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}$. Die Faktormenge $\mathcal{P} / \cong$ besteht aus den Äquivalenzklassen von A-

---

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mult}_E(V_1, V_2, ..., V_m) \\
&= |\{i \in \{1,2,...,m\} \mid V_i \cong E\}| = \left|\{i \in \{1,2,...,m\} \mid W_{\pi(i)} \cong E\}\right| \\
&\qquad \left(\text{denn wegen } V_i \cong W_{\pi(i)} \text{ ist } V_i \cong E \text{ äquivalent zu } W_{\pi(i)} \cong E\right) \\
&= \left|\underbrace{\{i \in \{1,2,...,m\} \mid W_{\pi(i)} \cong E\}}_{=\pi^{-1}(\{i\in\{1,2,...,n\} \mid W_i \cong E\})}\right| = \left|\pi^{-1}(\{i \in \{1,2,...,n\} \mid W_i \cong E\})\right| \\
&= |\{i \in \{1,2,...,n\} \mid W_i \cong E\}| \qquad (\text{denn die Abbildung } \pi \text{ ist eine Bijektion}) \\
&= \operatorname{mult}_E(W_1, W_2, ..., W_n),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Linksmoduln aus der Menge $\mathcal{P}$ modulo der Relation $\cong$ (also modulo Isomorphie). Für jedes Element $e \in \mathcal{P} \diagup \cong$ sei $R(e)$ ein Repräsentant der Äquivalenzklasse e. Dadurch ist eine Abbildung $R : \mathcal{P} \diagup \cong \to \mathcal{P}$ definiert. Sei $K : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \diagup \cong$ die kanonische Projektion von $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{P} \diagup \cong$, die jedem Element von P seine Äquivalenzklasse modulo $\cong$ zuordnet. Sei $\mathcal{Q}$ die Teilmenge $R(K(\mathcal{P}))$ von $\mathcal{P}$. Diese Menge $\mathcal{Q}$ hat dann folgende Eigenschaften:

- Für je zwei $E \in \mathcal{Q}$ und $E' \in \mathcal{Q}$ mit $E \cong E'$ muss $E = E'$ gelten.[196]
- Für jedes $F \in \mathcal{P}$ gibt es ein $E \in \mathcal{Q}$ mit $F \cong E$. Und zwar ist dieses E gegeben durch $E = R(K(F))$ (denn $F \cong R(K(F))$, weil F und $R(K(F))$ zwei Repräsentanten einer und dergleichen Äquivalenzklasse modulo $\cong$ (nämlich der Äquivalenzklasse $K(F)$) sind).

Hieraus folgt:

$$\text{Für jedes } F \in \mathcal{P} \text{ gibt es genau ein } E \in \mathcal{Q} \text{ mit } F \cong E. \tag{I.6.40}$$

[197]

Wir stellen nun fest:

$$\begin{array}{l}\text{Ist } r \in \mathbb{N} \text{ und sind } L_1,\ L_2,\ ...,\ L_r \text{ irgendwelche } A\text{-Linksmoduln, die} \\ \{L_1, L_2, ..., L_r\} \subseteq \mathcal{P} \text{ erfüllen, dann ist } L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_r \cong \bigoplus\limits_{E \in \mathcal{Q}} \bigoplus\limits_{\substack{i \in \{1,2,...,r\};\\ L_i \cong E}} E.\end{array} \tag{I.6.41}$$

Beweis von (I.6.41): Wir haben

$$L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_r = \bigoplus_{i \in \{1,2,...,r\}} L_i \cong \bigoplus_{i \in \{1,2,...,r\}} \bigoplus_{\substack{E \in \mathcal{Q};\\ L_i \cong E}} E$$

(denn für jedes $i \in \{1, 2, ..., r\}$ ist $L_i \cong \bigoplus\limits_{\substack{E \in \mathcal{Q};\\ L_i \cong E}} E$ [198]). Somit ist

$$L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_r \cong \bigoplus_{i \in \{1,2,...,r\}} \bigoplus_{\substack{E \in \mathcal{Q};\\ L_i \cong E}} E \cong \bigoplus_{E \in \mathcal{Q}} \bigoplus_{\substack{i \in \{1,2,...,r\};\\ L_i \cong E}} E,$$

[196] *Beweis:* Wegen $E \in \mathcal{Q} = R(K(\mathcal{P}))$ ist $E = R(K(F))$ für irgendein $F \in \mathcal{P}$. Analog ist $E' = R(K(F'))$ für irgendein $F' \in \mathcal{P}$. Wir haben nun $R(K(F)) \cong F$, weil $R(K(F))$ und F zwei Repräsentanten einer und dergleichen Äquivalenzklasse modulo $\cong$ (nämlich der Äquivalenzklasse $K(F)$) sind. Analog gilt $R(K(F')) \cong F'$. Also ist $F \cong R(K(F)) = E \cong E' = R(K(F')) \cong F'$. Das heißt, F und F' liegen in der gleichen Äquivalenzklasse bezüglich $\cong$. Mit anderen Worten, $K(F) = K(F')$, und somit ist $E = R\left(\underbrace{K(F)}_{=K(F')}\right) = R(K(F')) = E'$.

[197] *Beweis von (I.6.40):* Sei $F \in \mathcal{P}$ beliebig. Dann gibt es (wie wir wissen) ein $E \in \mathcal{Q}$ mit $F \cong E$. Andererseits ist dieses E eindeutig, denn für je zwei $E \in \mathcal{Q}$ und $E' \in \mathcal{Q}$ mit $F \cong E$ und $F \cong E'$ gilt $E = E'$ (weil $F \cong E$ und $F \cong E'$ zu $E \cong F \cong E'$ führen, und wie wir wissen, folgt hieraus $E = E'$). Somit existiert genau ein $E \in \mathcal{Q}$ mit $F \cong E$. Damit ist (I.6.40) bewiesen.

[198] *Beweis:* Sei $i \in \{1, 2, ..., r\}$ beliebig. Dann ist $L_i \in \{L_1, L_2, ..., L_r\} \subseteq \mathcal{P}$. Daher gibt es genau ein $E \in \mathcal{Q}$ mit $L_i \cong E$ (nach (I.6.40), angewandt auf L_i statt F). Bezeichnen wir dieses E mit E_1. Somit ist $\bigoplus\limits_{\substack{E \in \mathcal{Q};\\ L_i \cong E}} E = E_1 \cong L_i$ (denn $L_i \cong E_1$ nach der Definition von E_1), was zu zeigen war.

womit (I.6.41) bewiesen ist.

Schließlich ist jedes $E \in \mathcal{Q}$ ein endlichdimensionaler unzerlegbarer A-Linksmodul (denn $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$, und jedes Element von $\mathcal{P}$ ist ein endlichdimensionaler unzerlegbarer A-Linksmodul). Somit erfüllt jedes $E \in \mathcal{Q}$ die Gleichung $\operatorname{mult}(E,V) = \operatorname{mult}(E,W)$ (denn jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E erfüllt die Gleichung $\operatorname{mult}(E,V) = \operatorname{mult}(E,W)$).

Für jedes $E \in \mathcal{Q}$ ist nun

$$\begin{aligned} E^{\operatorname{mult}(E,V)} &= E^{(\text{die Anzahl aller } i\in\{1,2,...,N\}, \text{ welche } V_i\cong E \text{ erfüllen})} && \text{(nach (I.6.39))} \\ &\cong \bigoplus_{\substack{i\in\{1,2,...,N\};\\ V_i\cong E}} E. \end{aligned}$$

Da $(V_1, V_2, ..., V_N)$ eine vollständige Zerlegung des A-Linksmoduls V ist, gilt aber

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_N \\ &\cong \bigoplus_{E\in\mathcal{Q}} \underbrace{\bigoplus_{\substack{i\in\{1,2,...,N\};\\ V_i\cong E}} E}_{\cong E^{\operatorname{mult}(E,V)}} && \text{(nach (I.6.41), angewandt auf } r = N \text{ und } L_i = V_i) \\ &\cong \bigoplus_{E\in\mathcal{Q}} E^{\operatorname{mult}(E,V)}. \end{aligned}$$

Wenden wir genau das gleiche Argument auf den A-Linksmodul W mit der vollständigen Zerlegung $(W_1, W_2, ..., W_M)$ anstelle des A-Linksmoduls V mit der vollständigen Zerlegung $(V_1, V_2, ..., V_N)$ an, so erhalten wir:

$$W \cong \bigoplus_{E\in\mathcal{Q}} E^{\operatorname{mult}(E,W)}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} V &\cong \bigoplus_{E\in\mathcal{Q}} E^{\operatorname{mult}(E,V)} \\ &= \bigoplus_{E\in\mathcal{Q}} E^{\operatorname{mult}(E,W)} && \text{(denn } \operatorname{mult}(E,V) = \operatorname{mult}(E,W) \text{ für jedes } E \in \mathcal{Q}) \\ &\cong W, \end{aligned}$$

und damit ist die $\Longleftarrow$-Richtung von Bemerkung 6.41 nachgewiesen.

Also sind nun beide Richtungen von Bemerkung 6.41 gezeigt, und der Beweis ist komplett.

6.42. Bemerkung: Sei A eine Algebra über einem Körper k. Seien V und W zwei endlichdimensionale A-Linksmoduln. Sei E ein endlichdimensionaler unzerlegbarer A-Linksmodul. Dann ist $\operatorname{mult}(E, V \oplus W) = \operatorname{mult}(E,V) + \operatorname{mult}(E,W)$.

Beweis von Bemerkung 6.42: Sei $(V_1, V_2, ..., V_N)$ eine vollständige Zerlegung von V. Dann sind die A-Linksmoduln V_1, V_2, ..., V_N unzerlegbar und erfüllen $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_N = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i$.

Sei ferner $(W_1, W_2, ..., W_M)$ eine vollständige Zerlegung von W. Dann sind die A-Linksmoduln W_1, W_2, ..., W_M unzerlegbar und erfüllen $W = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_M = \bigoplus_{i=1}^{M} W_i = \bigoplus_{i=N+1}^{N+M} W_{i-N}$ (hier haben wir $i - N$ für i in der Summe substituiert).

Wir definieren für jedes $i \in \{1, 2, ..., N + M\}$ einen Untermodul P_i des A-Linksmoduls $V \oplus W$ durch $P_i = \begin{cases} V_i \oplus 0, & \text{wenn } i \leq N; \\ 0 \oplus W_{i-N}, & \text{wenn } i > N \end{cases}$ (wobei $V_i \oplus 0$ als das Bild von V_i unter der kanonischen Einbettung $V \to V \oplus W$ zu verstehen ist, und $0 \oplus W_{i-N}$ als das Bild von W_{i-N} unter der kanonischen Einbettung $W \to V \oplus W$ zu verstehen ist). Dann ist

$$\begin{aligned}
&P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_{N+M} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{N+M} P_i = \bigoplus_{i=1}^{N+M} \begin{cases} V_i \oplus 0, & \text{wenn } i \leq N; \\ 0 \oplus W_{i-N}, & \text{wenn } i > N \end{cases} \qquad \left(\text{denn } P_i = \begin{cases} V_i \oplus 0, & \text{wenn } i \leq N; \\ 0 \oplus W_{i-N}, & \text{wenn } i > N \end{cases} \right) \\
&= \underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{N} (V_i \oplus 0) \right)}_{= \left(\bigoplus_{i=1}^{N} V_i \right) \oplus 0} \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{i=N+1}^{N+M} 0 \oplus W_{i-N} \right)}_{= 0 \oplus \left(\bigoplus_{i=N+1}^{N+M} W_{i-N} \right)} = \left(\underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{N} V_i \right)}_{=V} \oplus 0 \right) \oplus \left(0 \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{i=N+1}^{N+M} W_{i-N} \right)}_{=W} \right) \\
&= (V \oplus 0) \oplus (0 \oplus W) = V \oplus W.
\end{aligned}$$

Die A-Linksmoduln V_1, V_2, ..., V_N sind unzerlegbar, und selbiges gilt für die A-Linksmoduln W_1, W_2, ..., W_M. Folglich ist der A-Linksmodul $\begin{cases} V_i, & \text{wenn } i \leq N; \\ W_{i-N}, & \text{wenn } i > N \end{cases}$ unzerlegbar für jedes $i \in \{1, 2, ..., N + M\}$. Da $P_i = \begin{cases} V_i \oplus 0, & \text{wenn } i \leq N; \\ 0 \oplus W_{i-N}, & \text{wenn } i > N \end{cases} \cong \begin{cases} V_i, & \text{wenn } i \leq N; \\ W_{i-N}, & \text{wenn } i > N \end{cases}$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., N + M\}$ gilt, ist also der A-Linksmodul P_i unzerlegbar für jedes $i \in \{1, 2, ..., N + M\}$. Mit anderen Worten: Die A-Linksmoduln P_1, P_2, ..., P_{N+M} sind unzerlegbar.

Somit ist $(P_1, P_2, ..., P_{N+M})$ eine Liste von unzerlegbaren A-Untermoduln von $V \oplus W$, die $V \oplus W = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_{N+M}$ erfüllt. Mit anderen Worten: $(P_1, P_2, ..., P_{N+M})$ ist eine vollständige Zerlegung von $V \oplus W$. Nach (I.6.39) (angewandt auf den A-Linksmodul $V \oplus W$ mit der vollständigen Zerlegung $(P_1, P_2, ..., P_{N+M})$ anstelle des A-Linksmoduls V mit der vollständigen Zerlegung $(V_1, V_2, ..., V_N)$) gilt nun

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mult}(E, V \oplus W) \\
&= (\text{die Anzahl aller } i \in \{1, 2, ..., N + M\}, \text{ welche } P_i \cong E \text{ erfüllen}) \\
&= |\{i \in \{1, 2, ..., N + M\} \mid P_i \cong E\}| \\
&= |\{i \in \{1, 2, ..., N\} \mid P_i \cong E\}| + |\{i \in \{N + 1, N + 2, ..., N + M\} \mid P_i \cong E\}|
\end{aligned}$$

(denn die Menge $\{i \in \{1, 2, ..., N + M\} \mid P_i \cong E\}$ ist die Vereinigung ihrer disjunkten Teilmengen $\{i \in \{1, 2, ..., N\} \mid P_i \cong E\}$ und $\{i \in \{N + 1, N + 2, ..., N + M\} \mid P_i \cong E\}$).

Doch

$$\begin{aligned}
&\left|\{i\in\{1,2,...,N\}\ \mid\ P_i\cong E\}\right|\\
&=\left|\{i\in\{1,2,...,N\}\ \mid\ V_i\cong E\}\right|\\
&\qquad\left(\begin{array}{c}\text{denn für alle } i\in\{1,2,...,N\} \text{ gilt } P_i\cong\begin{cases}V_i, & \text{wenn } i\leq N;\\ W_{i-N}, & \text{wenn } i>N\end{cases}=V_i,\\ \text{und somit ist } P_i\cong E \text{ äquivalent zu } V_i\cong E\end{array}\right)\\
&=\left(\text{die Anzahl aller } i\in\{1,2,...,N\}\text{, welche } V_i\cong E \text{ erfüllen}\right)=\operatorname{mult}(E,V)
\end{aligned}$$

(nach (I.6.39)) und

$$\begin{aligned}
&\left|\{i\in\{N+1,N+2,...,N+M\}\ \mid\ P_i\cong E\}\right|\\
&=\left|\{i\in\{N+1,N+2,...,N+M\}\ \mid\ W_{i-N}\cong E\}\right|\\
&\qquad\left(\begin{array}{c}\text{denn für alle } i\in\{N+1,N+2,...,N+M\}\\ \text{ist } P_i\cong\begin{cases}V_i, & \text{wenn } i\leq N;\\ W_{i-N}, & \text{wenn } i>N\end{cases}=W_{i-N},\\ \text{und somit ist } P_i\cong E \text{ äquivalent zu } W_{i-N}\cong E\end{array}\right)\\
&=\left|\{i\in\{1,2,...,M\}\ \mid\ W_i\cong E\}\right|\\
&\qquad\left(\begin{array}{c}\text{denn die Abbildung}\\ \{i\in\{1,2,...,M\}\ \mid\ W_i\cong E\}\to\{i\in\{N+1,N+2,...,N+M\}\ \mid\ W_{i-N}\cong E\},\\ i\mapsto i+N \text{ ist eine Bijektion}\end{array}\right)\\
&=\left(\text{die Anzahl aller } i\in\{1,2,...,M\}\text{, welche } W_i\cong E \text{ erfüllen}\right)=\operatorname{mult}(E,W)
\end{aligned}$$

(nach (I.6.39), angewandt auf den A-Linksmodul W mit der vollständigen Zerlegung $(W_1,W_2,...,W_M)$ anstelle des A-Linksmoduls V mit der vollständigen Zerlegung $(V_1,V_2,...,V_N)$). Somit haben wir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mult}(E,V\oplus W)\\
&=\underbrace{\left|\{i\in\{1,2,...,N\}\ \mid\ P_i\cong E\}\right|}_{=\operatorname{mult}(E,V)}+\underbrace{\left|\{i\in\{N+1,N+2,...,N+M\}\ \mid\ P_i\cong E\}\right|}_{=\operatorname{mult}(E,W)}\\
&=\operatorname{mult}(E,V)+\operatorname{mult}(E,W).
\end{aligned}$$

Damit ist Bemerkung 6.42 bewiesen.

6.43. Folgerung: Sei A eine Algebra über einem Körper k. Sei E ein endlichdimensionaler unzerlegbarer A-Linksmodul. Sei $t\in\mathbb{N}$.

(a) Seien $V_1, V_2, ..., V_t$ endlichdimensionale A-Linksmoduln. Dann ist $\operatorname{mult}\left(E,\bigoplus_{i=1}^{t}V_i\right)=\sum_{i=1}^{t}\operatorname{mult}(E,V_i)$.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler A-Linksmodul. Dann ist $\operatorname{mult}(E,V^t)=t\cdot\operatorname{mult}(E,V)$.

Beweis von Folgerung 6.43: Folgerung 6.43 **(a)** folgt aus Bemerkung 6.42 durch vollständige Induktion nach t. Folgerung 6.43 **(b)** folgt aus Folgerung 6.43 **(a)** (angewandt auf $V_1=V$, $V_2=V$, ..., $V_t=V$). Damit ist Folgerung 6.43 bewiesen.

Beweis von Satz 6.40: Wenden wir Bemerkung 6.41 auf V^t und W^t statt V bzw. W an, so erhalten wir: Genau dann gilt $V^t\cong W^t$, wenn jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E,V^t)=\operatorname{mult}(E,W^t)$ erfüllt. Da wir

$V^t \cong W^t$ laut Annahme wissen, folgern wir also hieraus, daß jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E, V^t) = \operatorname{mult}(E, W^t)$ erfüllt. Nach Folgerung 6.43 **(b)** ist aber $\operatorname{mult}(E, V^t) = t \cdot \operatorname{mult}(E, V)$, und Anwendung von Folgerung 6.43 **(b)** auf W statt V ergibt $\operatorname{mult}(E, W^t) = t \cdot \operatorname{mult}(E, W)$. Folglich erfüllt jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E, V) = \operatorname{mult}(E, W)$ (denn $t \cdot \operatorname{mult}(E, V) = \operatorname{mult}(E, V^t) = \operatorname{mult}(E, W^t) = t \cdot \operatorname{mult}(E, W)$, und wegen $t \neq 0$ kann man diese Gleichung durch t teilen). Laut Bemerkung 6.41 ist diese Aussage aber äquivalent zu $V \cong W$. Somit erhalten wir $V \cong W$, und Satz 6.40 ist bewiesen.

Bevor wir weitergehen, wollen wir ein zu Satz 6.40 ähnliches Resultat beweisen (das wir allerdings nur wegen seiner Kuriosität beweisen; mir ist keine Anwendung bekannt):

6.44. Satz (Summenkürzungssatz für A-Linksmoduln): Sei A eine Algebra über einem Körper k.

Seien U, V und W drei endlichdimensionale A-Linksmoduln. Angenommen, $V \oplus U \cong W \oplus U$ als A-Linksmoduln. Dann ist $V \cong W$ als A-Linksmoduln.

Beweis von Satz 6.44: Wenden wir Bemerkung 6.41 auf $V \oplus U$ und $W \oplus U$ statt V bzw. W an, so erhalten wir: Genau dann gilt $V \oplus U \cong W \oplus U$, wenn jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E, V \oplus U) = \operatorname{mult}(E, W \oplus U)$ erfüllt. Da wir $V \oplus U \cong W \oplus U$ laut Annahme wissen, folgern wir also hieraus, daß jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E, V \oplus U) = \operatorname{mult}(E, W \oplus U)$ erfüllt. Nach Folgerung 6.42 (angewandt auf V und U statt V und W) ist aber $\operatorname{mult}(E, V \oplus U) = \operatorname{mult}(E, V) + \operatorname{mult}(E, U)$, und Anwendung von Folgerung 6.42 auf W und U statt V und W ergibt $\operatorname{mult}(E, W \oplus U) = \operatorname{mult}(E, W) + \operatorname{mult}(E, U)$. Folglich erfüllt jeder endlichdimensionale unzerlegbare A-Linksmodul E die Gleichung $\operatorname{mult}(E, V) = \operatorname{mult}(E, W)$ (denn $\operatorname{mult}(E, V) + \operatorname{mult}(E, U) = \operatorname{mult}(E, V \oplus U) = \operatorname{mult}(E, W \oplus U) = \operatorname{mult}(E, W) + \operatorname{mult}(E, U)$). Laut Bemerkung 6.41 ist diese Aussage aber äquivalent zu $V \cong W$. Somit erhalten wir $V \cong W$, und Satz 6.44 ist bewiesen.

Ab dieser Stelle bedeutet "$V \cong W$" nicht mehr notwendigerweise "V und W sind zueinander isomorph als A-Linksmoduln" (sondern, je nach Kontext, unterschiedliche Arten von Isomorphie - es kann auch Isomorphie als A-Linksmoduln sein).

Die meisten Anwendungen von Satz 6.40 gehen über folgendes Korollar:

6.45. Satz (endlicher Noether-Deuring-Satz): Sei A eine Algebra über einem Körper k. Sei $K \diagup k$ eine endliche Körpererweiterung. Bekanntlich läßt sich dann für jeden A-Linksmodul U ein $A \otimes_k K$-Linksmodul $U \otimes_k K$ definieren (die Modulstruktur ist dabei gegeben durch $(a \otimes_k \ell)(u \otimes_k \ell') = au \otimes_k \ell\ell'$ für alle $a \in A$, $\ell \in K$, $u \in U$ und $\ell' \in K$).

Seien V und W zwei endlichdimensionale A-Linksmoduln. Angenommen, $V \otimes_k K \cong W \otimes_k K$ als $A \otimes_k K$-Linksmoduln. Dann ist $V \cong W$ als A-Linksmoduln.

Beweis von Satz 6.45: Vermöge des k-Algebrenhomomorphismus

$$A \to A \otimes_k K, \qquad a \mapsto a \otimes_k 1$$

wird jeder $A \otimes_k K$-Linksmodul zu einem A-Linksmodul. Da $V \otimes_k K \cong W \otimes_k K$ als $A \otimes_k K$-Linksmoduln gilt, ist also auch $V \otimes_k K \cong W \otimes_k K$ als A-Linksmoduln. Doch als A-Linksmoduln ist

$$\begin{aligned} V \otimes_k K &\cong V \otimes_k k^{[K:k]} \qquad \bigl(\text{denn } K \cong k^{[K:k]} \text{ als } k\text{-Vektorraum}\bigr) \\ &\cong V^{[K:k]} \end{aligned}$$

und analog $W \otimes_k K \cong W^{[K:k]}$. Es gilt also $V^{[K:k]} \cong V \otimes_k K \cong W \otimes_k K \cong W^{[K:k]}$ als A-Linksmoduln. Laut Satz 6.40 (angewandt auf $t = [K : k]$) folgt hieraus $V \cong W$ als A-Linksmoduln, und Satz 6.45 ist bewiesen.

Man kann Satz 6.45 auch auf unendliche Körpererweiterungen ausdehnen, was wir hier aber nicht machen (es ist nicht schwer, aber benötigt eine neue Idee). Es ist jedoch sehr leicht, Satz 6.45 auf algebraische Körpererweiterungen auszudehnen.

Die Hauptanwendung von Satz 6.45 besteht darin, daß man mit seiner Hilfe die Isomorphie zweier Darstellungen über einem Körper k beweisen kann, indem man ihre Isomorphie über *einem größeren Körper* als k beweist, idealerweise dem algebraischen Abschluss von k (der zwar im Allgemeinen keine endliche, aber doch eine algebraische Erweiterung von k ist). Viele Standardmethoden der Darstellungstheorie funktionieren nur über algebraisch abgeschlossenen Körpern, und durch Resultate wie Satz 6.45 kann man Isomorphien von Darstellungen von algebraisch abgeschlossenen Körpern auf beliebige Körper "herunterprojizieren". Satz 6.45 ist einer der ersten Sätze aus der sogenannten Galois-Abstiegstheorie.

Kürzung für mehrfache Linksmoduln

Mit Satz 6.40 haben wir ein Kriterium für die Isomorphie zweier A-Linksmoduln formuliert. Wir wollen jetzt dieses Kriterium verallgemeinern - nämlich zu einem Kriterium dafür, wann zwei Vektorräume *mit mehreren gleichzeitigen Linksmodulstrukturen* zueinander isomorph sind.

An dieser Stelle wollen wir an eine notationelle Vereinbarung erinnern, die wir vor längerem (in Bemerkung $2.21\frac{19}{20}$) getroffen haben: Wenn k ein Körper ist, wenn R eine k-Algebra und V ein k-Vektorraum ist, dann verstehen wir unter einer "R-Linksmodulstruktur auf V" eigentlich eine $(R)_k$-Linksmodulstruktur auf V. Eine solche Linksmodulstruktur muß (im Unterschied zu unserem ursprünglichen Begriff von "R-Linksmodulstruktur auf V") stets

$$(\lambda \cdot 1_R)\, v = \lambda v \qquad \text{für alle } \lambda \in k \text{ und } v \in V$$

erfüllen.

Dies führt insbesondere dazu, daß ein Vektorraum V, auf dem gleichzeitig A_i-Linksmodulstrukturen für mehrere k-Algebren A_1, A_2, ..., A_n definiert sind, stets

$$(\lambda \cdot 1_{A_1})\, v = (\lambda \cdot 1_{A_2})\, v = ... = (\lambda \cdot 1_{A_n})\, v \qquad \text{für alle } \lambda \in k \text{ und } v \in V$$

erfüllen muß (denn $(\lambda \cdot 1_{A_i})\, v = \lambda v$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$). Würden wir den Begriff "A_i-Linksmodulstruktur" nicht als "$(A_i)_k$-Linksmodulstruktur" lesen, sondern im ursprünglichen Sinne (also im Sinne einer Linksmodulstruktur über dem *Ring* A_i, ohne daß die k-Algebrastruktur auf A_i eine Rolle spielt), dann würde dies nicht immer erfüllt sein, und einige der folgenden Resultate wären falsch.

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung von Satz 6.40:

6.50. Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien A_1, A_2, ..., A_n beliebige Algebren über einem Körper k.

Seien V und W zwei endlichdimensionale k-Vektorräume. Angenommen, für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ haben wir auf dem Vektorraum V eine A_i-Linksmodulstruktur, und auf dem Vektorraum W eine A_i-Linksmodulstruktur gegeben.

Sei $t \geq 1$ eine natürliche Zahl. Angenommen, es gibt einen Isomorphismus $\Phi : V^t \to W^t$ von Vektorräumen, der für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ein Isomorphismus von A_i-Linksmoduln ist. Dann gibt es einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ von Vektorräumen, der für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ein Isomorphismus von A_i-Linksmoduln ist.

Bevor wir diesen Satz beweisen, eine kurze Definition:

Definition: Sei R eine Algebra über einem Körper k. Sei V ein R-Linksmodul. Dann bezeichnen wir mit $\rho_{R,V}$ die Abbildung $R \to \operatorname{End} V$ (wobei $\operatorname{End} V$ hier für $\operatorname{End}_k V$ steht), die durch

$$\rho_{R,V}(r) = (V \to V, \qquad v \mapsto rv) \qquad \text{für alle } r \in R$$

definiert ist. Diese Abbildung $\rho_{R,V}$ nennen wir auch die *Darstellungsabbildung* des R-Linksmoduls V.

Bekanntlich ist diese Darstellungsabbildung $\rho_{R,V}$ ein k-Algebrahomomorphismus. Seine wichtigste Eigenschaft ist $(\rho_{R,V}(r))\, v = rv$ für alle $r \in R$ und $v \in V$ (dies folgt sofort aus der Definition von $\rho_{R,V}$).

Beweis von Satz 6.50: Im Verlauf des nachfolgenden Beweises werden wir die Bezeichnung End immer als Abkürzung für End_k verwenden (wie immer).

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sei v_i die Darstellungsabbildung $\rho_{A_i,V}$ des A_i-Linksmoduls V, und sei w_i die Darstellungsabbildung $\rho_{A_i,W}$ des A_i-Linksmoduls W. Diese Abbildungen v_i und w_i sind k-Algebrahomomorphismen für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (denn wir wissen, daß $\rho_{R,V}$ ein k-Algebrahomomorphismus ist für jede k-Algebra R und jeden R-Linksmodul V).

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sei p_i die k-lineare Abbildung $A_i \to \operatorname{End} V \times \operatorname{End} W$, die durch

$$p_i(a) = (v_i(a), w_i(a)) \qquad \text{für alle } a \in A_i$$

definiert ist. Es ist leicht einzusehen, daß p_i ein k-Algebrahomomorphismus ist (denn v_i und w_i sind k-Algebrahomomorphismen).

Sei P die Unteralgebra von $\operatorname{End} V \times \operatorname{End} W$, die erzeugt ist von den Untervektorräumen $p_1(A_1)$, $p_2(A_2)$, ..., $p_n(A_n)$. Offensichtlich ist dann $p_i(A_i) \subseteq P$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Der Vektorraum V ist ein $\operatorname{End} V \times \operatorname{End} W$-Linksmodul, wobei die Linkswirkung durch

$$(F, G)\, v = F(v) \qquad \text{für alle } (F, G) \in \operatorname{End} V \times \operatorname{End} W \text{ und } v \in V$$

gegeben ist.

Der Vektorraum W ist ein $\operatorname{End} V \times \operatorname{End} W$-Linksmodul, wobei die Linkswirkung durch

$$(F, G)\, w = G(w) \qquad \text{für alle } (F, G) \in \operatorname{End} V \times \operatorname{End} W \text{ und } w \in W$$

gegeben ist.

Die Vektorräume V und W sind also zwei $\operatorname{End} V \times \operatorname{End} W$-Linksmoduln. Durch Restriktion werden V und W also zu P-Linksmoduln (denn P ist eine Unteralgebra von $\operatorname{End} V \times \operatorname{End} W$). Somit werden auch V^t und W^t zu P-Linksmoduln.

Wir wollen nun beweisen, daß $\Phi : V^t \to W^t$ ein P-Linksmodulhomomorphismus ist.

Dazu wollen wir zuerst zeigen:

$$\text{Für jedes } x \in V, \text{ jedes } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und jedes } a \in A_i \text{ gilt } (p_i(a))\, x = ax. \quad \text{(I.6.48)}$$

Dabei ist der Term $(p_i(a))\, x$ als die Linkswirkung des Elementes $p_i(a) \in P$ auf dem Element x des P-Linksmoduls V zu verstehen, und der Term ax ist als die Linkswirkung des Elementes $a \in A_i$ auf dem Element x des A_i-Linksmoduls V zu verstehen.

Beweis von (I.6.48): Aus $p_i(a) = (v_i(a), w_i(a))$ folgt

$$\begin{aligned}
(p_i(a))(x) &= (v_i(a), w_i(a))(x) \\
&= \left(\underbrace{v_i}_{=\rho_{A_i,V}}(a)\right)(x) \qquad \text{(denn so wirkt } \operatorname{End} V \times \operatorname{End} W \text{ auf } V\text{)} \\
&= (\rho_{A_i,V}(a))(x) = ax,
\end{aligned}$$

und (I.6.48) ist bewiesen.

Analog zu (I.6.48) zeigt man:

$$\text{Für jedes } y \in W, \text{ jedes } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und jedes } a \in A_i \text{ gilt } (p_i(a))\, y = ay. \quad \text{(I.6.49)}$$

Dabei ist der Term $(p_i(a))\, y$ als die Linkswirkung des Elementes $p_i(a) \in P$ auf dem Element y des P-Linksmoduls W zu verstehen, und der Term ay ist als die Linkswirkung des Elementes $a \in A_i$ auf dem Element y des A_i-Linksmoduls W zu verstehen.

Als nächstes zeigen wir:

$$\text{Für jedes } \xi \in V^t, \text{ jedes } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und jedes } a \in A_i \text{ gilt } (p_i(a))\, \xi = a\xi. \quad \text{(I.6.50)}$$

Dabei ist der Term $(p_i(a))\, \xi$ als die Linkswirkung des Elementes $p_i(a) \in P$ auf dem Element ξ des P-Linksmoduls V^t zu verstehen.

Beweis von (I.6.50): Da $\xi \in V^t$ ist, können wir ξ in der Form $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t)$ mit $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t \in V$ schreiben. Daher ist

$$\begin{aligned}
(p_i(a))\, \xi &= (p_i(a))(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t) = ((p_i(a))(\xi_1), (p_i(a))(\xi_2), ..., (p_i(a))(\xi_t)) \\
&= (a\xi_1, a\xi_2, ..., a\xi_t) \qquad \left(\begin{array}{c} \text{da } (p_i(a))(\xi_i) = a\xi_i \text{ für jedes } i \in \{1, 2, ..., t\} \\ \text{(nach (I.6.48), angewandt auf } x = \xi_i) \end{array}\right) \\
&= a \underbrace{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t)}_{=\xi} = a\xi,
\end{aligned}$$

und (I.6.50) ist gezeigt.

Analog zu (I.6.50) läßt sich zeigen:

$$\text{Für jedes } \eta \in W^t, \text{ jedes } i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ und jedes } a \in A_i \text{ gilt } (p_i(a))\, \eta = a\eta. \quad \text{(I.6.51)}$$

Dabei ist der Term $(p_i(a))\eta$ als die Linkswirkung des Elementes $p_i(a) \in P$ auf dem Element η des P-Linksmoduls W^t zu verstehen.

Wir betrachten nun die Darstellungsabbildung ρ_{P,V^t} des P-Linksmoduls V^t, und die Darstellungsabbildung ρ_{P,W^t} des P-Linksmoduls W^t. Diese beiden Abbildungen ρ_{P,V^t} und ρ_{P,W^t} sind k-Algebrahomomorphismen (denn $\rho_{R,V}$ ist ein k-Algebrahomomorphismus für jede k-Algebra R und jeden R-Linksmodul V), also insbesondere k-linear.

Sei eine Teilmenge Z der Algebra P definiert durch

$$Z = \{r \in P \mid \rho_{P,W^t}(r) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}(r)\}.$$

Es ist sehr leicht zu sehen, daß Z der Kern einer k-linearen Abbildung ist (denn die Abbildung

$$P \to \operatorname{Hom}\left(V^t, W^t\right), \qquad r \mapsto \rho_{P,W^t}(r) \circ \Phi - \Phi \circ \rho_{P,V^t}(r)$$

ist k-linear (weil ρ_{P,W^t} und ρ_{P,V^t} beide k-linear sind), und Z ist der Kern dieser Abbildung). Folglich ist Z ein Untervektorraum von P. Ferner ist $1_P \in Z$ (nach der Definition von Z, denn $\rho_{P,W^t}(1_P) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}(1_P)$ [199]), und für alle $r \in Z$ und $r' \in Z$ gilt $rr' \in Z$ [200]. Somit ist der k-Untervektorraum Z von P eine k-Unteralgebra von P.

Wir wollen nun zeigen, daß $p_i(A_i) \subseteq Z$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt.

In der Tat sei $i \in \{1, 2, ..., n\}$ beliebig. Sei $a \in A_i$ beliebig. Wir werden nun zeigen, daß $p_i(a) \in Z$ ist.

---

[199] Denn da ρ_{P,W^t} ein k-Algebrahomomorphismus ist, ist $\rho_{P,W^t}(1_P) = \mathrm{id}$, und analog ist $\rho_{P,V^t}(1_P) = \mathrm{id}$, und somit ist $\rho_{P,W^t}(1_P) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}(1_P)$ trivial.

[200] *Beweis:* Aus $r \in Z$ folgt $\rho_{P,W^t}(r) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}(r)$ (nach der Definition von Z). Aus $r' \in Z$ folgt $\rho_{P,W^t}(r') \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}(r')$ (nach der Definition von Z). Da ρ_{P,V^t} ein k-Algebrahomomorphismus ist, gilt $\rho_{P,V^t}(rr') = \rho_{P,V^t}(r) \circ \rho_{P,V^t}(r')$, und analog ist $\rho_{P,W^t}(rr') = \rho_{P,W^t}(r) \circ \rho_{P,W^t}(r')$. Daher ist

$$\begin{aligned}\underbrace{\rho_{P,W^t}(rr')}_{=\rho_{P,W^t}(r) \circ \rho_{P,W^t}(r')} \circ \Phi &= \rho_{P,W^t}(r) \circ \underbrace{\rho_{P,W^t}(r') \circ \Phi}_{=\Phi \circ \rho_{P,V^t}(r')} = \underbrace{\rho_{P,W^t}(r) \circ \Phi}_{=\Phi \circ \rho_{P,V^t}(r)} \circ \rho_{P,V^t}(r') \\ &= \Phi \circ \underbrace{\rho_{P,V^t}(r) \circ \rho_{P,V^t}(r')}_{=\rho_{P,V^t}(rr')} = \Phi \circ \rho_{P,V^t}(rr').\end{aligned}$$

Nach der Definition von Z bedeutet dies aber genau, daß $rr' \in Z$ ist. Damit ist $rr' \in Z$ gezeigt.

Für jedes $\xi \in V^t$ gilt

$$\begin{aligned}
& \left(\rho_{P,W^t}\left(p_i\left(a\right)\right) \circ \Phi\right)\left(\xi\right) \\
& = \left(\rho_{P,W^t}\left(p_i\left(a\right)\right)\right)\left(\Phi\left(\xi\right)\right) = \left(p_i\left(a\right)\right)\left(\Phi\left(\xi\right)\right) \\
& \qquad \left(\begin{array}{c} \text{nach der Gleichung } \left(\rho_{R,V}\left(r\right)\right) v = rv\text{, angewandt auf} \\ P,\ W^t,\ p_i\left(a\right) \text{ und } \Phi\left(\xi\right) \text{ statt } R,\ V,\ r \text{ und } v \end{array}\right) \\
& = a\Phi\left(\xi\right) \qquad \left(\text{nach (I.6.51), angewandt auf } \eta = \Phi\left(\xi\right)\right) \\
& = \Phi\left(a\xi\right) \qquad \left(\text{denn } \Phi \text{ ist ein Homomorphismus von } A_i\text{-Linksmoduln}\right) \\
& = \Phi\left(\left(p_i\left(a\right)\right)\xi\right) \qquad \left(\text{denn (I.6.50) ergibt } a\xi = \left(p_i\left(a\right)\right)\xi\right) \\
& = \Phi\left(\left(\rho_{P,V^t}\left(p_i\left(a\right)\right)\right)\xi\right) \\
& \qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn die Gleichung } \left(\rho_{R,V}\left(r\right)\right) v = rv \text{ (angewandt} \\ \text{auf } P,\ V^t,\ p_i\left(a\right) \text{ und } \xi \text{ statt } R,\ V,\ r \text{ und } v\text{) ergibt} \\ \left(\rho_{P,V^t}\left(p_i\left(a\right)\right)\right)\xi = \left(p_i\left(a\right)\right)\xi\text{, also } \Phi\left(\left(\rho_{P,V^t}\left(p_i\left(a\right)\right)\right)\xi\right) = \Phi\left(\left(p_i\left(a\right)\right)\xi\right) \end{array}\right) \\
& = \left(\Phi \circ \rho_{P,V^t}\left(p_i\left(a\right)\right)\right)\left(\xi\right).
\end{aligned}$$

Also ist $\rho_{P,W^t}\left(p_i\left(a\right)\right) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}\left(p_i\left(a\right)\right)$. Das heißt,
$p_i\left(a\right) \in \left\{r \in P \mid \rho_{P,W^t}\left(r\right) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}\left(r\right)\right\} = Z$.

Da dies für alle $a \in A_i$ gilt, ist also $p_i\left(A_i\right) \subseteq Z$. Da dies für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt, enthält die k-Algebra Z also die Untervektorräume $p_1\left(A_1\right)$, $p_2\left(A_2\right)$, ..., $p_n\left(A_n\right)$. Somit ist

$$\begin{aligned}
Z & \supseteq (\text{die kleinste Unteralgebra von } \operatorname{End} V \times \operatorname{End} W\text{, die} \\
& \qquad \text{die Untervektorräume } p_1\left(A_1\right),\ p_2\left(A_2\right),\ ...,\ p_n\left(A_n\right) \text{ enthält}) \\
& = (\text{die Unteralgebra von } \operatorname{End} V \times \operatorname{End} W\text{, die erzeugt ist} \\
& \qquad \text{von den Untervektorräumen } p_1\left(A_1\right),\ p_2\left(A_2\right),\ ...,\ p_n\left(A_n\right)) \\
& = P.
\end{aligned}$$

Für jedes $p \in P$ ist also $p \in Z = \left\{r \in P \mid \rho_{P,W^t}\left(r\right) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}\left(r\right)\right\}$, also $\rho_{P,W^t}\left(p\right) \circ \Phi = \Phi \circ \rho_{P,V^t}\left(p\right)$. Hieraus folgt: Die Abbildung $\Phi : V^t \to W^t$ ist ein Homomorphismus von P-Linksmoduln. Da Φ ferner ein Vektorraumisomorphismus ist, ist also Φ ein Isomorphismus von P-Linksmoduln. Damit gilt $V^t \cong W^t$ als P-Linksmoduln. Nach Satz 6.40 (angewandt auf P statt A) ist also $V \cong W$ als P-Linksmoduln. Das heißt, es gibt einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ von P-Linksmoduln.

Wir werden jetzt beweisen, daß ϕ ein Isomorphismus von A_i-Linksmoduln für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ist.

Sei $i \in \{1, 2, ..., n\}$ beliebig, und sei $a \in A_i$ beliebig. Dann ist $p_i\left(a\right) \in p_i\left(A_i\right) \subseteq P$. Für jedes $x \in V$ ist somit $\phi\left(\left(p_i\left(a\right)\right)x\right) = \left(p_i\left(a\right)\right)\left(\phi\left(x\right)\right)$ (denn ϕ ist ein Homomorphismus von P-Linksmoduln). Doch wegen $\left(p_i\left(a\right)\right)x = ax$ (nach (I.6.48)) und $\left(p_i\left(a\right)\right)\left(\phi\left(x\right)\right) = a\phi\left(x\right)$ (nach (I.6.49), angewandt auf $y = \phi\left(x\right)$) vereinfacht sich dies zu $\phi\left(ax\right) = a\phi\left(x\right)$. Da dies für alle $a \in A_i$ gilt, ist also ϕ ein Homomorphismus von A_i-Linksmoduln. Da ϕ ein Vektorraumisomorphismus ist, bedeutet dies, daß ϕ ein Isomorphismus von A_i-Linksmoduln ist.

Wir haben also gezeigt: Es gibt einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ von Vektorräumen, der für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ein Isomorphismus von A_i-Linksmoduln ist. Damit ist Satz 6.50 bewiesen.

Aus Satz 6.50 folgt sofort:

6.51. Folgerung: Seien A und B zwei Algebren über einem Körper k.

Seien V und W zwei endlichdimensionale k-Vektorräume. Angenommen, auf jedem der Vektorräume V und W sind gleichzeitig eine A-Linksmodulstruktur und eine B-Linksmodulstruktur gegeben.

Sei $t \geq 1$ eine natürliche Zahl. Angenommen, es gibt einen Isomorphismus $\Phi : V^t \to W^t$ von Vektorräumen, der gleichzeitig ein A-Linksmodulisomorphismus und ein B-Linksmodulisomorphismus ist. Dann gibt es einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ von Vektorräumen, der gleichzeitig ein A-Linksmodulisomorphismus und ein B-Linksmodulisomorphismus ist.

Beweis von Folgerung 6.51: Dies folgt direkt aus Satz 6.50 (angewandt auf $n = 2$, $A_1 = A$ und $A_2 = B$).

Wir wollen nun eine Variante von Folgerung 6.51 zeigen, die statt zwei Algebren von einer Algebra und einer Coalgebra handelt:

6.52. Folgerung: Sei k ein Körper. Sei A eine k-Algebra, und C eine k-Coalgebra.

Seien V und W zwei endlichdimensionale k-Vektorräume. Angenommen, auf jedem der Vektorräume V und W sind gleichzeitig eine A-Linksmodulstruktur und eine C-Rechtscomodulstruktur gegeben.

Sei $t \geq 1$ eine natürliche Zahl. Angenommen, es gibt einen Isomorphismus $\Phi : V^t \to W^t$ von Vektorräumen, der gleichzeitig ein A-Linksmodulisomorphismus und ein C-Rechtscomodulisomorphismus ist.[201] Dann gibt es einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ von Vektorräumen, der gleichzeitig ein A-Linksmodulisomorphismus und ein C-Rechtscomodulisomorphismus ist.

Beweis von Folgerung 6.52: Sei B die Algebra C^*.

Da V ein C-Rechtscomodul ist, ist $\operatorname{adj}_C V$ ein C^*-Linksmodul, also ein B-Linksmodul. Wir bezeichnen diesen B-Linksmodul $\operatorname{adj}_C V$ im Folgenden einfach mit V (denn als Vektorraum ist $\operatorname{adj}_C V = V$). (Durch diese Bezeichnung kann keine Verwechslungsgefahr entstehen, denn diese B-Linksmodulstruktur ist die einzige B-Linksmodulstruktur, die wir bislang auf V eingeführt haben.) Aus analogen Gründen bezeichnen wir den B-Linksmodul $\operatorname{adj}_C W$ im Folgenden einfach mit W.

Nach Folgerung 4.22 (angewandt auf t statt n) sind die beiden C^*-Linksmoduln $\operatorname{adj}_C (V^t)$ und $(\operatorname{adj}_C V)^t$ identisch. Nach Folgerung 4.22 (angewandt auf t und W statt n und V) sind die beiden C^*-Linksmoduln $\operatorname{adj}_C (W^t)$ und $(\operatorname{adj}_C W)^t$ identisch. Nach Satz 4.6 **b)** (angewandt auf V^t und W^t statt V und W) ist aber

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^C \left(V^t, W^t\right) &= \operatorname{Hom}_{C^*} \left(\underbrace{\operatorname{adj}_C \left(V^t\right)}_{=(\operatorname{adj}_C V)^t}, \underbrace{\operatorname{adj}_C \left(W^t\right)}_{=(\operatorname{adj}_C W)^t} \right) = \operatorname{Hom}_{C^*} \left((\operatorname{adj}_C V)^t, (\operatorname{adj}_C W)^t \right) \\
&= \operatorname{Hom}_B \left(\left(\underbrace{\operatorname{adj}_C V}_{=V} \right)^t, \left(\underbrace{\operatorname{adj}_C W}_{=W} \right)^t \right) \qquad (\text{da } C^* = B) \\
&= \operatorname{Hom}_B \left(V^t, W^t\right).
\end{aligned}$$

Aus $\Phi \in \mathcal{M}^C (V^t, W^t)$ (denn $\Phi : V^t \to W^t$ ist ein C-Rechtscomodulhomomorphismus) folgt also $\Phi \in \operatorname{Hom}_B (V^t, W^t)$. Das heißt, Φ ist ein B-Linksmodulhomomorphismus von

[201] Die C-Rechtscomodulstrukturen auf V^t und W^t sind dabei genauso definiert wie die C-Rechtsmodulstruktur auf V^n in Folgerung 4.22.

V^t nach W^t. Da Φ ein Vektorraumisomorphismus ist, ist also Φ ein B-Linksmodulisomorphismus von V^t nach W^t. Laut Folgerung 6.51 gibt es also einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ von Vektorräumen, der gleichzeitig ein A-Linksmodulisomorphismus und ein B-Linksmodulisomorphismus ist. Für diesen Isomorphismus ϕ gilt also $\phi \in \operatorname{Hom}_B(V, W)$ (denn ϕ ist ein B-Linksmodulisomorphismus). Nach Satz 4.6 **b)** ist aber

$$\mathcal{M}^C(V, W) = \operatorname{Hom}_{C^*}(\operatorname{adj}_C V, \operatorname{adj}_C W) = \operatorname{Hom}_B\left(\underbrace{\operatorname{adj}_C V}_{=V}, \underbrace{\operatorname{adj}_C W}_{=W}\right) \qquad (\text{denn } C^* = B)$$
$$= \operatorname{Hom}_B(V, W).$$

Damit wird $\phi \in \operatorname{Hom}_B(V, W)$ zu $\phi \in \mathcal{M}^C(V, W)$. Somit ist ϕ ein C-Rechtscomodulhomomorphismus. Da ϕ außerdem ein Vektorraumisomorphismus ist, ist also ϕ ein C-Rechtscomodulisomorphismus.

Insgesamt wissen wir jetzt, daß ϕ ein A-Linksmodulisomorphismus und ein C-Rechtscomodulisomorphismus ist. Damit ist Folgerung 6.52 bewiesen.

II. Kapitel: Struktur cokommutativer Hopfalgebren

Nun werden wir eine weniger allgemeine, aber dafür inhaltsreichere (vor allem schwierigere) Theorie aufbauen, nämlich eine Strukturtheorie für cokommutative Hopfalgebren. Zuerst führen wir Liealgebren ein.

1. Liealgebren und ihre universellen Einhüllenden

Liealgebren

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ ein k-Vektorraum, und sei $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine k-bilineare Abbildung (die seltsame Schreibweise bedeutet, daß wir das Bild eines Paares (a, b) unter der Abbildung $[,]$ mit $[a, b]$ bezeichnen). Wir bezeichnen dann das Paar $(\mathfrak{g}, [,])$ (oder kurz einfach $\mathfrak{g}$, wenn klar ist, welche Abbildung $[,]$ gemeint ist) als eine *Liealgebra*, wenn folgende zwei Axiome erfüllt sind:

- Für jedes $x \in \mathfrak{g}$ gilt $[x, x] = 0$.
- Für jede $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$. (Dieses zweite Axiom heißt die *Jacobi-Identität.*)

(Achtung: Liealgebren sind keine Algebren - zumindest nicht, wenn man unter Algebren automatisch assoziative Algebren versteht![202])

Für eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ bezeichnet man die Abbildung $[,]$ als *Lieklammer* von $\mathfrak{g}$.

1.1. Bemerkung: 1) Für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ und alle $x, y \in \mathfrak{g}$ ist $[x, y] = -[y, x]$.

Beweis: Wir haben $0 = [x + y, x + y] = \underbrace{[x, x]}_{=0} + [x, y] + [y, x] + \underbrace{[y, y]}_{=0} = [x, y] + [y, x]$.

2) Jeden Vektorraum V kann man kanonisch zu einer Liealgebra machen, indem man $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in V$ setzt (dies ist eine sogenannte *abelsche Liealgebra*).

3) Ist A eine Algebra (dies bedeutet bei uns: assoziative Algebra), dann können wir eine Liealgebra A^- wie folgt definieren: Als Vektorraum sei A^- identisch zu A; die

[202] Und wir verstehen normalerweise unter Algebren automatisch assoziative Algebren.

Abbildung $[,] : A^- \times A^- \to A^-$ wird durch $[x,y] = xy - yx$ für alle $x, y \in A^-$ definiert. Dann ist $(A^-, [,])$ eine Liealgebra.

Beweis: Für alle $x, y, z \in A$ ist $[x,x] = xx - xx = 0$ und

$$\begin{aligned}
&[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] \\
&= (xy - yx)z - z(xy - yx) + (yz - zy)x - x(yz - zy) + (zx - xz)y - y(zx - xz) \\
&= xyz - yxz - zxy + zyx + yzx - zyx - xyz + xzy + zxy - xzy - yzx + yxz = 0,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Bemerkung: Wir sehen hiermit, daß wir auf jeder (assoziativen) Algebra kanonisch eine Liealgebra definieren können, indem wir die Lieklammer $[,]$ als Kommutator definieren. So entstehen viele Liealgebren, aber nicht alle - es gibt auch Liealgebren, deren Lieklammern keine Kommutatoren einer assoziativen Multiplikation sind (zumindest nicht von einer assoziativen Multiplikation auf der Liealgebra selber).

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1) Ist $\mathfrak{g}'$ eine Liealgebra, und ist $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ eine k-lineare Abbildung, dann heißt f genau dann ein *Liealgebrahomomorphismus*, wenn für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ die Gleichung $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ gilt.

2) Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum. Dann heißt $\mathfrak{a}$ eine *Unterliealgebra* von $\mathfrak{g}$, wenn für alle $x, y \in \mathfrak{a}$ gilt: $[x,y] \in \mathfrak{a}$.

(Äquivalent könnte man Unterliealgebren wie folgt definieren: Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Untervektorraum. Dann heißt $\mathfrak{a}$ eine *Unterliealgebra* von $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{a}$ selbst eine Liealgebra ist, und die kanonische Inklusion $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ ein Liealgebrahomomorphismus ist.)

Außerdem heißt $\mathfrak{a}$ ein *Ideal* von $\mathfrak{g}$, wenn für alle $x \in \mathfrak{a}$ und alle $y \in \mathfrak{g}$ gilt: $[x,y] \in \mathfrak{a}$. Statt zu sagen, daß $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, schreibt man auch $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$.

Natürlich ist jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ auch eine Unterliealgebra von $\mathfrak{g}$.

Wir bezeichnen mit Lie die Kategorie aller Liealgebren (die Morphismen sollen dabei natürlich die Liealgebrahomomorphismen sein).

1.2. Bemerkung: 1) Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, und $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$. Dann wird der Quotientenvektorraum $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}$ kanonisch zu einer Liealgebra, wenn man $[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x,y]}$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ setzt.

2) Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ zwei Liealgebren, und $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Liealgebrahomomorphismus. Dann ist $\operatorname{Ker} f \lhd \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g} / \operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$ (Isomorphie als Liealgebren), wobei die Liealgebrastruktur auf $\operatorname{Im} f$ von $\mathfrak{g}'$ vererbt wird (mit dieser Liealgebrastruktur wird $\operatorname{Im} f$ zu einer Unterliealgebra von $\mathfrak{g}'$).

Beweis: Wie für Ringe.

1.3. Bemerkung: 1) Sei A eine beliebige nicht notwendig assoziative Algebra[203], d. h. ein Vektorraum zusammen mit einer k-linearen Abbildung $\mu : A \times A \to A$ (die wir als Multiplikation schreiben; das heißt, wir schreiben uv für $\mu(u,v)$).

Sei $d : A \to A$ eine k-lineare Abbildung. Dann heißt d eine *Derivation* von A, wenn für alle $x, y \in A$ gilt: $d(xy) = x d(y) + d(x) y$.

Für jede nicht notwendig assoziative Algebra A definieren wir eine Menge $\operatorname{Der}(A, A)$ durch

$$\operatorname{Der}(A, A) = \{d : A \to A \mid d \text{ ist eine Derivation von } A\}.$$

[203] Wenn wir von einer "nicht notwendig assoziativen Algebra" reden, meinen wir *nicht* eine Algebra im Sinne des I. Kapitels.

Dann ist $\mathrm{Der}\,(A, A)$ eine Unterliealgebra von $(\mathrm{End}\,A)^-$.

Beweis: Wir müssen nur zeigen, daß für je zwei Derivationen $d, \widetilde{d} \in \mathrm{Der}\,(A, A)$ gilt: $d\widetilde{d} - \widetilde{d}d \in \mathrm{Der}\,(A, A)$ (wobei das Produkt von Derivationen einfach ihre Verkettung ist - mit anderen Worten, d und $\widetilde{d}$ werden als Elemente von $\mathrm{End}\,A$ multipliziert). Dies ist aber klar, da

$$\begin{aligned}
\left(d\widetilde{d} - \widetilde{d}d\right)(xy) &= d\left(\widetilde{d}\,(xy)\right) - \widetilde{d}\,(d\,(xy)) = d\left(x\widetilde{d}\,(y) + \widetilde{d}\,(x)\,y\right) - \widetilde{d}\,(xd\,(y) + d\,(x)\,y) \\
&= xd\left(\widetilde{d}\,(y)\right) + d\,(x)\,\widetilde{d}\,(y) + \widetilde{d}\,(x)\,d\,(y) + d\left(\widetilde{d}\,(x)\right)y \\
&\qquad\qquad - x\widetilde{d}\,(d\,(y)) - \widetilde{d}\,(x)\,d\,(y) - d\,(x)\,\widetilde{d}\,(y) - \widetilde{d}\,(d\,(x))\,y \\
&= x\left(d\left(\widetilde{d}\,(y)\right) - \widetilde{d}\,(d\,(y))\right) + \left(d\left(\widetilde{d}\,(x)\right) - \widetilde{d}\,(d\,(x))\right)y \\
&= x\left(d\widetilde{d} - \widetilde{d}d\right)(y) + \left(d\widetilde{d} - \widetilde{d}d\right)(x)\,y
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in A$ gilt.

Warnung: Wir haben damit gezeigt: Für alle $d, \widetilde{d} \in \mathrm{Der}\,(A, A)$ ist $d\widetilde{d} - \widetilde{d}d \in \mathrm{Der}\,(A, A)$. Doch im Allgemeinen gilt *nicht* $d\widetilde{d} \in \mathrm{Der}\,(A, A)$. Die Lieklammer $[,]$ auf $\mathrm{Der}\,(A, A)$ ist im Allgemeinen kein Kommutator einer assoziativen Multiplikation auf dem Vektorraum $\mathrm{Der}\,(A, A)$ - obwohl sie der Kommutator der assoziativen Multiplikation einer *größeren* Algebra (nämlich $\mathrm{End}\,A$) ist!

2) Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Für alle $x \in \mathfrak{g}$ können wir dann eine k-lineare Abbildung $\mathrm{ad}\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definieren durch $(\mathrm{ad}\,x)\,(y) = [x, y]$ für alle $y \in \mathfrak{g}$. Dann gilt:

a) Für alle $x \in \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{ad}\,x \in \mathrm{Der}\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

b) Die Abbildung

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})\,, \qquad x \mapsto \mathrm{ad}\,x$$

ist ein Liealgebrahomomorphismus.

Diese Abbildung ad heißt die *adjungierte Darstellung* von $\mathfrak{g}$.

Beweis: **a)** Für alle $x \in \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{ad}\,x$ eine Derivation auf $\mathfrak{g}$, weil für alle $y, z \in \mathfrak{g}$ gilt:

$$(\mathrm{ad}\,x)\,[y, z] = [y, (\mathrm{ad}\,x)\,(z)] + [(\mathrm{ad}\,x)\,(y)\,, z]$$

(denn wegen $[a, b] = -\,[b, a]$ für alle $a, b \in \mathfrak{g}$ ist

$$\begin{aligned}
&-(\mathrm{ad}\,x)\,[y, z] + [y, (\mathrm{ad}\,x)\,(z)] + [(\mathrm{ad}\,x)\,(y)\,, z] \\
&= -\,[x, [y, z]] + [y, [x, z]] + [[x, y]\,, z] = [[y, z]\,, x] - [[x, z]\,, y] + [[x, y]\,, z] \\
&= [[y, z]\,, x] + [[z, x]\,, y] + [[x, y]\,, z] = 0
\end{aligned}$$

nach der Jacobi-Identität).

b) Für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{ad}\,[x, y] = [\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y]$, denn für jedes $z \in \mathfrak{g}$ ist

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}\,[x, y])\,(z) &= [[x, y]\,, z] = -\,[[y, z]\,, x] - [[z, x]\,, y] \\
&\qquad \text{(nach der Jacobi-Identität } [[y, z]\,, x] + [[z, x]\,, y] + [[x, y]\,, z] = 0) \\
&= \underbrace{[x, [y, z]]}_{=(\mathrm{ad}\,x)((\mathrm{ad}\,y)(z))} - \underbrace{[y, [x, z]]}_{=(\mathrm{ad}\,y)((\mathrm{ad}\,x)(z))} \\
&\qquad \text{(wieder unter Verwendung von } [a, b] = -\,[b, a] \text{ für alle } a, b \in \mathfrak{g}) \\
&= (\mathrm{ad}\,x)\,((\mathrm{ad}\,y)\,(z)) - (\mathrm{ad}\,y)\,((\mathrm{ad}\,x)\,(z)) = (\mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y)\,(z) - (\mathrm{ad}\,y \circ \mathrm{ad}\,x)\,(z) \\
&= (\mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y - \mathrm{ad}\,y \circ \mathrm{ad}\,x)\,(z) = [\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y]\,(z)\,.
\end{aligned}$$

Daher ist ad ein Liealgebrahomomorphismus.

3) Ist H eine Bialgebra, dann ist die Menge

$$P(H) = \{x \in H \mid x \text{ ist primitiv}\} = \{x \in H \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\} \subseteq H^-$$

eine Unterliealgebra von H^- (mit der von H^- vererbten Lieklammer).

Falls $\operatorname{char} k = p > 0$, dann gilt $x^p \in P(H)$ für alle $x \in P(H)$.

Beweis: **a)** Für alle $x, y \in P(H)$ ist

$$\begin{aligned}
\Delta(xy - yx) &= \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\
&= (x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) - (y \otimes 1 + 1 \otimes y)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&= (xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy) - (yx \otimes 1 + y \otimes x + x \otimes y + 1 \otimes yx) \\
&= xy \otimes 1 + 1 \otimes xy - yx \otimes 1 - 1 \otimes yx = (xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx),
\end{aligned}$$

also $xy - yx \in P(H)$. Somit ist $P(H)$ eine Unterliealgebra von H^- (mit der von H^- vererbten Lieklammer).

b) Falls $\operatorname{char} k = p > 0$ und $x \in P(H)$, dann ist

$$\begin{aligned}
\Delta(x^p) &= (\Delta(x))^p = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = (x \otimes 1)^p + (1 \otimes x)^p \\
&\qquad \text{(denn } x \otimes 1 \text{ und } 1 \otimes x \text{ kommutieren, und } p \cdot 1 \otimes 1 = 0) \\
&= x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p,
\end{aligned}$$

also $x^p \in P(H)$.

4) Sei A eine Bialgebra. Sei

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Der}_\varepsilon(A, k) \\
&= \{d : A \to k \mid d \text{ ist eine } (\varepsilon, \varepsilon)\text{-Derivation}\} \\
&= \{d : A \to k \mid d \text{ ist } k\text{-linear und erfüllt } d(xy) = \varepsilon(x) d(y) + d(x) \varepsilon(y) \text{ für alle } x, y \in A\}.
\end{aligned}$$

[204] Dann ist $\operatorname{Der}_\varepsilon(A, k) \subseteq (A^*)^-$ eine Unterliealgebra.

(Statt "$(\varepsilon, \varepsilon)$-Derivation" sagt man auch öfters "ε-Derivation".)

Beweis: Wir müssen nur zeigen, daß für alle $d, \widetilde{d} \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ gilt: $d * \widetilde{d} - \widetilde{d} * d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$.

[204] Hierbei verwenden wir den Begriff einer (σ, τ)-*Derivation*; dieser Begriff wurde in Abschnitt 3 von Kapitel I eingeführt.

In der Tat gilt für alle $x, y \in A$ mit der summenlosen Sweedler-Notation

$$\begin{aligned}
\left(d * \widetilde{d} - \widetilde{d} * d\right)(xy) &= d\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)\widetilde{d}\left(x_{(2)}y_{(2)}\right) - \widetilde{d}\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)d\left(x_{(2)}y_{(2)}\right) \\
&= \left(\varepsilon\left(x_{(1)}\right)d\left(y_{(1)}\right) + d\left(x_{(1)}\right)\varepsilon\left(y_{(1)}\right)\right)\left(\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\widetilde{d}\left(y_{(2)}\right) + \widetilde{d}\left(x_{(2)}\right)\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\right) \\
&\qquad - \left(\text{das gleiche Produkt mit } d \text{ und } \widetilde{d} \text{ vertauscht}\right) \\
&= \varepsilon\left(x_{(1)}\right)\varepsilon\left(x_{(2)}\right)d\left(y_{(1)}\right)\widetilde{d}\left(y_{(2)}\right) + \varepsilon\left(x_{(1)}\right)\varepsilon\left(y_{(2)}\right)d\left(y_{(1)}\right)\widetilde{d}\left(x_{(2)}\right) \\
&\qquad + \varepsilon\left(y_{(1)}\right)\varepsilon\left(x_{(2)}\right)d\left(x_{(1)}\right)\widetilde{d}\left(y_{(2)}\right) + \varepsilon\left(y_{(1)}\right)\varepsilon\left(y_{(2)}\right)d\left(x_{(1)}\right)\widetilde{d}\left(x_{(2)}\right) \\
&\qquad - \left(\text{die gleiche Summe mit } d \text{ und } \widetilde{d} \text{ vertauscht}\right) \\
&= \left(\varepsilon(x)\left(d * \widetilde{d}\right)(y) + d(y)\widetilde{d}(x) + d(x)\widetilde{d}(y) + \varepsilon(y)\left(d * \widetilde{d}\right)(x)\right) \\
&\qquad - \left(\varepsilon(x)\left(\widetilde{d} * d\right)(y) + \widetilde{d}(y)d(x) + \widetilde{d}(x)d(y) + \varepsilon(y)\left(\widetilde{d} * d\right)(x)\right) \\
&= \varepsilon(x)\left(\left(d * \widetilde{d}\right)(y) - \left(\widetilde{d} * d\right)(y)\right) + \varepsilon(y)\left(\left(d * \widetilde{d}\right)(x) - \left(\widetilde{d} * d\right)(x)\right) \\
&= \varepsilon(x) \cdot \left(d * \widetilde{d} - \widetilde{d} * d\right)(y) + \varepsilon(y) \cdot \left(d * \widetilde{d} - \widetilde{d} * d\right)(x) \\
&= \varepsilon(x) \cdot \left(d * \widetilde{d} - \widetilde{d} * d\right)(y) + \left(d * \widetilde{d} - \widetilde{d} * d\right)(x) \cdot \varepsilon(y)
\end{aligned}$$

(wir haben in dieser Rechnung mehrfach verwendet, daß die Bilder von d und $\widetilde{d}$ Skalare sind und daher kommutieren!).

5) Später (in Kapitel IV, Abschnitt 3) definieren wir für eine Bialgebra A die sogenannte *duale Bialgebra* $A^0 \subseteq A^*$ (für endlichdimensionale A gilt sogar $A^0 = A^*$), und es gilt $\operatorname{Der}_\varepsilon(A, k) = P(A^0)$. Insofern kann man Bemerkung **4)** auch aus Bemerkung **3)** herleiten.

6)[205] Sei A eine Bialgebra. In **1)** haben wir eine Liealgebra $\operatorname{Der}(A, A)$ definiert. Eine lineare Abbildung $K : A \to A$ heiße *linksinvariant*, wenn $\Delta \circ K = (\operatorname{id} \otimes K) \circ \Delta$ gilt. (Mit anderen Worten: Eine lineare Abbildung $K : A \to A$ ist genau dann linksinvariant, wenn $(K(x))_{(1)} \otimes (K(x))_{(2)} = x_{(1)} \otimes K\left(x_{(2)}\right)$ für alle $x \in A$ ist.)

Sei

$$\operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}} = \{D \in \operatorname{Der}(A, A) \mid D \text{ ist linksinvariant}\}.$$

Dann ist $\operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}}$ eine Unterliealgebra von $\operatorname{Der}(A, A)$.

Beweis: Für alle $D, E \in \operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}}$ und alle $\lambda \in k$ ist $D+E \in \operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}}$, $\lambda D \in \operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}}$ und $[D, E] = D \circ E - E \circ D \in \operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}}$. Die ersten zwei von diesen drei Tatsachen sind klar; die dritte folgt daraus, daß $D \circ E$ linksinvariant

[205] Bemerkungen **6)** und **7)** stammen von mir (Darij Grinberg) und orientieren sich an William C. Waterhouse: *Introduction to Affine Group Schemes*, New York 1979, §12.1-2 (wo sie allerdings nur für kommutative Bialgebren A gezeigt wurden).

ist, da

$$\begin{aligned}
&\left(\left(D\circ E\right)\left(x\right)\right)_{(1)}\otimes\left(\left(D\circ E\right)\left(x\right)\right)_{(2)}=\left(D\left(E\left(x\right)\right)\right)_{(1)}\otimes\left(D\left(E\left(x\right)\right)\right)_{(2)}\\
&=\left(E\left(x\right)\right)_{(1)}\otimes D\left(\left(E\left(x\right)\right)_{(2)}\right)\qquad\qquad (\text{da } D \text{ linksinvariant ist})\\
&=x_{(1)}\otimes D\left(E\left(x_{(2)}\right)\right)\qquad\qquad\left(\begin{array}{c}\text{da }\left(E\left(x\right)\right)_{(1)}\otimes\left(E\left(x\right)\right)_{(2)}=x_{(1)}\otimes E\left(x_{(2)}\right),\\ \text{weil } E \text{ linksinvariant ist}\end{array}\right)\\
&=x_{(1)}\otimes\left(D\circ E\right)\left(x_{(2)}\right)
\end{aligned}$$

für alle $x\in A$ ist, und analog $E\circ D$ linksinvariant ist.

7) Sei A eine Bialgebra. In **6)** haben wir eine Liealgebra $\operatorname{Der}\left(A,A\right)^{\text{linksinv}}$ definiert, und in **4)** eine Liealgebra $\operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A,k\right)$.

Nun behaupten wir: Die Abbildungen

$$F:\operatorname{Der}\left(A,A\right)^{\text{linksinv}}\to\operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A,k\right),\qquad D\mapsto\varepsilon\circ D$$

und

$$G:\operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A,k\right)\to\operatorname{Der}\left(A,A\right)^{\text{linksinv}},\qquad d\mapsto\left(x\mapsto x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\right)$$

sind zueinander inverse Liealgebraisomorphismen.

Beweis: **a)** Erstmal müssen wir nachprüfen, daß die beiden Abbildungen F und G wohldefiniert sind. Wir müssen also zeigen:

aa) Für jedes $D\in\operatorname{Der}\left(A,A\right)^{\text{linksinv}}$ ist $\varepsilon\circ D\in\operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A,k\right)$. [206]

ab) Für jedes $d\in\operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A,k\right)$ liegt die Abbildung

$$A\to A,\qquad x\mapsto x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)$$

in $\operatorname{Der}\left(A,A\right)^{\text{linksinv}}$.

*Beweis von **aa)**:* Für alle $x,y\in A$ ist

$$\left(\varepsilon\circ D\right)\left(xy\right)=\varepsilon\left(\underbrace{D\left(xy\right)}_{\substack{=xD(y)+D(x)y,\\ \text{da } D\in\operatorname{Der}(A,A)}}\right)=\varepsilon\left(x\right)\varepsilon\left(D\left(y\right)\right)+\varepsilon\left(D\left(x\right)\right)\varepsilon\left(y\right)=\varepsilon\left(x\right)\left(\varepsilon\circ D\right)\left(y\right)+\left(\varepsilon\circ D\right)\left(x\right)\varepsilon\left(y\right),$$

also $\varepsilon\circ D\in\operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A,k\right)$, und somit ist **aa)** gezeigt.

*Beweis von **ab)**:* Für alle $x,y\in A$ ist

$$\begin{aligned}
\left(xy\right)_{(1)}d\left(\left(xy\right)_{(2)}\right)&=x_{(1)}y_{(1)}\underbrace{d\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)}_{\substack{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)d\left(y_{(2)}\right)+d\left(x_{(2)}\right)\varepsilon\left(y_{(2)}\right),\\ \text{da } d\in\operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k)}}\\
&=x_{(1)}y_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)d\left(y_{(2)}\right)+x_{(1)}y_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\\
&=\underbrace{x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x}y_{(1)}d\left(y_{(2)}\right)+x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\underbrace{y_{(1)}\varepsilon\left(y_{(2)}\right)}_{=y}=xy_{(1)}d\left(y_{(2)}\right)+x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)y,
\end{aligned}$$

und somit ist die Abbildung

$$A\to A,\qquad x\mapsto x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)$$

[206] Dies gilt sogar für jedes $D\in\operatorname{Der}\left(A,A\right)$.

eine Derivation. Sie ist ferner linksinvariant, denn für alle $x \in A$ ist

$$\begin{aligned}\left(x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)} \otimes \left(x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)} &= \Delta\left(x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\right) = \Delta\left(x_{(1)}\right) d\left(x_{(2)}\right) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}d\left(x_{(3)}\right) \\ &= x_{(1)} \otimes \left(x_{(2)}\right)_{(1)} d\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right).\end{aligned}$$

Somit liegt sie in $\operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}}$, womit **ab)** bewiesen ist.

b) Es ist klar, daß F und G Vektorraumhomomorphismen sind. Wir werden jetzt zeigen, daß $F \circ G = \text{id}$ und $G \circ F = \text{id}$ ist.

Beweis: Für jedes $D \in \operatorname{Der}(A, A)^{\text{linksinv}}$ und jedes $x \in A$ ist

$$\begin{aligned}(G(F(D)))(x) &= (G(\varepsilon \circ D))(x) = x_{(1)}(\varepsilon \circ D)\left(x_{(2)}\right) = x_{(1)}\varepsilon\left(D\left(x_{(2)}\right)\right) \\ &= (\text{id} \otimes \varepsilon)\left(\underbrace{x_{(1)} \otimes D\left(x_{(2)}\right)}_{\substack{=(D(x))_{(1)}\otimes(D(x))_{(2)}, \\ \text{da } D \text{ linksinvariant ist}}}\right) = (D(x))_{(1)}\, \varepsilon\left((D(x))_{(2)}\right) = D(x),\end{aligned}$$

also $G(F(D)) = D$ und damit $G \circ F = \text{id}$.

Für jedes $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ und jedes $x \in A$ ist

$$\begin{aligned}(F(G(d)))(x) &= (\varepsilon \circ (G(d)))(x) = \varepsilon((G(d))(x)) = \varepsilon\left(x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\right) \\ &\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn wegen } G(d) = \left(x \mapsto x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\right) \text{ ist} \\ (G(d))(x) = x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\end{array}\right) \\ &= \varepsilon\left(x_{(1)}\right) d\left(x_{(2)}\right) = d\left(\varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}\right) = d(x),\end{aligned}$$

also $F(G(d)) = d$ und damit $F \circ G = \text{id}$.

c) Die Abbildung G ist ein Liealgebraisomorphismus.

Beweis: Für alle $d, e \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ und alle $x \in A$ ist

$$\begin{aligned}[G(d), G(e)](x) &= (G(d) \circ G(e) - G(e) \circ G(d))(x) \\ &= (G(d))((G(e))(x)) - (G(e))((G(d))(x)) \\ &= (G(d))\left(x_{(1)}e\left(x_{(2)}\right)\right) - (G(e))\left(x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right)\right) \\ &= (G(d))\left(x_{(1)}\right) e\left(x_{(2)}\right) - (G(e))\left(x_{(1)}\right) d\left(x_{(2)}\right) \\ &= \left(x_{(1)}\right)_{(1)} d\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right) e\left(x_{(2)}\right) - \left(x_{(1)}\right)_{(1)} e\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right) d\left(x_{(2)}\right) \\ &= x_{(1)}d\left(x_{(2)}\right) e\left(x_{(3)}\right) - x_{(1)}e\left(x_{(2)}\right) d\left(x_{(3)}\right) \\ &= x_{(1)}\left(d\left(x_{(2)}\right) e\left(x_{(3)}\right) - e\left(x_{(2)}\right) d\left(x_{(3)}\right)\right) = x_{(1)}(d * e - e * d)\left(x_{(2)}\right) \\ &= x_{(1)}[d, e]\left(x_{(2)}\right) = (G([d, e]))(x),\end{aligned}$$

also $[G(d), G(e)] = G([d, e])$, und somit ist G ein Liealgebrahomomorphismus, also (wegen **b)**) ein Liealgebraisomorphismus.

d) Nach **b)** sind F und G zueinander inverse Vektorraumhomomorphismen. Nach **c)** ist G ein Liealgebraisomorphismus. Somit ist auch F ein solcher. Der Beweis ist damit fertig.

1.4. Beispiele: 1) Für jedes $n \geq 0$ ist

$$\mathfrak{sl}_n := \left\{ X \in \mathrm{M}_n(k) \mid \underbrace{\operatorname{Tr} X}_{=\text{Spur von } X} = 0 \right\} \subseteq \mathrm{M}_n(k)^-$$

eine Unterliealgebra.

Beweis: Für $X, Y \in \mathfrak{sl}_n$ ist $XY - YX \in \mathfrak{sl}_n$, denn wegen $\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(YX)$ ist $\operatorname{Tr}(XY - YX) = 0$. Folglich ist $\mathfrak{sl}_n$ eine Unterliealgebra, was zu beweisen war. (Es gilt sogar allgemeiner: Für $X, Y \in \mathrm{M}_n(k)$ ist $XY - YX \in \mathfrak{sl}_n$.)

2) Sei $Q \in \mathrm{M}_n(k)$ eine Matrix. Dann ist $\mathfrak{o}(Q) := \left\{ X \in \mathrm{M}_n(k) \mid QX + X^T Q = 0 \right\} \subseteq \mathrm{M}_n(k)^-$ eine Unterliealgebra.

Zwei bekannte Sonderfälle dieser Konstruktion sind die orthogonale Liealgebra $\mathfrak{o}_n = \mathfrak{o}(E_n) \subseteq \mathrm{M}_n(k)^-$ und die symplektische Liealgebra $\mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{o}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{M}_{2n}(k)} \right) \subseteq \mathrm{M}_{2n}(k)^-$.

Beweis: Seien $X, Y \in \mathfrak{o}(Q)$. Dann ist $QX = -X^T Q$ (denn aus $X \in \mathfrak{o}(Q)$ folgt $QX + X^T Q = 0$) und analog $QY = -Y^T Q$, und somit

$$\begin{aligned} Q(XY - YX) + (XY - YX)^T Q &= \underbrace{QX}_{=-X^TQ} Y - \underbrace{QY}_{=-Y^TQ} X + Y^T \underbrace{X^T Q}_{=-QX} - X^T \underbrace{Y^T Q}_{=-QY} \\ &= -X^T QY + Y^T QX - Y^T QX + X^T QY = 0, \end{aligned}$$

also $XY - YX \in \mathfrak{o}(Q)$. Folglich ist $\mathfrak{o}(Q)$ eine Unterliealgebra von $\mathrm{M}_n(k)^-$.

3) Die Liealgebra $\mathfrak{sl}_2$ hat (als Vektorraum) die Basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$[e, f] = h, \qquad [h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f.$$

Beweis: Nachrechnen. (Man verwende dazu die Gleichung $e_{i,j} e_{k,l} = \delta_{j,k} e_{i,l}$ für die Matrixeinheiten; hier ist $e = e_{1,2}$ und $f = e_{2,1}$ und $h = e_{1,1} - e_{2,2}$.)

4) Wir betrachten $H = k[T]$ (die Polynomalgebra über k in einer Variablen) als Hopfalgebra mit primitivem T. Sei $\operatorname{char} k = 0$. Nach Übungsblatt 4 Aufgabe 5 **c)** ist $P(H) = k \cdot T$ ein 1-dimensionaler Vektorraum.

Wir werden jetzt eine Methode kennenlernen, Liealgebren aus affinen Gruppen (also aus kommutativen Hopfalgebren - denn nach Folgerung 5.5 in Kapitel I entsprechen diese eineindeutig den affinen Gruppen) zu erhalten. Zuerst eine Vorbereitung:

1.4$\frac{1}{2}$. Satz: Sei A eine Bialgebra. Sei $A^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon$ (das Augmentationsideal von A, wie in 2.17. **4)** definiert).

1) Für jedes $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ ist $d\left((A^+)^2 \right) = 0$ (wobei $(A^+)^2$ das Produktideal $A^+ \cdot A^+$ von A bedeutet).

2) Für jedes $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ existiert genau eine k-lineare Abbildung von $A^+ \diagup (A^+)^2$ nach k, die $\overline{a}$ auf $d(a)$ abbildet für jedes $a \in A^+$ (wobei wir mit $\overline{a}$ die Projektion von $a \in A^+$ auf den Faktorraum $A^+ \diagup (A^+)^2$ bezeichnen). Wir bezeichnen diese Abbildung kurz mit $\overline{a} \mapsto d(a)$.

3) Die Abbildung

$$\operatorname{Der}_\varepsilon(A, k) \to \left(A^+ \diagup (A^+)^2 \right)^*, \qquad d \mapsto (\overline{a} \mapsto d(a))$$

(diese Abbildung ist gemäß **2)** wohldefiniert) ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis: **1)** Wir müssen $d\left(\left(A^+\right)^2\right) = 0$ zeigen. Da d eine k-lineare Abbildung ist, und da das Ideal $\left(A^+\right)^2$ von den Produkten $\alpha\beta$ mit $\alpha \in A^+$ und $\beta \in A^+$ erzeugt ist, reicht es dafür aus, zu beweisen, daß $d(\alpha\beta) = 0$ für alle $\alpha \in A^+$ und $\beta \in A^+$ ist. Doch dies ist sehr leicht: Wegen $\alpha \in A^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon$ ist $\varepsilon(\alpha) = 0$, analog $\varepsilon(\beta) = 0$, und aus $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ folgt nun $d(\alpha\beta) = \underbrace{\varepsilon(\alpha)}_{=0} d(\beta) + d(\alpha) \underbrace{\varepsilon(\beta)}_{=0} = 0$, was zu beweisen war.

2) Sei $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ beliebig gewählt. Laut **1)** ist dann $d\left(\left(A^+\right)^2\right) = 0$, also $\left(d \mid_{A^+}\right)\left(\left(A^+\right)^2\right) = 0$. Laut der universellen Eigenschaft des Faktorvektorraums faktorisiert also die k-lineare Abbildung $d \mid_{A^+} : A^+ \to k$ über den Quotientenvektorraum $A^+ \diagup \left(A^+\right)^2$. Das heißt, es existiert genau eine k-lineare Abbildung von $A^+ \diagup \left(A^+\right)^2$ nach k, die $\overline{a}$ auf $d(a)$ abbildet für jedes $a \in A^+$. Damit ist Satz $1.4\frac{1}{2}$ **2)** bewiesen.

3) Wir bezeichnen die Abbildung

$$\operatorname{Der}_\varepsilon(A, k) \to \left(A^+ \diagup \left(A^+\right)^2\right)^*, \qquad d \mapsto \left(\overline{a} \mapsto d(a)\right)$$

mit $\operatorname{res}_{\text{aug}}$. Trivialerweise ist diese Abbildung $\operatorname{res}_{\text{aug}}$ linear. Um zu zeigen, daß sie ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, müssen wir nur noch ein Inverses zu ihr finden.

In der Tat sei $\pi : A \to A^+$ die Projektion, die durch $\pi(a) = a - \varepsilon(a) \cdot 1$ für alle $a \in A$ definiert ist (wobei 1 die Eins der Algebra A bezeichnet). Sei $\pi' : A^+ \to A^+ \diagup \left(A^+\right)^2$ die kanonische Projektion, die jedes $a \in A^+$ auf $\overline{a} \in A^+ \diagup \left(A^+\right)^2$ abbildet. Wir definieren eine Abbildung

$$Q : \left(A^+ \diagup \left(A^+\right)^2\right)^* \to \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$$

durch

$$Q(f) = f \circ \pi' \circ \pi \qquad \text{für alle } f \in \left(A^+ \diagup \left(A^+\right)^2\right)^*.$$

Diese Abbildung Q ist wohldefiniert, denn für alle $f \in \left(A^+ \diagup \left(A^+\right)^2\right)^*$ ist $f \circ \pi' \circ \pi \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$. [207] Nun ist $\operatorname{res}_{\text{aug}} \circ Q = \operatorname{id}$, denn für jedes $f \in \left(A^+ \diagup \left(A^+\right)^2\right)^*$ und jedes $a \in A^+$ ist

$$\begin{aligned}
\left(\left(\operatorname{res}_{\text{aug}} \circ Q\right)(f)\right)(\overline{a}) &= \left(\operatorname{res}_{\text{aug}}(Q(f))\right)(\overline{a}) = \left(\underbrace{Q(f)}_{= f \circ \pi' \circ \pi}\right)(a) \qquad \left(\text{nach der Definition von } \operatorname{res}_{\text{aug}}\right) \\
&= \left(f \circ \pi' \circ \pi\right)(a) = f\left(\pi'(\pi(a))\right) = f\left(\underbrace{\pi'(a)}_{=\overline{a}}\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } a \in A^+ \text{ ergibt } \pi(a) = a \text{, weil } \pi \text{ eine Projektion auf } A^+ \text{ ist}\right) \\
&= f(\overline{a}).
\end{aligned}$$

---

[207] *Beweis:* Sei $F = f \circ \pi' \circ \pi$. Dann ist $F(1) = 0$ (denn $\pi(1) = 1 - \varepsilon(1) \cdot 1 = 1 - 1 = 0$) und $F\left(\left(A^+\right)^2\right) = 0$ (denn da π eine Projektion auf A^+ ist, und da $\left(A^+\right)^2$ eine Teilmenge von A^+ ist, gilt $\left(\pi' \circ \pi\right)\left(\left(A^+\right)^2\right) = \pi'\left(\left(A^+\right)^2\right) = 0$). Wir wollen nun zeigen, daß $F \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ ist. Dazu müssen wir nur nachweisen, daß

$$F(ab) = \varepsilon(a) \cdot F(b) + F(a) \cdot \varepsilon(b)$$

Ferner ist $Q \circ \mathrm{res}_{\mathrm{aug}} = \mathrm{id}$, denn für jedes $d \in \mathrm{Der}_\varepsilon(A, k)$ und jedes $a \in A$ ist

$$\begin{aligned}
((Q \circ \mathrm{res}_{\mathrm{aug}})(d))(a) &= \left(\underbrace{Q(\mathrm{res}_{\mathrm{aug}}(d))}_{\substack{=(\mathrm{res}_{\mathrm{aug}}(d))\circ\pi'\circ\pi \\ \text{(nach der Definition von } Q)}} \right)(a) = ((\mathrm{res}_{\mathrm{aug}}(d)) \circ \pi' \circ \pi)(a) \\
&= (\mathrm{res}_{\mathrm{aug}}(d)) \left(\underbrace{\pi'(\pi(a))}_{=\overline{\pi(a)}} \right) = (\mathrm{res}_{\mathrm{aug}}(d)) \left(\overline{\pi(a)} \right) \\
&= d \left(\underbrace{\pi(a)}_{=a-\varepsilon(a)\cdot 1} \right) \qquad \text{(laut der Definition von } \mathrm{res}_{\mathrm{aug}}) \\
&= d(a) - \varepsilon(a) d(1) \qquad \text{(denn } d \text{ ist linear)} \\
&= d(a) \qquad \text{(denn } d(1) = 0 \text{, weil } d \text{ eine } (\varepsilon, \varepsilon)\text{-Derivation ist)} .
\end{aligned}$$

Somit haben wir $\mathrm{res}_{\mathrm{aug}} \circ Q = \mathrm{id}$ und $Q \circ \mathrm{res}_{\mathrm{aug}} = \mathrm{id}$ bewiesen. Daraus folgt, daß die Vektorraumhomomorphismen $\mathrm{res}_{\mathrm{aug}}$ und Q zueinander invers, und daher Vektorraumisomorphismen sind. Für $\mathrm{res}_{\mathrm{aug}}$ ist dies aber genau die Aussage, die wir beweisen wollten. Der Beweis von Satz $1.4\frac{1}{2}$ **3)** ist damit abgeschlossen.

$1.4\frac{3}{4}$. Bemerkung: Satz $1.4\frac{1}{2}$ gilt auch dann noch, wenn man "Sei A eine Bialgebra" durch die deutlich schwächere Forderung "Sei A eine Algebra, und sei $\varepsilon : A \to k$ ein Algebrahomomorphismus" ersetzt. Denn im Beweis von Satz $1.4\frac{1}{2}$ wurde die Comultiplikation Δ nie verwendet.

Nun wollen wir die Liealgebra einer affinen Gruppe einführen:

1.5. Satz: Sei A eine kommutative Hopfalgebra. Sei $G = \mathrm{Sp}\, A$. (Somit ist G eine affine Gruppe.) Sei $A^+ = \mathrm{Ker}\, \varepsilon$ (das Augmentationsideal von A, wie in 2.17. **4)** definiert).

Wir definieren eine k-Algebra $k[\tau]$ durch $k[\tau] = k[T] \diagup (T^2)$ (hierbei ist T eine Unbestimmte), und setzen dabei $\tau = \overline{T}$. (Dann ist natürlich $\tau^2 = \overline{T^2} = 0$.) Sei $\pi : k[\tau] \to k$ der durch $\pi(\tau) = 0$ festgelegte Algebrahomomorphismus. Wir definieren

---

für alle $a, b \in A$ ist. Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned}
&F(ab) - (\varepsilon(a) \cdot F(b) + F(a) \cdot \varepsilon(b)) \\
&= F(ab) - (\varepsilon(a) \cdot F(b) + F(a) \cdot \varepsilon(b)) + \varepsilon(a)\varepsilon(b) \cdot F(1) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{hier haben wir einen Summanden } \varepsilon(a)\varepsilon(b) \cdot F(1) \text{ in die Summe eingefügt,} \\ \text{dadurch aber nicht die Summe verändert, denn } F(1) = 0 \end{array} \right) \\
&= F(ab - \varepsilon(a) b - \varepsilon(b) a + \varepsilon(a)\varepsilon(b) \cdot 1) \qquad \text{(denn } F \text{ ist linear)} \\
&= 0 \qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } ab - \varepsilon(a) b - \varepsilon(b) a + \varepsilon(a)\varepsilon(b) \cdot 1 = \underbrace{(a - \varepsilon(a))}_{=\pi(a) \in A^+} \underbrace{(b - \varepsilon(b))}_{=\pi(b) \in A^+} \in A^+A^+ = (A^+)^2 \\ \text{ergibt } F(ab - \varepsilon(a) b - \varepsilon(b) a + \varepsilon(a)\varepsilon(b) \cdot 1) \in F\left((A^+)^2\right) = 0 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, daß $F \in \mathrm{Der}_\varepsilon(A, k)$ ist. Wegen $F = f \circ \pi' \circ \pi$ ist also $f \circ \pi' \circ \pi \in \mathrm{Der}_\varepsilon(A, k)$ für alle $f \in \left(A^+ \diagup (A^+)^2\right)^*$. Das heißt, die Abbildung Q ist wohldefiniert.

einen Vektorraum $\operatorname{Lie} G$ (später werden wir aus diesem Vektorraum eine Lie-Algebra machen) durch

$$\operatorname{Lie} G = \operatorname{Ker}\left(G\left(k\left[\tau\right]\right) \xrightarrow{G(\pi)} G\left(k\right)\right).$$

Dann ist die Abbildung

$$\Omega : \operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A, k\right) \to \operatorname{Lie} G, \qquad d \mapsto \varepsilon + d\tau$$

bijektiv (wobei $\varepsilon + d\tau$ eine Kurzschreibweise für die Abbildung

$$A \to k\left[\tau\right], \qquad a \mapsto \varepsilon\left(a\right) + d\left(a\right)\tau$$

ist). Diese Abbildung Ω ist ein Liealgebraisomorphismus, wobei die Liealgebrastruktur auf $\operatorname{Der}_{\varepsilon}\left(A, k\right)$ die in Beispiel 1.3. **4)** definierte ist, während die Liealgebrastruktur auf $\operatorname{Lie} G = \operatorname{Ker}\left(G\left(k\left[\tau\right]\right) \xrightarrow{G(\pi)} G\left(k\right)\right)$ wie folgt definiert wird:

- Für alle $x, y \in \operatorname{Lie} G$ sei

  $$x + y = x * y$$

  (wobei $*$ die Multiplikation in $G\left(k\left[\tau\right]\right)$, also die Faltung in $G\left(k\left[\tau\right]\right) = \operatorname{Alg}\left(A, k\left[\tau\right]\right)$ bezeichnet);

- für alle $x \in \operatorname{Lie} G$ und $\alpha \in k$ sei

  $$\alpha x = G\left(f_{\alpha}\right)\left(x\right)$$

  wobei $f_{\alpha} : k\left[\tau\right] \to k\left[\tau\right]$ der durch $f_{\alpha}\left(\tau\right) = \alpha\tau$ festgelegte Algebrahomomorphismus ist;

- für alle $x, y \in \operatorname{Lie} G$ sei $[x, y] \in \operatorname{Lie} G$ definiert als das Element $z \in \operatorname{Lie} G$, welches

  $$\left(G\left(\Delta\right)\right)\left(z\right) = \left[\left(G\left(i_1\right)\right)\left(x\right), \left(G\left(i_2\right)\right)\left(y\right)\right]$$

  erfüllt (so ein Element existiert und ist eindeutig bestimmt, wie wir im Beweis sehen werden). Hierbei sind

  $$\begin{aligned} \Delta &: k\left[\tau\right] \to k\left[\tau\right] \otimes k\left[\tau\right], \\ i_1 &: k\left[\tau\right] \to k\left[\tau\right] \otimes k\left[\tau\right], \\ i_2 &: k\left[\tau\right] \to k\left[\tau\right] \otimes k\left[\tau\right] \end{aligned}$$

  die durch $\Delta\left(\tau\right) = \tau \otimes \tau$, $i_1\left(\tau\right) = \tau \otimes 1$ und $i_2\left(\tau\right) = 1 \otimes \tau$ festgelegten Algebrahomomorphismen[208], und für je zwei Elemente u und v der Gruppe $G\left(k\left[\tau\right] \otimes k\left[\tau\right]\right)$ (dies ist eine Gruppe bezüglich der Konvolution $*$) ist der Kommutator $[u, v]$ als $[u, v] = u * v * u^{-1} * v^{-1}$ definiert (hierbei bedeutet ${}^{-1}$ das Inverse bezüglich der Konvolution $*$).

[208] Es sei angemerkt, daß dieses Δ nichts mit der Comultiplikation Δ_A auf A zu tun hat. (Man kann allerdings Δ als eine Comultiplikation auf $k\left[\tau\right]$ auffassen; jedoch wird $k\left[\tau\right]$ auf diese Weise nicht zu einer Bialgebra. Wir werden es auch nicht nötig haben, Δ als Comultiplikation aufzufassen.)

Auf diese Weise haben wir auf $\operatorname{Lie} G$ eine Liealgebrastruktur eingeführt.

Beweis: **a)** Der erste Schritt des Beweises wird darin bestehen, zu zeigen, daß die Abbildung

$$\Omega : \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k) \to \operatorname{Lie} G, \qquad d \mapsto \varepsilon + d\tau$$

überhaupt wohldefiniert ist, also daß $\varepsilon + d\tau$ tatsächlich in $\operatorname{Lie} G$ liegt für jedes $d \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k)$.

Beweis: Sei $d \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k)$. Dann ist die Abbildung

$$\varepsilon + d\tau : A \to k[\tau], \qquad a \mapsto \varepsilon(a) + d(a)\tau$$

ein k-Algebrahomomorphismus (denn für alle $a, b \in A$ ist

$$\begin{aligned}
\underbrace{(\varepsilon + d\tau)(a)}_{=\varepsilon(a)+d(a)\tau} \cdot \underbrace{(\varepsilon + d\tau)(b)}_{=\varepsilon(b)+d(b)\tau} &= (\varepsilon(a) + d(a)\tau)(\varepsilon(b) + d(b)\tau) \\
&= \underbrace{\varepsilon(a)\varepsilon(b)}_{=\varepsilon(ab)} + \underbrace{\varepsilon(a)d(b)\tau + d(a)\varepsilon(b)\tau}_{=(\varepsilon(a)d(b)+d(a)\varepsilon(b))\tau} + d(a)d(b)\underbrace{\tau^2}_{=0} \\
&= \varepsilon(ab) + \underbrace{(\varepsilon(a)d(b) + d(a)\varepsilon(b))}_{\substack{=d(ab) \\ (\text{denn } d \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k))}}\tau \\
&= \varepsilon(ab) + d(ab)\tau = (\varepsilon + d\tau)(ab)
\end{aligned}$$

(nach der Definition von $\varepsilon + d\tau$), und ferner ist

$$\begin{aligned}
(\varepsilon + d\tau)(1) &= \varepsilon(1) + d(1)\tau = \varepsilon(1) \\
&\qquad (\text{denn da } d \text{ eine } (\varepsilon,\varepsilon)\text{-Derivation ist, gilt } d(1) = 0 \text{ gemäß Bemerkung I.3.1. } \mathbf{0)}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

), also ein Element von $G(k[\tau])$. Ferner erfüllt diese Abbildung die Gleichung $(G(\pi))(\varepsilon + d\tau) = \pi \circ (\varepsilon + d\tau) = \varepsilon$ (denn für jedes $a \in A$ ist

$$(\pi \circ (\varepsilon + d\tau))(a) = \pi\left(\underbrace{(\varepsilon + d\tau)(a)}_{=\varepsilon(a)+d(a)\tau}\right) = \pi(\varepsilon(a) + d(a)\tau) = \varepsilon(a),$$

weil $\pi : k[\tau] \to k$ der durch $\pi(\tau) = 0$ definierte k-Algebrahomomorphismus ist). Da ε das neutrale Element der Gruppe $G(k)$ ist, ist also

$$\varepsilon + d\tau \in \operatorname{Ker}\left(G(k[\tau]) \xrightarrow{G(\pi)} G(k)\right) = \operatorname{Lie} G.$$

Wir haben damit gezeigt: Für jedes $d \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k)$ ist $\varepsilon + d\tau \in \operatorname{Lie} G$. Die Abbildung

$$\Omega : \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k) \to \operatorname{Lie} G, \qquad d \mapsto \varepsilon + d\tau$$

ist somit wohldefiniert.

b) Als nächstes wollen wir beweisen, daß die Abbildung $\Omega : \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A,k) \to \operatorname{Lie} G$ surjektiv ist. Dazu sei $\ell \in \operatorname{Lie} G$ ein beliebiges Element. Wegen $\operatorname{Lie} G = \operatorname{Ker}\left(G(k[\tau]) \xrightarrow{G(\pi)} G(k)\right)$

ist also $\ell \in G(k[\tau]) = \operatorname{Alg}(A, k[\tau])$ und $(G(\pi))\ell = \varepsilon$ (denn ε ist das neutrale Element der Gruppe $G(k)$).

Sei nun $\pi' : k[\tau] \to k$ der k-Vektorraumhomomorphismus (kein k-Algebrahomomorphismus), der durch $\pi'(1) = 0$ und $\pi'(\tau) = 1$ definiert ist (dadurch ist er wohldefiniert, denn $1, \tau$ ist eine Basis des k-Vektorraums $k[\tau]$). Sei $d = \pi' \circ \ell$. Wir werden nun zeigen, daß $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ und $\ell = \Omega(d)$ ist.

Zuerst zeigen wir aber, daß $\ell(a) = \varepsilon(a) + d(a)\tau$ für alle $a \in A$ ist. In der Tat ist $\pi \circ \ell = (G(\pi))\ell = \varepsilon$ und damit $\pi(\ell(a)) = \underbrace{(\pi \circ \ell)}_{=\varepsilon}(a) = \varepsilon(a)$. Da $1, \tau$ eine Basis des k-Vektorraums $k[\tau]$ ist, können wir das Element $\ell(a) \in k[\tau]$ in der Form $\ell(a) = \alpha_1 1 + \alpha_2 \tau$ für $\alpha_1 \in k$ und $\alpha_2 \in k$ schreiben. Nun ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon(a) = \pi(\ell(a)) = \pi(\alpha_1 1 + \alpha_2 \tau) &= \alpha_1 \underbrace{\pi(1)}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\pi(\tau)}_{=0} \qquad \text{(denn } \pi \text{ ist } k\text{-linear)} \\
&= \alpha_1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
d(a) = (\pi' \circ \ell)(a) = \pi'(\ell(a)) = \pi'(\alpha_1 1 + \alpha_2 \tau) &= \alpha_1 \underbrace{\pi'(1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\pi'(\tau)}_{=1} \qquad \text{(denn } \pi' \text{ ist } k\text{-linear)} \\
&= \alpha_2,
\end{aligned}$$

also $\ell(a) = \underbrace{\alpha_1}_{=\varepsilon(a)} 1 + \underbrace{\alpha_2}_{=d(a)} \tau = \varepsilon(a) + d(a)\tau$.

Wir haben damit gezeigt, daß $\ell(a) = \varepsilon(a) + d(a)\tau$ für alle $a \in A$ ist. Für je zwei Elemente $a, b \in A$ ist mithin

$$\begin{aligned}
\underbrace{\ell(a)}_{=\varepsilon(a)+d(a)\tau} \cdot \underbrace{\ell(b)}_{=\varepsilon(b)+d(b)\tau} &= (\varepsilon(a) + d(a)\tau)(\varepsilon(b) + d(b)\tau) \\
&= \underbrace{\varepsilon(a)\varepsilon(b)}_{=\varepsilon(ab)} + \underbrace{\varepsilon(a)d(b)\tau + d(a)\varepsilon(b)\tau}_{=(\varepsilon(a)d(b)+d(a)\varepsilon(b))\tau} + d(a)d(b)\underbrace{\tau^2}_{=0} \\
&= \varepsilon(ab) + (\varepsilon(a)d(b) + d(a)\varepsilon(b))\tau,
\end{aligned}$$

aber auch $\ell(ab) = \varepsilon(ab) + d(ab)\tau$. Also ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon(ab) + d(ab)\tau = \ell(ab) &= \ell(a) \cdot \ell(b) \qquad \text{(denn } \ell \text{ ist ein } k\text{-Algebrahomomorphismus)} \\
&= \varepsilon(ab) + (\varepsilon(a)d(b) + d(a)\varepsilon(b))\tau.
\end{aligned}$$

Da $1, \tau$ eine Basis des k-Vektorraums $k[\tau]$ ist, folgt hieraus $\varepsilon(ab) = \varepsilon(ab)$ und $d(ab) = \varepsilon(a)d(b) + d(a)\varepsilon(b)$. Folglich ist $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$. Und natürlich ist $\ell = \Omega(d)$, denn für jedes $a \in A$ ist $\ell(a) = \varepsilon(a) + d(a)\tau = \underbrace{(\varepsilon + d\tau)}_{=\Omega(d)}(a) = (\Omega(d))(a)$.

Wir haben also gezeigt, daß für jedes $\ell \in \operatorname{Lie} G$ ein $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ existiert, das $\ell = \Omega(d)$ erfüllt. Damit ist die Abbildung Ω surjektiv.

c) Jetzt werden wir beweisen, daß die Abbildung Ω injektiv ist. Da wir noch nicht wissen, daß Ω eine k-lineare Abbildung ist (und daß $\operatorname{Lie} G$ überhaupt ein Vektorraum ist!), reicht es dazu *nicht* aus, für jedes $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ mit $\Omega(d) = \varepsilon$ (man vergesse nicht: das neutrale Element von Lie G bezüglich der Addition ist ε) die Gleichheit $d = 0$ nachzuweisen. Stattdessen müssen wir beweisen, daß je zwei Elemente $d, e \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A, k)$, welche $\Omega(d) = \Omega(e)$ erfüllen, auch $d = e$ erfüllen.

Dies ist aber sehr einfach einzusehen: Seien $d, e \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A, k)$ zwei Elemente, welche $\Omega(d) = \Omega(e)$ erfüllen. Für jedes $a \in A$ ist dann $\left(\underbrace{\Omega(d)}_{=\varepsilon+d\tau}\right)(a) = (\varepsilon + d\tau)(a) = \varepsilon(a) + d(a)\tau$ und analog $(\Omega(e))(a) = \varepsilon(a) + e(a)\tau$. Wegen $\Omega(d) = \Omega(e)$ ist also $d(a)\tau = e(a)\tau$ für alle $a \in A$. Da $1, \tau$ eine k-Basis des Vektorraums $k[\tau]$ ist, folgt hieraus $d(a) = e(a)$ für alle $a \in A$, und somit ist $d = e$. Wir haben damit gezeigt, daß die Abbildung Ω injektiv ist.

d) Die Abbildung Ω ist wohldefiniert (nach **a)**), surjektiv (nach **b)**) und injektiv (nach **c)**). Somit ist sie bijektiv.

e) Wir wollen nun zeigen, daß

$$\Omega(d + e) = \Omega(d) + \Omega(e) \qquad \text{für alle } d, e \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A, k)$$

gilt. Dabei ist zu beachten, daß wir $\Omega(d) + \Omega(e)$ als $\Omega(d) * \Omega(e)$ definiert haben, wobei $*$ die Multiplikation in $G(k[\tau])$ bedeutet!

Beweis: Für jedes $a \in A$ ist

$$\left(\underbrace{\Omega(d+e)}_{=\varepsilon+(d+e)\tau}\right)(a) = (\varepsilon + (d+e)\tau)(a) = \varepsilon(a) + (d+e)(a)\tau$$

und

$$\begin{aligned}
&\left(\underbrace{\Omega(d) + \Omega(e)}_{=\Omega(d)*\Omega(e)}\right)(a) = (\Omega(d) * \Omega(e))(a) = \left(\underbrace{\Omega(d)}_{=\varepsilon+d\tau}\right)\left(a_{(1)}\right) \cdot \left(\underbrace{\Omega(e)}_{=\varepsilon+e\tau}\right)\left(a_{(2)}\right) \\
&= (\varepsilon + d\tau)\left(a_{(1)}\right) \cdot (\varepsilon + e\tau)\left(a_{(2)}\right) = \left(\varepsilon\left(a_{(1)}\right) + d\left(a_{(1)}\right)\tau\right) \cdot \left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right) + e\left(a_{(2)}\right)\tau\right) \\
&= \underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(a)} + \left(\underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)e\left(a_{(2)}\right)}_{=e\left(\varepsilon\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}\right)=e(a)} + \underbrace{d\left(a_{(1)}\right)\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=d\left(a_{(1)}\varepsilon\left(a_{(2)}\right)\right)=d(a)}\right)\tau + d\left(a_{(1)}\right)e\left(a_{(2)}\right)\underbrace{\tau^2}_{=0} \\
&= \varepsilon(a) + \underbrace{(e(a) + d(a))}_{=(d+e)(a)}\tau + \underbrace{d\left(a_{(1)}\right)e\left(a_{(2)}\right)0}_{=0} \\
&= \varepsilon(a) + (d+e)(a)\tau + 0 = \varepsilon(a) + (d+e)(a)\tau,
\end{aligned}$$

also $(\Omega(d+e))(a) = (\Omega(d) + \Omega(e))(a)$. Daraus folgt $\Omega(d+e) = \Omega(d) + \Omega(e)$.

f) Jetzt werden wir zeigen, daß

$$\Omega(\alpha d) = \alpha\Omega(d) \qquad \text{für alle } \alpha \in k \text{ und } d \in \operatorname{Der}_{\varepsilon}(A, k)$$

gilt. Hierbei sollte man sich im Klaren sein, daß $\alpha\Omega(d)$ als $G(f_\alpha)(\Omega(d))$ definiert wurde, wobei $f_\alpha : k[\tau] \to k[\tau]$ der durch $f_\alpha(\tau) = \alpha\tau$ festgelegte Algebrahomomorphismus ist.

Beweis: Für jedes $a \in A$ ist

$$\left(\underbrace{\Omega\left(\alpha d\right)}_{=\varepsilon+(\alpha d)\tau} \right)(a) = \left(\varepsilon + \left(\alpha d\right)\tau\right)(a) = \varepsilon(a) + \underbrace{\left(\alpha d\right)(a)}_{=\alpha d(a)=d(a)\alpha} \tau = \varepsilon(a) + d(a)\,\alpha\tau$$

und

$$\left(\underbrace{G\left(f_\alpha\right)\left(\Omega\left(d\right)\right)}_{=f_\alpha\circ(\Omega(d))} \right)(a) = \left(f_\alpha \circ \left(\Omega\left(d\right)\right)\right)(a) = f_\alpha \left(\underbrace{\left(\Omega\left(d\right)\right)}_{=\varepsilon+d\tau}(a) \right) = f_\alpha\left(\left(\varepsilon + d\tau\right)(a)\right) = f_\alpha\left(\varepsilon(a) + d(a)\,\tau\right)$$
$$= \varepsilon(a) + d(a)\, f_\alpha(\tau) \qquad \text{(denn } f_\alpha \text{ ist ein } k\text{-Algebrahomomorphismus)}$$
$$= \varepsilon(a) + d(a)\,\alpha\tau \qquad \text{(denn } f_\alpha(\tau) = \alpha\tau\text{)},$$

also $(\Omega(\alpha d))(a) = (G(f_\alpha)(\Omega(d)))(a)$. Daraus folgt $\Omega(\alpha d) = \alpha\Omega(d)$.

g) Als nächstes werden wir beweisen, daß

$$\Delta \circ \left(\Omega\left(\left[d, e\right]\right)\right) = \left[i_1 \circ \Omega\left(d\right), i_2 \circ \Omega\left(e\right)\right] \qquad \text{für alle } d, e \in \operatorname{Der}_\varepsilon\left(A, k\right)$$

gilt (man erinnere sich an die Definitionen der Abbildungen Δ, i_1 und i_2; diese Definitionen wurden am Ende von Satz 1.5 gegeben).

Beweis: Seien $d, e \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$.

Aus der Definition von i_1 folgt leicht, daß $i_1(p) = p \otimes 1$ für alle $p \in k[\tau]$ ist. Analog ist $i_2(q) = 1 \otimes q$ für alle $q \in k[\tau]$. Für alle $p, q \in k[\tau]$ ist also

$$i_2(q)\, i_1(p) = (1 \otimes q)(p \otimes 1) = p \otimes q \qquad \text{und}$$
$$i_1(p)\, i_2(q) = (p \otimes 1)(1 \otimes q) = p \otimes q.$$

Wir bezeichnen diese beiden Formeln als (i_1, i_2)-*Produktrelationen*.

Für jedes $a \in A$ ist nun

$$
\begin{aligned}
&\left(\Delta \circ \left(\Omega\left([d,e]\right)\right) * \left(i_2 \circ \Omega\left(e\right)\right) * \left(i_1 \circ \Omega\left(d\right)\right)\right)(a) \\
&= \left(\Delta \circ \left(\underbrace{\Omega\left([d,e]\right)}_{=\varepsilon+[d,e]\tau}\right)\right)\left(a_{(1)}\right) \cdot \left(i_2 \circ \underbrace{\Omega\left(e\right)}_{=\varepsilon+e\tau}\right)\left(a_{(2)}\right) \cdot \left(i_1 \circ \underbrace{\Omega\left(d\right)}_{=\varepsilon+d\tau}\right)\left(a_{(3)}\right) \\
&= \underbrace{\left(\Delta \circ \left(\varepsilon + [d,e]\,\tau\right)\right)\left(a_{(1)}\right)}_{=\Delta\left(\left(\varepsilon+[d,e]\tau\right)\left(a_{(1)}\right)\right)} \cdot \underbrace{\left(i_2 \circ \left(\varepsilon + e\tau\right)\right)\left(a_{(2)}\right)}_{=i_2\left(\left(\varepsilon+e\tau\right)\left(a_{(2)}\right)\right)} \cdot \underbrace{\left(i_1 \circ \left(\varepsilon + d\tau\right)\right)\left(a_{(3)}\right)}_{=i_1\left(\left(\varepsilon+d\tau\right)\left(a_{(3)}\right)\right)} \\
&= \Delta\left(\left(\varepsilon + [d,e]\,\tau\right)\left(a_{(1)}\right)\right) \cdot \underbrace{i_2\left(\left(\varepsilon + e\tau\right)\left(a_{(2)}\right)\right) \cdot i_1\left(\left(\varepsilon + d\tau\right)\left(a_{(3)}\right)\right)}_{\substack{=\left(\varepsilon+d\tau\right)\left(a_{(3)}\right)\otimes\left(\varepsilon+e\tau\right)\left(a_{(2)}\right) \\ \text{(nach der ersten der } (i_1,i_2)\text{-Produktrelationen)}}} \\
&= \Delta\left(\underbrace{\left(\varepsilon + [d,e]\,\tau\right)\left(a_{(1)}\right)}_{=\varepsilon\left(a_{(1)}\right)+[d,e]\left(a_{(1)}\right)\tau}\right) \cdot \left(\underbrace{\left(\varepsilon + d\tau\right)\left(a_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(a_{(3)}\right)+d\left(a_{(3)}\right)\tau} \otimes \underbrace{\left(\varepsilon + e\tau\right)\left(a_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(a_{(2)}\right)+e\left(a_{(2)}\right)\tau}\right) \\
&= \underbrace{\Delta\left(\varepsilon\left(a_{(1)}\right) + [d,e]\left(a_{(1)}\right)\tau\right)}_{\substack{=\varepsilon\left(a_{(1)}\right)+[d,e]\left(a_{(1)}\right)\tau\otimes\tau \\ \text{(denn } \Delta:k[\tau]\to k[\tau]\otimes k[\tau] \text{ ist ein} \\ \text{Algebrahomomorphismus mit } \Delta(\tau)=\tau\otimes\tau)}} \cdot \left(\left(\varepsilon\left(a_{(3)}\right) + d\left(a_{(3)}\right)\tau\right) \otimes \left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right) + e\left(a_{(2)}\right)\tau\right)\right) \\
&= \left(\varepsilon\left(a_{(1)}\right) + [d,e]\left(a_{(1)}\right)\tau \otimes \tau\right) \cdot \left(\left(\varepsilon\left(a_{(3)}\right) + d\left(a_{(3)}\right)\tau\right) \otimes \left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right) + e\left(a_{(2)}\right)\tau\right)\right) \\
&= \varepsilon\left(a_{(1)}\right) \cdot \left(\left(\varepsilon\left(a_{(3)}\right) + d\left(a_{(3)}\right)\tau\right) \otimes \left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right) + e\left(a_{(2)}\right)\tau\right)\right) \\
&\qquad + \underbrace{[d,e]\left(a_{(1)}\right)\tau \otimes \tau \cdot \left(\left(\varepsilon\left(a_{(3)}\right) + d\left(a_{(3)}\right)\tau\right) \otimes \left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right) + e\left(a_{(2)}\right)\tau\right)\right)}_{\substack{\text{wenn man dieses Produkt ausmultipliziert, fallen alle Terme bis auf} \\ [d,e]\left(a_{(1)}\right)\tau\otimes\tau\cdot\varepsilon\left(a_{(3)}\right)\varepsilon\left(a_{(2)}\right) \text{ weg, denn in all diesen Termen kommt ein } \tau^2 \text{ vor (und } \tau^2=0)}} \\
&= \varepsilon\left(a_{(1)}\right) \cdot \left(\underbrace{\left(\varepsilon\left(a_{(3)}\right) + d\left(a_{(3)}\right)\tau\right) \otimes \left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right) + e\left(a_{(2)}\right)\tau\right)}_{=\varepsilon\left(a_{(3)}\right)\otimes\varepsilon\left(a_{(2)}\right)+\varepsilon\left(a_{(3)}\right)\otimes e\left(a_{(2)}\right)\tau+d\left(a_{(3)}\right)\tau\otimes\varepsilon\left(a_{(2)}\right)+d\left(a_{(3)}\right)\tau\otimes e\left(a_{(2)}\right)\tau}\right) \\
&\qquad + \underbrace{[d,e]\left(a_{(1)}\right)\tau \otimes \tau \cdot \varepsilon\left(a_{(3)}\right)\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=[d,e]\left(a_1\varepsilon\left(a_{(2)}\varepsilon\left(a_{(3)}\right)\right)\right)\tau\otimes\tau} \\
&= \varepsilon\left(a_{(1)}\right) \cdot \left(\underbrace{\varepsilon\left(a_{(3)}\right) \otimes \varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{\substack{=\varepsilon\left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right)a_{(3)}\right)1\otimes1 \\ =\varepsilon\left(a_{(2)}\right)1\otimes1}} + \underbrace{\varepsilon\left(a_{(3)}\right) \otimes e\left(a_{(2)}\right)\tau}_{\substack{=e\left(a_{(2)}\varepsilon\left(a_{(3)}\right)\right)1\otimes\tau \\ =e\left(a_{(2)}\right)1\otimes\tau}} + \underbrace{d\left(a_{(3)}\right)\tau \otimes \varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{\substack{=d\left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right)a_{(3)}\right)\tau\otimes1 \\ =d\left(a_{(2)}\right)\tau\otimes1}} + \underbrace{d\left(a_{(3)}\right)\tau \otimes e\left(a_{(2)}\right)\tau}_{\substack{=e\left(a_{(2)}\right)d\left(a_{(3)}\right)\tau\otimes\tau \\ =(e*d)\left(a_{(2)}\right)\tau\otimes\tau}}\right) \\
&\qquad + \underbrace{[d,e]}_{=d*e-e*d}\left(a_1\varepsilon\left(\underbrace{a_{(2)}\varepsilon\left(a_{(3)}\right)}_{=a_{(2)}}\right)\right)\tau \otimes \tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon\left(a_{(1)}\right)\cdot\left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right)1\otimes 1+e\left(a_{(2)}\right)1\otimes\tau+d\left(a_{(2)}\right)\tau\otimes 1+(e*d)\left(a_{(2)}\right)\tau\otimes\tau\right)\\
&\qquad +(d*e-e*d)\left(a_1\varepsilon\left(a_{(2)}\right)\right)\tau\otimes\tau\\
&= \left(\varepsilon\left(\underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}}_{=a}\right)1\otimes 1+e\left(\underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}}_{=a}\right)1\otimes\tau+d\left(\underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}}_{=a}\right)\tau\otimes 1+(e*d)\left(\underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}}_{=a}\right)\tau\otimes\tau\right)\\
&\qquad +(d*e-e*d)\left(\underbrace{a_1\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=a}\right)\tau\otimes\tau\\
&= \varepsilon(a)\,1\otimes 1+e(a)\,1\otimes\tau+d(a)\,\tau\otimes 1+\underbrace{(e*d)(a)\,\tau\otimes\tau+(d*e-e*d)(a)\,\tau\otimes\tau}_{=(e*d+d*e-e*d)(a)\tau\otimes\tau=(d*e)(a)\tau\otimes\tau}\\
&= \varepsilon(a)\,1\otimes 1+e(a)\,1\otimes\tau+d(a)\,\tau\otimes 1+(d*e)(a)\,\tau\otimes\tau
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&((i_1\circ\Omega(d))*(i_2\circ\Omega(e)))(a)\\
&= \left(i_1\circ\underbrace{\Omega(d)}_{=\varepsilon+d\tau}\right)\left(a_{(1)}\right)\cdot\left(i_2\circ\underbrace{\Omega(e)}_{=\varepsilon+e\tau}\right)\left(a_{(2)}\right)=\underbrace{\left(i_1\circ(\varepsilon+d\tau)\right)\left(a_{(1)}\right)}_{=i_1\left((\varepsilon+d\tau)\left(a_{(1)}\right)\right)}\cdot\underbrace{\left(i_2\circ(\varepsilon+e\tau)\right)\left(a_{(2)}\right)}_{=i_2\left((\varepsilon+d\tau)\left(a_{(2)}\right)\right)}\\
&= i_1\left((\varepsilon+d\tau)\left(a_{(1)}\right)\right)\cdot i_2\left((\varepsilon+e\tau)\left(a_{(2)}\right)\right)=(\varepsilon+d\tau)\left(a_{(1)}\right)\otimes(\varepsilon+e\tau)\left(a_{(2)}\right)\\
&\qquad \text{(nach der zweiten der } (i_1,i_2)\text{-Produktrelationen)}\\
&= \left(\varepsilon\left(a_{(1)}\right)+d\left(a_{(1)}\right)\tau\right)\otimes\left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right)+e\left(a_{(2)}\right)\tau\right)\\
&= \underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)\otimes\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(a_{(1)}\varepsilon\left(a_{(2)}\right)\right)1\otimes 1}+\underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)\otimes e\left(a_{(2)}\right)\tau}_{=e\left(\varepsilon\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}\right)1\otimes\tau}+\underbrace{d\left(a_{(1)}\right)\tau\otimes\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=d\left(a_{(1)}\varepsilon\left(a_{(2)}\right)\right)\tau\otimes 1}+\underbrace{d\left(a_{(1)}\right)\tau\otimes e\left(a_{(2)}\right)\tau}_{=d\left(a_{(1)}\right)e\left(a_{(2)}\right)\tau\otimes\tau}\\
&= \varepsilon\left(\underbrace{a_{(1)}\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=a}\right)1\otimes 1+e\left(\underbrace{\varepsilon\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}}_{=a}\right)1\otimes\tau+d\left(\underbrace{a_{(1)}\varepsilon\left(a_{(2)}\right)}_{=a}\right)\tau\otimes 1+\underbrace{d\left(a_{(1)}\right)e\left(a_{(2)}\right)}_{=(d*e)(a)}\tau\otimes\tau\\
&= \varepsilon(a)\,1\otimes 1+e(a)\,1\otimes\tau+d(a)\,\tau\otimes 1+(d*e)(a)\,\tau\otimes\tau,
\end{aligned}
$$

also

$$(\Delta\circ(\Omega([d,e]))*(i_2\circ\Omega(e))*(i_1\circ\Omega(d)))(a)=((i_1\circ\Omega(d))*(i_2\circ\Omega(e)))(a)\,.$$

Da dies für jedes $a\in A$ gilt, ist also

$$\Delta\circ(\Omega([d,e]))*(i_2\circ\Omega(e))*(i_1\circ\Omega(d))=(i_1\circ\Omega(d))*(i_2\circ\Omega(e))\,.$$

Da Elemente einer Gruppe stets invertierbar sind, können wir diese Gleichung von rechts mit $(i_1\circ\Omega(d))^{-1}$ und $(i_2\circ\Omega(e))^{-1}$ multiplizieren, und erhalten

$$
\begin{aligned}
\Delta\circ(\Omega([d,e]))&=(i_1\circ\Omega(d))*(i_2\circ\Omega(e))*(i_1\circ\Omega(d))^{-1}*(i_2\circ\Omega(e))^{-1}\\
&=[i_1\circ\Omega(d)\,,i_2\circ\Omega(e)]\,.
\end{aligned}
$$

h) Jetzt erinnern wir uns an die komplizierte Definition der Lieklammer auf $\operatorname{Lie}G$. Wir wollen zeigen, daß diese Definition überhaupt Sinn ergibt; damit meinen wir nicht, daß diese Lieklammer tatsächlich die Axiome einer Lieklammer (also k-Bilinearität, $[x, x] = 0$ für alle $x \in V$ und Jacobi-Identität) erfüllt (dies werden wir später beweisen), sondern daß für alle $x, y \in \operatorname{Lie} G$ tatsächlich genau ein $z \in \operatorname{Lie} G$ existiert, das

$$(G(\Delta))(z) = [(G(i_1))(x), (G(i_2))(y)]$$

erfüllt.

Beweis: So ein z existiert[209] und ist eindeutig bestimmt[210]. Damit ergibt die Definition der Lieklammer auf $\operatorname{Lie} G$, die wir in Satz 1.5 gegeben haben, tatsächlich Sinn.

i) Als nächstes werden wir beweisen, daß

$$\Omega([d, e]) = [\Omega(d), \Omega(e)] \qquad \text{für alle } d, e \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$$

gilt. Dabei muß der Term $[\Omega(d), \Omega(e)]$ gemäß unserer komplizierten Definition der Lieklammer auf $\operatorname{Lie} G$ interpretiert werden.[211]

Beweis: Seien $d, e \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$. Wir müssen beweisen, daß $\Omega([d, e]) = [\Omega(d), \Omega(e)]$ ist.

Wir haben die Lieklammer $[x, y]$ für alle $x, y \in \operatorname{Lie} G$ als das Element $z \in \operatorname{Lie} G$ definiert, welches $(G(\Delta))(z) = [(G(i_1))(x), (G(i_2))(y)]$ erfüllt. Somit ist

$$(G(\Delta))([x, y]) = [(G(i_1))(x), (G(i_2))(y)] \qquad \text{für alle } x, y \in \operatorname{Lie} G.$$

Wegen $(G(\Delta))([x, y]) = \Delta \circ [x, y]$, $(G(i_1))(x) = i_1 \circ x$ und $(G(i_2))(y) = i_2 \circ y$ vereinfacht sich dies zu

$$\Delta \circ [x, y] = [i_1 \circ x, i_2 \circ y] \qquad \text{für alle } x, y \in \operatorname{Lie} G.$$

Angewandt auf $x = \Omega(d)$ und $y = \Omega(e)$ ist also

$$\Delta \circ [\Omega(d), \Omega(e)] = [i_1 \circ \Omega(d), i_2 \circ \Omega(e)] = \Delta \circ (\Omega([d, e]))$$

(nach **g)**). Da die Abbildung $\Delta : k[\tau] \to k[\tau] \otimes k[\tau]$ injektiv ist, folgt hieraus $[\Omega(d), \Omega(e)] = \Omega([d, e])$. Damit ist $\Omega([d, e]) = [\Omega(d), \Omega(e)]$ für alle $d, e \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ bewiesen.

j) Wir sind nun mit dem Beweis fast fertig. Wenn wir jetzt wüssten, daß $\operatorname{Lie} G$ (mit den in Satz 1.5 definierten Verknüpfungen) eine Liealgebra ist, würde aus **e)**, **f)** und **i)** nämlich folgen, daß Ω ein Liealgebrahomomorphismus ist. Wir wissen allerdings noch nicht, daß $\operatorname{Lie} G$ eine Liealgebra ist. Zum Glück ist dies mit folgendem Hilfssatz sehr leicht zu zeigen:

---

[209] *Beweis:* Da Ω surjektiv ist (laut **b)**), gibt es ein $d \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ mit $\Omega(d) = x$, und ein $e \in \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$ mit $\Omega(e) = y$. Setzen wir nun $z = \Omega([d, e])$, dann ist

$$\Delta \circ z = \Delta \circ (\Omega([d, e])) = [i_1 \circ \Omega(d), i_2 \circ \Omega(e)]$$

(nach **g)**). Wegen $\Delta \circ z = (G(\Delta))(z)$, $i_1 \circ \underbrace{\Omega(d)}_{=x} = i_1 \circ x = (G(i_1))(x)$ und $i_2 \circ \underbrace{\Omega(e)}_{=y} = i_2 \circ y = (G(i_2))(y)$ vereinfacht sich dies zu

$$(G(\Delta))(z) = [(G(i_1))(x), (G(i_2))(y)].$$

Es existiert also ein z, das $(G(\Delta))(z) = [(G(i_1))(x), (G(i_2))(y)]$ erfüllt.

[210] denn man kann einen Algebrahomomorphismus $\phi : A \to k[\tau]$ eindeutig aus $(G(\Delta))(\phi)$ zurückgewinnen (in der Tat ist $(G(\Delta))(\phi) = \Delta \circ \phi$, und Δ ist injektiv)

[211] Seit **h)** wissen wir ja, daß diese Definition Sinn ergibt.

Hilfssatz: Sei U eine Liealgebra, und sei V eine Menge. Angenommen, wir haben drei Abbildungen festgelegt:

- eine Abbildung $\operatorname{add} : V \times V \to V$, die wir als Addition schreiben (das heißt, wir schreiben $v + w$ für $\operatorname{add}(v, w)$), obwohl wir (noch) nicht wissen, ob sie auch tatsächlich die von einer Addition verlangten Axiome (wie z. B. Assoziativität oder die Existenz eines Nullelements) erfüllt;

- eine Abbildung $\operatorname{smult} : k \times V \to V$, die wir als Wirkung schreiben (das heißt, wir schreiben αv für das $\operatorname{smult}(\alpha, v)$), obwohl wir (noch) nicht wissen, ob sie auch tatsächlich die von einer Wirkung verlangten Axiome (wie z. B. $(a + b)\,v = av + bv$) erfüllt;

- eine Abbildung $\operatorname{lie} : V \times V \to V$, die wir als Lieklammer schreiben (das heißt, wir schreiben $[v, w]$ für $\operatorname{lie}(v, w)$), obwohl wir (noch) nicht wissen, ob sie auch tatsächlich die von einer Lieklammer verlangten Axiome (also k-Bilinearität, $[x, x] = 0$ für alle $x \in V$ und Jacobi-Identität) erfüllt;

Angenommen, wir haben ferner eine Bijektion $\omega : U \to V$, die folgende Eigenschaften hat:

Eigenschaft 1: Für alle $d, e \in U$ ist $\omega(d + e) = \omega(d) + \omega(e)$.

Eigenschaft 2: Für alle $\alpha \in k$ und $d \in U$ ist $\omega(\alpha d) = \alpha\omega(d)$.

Eigenschaft 3: Für alle $d, e \in U$ ist $\omega([d, e]) = [\omega(d), \omega(e)]$.

Dann ist V eine Liealgebra; das heißt, unsere drei Abbildungen, die wir als Addition, als Wirkung bzw. als Lieklammer schreiben, erfüllen tatsächlich die Axiome, die man für eine Addition, eine Wirkung bzw. eine Lieklammer verlangt.[212]

Nun können wir diesen Hilfssatz auf $U = \operatorname{Der}_\varepsilon(A, k)$, $V = \operatorname{Lie} G$ und $\omega = \Omega$ anwenden, und erhalten, daß $\operatorname{Lie} G$ (mit den in Satz 1.5 definierten Verknüpfungen) eine Liealgebra ist (denn die Eigenschaften 1, 2 und 3 gelten ja wegen **e)**, **f)** und **i)**). Aus **e)**, **f)** und **i)** folgt nun, daß Ω ein Liealgebrahomomorphismus ist. Da Ω bijektiv ist (laut **d)**), ist Ω also ein Liealgebraisomorphismus, und Satz 1.5 ist bewiesen.

[212] *Beweis des Hilfssatzes:* Alle Axiome, die eine Liealgebra erfüllen muß, lassen sich für V sehr schnell nachprüfen, indem man die entsprechenden Axiome für U durch die Bijektion ω "nach V übersetzt". Beispiel: Die Addition auf V ist assoziativ, denn für alle $u, v, w \in V$ ist

$$\begin{aligned}
&\underbrace{u}_{=\omega(\omega^{-1}(u))} + \underbrace{(v + w)}_{\substack{=\omega(\omega^{-1}(v))+\omega(\omega^{-1}(w)) \\ =\omega(\omega^{-1}(v)+\omega^{-1}(w))}} \\
&= \omega\left(\omega^{-1}(u)\right) + \omega\left(\omega^{-1}(v) + \omega^{-1}(w)\right) = \omega\left(\omega^{-1}(u) + \left(\omega^{-1}(v) + \omega^{-1}(w)\right)\right) \\
&= \omega\left(\left(\omega^{-1}(u) + \omega^{-1}(v)\right) + \omega^{-1}(w)\right) \qquad \text{(denn die Addition auf } U \text{ ist assoziativ)} \\
&= \underbrace{\omega\left(\omega^{-1}(u) + \omega^{-1}(v)\right)}_{\substack{=\omega(\omega^{-1}(u))+\omega(\omega^{-1}(v)) \\ =u+v}} + \underbrace{\omega\left(\omega^{-1}(w)\right)}_{=w} = (u + v) + w.
\end{aligned}$$

Entsprechend kann man alle anderen Axiome, die eine Liealgebra erfüllen muß, für die Menge V nachweisen.

1.5$\frac{1}{2}$. Zusammenfassung: Die in Satz 1.5 definierte Liealgebra $\operatorname{Lie} G$ heißt die *Liealgebra der affinen Gruppe G*. Wenn $G = \operatorname{Sp} A$ ist, dann haben wir folgende Isomorphismen von Liealgebren:

$$\operatorname{Ker}\left(G(k[\tau]) \xrightarrow{G(\pi)} G(k)\right)$$
$$= \operatorname{Lie} G \cong \operatorname{Der}_\varepsilon(A,k) \qquad \text{(gemäß Satz 1.5)}$$
$$\cong \left(A^+ \diagup (A^+)^2\right)^*$$
$$\left(\begin{array}{c}\text{gemäß Satz } 1.4\frac{1}{2}\ \mathbf{3)}\text{, wobei wir die Liealgebrastruktur auf } \left(A^+ \diagup (A^+)^2\right)^* \text{ vermöge} \\ \text{des Isomorphismus } \operatorname{Der}_\varepsilon(A,k) \cong \left(A^+ \diagup (A^+)^2\right)^* \text{ und der Liealgebrastruktur auf} \\ \operatorname{Der}_\varepsilon(A,k) \text{ definieren}\end{array}\right)$$
$$\cong \operatorname{Der}_\varepsilon(A,k) \cong \operatorname{Der}(A,A)^{\text{linksinv}} \qquad \text{(gemäß Bemerkung 1.3 } \mathbf{7)}\text{)}.$$

Diese Isomorphismen sind alle kanonisch. Wenn wir also mit der Liealgebra $\operatorname{Lie} G$ einer affinen Gruppe G arbeiten wollen, können wir in jedem ihrer "Avatare" $\operatorname{Ker}\left(G(k[\tau]) \xrightarrow{G(\pi)} G(k)\right)$, $\operatorname{Der}_\varepsilon(A,k)$, $\left(A^+ \diagup (A^+)^2\right)^*$ und $\operatorname{Der}(A,A)^{\text{linksinv}}$ arbeiten.

1.6. Folgerung: Sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist $\operatorname{Lie} G$ isomorph zu einer Unterliealgebra von $\mathrm{M}_n(k)^- \cong \operatorname{Lie}(\mathrm{GL}_n)$.

Beweis: **1)** *Behauptung 1:* Seien A und $\overline{A}$ Bialgebren, und sei $\varphi : A \to \overline{A}$ ein surjektiver Bialgebrahomomorphismus. Dann ist

$$\operatorname{Der}_\varepsilon\left(\overline{A},k\right) \to \operatorname{Der}_\varepsilon(A,k), \qquad d \mapsto d \circ \varphi$$

ein injektiver Liealgebrahomomorphismus.

Beweis: Klar.

Behauptung 2: Es gilt $\operatorname{Lie}(\mathrm{GL}_n) \cong \mathrm{M}_n(k)^-$.

Beweis: Nach der Definition von Lie (die wir in 1.5. gegeben haben) ist

$$\operatorname{Lie}(\mathrm{GL}_n) = \operatorname{Ker}\left(\mathrm{GL}_n(k[\tau]) \xrightarrow{\mathrm{GL}_n(\pi)} \mathrm{GL}_n(k)\right) = \{E + \tau A \mid A \in \mathrm{M}_n(k)\},$$

wobei $(E+\tau A)^{-1} = E - \tau A$ wegen $\tau^2 = 0$.

Für beliebige $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ und $\alpha \in k$ gilt nun

$$(E+\tau A)(E+\tau B) = E + \tau A + \tau B + \underbrace{\tau^2}_{=0} AB = E + \tau(A+B);$$
$$\mathrm{GL}_n(f_\alpha)(E+\tau A) = E + \tau\alpha A.$$

Schreibe $\tau_1 = \tau \otimes 1$ und $\tau_2 = 1 \otimes \tau$ in $k[\tau] \otimes k[\tau]$. Dann ist

$$(E+\tau_1 A)(E+\tau_2 B)\underbrace{(E+\tau_1 A)^{-1}}_{=E-\tau_1 A}\underbrace{(E+\tau_2 B)^{-1}}_{=E-\tau_2 B}$$
$$= \underbrace{(E+\tau_1 A)(E+\tau_2 B)}_{=E+\tau_2 B+\tau_1 A+\tau_1\tau_2 AB}\underbrace{(E-\tau_1 A)(E-\tau_2 B)}_{=E-\tau_2 B-\tau_1 A+\tau_1\tau_2 AB}$$
$$= E - \tau_2 B - \tau_1 A + \tau_1\tau_2 AB + \tau_2 B - \tau_1\tau_2 BA + \tau_1 A - \tau_1\tau_2 AB + \tau_1\tau_2 AB \qquad \left(\text{da } \tau_1^2 = \tau_2^2 = 0\right)$$
$$= E + \underbrace{\tau_1\tau_2}_{\substack{=\tau\otimes\tau \\ =\Delta(\tau)}}(AB - BA).$$

Somit ist

$$\mathrm{M}_n(k)^- \to \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n), \qquad A \mapsto E + \tau A$$

ein Isomorphismus von Liealgebren. Damit ist Behauptung 2 gezeigt.

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt 1.6.

Die universelle Einhüllende einer Liealgebra

Wir haben mit Bemerkung 1.3. **3)** eine Möglichkeit kennengelernt, aus einer Hopfalgebra heraus eine Liealgebra zu bilden. Nun werden wir eine umgekehrte Richtung angeben: Ausgehend von einer Liealgebra wollen wir die sogenannte *universelle Einhüllende* dieser Liealgebra konstruieren, auf der eine kanonische Hopfalgebrastruktur definiert ist.

Bald kommen wir zur eigentlichen Definition der universellen Einhüllenden; zuerst noch ein Begriff:

Definition: Die *Tensoralgebra* $T(V)$ eines Vektorraumes V ist definiert als die Algebra

$$T(V) = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus ... = \bigoplus_{n \geq 0} (\otimes^n V).$$

Die Multiplikation auf $T(V)$ wird definiert durch

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) \cdot (w_1 \otimes w_2 \otimes ... \otimes w_l) = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes ... \otimes w_l$$
$$\text{für alle } v_1, v_2, ..., v_k \in V \text{ und } w_1, w_2, ..., w_l \in V$$

(und durch lineare Fortsetzung). Das Einselement von $T(V)$ ist $1 \in k$.

1.7. Bemerkung: 1) Die Tensoralgebra $T(V)$ ist isomorph (als Algebra) zur freien Algebra $k\langle x_i \mid i \in I\rangle$ (der freien Algebra in den Variablen x_i), wobei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V ist. (Ein Isomorphismus $T(V) \to k\langle x_i \mid i \in I\rangle$ ist durch $v_i \mapsto x_i$ gegeben.)

2) Die Tensoralgebra $T(V)$ eines Vektorraumes V hat folgende universelle Eigenschaft:

Für jede Algebra A und für jede k-lineare Abbildung $f : V \to A$ gibt es genau einen Algebrahomomorphismus $\varphi : T(V) \to A$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\text{Inklusion}"'] & A \\ & T(V) \arrow[u, dotted, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Sei $T(\mathfrak{g})$ die Tensoralgebra des Vektorraums $\mathfrak{g}$. Definiere eine (assoziative, aber im Allgemeinen nicht kommutative) Algebra $U(\mathfrak{g})$ durch

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) \diagup (x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g})$$

(wobei mit $(x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g})$ das zweiseitige Ideal von $T(\mathfrak{g})$ gemeint ist, das von der Menge $\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$ erzeugt ist).

Diese Faktoralgebra $U(\mathfrak{g})$ heißt die *universelle Einhüllende* der Liealgebra $\mathfrak{g}$.

Der Vektorraumhomomorphismus $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}), x \mapsto \overline{x}$ heißt *Restklassenabbildung.*

1.8. Bemerkung: 1) Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra mit Basis $(x_i)_{i\in I}$, und schreiben wir

$$[x_i, x_j] = \sum_{l\in I} \alpha^l_{i,j} x_l \qquad \text{für alle } i, j \in I,$$

wobei $\alpha^l_{i,j} \in k$ für alle l und $\alpha^l_{i,j} \neq 0$ nur für endlich viele $l \in I$, dann ist

$$U(\mathfrak{g}) \cong k\left\langle \{x_i \mid i \in I\} \;\middle|\; x_i x_j - x_j x_i = \sum_{l\in I} \alpha^l_{i,j} x_l \text{ für alle } i, j \in I \right\rangle.$$

Beweis: Wegen 1.7. **1)**.

2) Ein Beispiel: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Bekanntlich hat dann $\mathfrak{g}$ eine Basis e, f, h mit den Relationen

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f, \qquad [e, f] = h.$$

Dann ist

$$U(\mathfrak{sl}_2) \cong k\langle e, f, h \mid ef - fe = h,\ he - eh = 2e,\ hf - fh = -2f\rangle.$$

1.9. Satz (Universelle Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$): Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1) Die kanonische Abbildung $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})^-$ ist ein Liealgebrahomomorphismus.

2) Für jede (assoziative) Algebra A und jeden Liealgebrahomomorphismus $f : \mathfrak{g} \to A^-$ existiert genau ein Algebrahomomorphismus $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\sigma"'] & A^- \\ & U(\mathfrak{g})^- \arrow[u, dotted, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Also ist

$$\mathrm{Alg}(U(\mathfrak{g}), A) \to \mathrm{Lie}\left(\mathfrak{g}, A^-\right), \qquad \varphi \mapsto \varphi\sigma$$

eine Bijektion.

Beweis: **1)** Für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\sigma([x, y]) = \overline{[x, y]} = \overline{x \otimes y - y \otimes x} = \overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{y}\cdot\overline{x} = \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) = [\sigma(x), \sigma(y)].$$

2) Sei A eine assoziative Algebra, und $f : \mathfrak{g} \to A^-$ ein Liealgebrahomomorphismus. Definiere einen Algebrahomomorphismus $\widetilde{f} : T(\mathfrak{g}) \to A$ durch $\widetilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ (dies ist möglich nach der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra, also 1.7. **2)**). Dann gilt $\widetilde{f}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$, denn

$$\widetilde{f}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = f(x) f(y) - f(y) f(x) - \underbrace{f([x, y])}_{\substack{= f(x)f(y) - f(y)f(x), \\ \text{denn } f \text{ ist ein} \\ \text{Liealgebrahomomorphismus}}} = 0.$$

Daher faktorisiert $\widetilde{f}$ über $U(\mathfrak{g})$; das heißt, es gibt einen Algebrahomomorphismus $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$ mit $\varphi(\sigma(x)) = f(x)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Damit ist die Existenz von φ gezeigt. Außerdem ist φ mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt, da die Elemente $\sigma(x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ ein Algebraerzeugendensystem von $U(\mathfrak{g})$ bilden.

1.10. Folgerung: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1) Dann erhält $U(\mathfrak{g})$ kanonisch eine Struktur einer cokommutativen Hopfalgebra durch Algebrahomomorphismen $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ und $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ sowie einen Antialgebrahomomorphismus $S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, welche wie folgt definiert sind:

$$\Delta(\sigma(x)) = \sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{g};$$
$$\varepsilon(\sigma(x)) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{g};$$
$$S(\sigma(x)) = -\sigma(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{g}.$$

Es gilt $\sigma(\mathfrak{g}) \subseteq P(U(\mathfrak{g}))$.

2) Diese Hopfalgebra $U(\mathfrak{g})$ besitzt folgende universelle Eigenschaft:

Sei H eine Bialgebra, und sei $f : \mathfrak{g} \to P(H)$ ein Liealgebrahomomorphismus.[213] Dann gibt es genau einen Bialgebrahomomorphismus $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to H$ so, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\sigma"'] & P(H) \arrow[r, "\text{Inklusion}"] & H \\
& U(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Also ist die Abbildung

$$\operatorname{Bialg}(U(\mathfrak{g}), H) \to \operatorname{Lie}(\mathfrak{g}, P(H)), \qquad \varphi \mapsto \varphi\sigma$$

bijektiv. Diese Abbildung ist ferner kanonisch in beiden Variablen $\mathfrak{g}$ und H.

Beweis: **1) i)** Wir werden folgende Aussagen zeigen:

a) Die Abbildung

$$\mathfrak{g} \to (U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}))^-, \qquad x \mapsto \sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x)$$

ist ein Liealgebrahomomorphismus.

b) Die Abbildung

$$\mathfrak{g} \to k^-, \qquad x \mapsto 0$$

ist ein Liealgebrahomomorphismus.

c) Die Abbildung

$$\mathfrak{g} \to \left(U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}\right)^-, \qquad x \mapsto -\sigma(x)$$

ist ein Liealgebrahomomorphismus.

[213] Siehe 1.3. **3)** für eine Definition der Liealgebra $P(H)$.

Beweis von ***a)****:* Für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\begin{aligned}
&[\sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x), \ \sigma(y) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(y)] \\
&= (\sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x))(\sigma(y) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(y)) - (\sigma(y) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(y))(\sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x)) \\
&= (\sigma(x)\sigma(y) \otimes 1 + \sigma(x) \otimes \sigma(y) + 1 \otimes \sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y) \otimes \sigma(x)) \\
&\qquad - (\sigma(y)\sigma(x) \otimes 1 + \sigma(y) \otimes \sigma(x) + 1 \otimes \sigma(y)\sigma(x) + \sigma(x) \otimes \sigma(y)) \\
&= \sigma(x)\sigma(y) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) \otimes 1 - 1 \otimes \sigma(y)\sigma(x) \\
&= \left(\underbrace{\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x)}_{=\sigma([x,y])}\right) \otimes 1 + 1 \otimes \left(\underbrace{\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x)}_{=\sigma([x,y])}\right) = \sigma([x,y]) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma([x,y]).
\end{aligned}$$

Beweis von ***b)****:* Trivial.

Beweis von ***c)****:* Im Folgenden bedeute Multiplikation immer Multiplikation in $U(\mathfrak{g})$ (und nicht in $U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}$); ferner bedeute $[u, v]$ die Lieklammer von $U(\mathfrak{g})^{-}$, während $[u, v]^{\mathrm{op}}$ die Lieklammer von $(U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}})^{-}$ bedeuten soll.

Für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\begin{aligned}
[-\sigma(x), -\sigma(y)]^{\mathrm{op}} &= [-\sigma(y), -\sigma(x)] = (-\sigma(y))(-\sigma(x)) - (-\sigma(x))(-\sigma(y)) \\
&= \sigma(y)\sigma(x) - \sigma(x)\sigma(y) = -\sigma([x,y]).
\end{aligned}$$

ii) Aus den drei Aussagen von **i)** ergeben sich gemäß der universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$ (siehe 1.9. **2)**) drei Algebrahomomorphismen $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$, $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ und $S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}$ (man beachte das op) mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma(x)) &= \sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x) \qquad && \text{für alle } x \in \mathfrak{g}; \\
\varepsilon(\sigma(x)) &= 0 && \text{für alle } x \in \mathfrak{g}; \\
S(\sigma(x)) &= -\sigma(x) && \text{für alle } x \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß $U(\mathfrak{g})$ mit der Comultiplikation Δ, der Coeins ε und der Antipode S eine Hopfalgebra wird, müssen wir die Axiome einer Hopfalgebra nachprüfen. Diese Axiome brauchen wir (laut Folgerung I.2.16 **1)** und Folgerung I.2.16 **2)**) nur auf Algebraerzeugenden von $U(\mathfrak{g})$ nachzuprüfen, also am Besten auf den Elementen von $\{\sigma(g) \mid g \in \mathfrak{g}\}$. Die Cokommutativität ist ebenfalls auf diesen Elementen klar (nach der Definition von Δ), und somit können wir sie (gemäß Folgerung I.2.16 **3)**) auf ganz $U(\mathfrak{g})$ übertragen. Daß $\sigma(\mathfrak{g}) \subseteq P(U(\mathfrak{g}))$ gilt, folgt aus der Definition von Δ.

2) Sei H eine Bialgebra, und sei $f : \mathfrak{g} \to P(H)$ ein Liealgebrahomomorphismus. Dann induziert f einen Liealgebrahomomorphismus von $\mathfrak{g}$ nach H^{-}, nämlich die Verkettung $\mathfrak{g} \xrightarrow{f} P(H) \xrightarrow{\text{Inklusion}} H^{-}$. Nach der universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$ (siehe 1.9. **2)**) gibt es dann einen Algebrahomomorphismus $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to H$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\sigma"'] & P(H) \arrow[r, "\text{Inklusion}"] & H \\
& U(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. (Die Eindeutigkeit von φ ist klar, da $\sigma(\mathfrak{g})$ die Algebra $U(\mathfrak{g})$ erzeugt.)

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß φ ein Bialgebrahomomorphismus ist. Dies beweisen wir folgendermaßen:

a) Wir zeigen erstmal, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"'] & H \otimes H \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis: Für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\Delta\left(\underbrace{\varphi(\sigma(x))}_{=f(x)}\right) = \Delta(f(x)) = f(x) \otimes 1 + 1 \otimes f(x) \qquad \text{(denn } f(x) \in P(H)\text{)}$$

und

$$(\varphi \otimes \varphi)(\Delta(\sigma(x))) = (\varphi \otimes \varphi)(\sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x)) = \underbrace{\varphi(\sigma(x))}_{=f(x)} \otimes \underbrace{\varphi(1)}_{=1} + \underbrace{\varphi(1)}_{=1} \otimes \underbrace{\varphi(\sigma(x))}_{=f(x)}$$
$$= f(x) \otimes 1 + 1 \otimes f(x),$$

also $\Delta(\varphi(\sigma(x))) = (\varphi \otimes \varphi)(\Delta(\sigma(x)))$. Also ist das Diagramm kommutativ (denn es ist ein Diagramm von Algebrahomomorphismen, und $\sigma(\mathfrak{g})$ erzeugt die Algebra $U(\mathfrak{g})$).

b) Wir zeigen nun, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ k & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis: Für alle $x \in \mathfrak{g}$ ist $\varepsilon\left(\underbrace{\varphi(\sigma(x))}_{=f(x)}\right) = \varepsilon(f(x)) = 0$ (da $f(x) \in P(H)$) und $\varepsilon(\sigma(x)) = 0$, also $\varepsilon(\varphi(\sigma(x))) = \varepsilon(\sigma(x))$. Genauso wie in **a)** folgt hieraus die Behauptung.

1.11. Bemerkung: 1) Wir können einen Funktor $U : \mathrm{Lie} \to \mathrm{Alg}$ definieren durch $\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})$, wobei für je zwei Liealgebren $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ und jeden Liealgebrahomomorphismus $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ der Algebrahomomorphismus $U(f) : U(\mathfrak{g}_1) \to U(\mathfrak{g}_2)$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\sigma"] \\ U(\mathfrak{g}_1) \arrow[r, "U(f)"] & U(\mathfrak{g}_2) \end{tikzcd}$$

definiert ist[214].

[214] So ein $U(f)$ existiert und ist eindeutig. Um dies einzusehen, müssen wir nur 1.9. **2)** auf $\mathfrak{g}_1$, $U(\mathfrak{g}_2)$ und $\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{f} \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\sigma} U(\mathfrak{g}_2)^-$ statt $\mathfrak{g}$, A und f anwenden (denn $\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{f} \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\sigma} U(\mathfrak{g}_2)^-$ ist ein Liealgebrahomomorphismus).

Nach 1.9. **2)** ist dieser Funktor U : Lie $\to$ Alg linksadjungiert zu dem Funktor $()^{-}$: Alg $\to$ Lie, welcher jede Algebra A auf die Liealgebra A^{-} abbildet und jeden Algebrahomomorphismus $f : A \to B$ auf den Liealgebrahomomorphismus $f : A^{-} \to B^{-}$ abbildet.

2) Wir können aber (nach 1.10.) auch genauso einen Funktor U : Lie $\to$ Bialg definieren. (Wir nennen diesen Funktor auch U, obwohl er nicht mit dem Funktor U aus Bemerkung **1)** zu verwechseln ist.)

Nach 1.10. **2)** ist dieser Funktor U : Lie $\to$ Bialg linksadjungiert zu dem Funktor P : Bialg $\to$ Lie.

Wir definieren jetzt den Begriff eines Moduls über einer Liealgebra, nur um dann (in Bemerkung 1.12.) festzustellen, daß $\mathfrak{g}$-Moduln (für eine Liealgebra $\mathfrak{g}$) im Wesentlichen nichts anderes als $U(\mathfrak{g})$-Moduln sind:

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1) Sei V ein Vektorraum, und sei $\mu : \mathfrak{g} \times V \to V$ eine k-bilineare Abbildung. Dann nennen wir (V, μ) (oder kurz V, wenn die Abbildung μ klar ist) einen $\mathfrak{g}$-*Modul*, wenn für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ und jedes $v \in V$ gilt:

$$[x, y] v = x(yv) - y(xv).$$

(Hierbei verwenden wir die Kurzschreibweise zv für $\mu(z, v)$, wobei z ein Element von $\mathfrak{g}$ und v ein Element von V sind.)

2) Seien V und W zwei $\mathfrak{g}$-Moduln, und sei $f : V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Dann heißt f ein *Homomorphismus von* $\mathfrak{g}$-*Moduln* (oder auch ein $\mathfrak{g}$-*Modulhomomorphismus*, oder auch eine $\mathfrak{g}$-*lineare Abbildung*), wenn für alle $x \in \mathfrak{g}$ und alle $v \in V$ gilt: $f(xv) = xf(v)$.

1.12. Bemerkung: 1) Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, sei V ein Vektorraum, und sei $\mu : \mathfrak{g} \times V \to V$ eine k-bilineare Abbildung. Genau dann ist (V, μ) ein $\mathfrak{g}$-Modul, wenn die Abbildung

$$\rho : \mathfrak{g} \to (\operatorname{End} V)^{-}, \qquad x \mapsto (v \mapsto xv)$$

ein Liealgebrahomomorphismus ist. (Diese Abbildung ρ heißt dann auch *Darstellung* von $\mathfrak{g}$.)

Beweis: Dies ist nur eine Umschreibung der Definition eines $\mathfrak{g}$-Moduls.

2) Jeden $\mathfrak{g}$-Modul V kann man als einen $U(\mathfrak{g})$-Modul betrachten, indem man den Vektorraum V mit der $U(\mathfrak{g})$-Modulstruktur, die $\sigma(x) v = xv$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ erfüllt[215], versieht.

Der Funktor

$$\begin{aligned} &\{V \mid V \text{ ist ein } \mathfrak{g}\text{-Modul}\} \to {}_{U(\mathfrak{g})}\mathcal{M}, \\ &\qquad V \mapsto V \text{ als Vektorraum mit der (eindeutigen) } U(\mathfrak{g})\text{-Modulstruktur,} \\ &\qquad\qquad \text{die } \sigma(x) v = xv \text{ für alle } x \in \mathfrak{g} \text{ und } v \in V \text{ erfüllt} \end{aligned}$$

ist eine Kategorienäquivalenz und sogar ein Isomorphismus von Kategorien. Also werden die Begriffe "$\mathfrak{g}$-Modul" und "$U(\mathfrak{g})$-Linksmodul" häufig miteinander identifiziert.

[215]So eine $U(\mathfrak{g})$-Modulstruktur existiert und ist eindeutig, denn wenn wir sie als Algebrahomomorphismus $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End} V$ betrachten, vereinfacht sich die Bedingung "$(\sigma(x) v = xv$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V)$" zu "$(\varphi \circ \sigma = \rho)$", wobei ρ der in **1)** definierte Liealgebrahomomorphismus ist, und laut 1.9 **2)** (angewandt auf $\operatorname{End} V$ und ρ statt A und f) gibt es genau einen Algebrahomomorphismus $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End} V$, der $\varphi \circ \sigma = \rho$ erfüllt.

Beweis: Für jeden Vektorraum V gibt es nach 1.9. eine kanonische Bijektion

$$\operatorname{Lie}\left(\mathfrak{g}, (\operatorname{End} V)^{-}\right) \to \operatorname{Alg}\left(U\left(\mathfrak{g}\right), \operatorname{End} V\right).$$

2. Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt

Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt wird die Struktur von $U(\mathfrak{g})$ etwas näher beleuchten - zumindest wird er eine "recht schöne" Basis von $U(\mathfrak{g})$ *als Vektorraum* aufzeigen. Die Algebrastruktur von $U(\mathfrak{g})$ wird dadurch allerdings nicht erklärt.

2.1. Satz, der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, und sei $(x_i)_{i\in I}$ eine k-Basis von $\mathfrak{g}$. Sei $(I, \leq)$ total geordnet. Dann ist die Multimenge

$$\{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n}) \;\mid\; n \geq 0,\; i_1, i_2, ..., i_n \in I,\; i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n\}$$

eine k-Basis von $U(\mathfrak{g})$ (inbesondere ist diese Multimenge eine Menge, d. h. enthält kein Element mehrfach).

Bevor wir diesen Satz beweisen, definieren wir zunächst den Begriff einer filtrierten Algebra:

Definition: 1) Sei A eine Algebra, und seien $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ Untervektorräume von A. Dann heißt $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ eine *filtrierte Algebra*, wenn folgende drei Eigenschaften gelten:

a) Es ist $1 \in A_0$.

b) Für alle $n, m \geq 0$ ist $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$.

c) Es gilt $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n = A$.

In diesem Fall nennt man $(A_n)_{n\geq 0}$ auch eine *Algebrafiltrierung* von A (oder eine *Filtrierung* der Algebra A).

2) Sei $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Algebra. Dann definieren wir eine graduierte Algebra $\operatorname{gr} A$, indem wir erstmal den ihr zugrundeliegenden *Vektorraum* $\operatorname{gr} A$ durch

$$\operatorname{gr} A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n \diagup A_{n-1}$$

definieren[216], wobei $A_{-1} = 0$ gesetzt wird (wohlgemerkt hängt dieses $\operatorname{gr} A$ nicht nur von der Algebra A, sondern auch von der Filtrierung $(A_n)_{n\geq 0}$ ab, auch wenn wir dies bei der Notation $\operatorname{gr} A$ unterschlagen!). Die Algebrastruktur auf $\operatorname{gr} A$ wird definiert durch

$$\begin{aligned}
&(A_n \diagup A_{n-1}) \times (A_m \diagup A_{m-1}) \to (A_{n+m} \diagup A_{n+m-1}),\\
&\qquad\qquad\qquad (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{xy} \qquad\qquad \text{(wobei } x \in A_n \text{ und } y \in A_m \text{ und daher } xy \in A_{n+m}\text{)}
\end{aligned}$$

für alle $n, m \geq 0$ (dabei meinen wir mit $\overline{x}$ die Äquivalenzklasse des Elementes $x \in A_n$ modulo A_{n-1}, ferner meinen wir mit $\overline{y}$ die Äquivalenzklasse des Elementes $y \in A_m$ modulo A_{m-1}, und schließlich meinen wir mit $\overline{xy}$ die Äquivalenzklasse des Elementes $xy \in A_{n+m}$ modulo A_{n+m-1}) und durch lineare Fortsetzung. Diese graduierte Algebra

[216] Hier ist das Zeichen $\bigoplus$ als Synonym für $\coprod$ (also für "Coprodukt") zu verstehen; die Vektorräume $A_n \diagup A_{n-1}$ sind nicht a priori Unterräume eines einzigen festen Vektorraumes (aber werden isomorph zu solchen, sobald man $\operatorname{gr} A$ einführt).

$\operatorname{gr} A$ bezeichnen wir auch als $\operatorname{gr}\left(A,(A_n)_{n\geq 0}\right)$ (diese Schreibweise ist im Gegensatz zur Notation $\operatorname{gr} A$ auch formal korrekt, denn $\operatorname{gr}\left(A,(A_n)_{n\geq 0}\right)$ hängt nicht nur von A, sondern auch von der Filtrierung $(A_n)_{n\geq 0}$ ab).

2.2. Beispiele: 1) Sei A eine beliebige Algebra (damit meinen wir, wie immer, eine assoziative Algebra). Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Algebraerzeugendensystem von A.

Für alle $n \geq 0$ sei A_n der Untervektorraum von A, der von allen $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_m}$ mit $0 \leq m \leq n$ und $i_1, i_2, ..., i_m \in I$ aufgespannt wird. (Insbesondere ist also $A_0 = k \cdot 1$.) Dann ist $(A_n)_{n\geq 0}$ eine Filtrierung von A, die sogenannte *natürliche Filtrierung* der Algebra A bezüglich dem Algebraerzeugendensystem $(x_i)_{i\in I}$.

2) Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, und ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Vektorraum-Erzeugendensystem von $\mathfrak{g}$, dann sei $(U_n(\mathfrak{g}))_{n\geq 0}$ die natürliche Filtrierung der Algebra $U(\mathfrak{g})$ bezüglich dem Algebraerzeugendensystem $(\sigma(x_i))_{i\in I}$. (Diese Filtrierung $(U_n(\mathfrak{g}))_{n\geq 0}$ hängt nicht von der Wahl des Erzeugendensystems $(x_i)_{i\in I}$ ab, weil man sie auch unabhängig von dem Erzeugendensystem $(x_i)_{i\in I}$ beschreiben könnte[217].) Ferner bezeichnen wir die graduierte Algebra $\operatorname{gr}\left(U(\mathfrak{g}),(U_n(\mathfrak{g}))_{n\geq 0}\right)$ auch kurz mit $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$. Wir haben also

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 0} (U_n(\mathfrak{g})) \diagup (U_{n-1}(\mathfrak{g})) \qquad \text{als } \textit{Vektorraum},$$

wobei $U_{-1}(\mathfrak{g}) = 0$.

Nun kommen wir zum Beweis von 2.1.; wir beginnen mit einem Lemma:

2.3. Lemma: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra mit Vektorraum-Erzeugendensystem $(x_i)_{i\in I}$, und sei $(I, \leq)$ total geordnet.

1) Dann ist die Algebra $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ kommutativ.

2) Für jedes $n \geq 0$, jede Permutation $\pi \in S_n$ und jede $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\overline{\sigma(y_1)\sigma(y_2)...\sigma(y_n)} = \overline{\sigma\left(y_{\pi(1)}\right)\sigma\left(y_{\pi(2)}\right)...\sigma\left(y_{\pi(n)}\right)}.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $\overline{\sigma(y_1)\sigma(y_2)...\sigma(y_n)}$ und $\overline{\sigma\left(y_{\pi(1)}\right)\sigma\left(y_{\pi(2)}\right)...\sigma\left(y_{\pi(n)}\right)}$ die Restklassen der Elemente $\sigma(y_1)\sigma(y_2)...\sigma(y_n)$ bzw. $\sigma\left(y_{\pi(1)}\right)\sigma\left(y_{\pi(2)}\right)...\sigma\left(y_{\pi(n)}\right)$ von $U_n(\mathfrak{g})$ modulo $U_{n-1}(\mathfrak{g})$.

3) Für alle $n \geq 0$ wird der Vektorraum $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$ erzeugt von allen $\overline{\sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})...\sigma(x_{i_n})}$ mit $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ und $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n$ (wobei $\overline{\sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})...\sigma(x_{i_n})}$ die Restklasse des Elementes $\sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})...\sigma(x_{i_n})$ von $U_n(\mathfrak{g})$ modulo $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ bezeichnet).

4) Für alle $n \geq 0$ ist $U_n(\mathfrak{g})$ der Untervektorraum von $U(\mathfrak{g})$, der erzeugt ist von allen $\sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})...\sigma(x_{i_m})$ mit $0 \leq m \leq n$ und $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_m$ in I. [218]

Beweis: **1)** Die graduierte Algebra $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ wird als Algebra erzeugt von $\left(\overline{\sigma(x_i)}\right)_{i\in I}$, wobei für jedes $i \in I$ das Element $\sigma(x_i) \in U(\mathfrak{g})$ in $U_1(\mathfrak{g})$ liegt, und $\overline{\sigma(x_i)}$ die Äquivalenzklasse dieses Elementes modulo $U_0(\mathfrak{g})$ ist. Wir müssen also nur noch beweisen, daß $\overline{\sigma(x_i)} \cdot \overline{\sigma(x_j)} = \overline{\sigma(x_j)} \cdot \overline{\sigma(x_i)}$ für alle i, j gilt (denn wenn eine Algebra von paarweise kommutierenden Elementen erzeugt wird, dann ist diese Algebra kommutativ). Doch dies folgt aus

$$\sigma(x_i)\cdot\sigma(x_j) - \sigma(x_j)\cdot\sigma(x_i) = [\sigma(x_i), \sigma(x_j)] = \sigma([x_i, x_j]) \in U_1(\mathfrak{g}),$$

[217] und zwar folgendermaßen: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $U_k(\mathfrak{g})$ der Untervektorraum $\sum_{i=0}^{k} \langle \sigma(\alpha_1)\sigma(\alpha_2)...\sigma(\alpha_i) \mid \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i \in \mathfrak{g}\rangle$ von $U(\mathfrak{g})$.

[218] Mit "$i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_m$ in I" meinen wir dabei "$i_1, i_2, ..., i_m \in I$ und $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_m$".

also $\overline{\sigma(x_i)\cdot\sigma(x_j)} = \overline{\sigma(x_j)\cdot\sigma(x_i)}$ in $U_2(\mathfrak{g}) \diagup U_1(\mathfrak{g})$, also $\overline{\sigma(x_i)}\cdot\overline{\sigma(x_j)} = \overline{\sigma(x_j)}\cdot\overline{\sigma(x_i)}$ in $U_2(\mathfrak{g}) \diagup U_1(\mathfrak{g})$, was zu beweisen war.

2) Die Behauptung von **2)** folgt aus

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma(y_1)\,\sigma(y_2)\,...\sigma(y_n)} \\
&= \overline{\sigma(y_1)}\cdot\overline{\sigma(y_2)}\cdot ...\cdot\overline{\sigma(y_n)} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{wobei } \overline{\sigma(y_1)},\ \overline{\sigma(y_2)},\ ...,\ \overline{\sigma(y_n)} \text{ die Restklassen} \\ \text{der Elemente } \sigma(y_1),\ \sigma(y_2),\ ...,\ \sigma(y_n) \\ \text{von } U_1(\mathfrak{g}) \text{ modulo } U_0(\mathfrak{g}) \text{ bezeichnen}\end{array}\right) \\
&= \overline{\sigma\left(y_{\pi(1)}\right)}\cdot\overline{\sigma\left(y_{\pi(2)}\right)}\cdot ...\cdot\overline{\sigma\left(y_{\pi(n)}\right)} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{wobei } \overline{\sigma\left(y_{\pi(1)}\right)},\ \overline{\sigma\left(y_{\pi(2)}\right)},\ ...,\ \overline{\sigma\left(y_{\pi(n)}\right)} \\ \text{die Restklassen der Elemente} \\ \sigma\left(y_{\pi(1)}\right),\ \sigma\left(y_{\pi(2)}\right),\ ...,\ \sigma\left(y_{\pi(n)}\right) \\ \text{von } U_1(\mathfrak{g}) \text{ modulo } U_0(\mathfrak{g}) \text{ bezeichnen}\end{array}\right) \\
&\qquad\qquad (\text{denn nach } \mathbf{1)} \text{ ist } \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) \text{ kommutativ}) \\
&= \overline{\sigma\left(y_{\pi(1)}\right)\sigma\left(y_{\pi(2)}\right)...\sigma\left(y_{\pi(n)}\right)}.
\end{aligned}$$

3) Sei $n \geq 0$ beliebig. In diesem Beweis werden wir für jedes $T \in U_n(\mathfrak{g})$ die Restklasse von T modulo $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ mit $\overline{T}$ bezeichnen. Wenn T ein Element von $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ ist, ist also $\overline{T} = 0$.

Sei W der Untervektorraum von $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$, welcher erzeugt ist von allen $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})}$ mit $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ und $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n$. Wir wollen zeigen, daß $W = U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$ ist.

Für beliebige $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ gilt $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})} \in W$ [219].

Gemäß der Definition von $U_n(\mathfrak{g})$ wird der Vektorraum $U_n(\mathfrak{g})$ erzeugt von allen $\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_\ell})$ mit $0 \leq \ell \leq n$ und $i_1, i_2, ..., i_\ell \in I$. Somit wird der Vektorraum $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$ erzeugt von allen $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_\ell})}$ mit $0 \leq \ell \leq n$ und $i_1, i_2, ..., i_\ell \in I$. [220] Unter diesen Erzeugenden sind aber alle diejenigen, die $\ell < n$ erfüllen, gleich 0 (denn für $\ell < n$ ist $\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_\ell}) \in U_\ell(\mathfrak{g}) \subseteq U_{n-1}(\mathfrak{g})$ und somit $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_\ell})} = 0$), und können daher weggelassen werden. Wir erhalten somit: Der Vektorraum $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$ wird erzeugt von allen $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_\ell})}$ mit $\ell = n$ und $i_1, i_2, ..., i_\ell \in I$. Mit anderen Worten: Der Vektorraum $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$ wird erzeugt von allen $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})}$ mit $i_1, i_2, ..., i_n \in I$. Da all diese Erzeugenden in W liegen[221], ist also $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g}) = W$. Nach der Definition von W bedeutet dies: Der Vektorraum $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$ wird erzeugt von allen $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})}$ mit $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ und $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n$. Mit anderen Worten: Der Vektorraum $U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g})$ wird erzeugt von allen $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})}$ mit $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n$ in I. Damit ist die Behauptung von **3)** bewiesen.

4) Die Behauptung von **4)** folgt aus **3)** durch Induktion nach n.

[219] *Beweis:* Seien $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ beliebig. Dann gibt es eine Permutation $\pi \in S_n$, die $i_{\pi(1)} \leq i_{\pi(2)} \leq ... \leq i_{\pi(n)}$ erfüllt. Für diese Permutation gilt $\overline{\sigma\left(x_{i_{\pi(1)}}\right)\sigma\left(x_{i_{\pi(2)}}\right)...\sigma\left(x_{i_{\pi(n)}}\right)} \in W$ (nach der Definition von W). Doch nach **2)** (angewandt auf $(y_1, y_2, ..., y_n) = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$) gilt $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})} = \overline{\sigma\left(x_{i_{\pi(1)}}\right)\sigma\left(x_{i_{\pi(2)}}\right)...\sigma\left(x_{i_{\pi(n)}}\right)}$. Aus $\overline{\sigma\left(x_{i_{\pi(1)}}\right)\sigma\left(x_{i_{\pi(2)}}\right)...\sigma\left(x_{i_{\pi(n)}}\right)} \in W$ wird also $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})} \in W$, was zu beweisen war.

[220] Man beachte hierbei, daß $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_\ell})}$ die Restklasse von $\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_\ell})$ modulo $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ bezeichnet (und nicht modulo $U_{\ell-1}(\mathfrak{g})$).

[221] Denn wir wissen: Für beliebige $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ gilt $\overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})} \in W$.

2.4. Vorbereitungen zum Beweis von 2.1: Mit Lemma 2.3. haben wir den einfacheren Teil von Satz 2.1. bewiesen. Nun kommt die eigentliche Arbeit.

1) Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis des Vektorraums $\mathfrak{g}$. Nach 2.3. **4)** ist

$$\{\sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})...\sigma(x_{i_n}) \mid n \geq 0 \text{ und } i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n \text{ in } I\}$$

ein Vektorraumerzeugendensystem von $U(\mathfrak{g})$. Wir müssen nur noch zeigen, daß dieses System linear unabhängig ist.

2) Wir vereinbaren erstmal einige Notationen, die mit geordneten Tupeln von Elementen von I zu tun haben:

Sei $\mathfrak{M} = \{(i_1, i_2, ..., i_n) \mid n \geq 0 \text{ und } i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n \text{ in } I\}$. (Mit anderen Worten: Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller monoton steigenden endlichen Folgen von Elementen von I. Hierbei setzen wir den Begriff "Folge der Länge n" mit dem Begriff "n-Tupel" gleich.)

Für jedes $i \in I$ und jedes n-Tupel $M = (i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathfrak{M}$ sei ein $(n+1)$-Tupel $i\sharp M \in \mathfrak{M}$ definiert als

$$\begin{cases} (i, i_1, i_2, ..., i_n), & \text{falls } i \leq i_1; \\ (i_1, i_2, ..., i_l, i, i_{l+1}, i_{l+2}, ..., i_n), & \text{falls } i_l < i \leq i_{l+1} \text{ für ein } l \in \{1, 2, ..., n-1\}; \\ (i_1, i_2, ..., i_n, i), & \text{falls } i_n < i \end{cases}.$$

[222]

Wir schreiben $i \leq M$ genau dann, wenn $i \leq i_1$ oder $M = \varnothing$ ist. Hierbei bezeichnen wir mit $\varnothing$ das leere Tupel.

Falls $i \leq M$ ist, schreiben wir auch iM für das $(n+1)$-Tupel $i\sharp M = (i, i_1, i_2, ..., i_n)$.

Für jedes $M = (i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Zahl n mit $|M|$. (Mit anderen Worten: Wir bezeichnen mit $|M|$ die Länge der Folge M.)

Für jedes $M = (i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathfrak{M}$ sei $\sigma(M) = \sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})...\sigma(x_{i_n}) \in U(\mathfrak{g})$. Dann ist die Familie

$$(\sigma(M))_{M\in\mathfrak{M}} = (\sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})...\sigma(x_{i_n}))_{n\geq 0,\ i_1\leq i_2\leq ...\leq i_n \text{ in } I}$$

ein Erzeugendensystem des Vektorraums $U(\mathfrak{g})$ (wie wir bereits wissen).

3) Unser Ziel ist es nun, zu beweisen, daß diese Familie $(\sigma(M))_{M\in\mathfrak{M}}$ linear unabhängig ist. Bevor wir mit diesem Beweis anfangen, **wollen wir** der Motivation halber **annehmen, daß wir dies bereits gezeigt haben**, und uns ansehen, was daraus folgt:

Wir wissen, daß $(\sigma(M))_{M\in\mathfrak{M}}$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $U(\mathfrak{g})$ ist, und wir haben zusätzlich angenommen, daß wir auch wissen, daß es linear unabhängig ist. Somit ist $(\sigma(M))_{M\in\mathfrak{M}}$ eine Basis des Vektorraums $U(\mathfrak{g})$. Wenn wir nun den Vektorraum $U(\mathfrak{g})$ mit V bezeichnen, ferner den Untervektorraum $U_n(\mathfrak{g})$ mit V_n für alle $n \geq 0$, und schließlich $\sigma(M)$ mit v_M für alle $M \in \mathfrak{M}$, dann ist $V = U(\mathfrak{g})$ ein $\mathfrak{g}$-Modul mit Basis $(v_M = \sigma(M))_{M\in\mathfrak{M}}$, wobei die Wirkung von $\mathfrak{g}$ auf V durch

$$\mathfrak{g} \times V \to V, \qquad (x, v_M) \mapsto xv_M = \sigma(x)\sigma(M)$$

gegeben wird. Diese Wirkung erfüllt folgende Eigenschaften:

[222] Anschaulich gesprochen ist $i\sharp M$ einfach definiert als das $(n+1)$-Tupel, wenn man das Element i an der richtigen Stelle ins n-Tupel M einfügt (so, daß die Monotonie erhalten bleibt).

(1) Für alle $i \in I$ und $M \in \mathfrak{M}$ mit $i \leq M$ ist $x_i v_M = v_{iM}$ (also insbesondere $x_i v_\varnothing = v_{(i)}$, wobei (i) das 1-Tupel mit dem einzigen Eintrag i ist).

(2) Für alle $i, j \in I$ und $N \in \mathfrak{M}$ mit $j < i$ und $j \leq N$ gilt $x_i v_{jN} = x_j (x_i v_N) + [x_i, x_j] v_N$.[223]

(3) Für alle $i \in I$ und alle $M \in \mathfrak{M}$ gilt: $x_i v_M \equiv v_{i \sharp M} \mod V_{|M|}$. Dabei ist V_n der Untervektorraum von V, der erzeugt ist von allen v_P mit $P \in \mathfrak{M}$ und $|P| \leq n$ (d. h. von allen $v_{(i_1, i_2, ..., i_k)}$ mit $0 \leq k \leq n$ und $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k$ in I).

Beweis: Die Eigenschaften **(1)** und **(2)** sind klar für $V = U(\mathfrak{g})$, und **(3)** folgt aus 2.3. **2)** und **4)**.

4) Wir vergessen jetzt wieder die Annahme, daß wir die lineare Unabhängigkeit der Familie $(\sigma(M))_{M \in \mathfrak{M}}$ bereits gezeigt hätten. Stattdessen nehmen wir an, wir haben irgendeinen $\mathfrak{g}$-Modul V mit einer Basis $(v_M)_{M \in \mathfrak{M}}$ gefunden, die die Eigenschaften (1), (2) und (3) erfüllt. Dabei muß V diesmal nicht mehr notwendigerweise $U(\mathfrak{g})$ sein, und dementsprechend müssen auch die v_M nicht mehr unbedingt durch $v_M = \sigma(M)$ definiert sein. Wir können nun unter dieser Annahme Satz 2.1 schnell herleiten, und zwar wie folgt:

Da V ein $\mathfrak{g}$-Modul ist, wird V kanonisch zu einem $U(\mathfrak{g})$-Modul. Seien nun $\alpha_M \in k$ für alle $M \in \mathfrak{M}$ so gegeben, daß $\sum\limits_{M \in \mathfrak{M}} \alpha_M \sigma(M) = 0$ in $U(\mathfrak{g})$ ist (und $\alpha_M \neq 0$ nur für endlich viele M's gilt). Dann ist

$$0 = \sum_{M \in \mathfrak{M}} \alpha_M \sigma(M) v_\varnothing = \sum_{M \in \mathfrak{M}} \alpha_M v_M$$

(denn $\sigma(M) v_\varnothing = v_M$, denn für $M = (i_1, i_2, ..., i_n)$ ist

$$\begin{aligned} \sigma(M) v_\varnothing &= \sigma(x_{i_1}) \sigma(x_{i_2}) ... \sigma(x_{i_n}) v_\varnothing = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_n} v_\varnothing \\ &= v_{i_1(i_2(...(i_n \varnothing)))} \qquad \text{(nach mehrfacher Anwendung von } \mathbf{(1)}) \\ &= v_{(i_1, i_2, ..., i_n)} \end{aligned}$$

), also $\alpha_M = 0$ für alle $M \in \mathfrak{M}$ (denn $(v_M)_{M \in \mathfrak{M}}$ ist eine Basis von V). Somit ist die Familie $(\sigma(M))_{M \in \mathfrak{M}}$ linear unabhängig. Mit anderen Worten: Die Multimenge $\{\sigma(x_{i_1}) \sigma(x_{i_2}) ... \sigma(x_{i_n}) \mid n \geq 0 \text{ und } i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n \text{ in } I\}$ ist linear unabhängig[224]. Da nach 2.3. **4)** diese Multimenge den Vektorraum $U(\mathfrak{g})$ erzeugt, ist sie also eine Basis von $U(\mathfrak{g})$, und Satz 2.1. ist bewiesen.[225]

Damit haben wir Satz 2.1 nachgewiesen unter der Annahme, daß wir einen $\mathfrak{g}$-Modul V mit einer Basis $(v_M)_{M \in \mathfrak{M}}$ kennen, die die Eigenschaften **(1)**, **(2)** und **(3)** erfüllt. Zum endgültigen Beweis von Satz 2.1 müssen wir also nur noch einen $\mathfrak{g}$-Modul V mit einer Basis $(v_M)_{M \in \mathfrak{M}}$ mit den Eigenschaften **(1)**, **(2)** und **(3)** finden.

[223] Die Bedingungen $j < i$ und $j \leq N$ sind sogar unnötig, d. h. es gilt stärker: Für alle $i, j \in I$ und $N \in \mathfrak{M}$ ist $[x_i, x_j] v_N = x_i (x_j v_N) - x_j (x_i v_N)$ (dies folgt trivialerweise aus der Tatsache, daß $U(\mathfrak{g})$ ein $\mathfrak{g}$-Modul ist).

Aber wir werden diese stärkere Eigenschaft nie gebrauchen.

[224] denn die Familie $(\sigma(M))_{M \in \mathfrak{M}}$ ist nichts anderes als die Multimenge

$$\{\sigma(x_{i_1}) \sigma(x_{i_2}) ... \sigma(x_{i_n}) \mid n \geq 0 \text{ und } i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n \text{ in } I\}$$

[225] Wir haben hierbei nur Eigenschaft **(1)** für den $\mathfrak{g}$-Modul V verwendet, und nicht die Eigenschaften **(2)** und **(3)**.

Beweis von Satz 2.1.: Sei V der freie k-Modul mit Basis $(v_M)_{M\in\mathfrak{M}}$ (wobei diese v_M nicht, wie in Bemerkung 2.4. **3)**, die $\sigma(M)$ sind, sondern erstmal nur irgendwelche abstrakten Objekte!). Wie vorhin gesagt, genügt es zum Beweis von Satz 2.1., die Existenz einer $\mathfrak{g}$-Modulstruktur auf diesem Vektorraum V mit den Eigenschaften **(1)**, **(2)** und **(3)** zu zeigen. So eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur konstruieren wir im folgenden Lemma[226]:

2.5. Lemma: Es gibt eine k-bilineare Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \times V \to V$, geschrieben $(x, v) \mapsto xv$, so, daß gilt:

(1) Für alle $i \in I$ und $M \in \mathfrak{M}$ mit $i \leq M$ ist $x_i v_M = v_{iM}$ (also insbesondere $x_i v_\varnothing = v_{(i)}$, wobei (i) das 1-Tupel mit dem einzigen Eintrag i ist).

(2) Für alle $i, j \in I$ und $N \in \mathfrak{M}$ mit $j < i$ und $j \leq N$ gilt $x_i v_{jN} = x_j (x_i v_N) + [x_i, x_j] v_N$.

(3) Für alle $i \in I$ und alle $M \in \mathfrak{M}$ gilt: $x_i v_M \equiv v_{i\sharp M} \mod V_{|M|}$. Hierbei bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit V_n den Untervektorraum von V, der erzeugt ist von allen v_P mit $P \in \mathfrak{M}$ und $|P| \leq n$.

Beweis: Wir werden induktiv k-bilineare Abbildungen $\mu_n : \mathfrak{g} \times V_n \to V_{n+1}$ für alle $n \geq 0$ konstruieren - mit dem Ziel, am Ende aus ihnen eine k-bilineare Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \times V \to V$ zusammenzusetzen, welche dann die gewünschte $\mathfrak{g}$-Modulstruktur auf dem Vektorraum V sein wird.

Die Konstruktion der k-bilineare Abbildungen $\mu_n : \mathfrak{g} \times V_n \to V_{n+1}$ verläuft durch Induktion nach n folgendermaßen[227]:

Induktionsanfang: Erstmal sei eine k-bilineare Abbildung $\mu_0 : \mathfrak{g} \times V_0 \to V_1$ definiert durch $x_i v_\varnothing = v_{(i)}$. Dann gelten die Eigenschaften **(1)** und **(3)** für alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| = 0$. (Die Eigenschaft **(2)** ist bislang noch inhaltsleer, da wir μ_n nur für $n = 0$ definiert haben.)

Induktionsschritt: Angenommen, wir haben bereits eine k-bilineare Abbildung $\mu_{n-1} : \mathfrak{g} \times V_{n-1} \to V_n$ definiert, welche die Eigenschaften **(1)** und **(3)** für alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| \leq n-1$ erfüllt und die Eigenschaft **(2)** für alle $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| \leq n-2$ erfüllt.

Wir wollen nun diese Abbildung $\mu_{n-1} : \mathfrak{g} \times V_{n-1} \to V_n$ zu einer k-bilinearen Abbildung $\mu_n : \mathfrak{g} \times V_n \to V_{n+1}$ fortsetzen. Da der Vektorraum $\mathfrak{g}$ die Basis $(x_i)_{i\in I}$ hat und der Vektorraum V_n die Basis $(v_M)_{M\in\mathfrak{M},\ |M|\leq n}$ hat, müssen wir dazu die Werte von $x_i v_M$ (dies ist, wie gesagt, eine Kurzschreibweise für $\mu_n(x_i, v_M)$) für alle $i \in I$ und alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| \leq n$ festlegen. Doch bei den $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| < n$ haben wir keine Wahl (denn die zu definierende Abbildung $\mu_n : \mathfrak{g} \times V_n \to V_{n+1}$ soll ja nicht willkürlich sein, sondern die bereits festgelegte Abbildung $\mu_{n-1} : \mathfrak{g} \times V_{n-1} \to V_n$ fortsetzen). Wir müssen also nur noch die Werte von $x_i v_M$ für alle $i \in I$ und alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| = n$ festlegen. Dies tun wir folgendermaßen:

Sei $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| = n$ gegeben, und sei $i \in I$.

1. Fall: Es gilt $i \leq M$. Dann definiere $x_i v_M = v_{iM}$.

2. Fall: Es gilt *nicht* $i \leq M$. Dann ist $M = jN$ für ein gewisses $j \in I$ mit $j < i$, und ein gewisses $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| \leq n-1$ und $j \leq N$.

Wir müssen $x_i v_M$ definieren, und wir wollen es so machen, daß $x_i v_M = x_i (x_j v_N) = x_j (x_i v_N) + [x_i, x_j] v_N$ gilt (damit Eigenschaft **(2)** erfüllt ist!). Da laut Induktionsvoraussetzung die Eigenschaft **(3)** für alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| \leq n-1$ erfüllt ist, gibt es ein

[226] In Lemma 2.5. werden wir sie konstruieren, aber erst in Lemma 2.6. werden wir zeigen, daß sie auch wirklich eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur ist.

[227] Wir werden bei dieser Konstruktion jedesmal, wenn wir eine Abbildung $\mu_n : \mathfrak{g} \times V_n \to V_{n+1}$ einführen, die Kurzschreibweise xv für $\mu_n(x, v)$ verwenden (wobei $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V_n$ ist).

$w \in V_{n-1}$ mit $x_i v_N = v_{i\sharp N} + w$ (denn laut Eigenschaft **(3)**, angewandt auf N statt M, ist $x_i v_N \equiv v_{i\sharp N} \mod V_{n-1}$). Also sollte gelten: $x_j (x_i v_N) = x_j v_{i\sharp N} + x_j w = v_{j(i\sharp N)} + x_j w$ (dabei muß $x_j v_{i\sharp N} = v_{j(i\sharp N)}$ gelten, um **(1)** zu befriedigen).

Definiere also $x_i v_M$ als $x_i v_M = v_{j(i\sharp N)} + x_j w + [x_i, x_j] v_N$.

Dann gelten die Eigenschaften **(1)** und **(3)** für alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| \leq n$, und Eigenschaft **(2)** für alle $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| \leq n-1$. [228]

Damit haben wir induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine k-bilineare Abbildung $\mu_n : \mathfrak{g} \times V_n \to V_{n+1}$ definiert, und gleichzeitig - in derselben Induktion - die Eigenschaften **(1)**, **(2)** und **(3)** für diese Abbildungen bewiesen.

Die auf diese Weise rekursiv definierten Abbildungen $\mu_n : \mathfrak{g} \times V_n \to V_{n+1}$ setzen einander fort; sie ergeben also zusammen eine k-bilineare Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \times V \to V$. Damit ist Lemma 2.5. gezeigt.

2.6. Lemma: Sei die Abbildung μ wie in Lemma 2.5. definiert. Dann gilt

$$[x_i, x_j] v_N = x_i (x_j v_N) - x_j (x_i v_N) \qquad \text{für alle } i, j \in I \text{ und } N \in \mathfrak{M}.$$

Beweis: Wir führen eine Induktion nach $|N|$:

Induktionsanfang: Für $|N| = 0$ müssen wir nur zeigen, daß für alle $i, j \in I$ gilt:

$$[x_i, x_j] v_\varnothing = x_i \left(\underbrace{x_j v_\varnothing}_{=v_j} \right) - x_j \left(\underbrace{x_i v_\varnothing}_{=v_i} \right).$$

[228] *Beweis:* Daß die Eigenschaft **(1)** für alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| \leq n$ gilt, ist klar (denn im Falle von $|M| < n$ wissen wir dies bereits aus der Induktionsannahme, und im Falle von $|M| = n$ folgt dies aus unserer Definition von $x_i v_M$ im 1. Fall).

Jetzt werden wir zeigen, daß die Eigenschaft **(2)** für alle $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| \leq n-1$ gilt. Im Falle von $|N| < n-1$ folgt dies aus der Induktionsannahme; betrachten wir also fortan den Fall von $|N| = n-1$. In diesem Fall setzen wir $M = jN$. Laut der Definition von $x_i v_M$ ist dann $x_i v_M = v_{j(i\sharp N)} + x_j w + [x_i, x_j] v_N$, wobei $w \in V_{n-1}$ so gewählt ist, daß $x_i v_N = v_{i\sharp N} + w$ gilt. Nun ist

$$x_j v_{i\sharp N} = v_{j(i\sharp N)} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{dies folgt aus der Definition von } \mu_n \text{ (denn } j < i \text{ und somit } j \leq i\sharp N; \\ \text{das heißt, wir sind im 1. Fall der Definition)} \end{array} \right),$$

also

$$\begin{aligned} x_j \underbrace{(x_i v_N)}_{=v_{i\sharp N}+w} + [x_i, x_j] v_N &= x_j (v_{i\sharp N} + w) + [x_i, x_j] v_N = \underbrace{x_j v_{i\sharp N}}_{=v_{j(i\sharp N)}} + x_j w + [x_i, x_j] v_N = v_{j(i\sharp N)} + x_j w + [x_i, x_j] v_N \\ &= v_{j(i\sharp N)} + x_j w, \end{aligned}$$

und damit ist Eigenschaft **(2)** für alle $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| \leq n-1$ nachgewiesen.

Nun bleibt es noch, Eigenschaft **(3)** für alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| \leq n$ zu beweisen. Für den Fall $|M| < n$ ist dies wieder aus der Induktionsannahme klar; beschränken wir uns also nur noch auf den Fall $|M| = n$. In diesem Fall können wir o. B. d. A. annehmen, daß *nicht* $i \leq M$ gilt (denn wenn $i \leq M$ gilt, dann ist $x_i v_M$ als v_{iM} definiert, und somit $x_i v_M = v_{iM} = v_{i\sharp M}$, und Eigenschaft **(3)** gilt trivialerweise). Wenn wir dies annehmen, dann ist $x_i v_M$ definiert durch $x_i v_M = v_{j(i\sharp N)} + x_j w + [x_i, x_j] v_N$, wobei $M = jN$ für ein gewisses $j \in I$ mit $j < i$ und ein $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| \leq n-1$ und $j \leq N$ gilt, und wobei $w \in V_{n-1}$ so gewählt ist, daß $x_i v_N = v_{i\sharp N} + w$ gilt. Folglich ist $x_i v_M \equiv v_{j(i\sharp N)} \mod V_{|M|}$ (denn $x_j w$ und $[x_i, x_j] v_N$ liegen beide in $V_n = V_{|M|}$). Wegen $j(i\sharp N) = i\sharp \underbrace{(jN)}_{=M} = i\sharp M$ wird dies zu $x_i v_M \equiv v_{i\sharp M} \mod V_{|M|}$. Somit ist auch Eigenschaft **(3)** für alle $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| \leq n$ bewiesen.

Dies ist aber richtig nach **(1)** und **(2)** von 2.5. (genauer gesagt, folgt es aus **(1)** und **(2)** von 2.5. für $j < i$; im Falle von $j > i$ muss man i und j vertauschen, da $[x_j, x_i] = -[x_i, x_j]$ gilt, und im Falle von $i = j$ ist die Aussage sowieso trivial).

Induktionsschritt: Sei $n > 0$. Angenommen, Lemma 2.6 sei für alle $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| < n$ bereits bewiesen. Wir müssen dann zeigen, daß Lemma 2.6 auch für alle $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| = n$ gilt.

Zuerst wollen wir die Induktionsannahme auf eine bequemere Form bringen. Und zwar folgt aus der Induktionsannahme schnell (mithilfe von Linearität), daß

$$[x, y]\, v = x\,(yv) - y\,(xv) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{g} \text{ und } v \in V_{n-1} \tag{2.6.1}$$

gilt.[229]

Jetzt wollen wir die Induktionsbehauptung bewiesen, also beweisen, daß Lemma 2.6 auch für alle $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| = n$ gilt. In der Tat sei $N \in \mathfrak{M}$ mit $|N| = n$ beliebig, und seien $i, j \in I$ willkürlich gewählt. Wir müssen dann nachweisen, daß

$$[x_i, x_j]\, v_N = x_i\,(x_j v_N) - x_j\,(x_i v_N)$$

ist.

Wir unterscheiden drei Fälle:

[229]*Beweis:* Der Vektorraum V_{n-1} ist (laut seiner Definition) erzeugt von allen v_P mit $P \in \mathfrak{M}$ und $|P| \leq n-1$. Wegen $v \in V_{n-1}$ ist also $v = \sum\limits_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \alpha_P v_P$ für irgendwelche Skalare α_P. Da $(x_i)_{i \in I}$ eine Basis des Vektorraums $\mathfrak{g}$ ist, ist $x = \sum\limits_{i \in I} \beta_i x_i$ für irgendwelche Skalare β_i, und $y = \sum\limits_{j \in I} \gamma_j x_j$ für irgendwelche Skalare γ_j. Für jedes $P \in \mathfrak{M}$ mit $|P| \leq n-1$ gilt aber

$$[x_i, x_j]\, v_P = x_i\,(x_j v_P) - x_j\,(x_i v_P)$$

(nach Lemma 2.6, angewandt auf P statt N, denn laut Induktionsvoraussetzung ist Lemma 2.6 für alle N mit $|N| < n$ bereits bewiesen). Wegen $x = \sum\limits_{i \in I} \beta_i x_i$, $y = \sum\limits_{j \in I} \gamma_j x_j$ und $v = \sum\limits_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \alpha_P v_P$ ist nun

$$\begin{aligned}
[x, y]\, v &= \left[\sum_{i \in I} \beta_i x_i, \sum_{j \in I} \gamma_j x_j\right] \left(\sum_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \alpha_P v_P\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \beta_i \gamma_j \alpha_P \underbrace{[x_i, x_j]\, v_P}_{= x_i (x_j v_P) - x_j (x_i v_P)} \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \beta_i \gamma_j \alpha_P \left(x_i\,(x_j v_P) - x_j\,(x_i v_P)\right) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \beta_i \gamma_j \alpha_P x_i\,(x_j v_P) - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \beta_i \gamma_j \alpha_P x_j\,(x_i v_P) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i \in I} \beta_i x_i\right)}_{=x} \left(\underbrace{\left(\sum_{j \in I} \gamma_j x_j\right)}_{=y} \underbrace{\left(\sum_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \alpha_P v_P\right)}_{=v}\right) - \underbrace{\left(\sum_{j \in I} \gamma_j x_j\right)}_{=y} \left(\underbrace{\left(\sum_{i \in I} \beta_i x_i\right)}_{=x} \underbrace{\left(\sum_{\substack{P \in \mathfrak{M},\\ |P| \leq n-1}} \alpha_P v_P\right)}_{=v}\right) \\
&= x\,(yv) - y\,(xv),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

1. Fall: Es gilt $j \leq N$.

In diesem Fall sind drei Unterfälle möglich: die Fälle $j < i$, $j = i$ und $j > i$.

Falls $j < i$, dann gilt

$$\begin{aligned}
[x_i, x_j]\, v_N &= x_i v_{jN} - x_j\, (x_i v_N) \qquad \text{(nach 2.5. } \mathbf{(2)}\text{)} \\
&= x_i\, (x_j v_N) - x_j\, (x_i v_N) \\
&\qquad \text{(denn } v_{jN} = x_j v_N \text{ nach 2.5. } \mathbf{(1)} \text{ (angewandt auf } j \text{ und } N \text{ statt } i \text{ und } M)) .
\end{aligned}$$

Falls $j = i$, dann ist die Behauptung trivial.

Falls $j > i$, vertausche i und j und führe damit (wegen $[x_j, x_i] = -[x_i, x_j]$) die Behauptung auf den Fall $j < i$ zurück (aus $j \leq N$ und $j > i$ folgt sicherlich $i \leq N$).

Insgesamt haben wir damit im 1. Fall gezeigt, daß $[x_i, x_j]\, v_N = x_i\, (x_j v_N) - x_j\, (x_i v_N)$ gilt.

2. Fall: Es gilt $i \leq N$.

Dieser Fall folgt genau so wie der 1. Fall.

3. Fall: Es gilt weder $i \leq N$, noch $j \leq N$.

Sei $N = kL$ für ein $L \in \mathfrak{M}$ mit $|L| = n - 1$ und ein $k \in I$ mit $k \leq L$. Dann ist $k < i$ und $k < j$ (denn sonst wäre $i \leq N$ oder $j \leq N$). Ferner ist $v_L \in V_{n-1}$ (denn $|L| = n - 1$), und nach 2.5. **(1)** gilt $v_{kL} = x_k v_L$, also $v_N = v_{kL} = x_k v_L$. Berechne nun $x_i\, (x_j v_N) = x_i\, (x_j\, (x_k v_L))$: Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned}
[x_j, x_k]\, v_L &= x_j\, (x_k v_L) - x_k\, (x_j v_L) \qquad \text{(denn } |L| = n - 1 < n) , \qquad \text{also} \\
x_j\, (x_k v_L) &= x_k\, (x_j v_L) + [x_j, x_k]\, v_L, \qquad \text{also} \\
x_i\, (x_j\, (x_k v_L)) &= x_i\, (x_k\, (x_j v_L)) + x_i\, ([x_j, x_k]\, v_L) .
\end{aligned}$$

Nun ist aber $x_j v_L \equiv v_{j\sharp L} \bmod V_{n-1}$ (nach 2.5. **(3)**), also $x_j v_L = v_{j\sharp L} + w$ für ein $w \in V_{n-1}$. Wegen $k \leq j\sharp L$ (da $k < j$ und $k \leq L$) gilt Lemma 2.6 für x_i, x_k und $v_{j\sharp L}$ statt x_i, x_j und v_N (denn damit ist man im 1. Fall, und im 1. Fall haben wir Lemma 2.6 bereits bewiesen); das heißt:

$$[x_i, x_k]\, v_{j\sharp L} = x_i\, (x_k v_{j\sharp L}) - x_k\, (x_i v_{j\sharp L}) .$$

Andererseits ist

$$[x_i, x_k]\, w = x_i\, (x_k w) - x_k\, (x_i w)$$

(nach (2.6.1), angewandt auf $x = x_i$, $y = x_k$ und $v = w$). Damit ist

$$\begin{aligned}
[x_i, x_k] \left(\underbrace{x_j v_L}_{= v_{j\sharp L} + w} \right) &= \underbrace{[x_i, x_k]\, v_{j\sharp L}}_{= x_i \left(x_k v_{j\sharp L} \right) - x_k \left(x_i v_{j\sharp L} \right)} + \underbrace{[x_i, x_k]\, w}_{= x_i (x_k w) - x_k (x_i w)} \\
&= \left(x_i\, (x_k v_{j\sharp L}) - x_k\, (x_i v_{j\sharp L}) \right) + \left(x_i\, (x_k w) - x_k\, (x_i w) \right) \\
&= x_i \left(x_k\, \underbrace{(v_{j\sharp L} + w)}_{= x_j v_L} \right) - x_k \left(x_i\, \underbrace{(v_{j\sharp L} + w)}_{= x_j v_L} \right) = x_i\, (x_k\, (x_j v_L)) - x_k\, (x_i\, (x_j v_L)) ,
\end{aligned}$$

also

$$x_i\, (x_k\, (x_j v_L)) = x_k\, (x_i\, (x_j v_L)) + [x_i, x_k]\, (x_j v_L) .$$

Daher ist

$$\begin{aligned} x_i\left(x_j v_N\right) &= x_i\left(x_j\left(x_k v_L\right)\right) = x_i\left(x_k\left(x_j v_L\right)\right) + x_i\left(\left[x_j, x_k\right] v_L\right) \\ &= x_k\left(x_i\left(x_j v_L\right)\right) + \left[x_i, x_k\right]\left(x_j v_L\right) + x_i\left(\left[x_j, x_k\right] v_L\right) \\ &= x_k\left(x_i\left(x_j v_L\right)\right) + \left[x_i, x_k\right]\left(x_j v_L\right) + \left[x_j, x_k\right]\left(x_i v_L\right) + \left[x_i, \left[x_j, x_k\right]\right] v_L, \end{aligned}$$

denn $x_i\left(\left[x_j, x_k\right] v_L\right) = \left[x_j, x_k\right]\left(x_i v_L\right) + \left[x_i, \left[x_j, x_k\right]\right] v_L$ (nach (2.6.1), angewandt auf $x = x_i$, $y = \left[x_j, x_k\right]$ und $v = v_L$, denn $v_L \in V_{n-1}$). Ebenso gilt nach Vertauschung von i und j die Formel

$$x_j\left(x_i v_N\right) = x_k\left(x_j\left(x_i v_L\right)\right) + \left[x_j, x_k\right]\left(x_i v_L\right) + \left[x_i, x_k\right]\left(x_j v_L\right) + \left[x_j, \left[x_i, x_k\right]\right] v_L.$$

Subtraktion dieser beiden Formeln ergibt (nach Kürzen von vier Summanden und Ausklammern)

$$\begin{aligned} x_i\left(x_j v_N\right) - x_j\left(x_i v_N\right) &= x_k\left(x_i\left(x_j v_L\right) - x_j\left(x_i v_L\right)\right) + \left(\underbrace{\left[x_i, \left[x_j, x_k\right]\right] - \left[x_j, \left[x_i, x_k\right]\right]}_{\substack{= -\left[x_k, \left[x_i, x_j\right]\right] \text{ nach der} \\ \text{Jacobi-Identität}}}\right) v_L \\ &= x_k\left(x_i\left(x_j v_L\right) - x_j\left(x_i v_L\right)\right) - \left[x_k, \left[x_i, x_j\right]\right] v_L. \end{aligned}$$

Nach (2.6.1) (angewandt auf $x = x_i$, $y = x_j$ und $v = v_L$) ist aber $x_i\left(x_j v_L\right) - x_j\left(x_i v_L\right) = \left[x_i, x_j\right] v_L$. Also wird dies zu

$$x_i\left(x_j v_N\right) - x_j\left(x_i v_N\right) = x_k\left(\left[x_i, x_j\right] v_L\right) - \left[x_k, \left[x_i, x_j\right]\right] v_L.$$

Doch nach (2.6.1) (angewandt auf $x = x_k$, $y = \left[x_i, x_j\right]$ und $v = v_L$) ist

$$\left[x_k, \left[x_i, x_j\right]\right] v_L = x_k\left(\left[x_i, x_j\right] v_L\right) - \left[x_i, x_j\right]\left(x_k v_L\right).$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} x_i\left(x_j v_N\right) - x_j\left(x_i v_N\right) &= x_k\left(\left[x_i, x_j\right] v_L\right) - \underbrace{\left[x_k, \left[x_i, x_j\right]\right] v_L}_{= x_k\left(\left[x_i, x_j\right] v_L\right) - \left[x_i, x_j\right]\left(x_k v_L\right)} \\ &= \left[x_i, x_j\right]\left(\underbrace{x_k v_L}_{= v_N}\right) = \left[x_i, x_j\right] v_N, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Damit ist die Behauptung von Lemma 2.6 in allen drei Fällen gezeigt. Der Induktionsschritt ist damit vollständig, und der Beweis von Lemma 2.6 vollendet.

Gemäß Lemma 2.6. ist also $\mu : \mathfrak{g} \times V \to V$ eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur auf V. Da diese Struktur (gemäß Lemma 2.5.) die Eigenschaften **(1)**, **(2)** und **(3)** erfüllt, haben wir also die gewünschte $\mathfrak{g}$-Modulstruktur auf V gefunden, und der Beweis von Satz 2.1. ist damit fertig (gemäß Vorbereitung 2.4. **4)**).

2.7. Folgerung: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra mit Basis $\left(x_i\right)_{i \in I}$. Sei $(I, \leq)$ total geordnet. Wir verwenden die Notationen von 2.1..

1) Die lineare Abbildung $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ ist injektiv.

2) Die lineare Abbildung

$$\underbrace{k\left[T_i \mid i \in I\right]}_{\text{Polynomalgebra}} \to \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}), \qquad T_i \mapsto \overline{\sigma(x_i)} \in U_1(\mathfrak{g}) \diagup U_0(\mathfrak{g})$$

ist ein Algebraisomorphismus.

Hinweis: Wegen 2.7. **1)** werden wir ab jetzt die lineare Abbildung $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ als Inklusion ansehen. Das heißt, für jedes $x \in \mathfrak{g}$ schreiben wir einfach x statt $\sigma(x)$.

Beweis: **1)** Dies ist klar, da $\{\sigma(x_i) \mid i \in I\}$ Teilmenge der (in 2.1. eingeführten) Basis

$$\{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n}) \;\mid\; n \geq 0,\; i_1, i_2, ..., i_n \in I,\; i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_n\}$$

von $U(\mathfrak{g})$ ist.

2) Für alle $n \geq 0$ ist die Abbildung

$$\{F \in k\left[T_i \mid i \in I\right] \;\mid\; F \text{ homogen mit } \deg F = n\} \to U_n(\mathfrak{g}) \diagup U_{n-1}(\mathfrak{g}),$$
$$T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_n} \mapsto \overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})}$$

ein Vektorraumisomorphismus (wegen 2.1.)[230]. Insgesamt ist die lineare Abbildung

$$\underbrace{k\left[T_i \mid i \in I\right]}_{\text{Polynomalgebra}} \to \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}), \qquad T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_n} \mapsto \overline{\sigma(x_{i_1})\,\sigma(x_{i_2})\,...\sigma(x_{i_n})}$$

also ein Vektorraumisomorphismus, und trivialerweise auch ein Algebraisomorphismus (da $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ kommutativ ist), was zu beweisen war.

Wir zeigen jetzt ein Lemma, das es uns erlaubt, gewisse Eigenschaften einer filtrierten Algebra $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ aus den entsprechenden Eigenschaften der (meistens einfacheren!) graduierten Algebra $\operatorname{gr} A$ herzuleiten. Doch erst eine Definition:

Definition: 1) Sei $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Algebra. Sei M ein A-Rechtsmodul (analog geht diese Definition für A-Linksmoduln), und sei $M_n \subseteq M$ ein Untervektorraum für jedes $n \geq 0$. Dann heißt $\left(M, (M_n)_{n\geq 0}\right)$ ein *filtrierter A-Rechtsmodul*, wenn folgende zwei Eigenschaften gelten:

a) Für alle $n, m \geq 0$ ist $M_n A_m \subseteq M_{n+m}$.

b) Es gilt $\bigcup\limits_{n\geq 0} M_n = M$.

In diesem Fall nennt man $(M_n)_{n\geq 0}$ auch eine *Filtrierung* von M.

2) Sei $\left(M, (M_n)_{n\geq 0}\right)$ ein filtrierter A-Rechtsmodul. Dann definieren wir einen graduierten $\operatorname{gr} A$-Rechtsmodul $\operatorname{gr} M$, indem wir erstmal den ihm zugrundeliegenden *Vektorraum* $\operatorname{gr} M$ durch

$$\operatorname{gr} M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n \diagup M_{n-1}$$

definieren, wobei $M_{-1} = 0$ gesetzt wird (wohlgemerkt hängt dieses $\operatorname{gr} M$ nicht nur von dem Modul M, sondern auch von der Filtrierung $(M_n)_{n\geq 0}$ ab, auch wenn wir dies bei der Notation $\operatorname{gr} M$ unterschlagen!). Die Rechtswirkung von $\operatorname{gr} A$ auf $\operatorname{gr} M$ wird definiert durch

$$(M_n \diagup M_{n-1}) \times (A_m \diagup A_{m-1}) \to (M_{n+m} \diagup M_{n+m-1}),$$
$$(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{xy} \qquad \text{(wobei } x \in M_n \text{ und } y \in A_m \text{ und daher } xy \in M_{n+m}\text{)}$$

[230] Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung folgt dabei aus 2.3. **2)**.

für alle $n, m \geq 0$ (dabei meinen wir mit $\overline{x}$ die Äquivalenzklasse des Elementes $x \in M_n$ modulo M_{n-1}, ferner meinen wir mit $\overline{y}$ die Äquivalenzklasse des Elementes $y \in A_m$ modulo A_{m-1}, und schließlich meinen wir mit $\overline{xy}$ die Äquivalenzklasse des Elementes $xy \in M_{n+m}$ modulo M_{n+m-1}). Dieser graduierte $\operatorname{gr} A$-Rechtsmodul $\operatorname{gr} M$ wird auch $\operatorname{gr}\left(M, (M_n)_{n\geq 0}\right)$ genannt (diese Schreibweise ist im Gegensatz zur Notation $\operatorname{gr} M$ auch formal korrekt, denn $\operatorname{gr}\left(M, (M_n)_{n\geq 0}\right)$ hängt nicht nur von M, sondern auch von der Filtrierung $(M_n)_{n\geq 0}$ ab).

2.8. Lemma: Sei $\left(A, (A_n)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Algebra.

1) Ist $\operatorname{gr} A$ ein rechts- bzw. linksnoetherscher Ring, dann ist auch A ein rechts- bzw. linksnoetherscher Ring.

2) Ist $\operatorname{gr} A$ ein Integritätsring, dann ist A ein Integritätsring.

Beweis: **1)** Wir beweisen nur die Aussage mit rechtsnoetherschen Ringen; die Aussage mit linksnoetherschen Ringen ergibt sich analog.

Sei $I \subseteq A$ ein Rechtsideal. Dann ist $(I \cap A_n)_{n\geq 0}$ eine Filtrierung des A-Rechtsmoduls I. Diese Filtrierung induziert den graduierten $\operatorname{gr} A$-Rechtsmodul

$$\operatorname{gr} I = \bigoplus_{n\geq 0} (I \cap A_n) \diagup (I \cap A_{n-1}).$$

Wegen $(I \cap A_n) \diagup (I \cap A_{n-1}) \cong ((I \cap A_n) + A_{n-1}) \diagup A_{n-1} \subseteq A_n \diagup A_{n-1}$ für alle $n \geq 0$ können wir also $\operatorname{gr} I$ als ein homogenes Rechtsideal in $\operatorname{gr} A$ auffassen. Da $\operatorname{gr} A$ rechtsnoethersch ist, hat dieses Rechtsideal $\operatorname{gr} I$ endlich viele Erzeugende, also auch endlich viele homogene Erzeugende[231]. Das heißt, es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $n_i \in \mathbb{N}$ sowie ein $a_i \in I \cap A_{n_i}$ für jedes $1 \leq i \leq N$ so, daß die Elemente $\overline{a_i} \in (I \cap A_{n_i}) \diagup (I \cap A_{n_i-1})$ das Ideal $\operatorname{gr} I$ erzeugen.

Durch Induktion nach n werden wir nun zeigen, daß $I \cap A_n \subseteq \sum\limits_{i=1}^{N} a_i A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: Der Induktionsanfang ($n = -1$) ist trivial. Für den Induktionsschritt (von $n-1$ auf n) sei $x \in I \cap A_n$. Wir betrachten die Äquivalenzklasse $\overline{x} \in (I \cap A_n) \diagup (I \cap A_{n-1})$. Dann ist $\overline{x} \in \operatorname{gr} I$. Somit gibt es $y_1, y_2, ..., y_N \in \operatorname{gr} A$ mit $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{N} \overline{a_i} y_i$ (da die Elemente $\overline{a_i}$ für $1 \leq i \leq N$ das Ideal $\operatorname{gr} I$ erzeugen). Wegen $\overline{x} \in (I \cap A_n) \diagup (I \cap A_{n-1}) \subseteq A_n \diagup A_{n-1}$ (genauer gesagt haben wir $(I \cap A_n) \diagup (I \cap A_{n-1})$ mit einer Teilmenge von $A_n \diagup A_{n-1}$ identifiziert) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $y_i \in A_{n-n_i} \diagup A_{n-n_i-1}$ für alle $1 \leq i \leq N$ ist[232]. Sei $y_i = \overline{b_i}$ für ein $b_i \in A_{n-n_i}$. Dann ist $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{N} \overline{a_i} y_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \overline{a_i}\,\overline{b_i} = \overline{\sum\limits_{i=1}^{N} a_i b_i}$ in $A_n \diagup A_{n-1}$, also $x - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i b_i \in A_{n-1}$. Andererseits ist

[231] Denn um homogene Erzeugende zu erhalten, nehmen wir irgendein endliches Erzeugendensystem von $\operatorname{gr} I$, und zerlegen jede Erzeugende darin in ihre homogenen Komponenten.

[232] In der Tat können wir jedes y_i durch seinen homogenen Teil im Grad $n - n_i$ ersetzen, und die Gleichung $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{N} \overline{a_i} y_i$ bleibt erfüllt (denn $\overline{x} \in A_n \diagup A_{n-1}$ hat Grad n, und $\overline{a}_i \in A_{n_i} \diagup A_{n_i-1}$ hat Grad n_i).

$x - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i b_i \in I$ (da $x \in I$ und $a_i \in I$ für alle i). Somit ist

$$x - \sum_{i=1}^{N} a_i b_i \in I \cap A_{n-1} \subseteq \sum_{i=1}^{N} a_i A \qquad \text{(nach Induktionsannahme)},$$

also $x \in \sum\limits_{i=1}^{N} a_i A$. Damit ist der Induktionsschritt komplett.

Wir haben also gezeigt, daß $I \cap A_n \subseteq \sum\limits_{i=1}^{N} a_i A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist $I = I \cap A = I \cap \left(\bigcup\limits_{n \geq 0} A_n \right) = \bigcup\limits_{n \geq 0} (I \cap A_n) \subseteq \sum\limits_{i=1}^{N} a_i A$, also $I = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i A$ (da $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i A \subseteq I$), und somit ist das Rechtsideal I endlich erzeugt. Der Ring A ist also rechtsnoethersch, was zu beweisen war.

2) Seien $0 \neq x, y \in A$. Dann gibt es ein $n \geq 0$ mit $x \in A_n$ und $x \notin A_{n-1}$, und ein $m \geq 0$ mit $y \in A_m$ und $y \notin A_{m-1}$. Daher ist $0 \neq \overline{x}, \overline{y}$ in $\operatorname{gr} A$; genauer gesagt, ist $0 \neq \overline{x} \in A_n \diagup A_{n-1}$ und $0 \neq \overline{y} \in A_m \diagup A_{m-1}$. Also ist auch $\overline{xy} \neq 0$, da $\operatorname{gr} A$ ein Integritätsring ist. Somit ist auch $xy \neq 0$. Folglich ist A ein Integritätsring.

Definition: 1) Sei C eine Coalgebra, und sei $(C_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen von C.

Dann nennen wir $\left(C, (C_n)_{n \geq 0}\right)$ (oder auch kurz C, wenn die Familie $(C_n)_{n \geq 0}$ aus dem Kontext heraus klar ist) eine *filtrierte Coalgebra*, wenn folgende drei Eigenschaften gelten:

a) Es gilt $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq ....$

b) Es gilt $\bigcup\limits_{n \geq 0} C_n = C$.

c) Für alle $n \geq 0$ und $x \in C_n$ ist $\Delta(x) \in \sum\limits_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$.

2) Sei C eine Coalgebra, und sei $(C_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen von C.

Diese Familie $(C_n)_{n \geq 0}$ heißt eine *Coalgebrafiltrierung* der Coalgebra C, wenn $\left(C, (C_n)_{n \geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra ist.

3) Sei H eine Bialgebra, und sei $(H_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen von H.

Dann heißt $\left(H, (H_n)_{n \geq 0}\right)$ eine *filtrierte Bialgebra*, wenn $\left(H, (H_n)_{n \geq 0}\right)$ eine filtrierte Algebra und eine filtrierte Coalgebra ist.

4) Sei H eine Hopfalgebra, und sei $(H_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen von H.

Dann heißt $\left(H, (H_n)_{n \geq 0}\right)$ eine *filtrierte Hopfalgebra*, wenn $\left(H, (H_n)_{n \geq 0}\right)$ eine filtrierte Bialgebra ist und $S(H_n) \subseteq H_n$ für alle $n \geq 0$ ist.

Bemerkung: Ist $\left(C, (C_n)_{n \geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra, so ist C_n eine Untercoalgebra von C für jedes $n \geq 0$ [233].

2.9. Folgerung: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1) Dann ist $\left(U\left(\mathfrak{g}\right), \left(U_n\left(\mathfrak{g}\right)\right)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Hopfalgebra.

2) Die Algebra $U\left(\mathfrak{g}\right)$ ist ein Integritätsring.

3) Ist $\dim \mathfrak{g} < \infty$, so ist $U\left(\mathfrak{g}\right)$ ein links- und rechtsnoetherscher Integritätsring.

Beweis: **2)** Dies folgt aus Lemma 2.8. **2)**, denn (nach 2.3. **1)** und 2.1.) ist $\operatorname{gr}\left(U\left(\mathfrak{g}\right)\right)$ eine Polynomalgebra über k, also ein Integritätsring.

3) Nach 2.3. **1)** und 2.1. ist $\operatorname{gr}\left(U\left(\mathfrak{g}\right)\right)$ eine Polynomalgebra über k in endlich vielen Variablen (nämlich in $\dim \mathfrak{g}$ Variablen), also ein links- und rechtsnoetherscher Ring. Nach Lemma 2.8. **1)** ist also auch $U\left(\mathfrak{g}\right)$ ein links- und rechtsnoetherscher Ring.

1) Daß $\left(U\left(\mathfrak{g}\right), \left(U_n\left(\mathfrak{g}\right)\right)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Algebra ist, wissen wir aus Beispiel 2.2. **2)**. Wir werden nun zeigen, daß $\left(U\left(\mathfrak{g}\right), \left(U_n\left(\mathfrak{g}\right)\right)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra ist.

Sei $n \geq 0$ und $x \in U_n\left(\mathfrak{g}\right)$. Wir müssen zeigen, daß $\Delta\left(x\right) \in \sum\limits_{i=0}^{n} U_i\left(\mathfrak{g}\right) \otimes U_{n-i}\left(\mathfrak{g}\right)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $x = x_1 x_2 ... x_n$ für $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathfrak{g}$ ist (strenggenommen ist dies ein Induktionsargument). Nun zeigen wir: Für jedes $n \geq 0$ und alle $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathfrak{g}$ ist

$$\Delta\left(x_1 x_2 ... x_n\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\substack{\tau \in S_n,\\ \tau(1)<\tau(2)<...<\tau(\nu),\\ \tau(\nu+1)<\tau(\nu+2)<...<\tau(n)}} \underbrace{x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} ... x_{\tau(\nu)}}_{\in U_\nu(\mathfrak{g})} \otimes \underbrace{x_{\tau(\nu+1)} x_{\tau(\nu+2)} ... x_{\tau(n)}}_{\in U_{n-\nu}(\mathfrak{g})}.$$

Beweis: Für alle $1 \leq i \leq n$ ist $\Delta\left(x_i\right) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$, also

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(x_1 x_2 ... x_n\right) = \Delta\left(x_1\right) \cdot \Delta\left(x_2\right) \cdot ... \cdot \Delta\left(x_n\right) \\
&= \left(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1\right) \cdot \left(x_2 \otimes 1 + 1 \otimes x_2\right) \cdot ... \cdot \left(x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n\right) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\substack{\tau \in S_n,\\ \tau(1)<\tau(2)<...<\tau(\nu),\\ \tau(\nu+1)<\tau(\nu+2)<...<\tau(n)}} \left(x_{\tau(1)} \otimes 1\right)\left(x_{\tau(2)} \otimes 1\right) ... \left(x_{\tau(\nu)} \otimes 1\right) \cdot \left(1 \otimes x_{\tau(\nu+1)}\right)\left(1 \otimes x_{\tau(\nu+2)}\right) ... \left(1 \otimes x_{\tau(n)}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{nach dem (nachfolgenden) Lemma 2.10 (angewandt auf} \\ A = U\left(\mathfrak{g}\right) \otimes U\left(\mathfrak{g}\right),\ a_i = x_i \otimes 1 \text{ und } b_i = 1 \otimes x_i\text{),} \\ \text{denn alle } i, j \text{ erfüllen } \left(x_i \otimes 1\right)\left(1 \otimes x_j\right) = \left(1 \otimes x_j\right)\left(x_i \otimes 1\right) \end{array}\right) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\substack{\tau \in S_n,\\ \tau(1)<\tau(2)<...<\tau(\nu),\\ \tau(\nu+1)<\tau(\nu+2)<...<\tau(n)}} \underbrace{x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} ... x_{\tau(\nu)}}_{\in U_\nu(\mathfrak{g})} \otimes \underbrace{x_{\tau(\nu+1)} x_{\tau(\nu+2)} ... x_{\tau(n)}}_{\in U_{n-\nu}(\mathfrak{g})}.
\end{aligned}$$

[233] denn für jedes $x \in C_n$ ist

$$\begin{aligned}
\Delta\left(x\right) &\in \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i} \\
&\subseteq \sum_{i=0}^{n} C_n \otimes C_n \qquad \left(\text{denn } C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq ... \text{ ergibt } C_i \subseteq C_n \text{ und } C_{n-i} \subseteq C_n\right) \\
&\subseteq C_n \otimes C_n \qquad \left(\text{denn } C_n \otimes C_n \text{ ist ein Vektorraum}\right)
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\left(U\left(\mathfrak{g}\right), \left(U_n\left(\mathfrak{g}\right)\right)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra ist. Somit ist $\left(U\left(\mathfrak{g}\right), \left(U_n\left(\mathfrak{g}\right)\right)_{n\geq 0}\right)$ auch eine filtrierte Bialgebra. Wir müssen jetzt nur noch beweisen, daß $\left(U\left(\mathfrak{g}\right), \left(U_n\left(\mathfrak{g}\right)\right)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Hopfalgebra ist; dazu müssen wir nur noch beweisen, daß für alle $n \geq 0$ und alle $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathfrak{g}$ gilt: $S\left(x_1 x_2 ... x_n\right) \in U_n\left(\mathfrak{g}\right)$. Dies folgt aber sofort aus

$$S\left(x_1 x_2 ... x_n\right) = S\left(x_n\right) S\left(x_{n-1}\right) ... S\left(x_1\right) = \left(-x_n\right)\left(-x_{n-1}\right) ... \left(-x_1\right) = \left(-1\right)^n x_n x_{n-1} ... x_1.$$

Somit ist der Beweis von 2.9. fertig.

2.10. Lemma: Sei A eine Algebra, sei $n \geq 0$, und seien $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in A$ so, daß $a_i b_j = b_j a_i$ für alle $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt. Dann ist

$$\left(a_1 + b_1\right)\left(a_2 + b_2\right) ... \left(a_n + b_n\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\substack{\tau \in S_n,\\ \tau(1)<\tau(2)<...<\tau(\nu),\\ \tau(\nu+1)<\tau(\nu+2)<...<\tau(n)}} a_{\tau(1)} a_{\tau(2)} ... a_{\tau(\nu)} \cdot b_{\tau(\nu+1)} b_{\tau(\nu+2)} ... b_{\tau(n)}.$$

Beweis: Wir definieren die Menge $\operatorname{Sh}(p, q)$ für beliebige $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ wie in Beispiel 2.1. **7)**. Laut Lemma 2.51 von Kapitel I (angewandt auf n statt k) ist dann

$$\begin{aligned}
&\left(a_1 + b_1\right)\left(a_2 + b_2\right) ... \left(a_n + b_n\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in \operatorname{Sh}(i, n-i)} a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} ... a_{\sigma(i)} \cdot b_{\sigma(i+1)} b_{\sigma(i+2)} ... b_{\sigma(n)}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\tau \in \operatorname{Sh}(\nu, n-\nu)} a_{\tau(1)} a_{\tau(2)} ... a_{\tau(\nu)} \cdot b_{\tau(\nu+1)} b_{\tau(\nu+2)} ... b_{\tau(n)}\\
&\qquad \text{(hier haben wir die Summationsindizes } i \text{ und } \sigma \text{ in } \nu \text{ und } \tau \text{ umbenannt)}\\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\substack{\tau \in S_n,\\ \tau(1)<\tau(2)<...<\tau(\nu),\\ \tau(\nu+1)<\tau(\nu+2)<...<\tau(n)}} a_{\tau(1)} a_{\tau(2)} ... a_{\tau(\nu)} \cdot b_{\tau(\nu+1)} b_{\tau(\nu+2)} ... b_{\tau(n)}
\end{aligned}$$

(hier haben wir die Summation $\sum\limits_{\tau \in \operatorname{Sh}(\nu, n-\nu)}$ durch die Summation $\sum\limits_{\substack{\tau \in S_n,\\ \tau(1)<\tau(2)<...<\tau(\nu),\\ \tau(\nu+1)<\tau(\nu+2)<...<\tau(n)}}$ ersetzt, denn $\operatorname{Sh}(\nu, n-\nu)$ ist (definitionsgemäß) die Menge aller $\tau \in S_n$, welche $\tau(1) < \tau(2) < ... < \tau(\nu)$ und $\tau(\nu+1) < \tau(\nu+2) < ... < \tau(n)$ erfüllen). Damit ist Lemma 2.10 bewiesen.

Einige Eigenschaften in Bezug auf Untercoalgebren

Definition: Sei C eine Coalgebra.

1) Die Coalgebra C heißt *einfach*, wenn $C \neq 0$ ist und für alle Untercoalgebren $C' \subseteq C$ gilt: $C' = 0$ oder $C' = C$.

2) Das *Coradikal* C_0 von C ist definiert als $C_0 = \sum\limits_{\substack{D \subseteq C\\ \text{einfache}\\ \text{Untercoalgebra}}} D$.

3) Die Coalgebra C heißt *punktiert*, wenn jede einfache Untercoalgebra von C eindimensional ist.

4) Die Coalgebra C heißt *irreduzibel*, wenn C genau eine einfache Untercoalgebra besitzt.

Bemerkung: Man erkennt leicht, daß jede von 0 verschiedene Coalgebra C eine einfache Untercoalgebra besitzt.[234]

2.11. Bemerkung: 1) Sei C eine Coalgebra. Dann ist

$$\begin{aligned}\{D \subseteq C \text{ eindimensionale Coalgebra}\} &= \{D \subseteq C \text{ einfache eindimensionale Coalgebra}\} \\ &= \{kg \mid g \in G(C)\}.\end{aligned}$$

Beweis: **a)** Daß jede eindimensionale Coalgebra einfach ist, ist klar.

b) Für jedes $g \in G(C)$ ist kg eine einfache Untercoalgebra von C (denn $\Delta(g) = g \otimes g$).

c) Ist $D \subseteq C$ eine eindimensionale Coalgebra, dann gibt es ein $g \in G(C)$ mit $D = kg$. (*Beweis:* Da D eindimensional ist, gibt es ein $0 \neq d \in D$ mit $D = kd$, und es muß damit $\Delta(d) = \alpha d \otimes d$ für ein $\alpha \in k$ sein (denn D ist eine eindimensionale Coalgebra). Nach den Axiomen einer Coalgebra folgt hieraus $d = \alpha d \varepsilon(d)$, also $\alpha\varepsilon(d) = 1$ (da $d \neq 0$) und somit $\alpha \neq 0$. Sei nun $g = \alpha d$. Dann ist $\Delta(g) = \alpha\Delta(d) = \alpha(\alpha d \otimes d) = \alpha d \otimes \alpha d = g \otimes g$ und $\varepsilon(g) = \alpha\varepsilon(d) = 1$. Somit ist $g \in G(C)$. Ferner ist $D = kg$, denn $g = \alpha d$ (mit $\alpha \neq 0$) und $D = kd$.)

2) Sei C eine einfache Coalgebra. Dann ist $\dim C < \infty$. Ferner ist C^* eine einfache Algebra. Falls k algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $n \geq 1$ mit $C \cong \mathrm{M}_n(k)^*$ als Coalgebren.

Beweis: Daß $\dim C < \infty$ ist, folgt aus dem Endlichkeitssatz 4.3. **2)** von Kapitel I.

Daß C^* eine einfache Algebra ist, ist klar, denn jede Faktoralgebra $\neq 0$ von C^* ist kanonisch isomorph zu C^* (denn jede Untercoalgebra $\neq 0$ von C stimmt mit C überein), d. h. jedes Ideal von C^* ist $= 0$ oder $= C^*$.

Sei jetzt k algebraisch abgeschlossen. Da C^* endlichdimensional und einfach ist, folgt nach dem Satz von Wedderburn-Artin, daß es ein n gibt mit $C^* \cong \mathrm{M}_n(k)$ als Algebren. Also ist $C \cong \mathrm{M}_n(k)^*$ als Coalgebren.

3) Sei k algebraisch abgeschlossen. Sei C eine cokommutative Coalgebra. Dann ist C punktiert.

Beweis: Sei $D \subseteq C$ eine einfache Untercoalgebra. Dann ist D^* eine endlichdimensionale einfache kommutative Algebra (nach **2)**). Nach Wedderburn-Artin (siehe **2)**) ist also $D^* \cong \mathrm{M}_n(k)$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Da D^* kommutativ ist, muß dieses n gleich 1 sein, und somit ist D^* eindimensional; daher ist auch D eindimensional.

2.12. Satz: Sei $\left(C, \left(\widetilde{C}_n\right)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra[235]. Dann ist $C_0 \subseteq \widetilde{C}_0$ (wobei C_0 das Coradikal von C bezeichnet).

Beweis: Wir werden zuerst zeigen: Für jede Untercoalgebra $0 \neq D \subseteq C$ ist $D \cap \widetilde{C}_0 \neq 0$.

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß $D \cap \widetilde{C}_0 = 0$. Doch wegen $D \neq 0$ gibt es ein

[234] Für $\dim C < \infty$ folgt dies aus einem trivialen Induktionsargument; den Fall $\dim C = \infty$ führt man mithilfe des Endlichkeitssatzes auf den Fall $\dim C < \infty$ zurück.

[235] Der Grund, warum wir die Filtrierung mit $\left(\widetilde{C}_n\right)_{n\geq 0}$ und nicht einfach mit $(C_n)_{n\geq 0}$ bezeichnen, liegt darin, daß wir mit C_0 bereits das Coradikal von C bezeichnet haben.

$n \geq 1$ mit $D \cap \widetilde{C}_n \neq 0$ (weil $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(D \cap \widetilde{C}_n\right) = D \cap \underbrace{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{C}_n\right)}_{=C} = D \cap C = D \neq 0$ ist).

Wählen wir das kleinste solche n; dann ist $D \cap \widetilde{C}_n \neq 0$, aber $D \cap \widetilde{C}_{n-1} = 0$.

Sei $d \in D \cap \widetilde{C}_n$ ein von 0 verschiedenes Element. Dann ist $\Delta(d) \notin C \otimes \widetilde{C}_0$ (sonst wäre $d = \varepsilon\left(d_{(1)}\right) d_{(2)} \in \widetilde{C}_0$ und daher $d \in D \cap \widetilde{C}_0$ im Widerspruch zu $D \cap \widetilde{C}_0 = 0$). Es gibt also ein $\varphi \in C^*$ mit $\varphi\left(\widetilde{C}_0\right) = 0$ und $d_{(1)}\varphi\left(d_{(2)}\right) \neq 0$ (dies folgt unschwer aus Linearer Algebra[236]). Für ein solches φ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 \neq d_{(1)}\varphi\left(d_{(2)}\right) &\in \sum_{i+j=n} \widetilde{C}_i \varphi\left(\widetilde{C}_j\right) = \sum_{\substack{i+j=n,\\ j \geq 1}} \widetilde{C}_i \varphi\left(\widetilde{C}_j\right) \qquad \left(\text{da } \varphi\left(\widetilde{C}_0\right) = 0\right) \\ &\subseteq \widetilde{C}_{n-1}, \end{aligned}$$

aber auch $d_{(1)}\varphi\left(d_{(2)}\right) \in D$, im Widerspruch zu $D \cap \widetilde{C}_{n-1} = 0$. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme $D \cap \widetilde{C}_0 = 0$ falsch war. Es muß also $D \cap \widetilde{C}_0 \neq 0$ gelten.

Wir haben also gezeigt: Für jede Untercoalgebra $0 \neq D \subseteq C$ ist $D \cap \widetilde{C}_0 \neq 0$.

Für jede einfache Untercoalgebra D von C ist somit $D \cap \widetilde{C}_0 \neq 0$ (denn da D einfach ist, gilt $0 \neq D$).

Hieraus folgt schnell: Für jede einfache Untercoalgebra D von C ist $D \subseteq \widetilde{C}_0$. [237] Nach der Definition von C_0 bedeutet dies, daß $C_0 \subseteq \widetilde{C}_0$ ist.

[236] *Beweis:* Da $\widetilde{C}_0$ ein Untervektorraum von C ist, existiert (gemäß Linearer Algebra) ein Untervektorraum K von C mit $C = \widetilde{C}_0 \oplus K$. Betrachten wir ein solches K. Sei $\pi : C \to K$ die kanonische Projektion von C auf den Untervektorraum K entlang $\widetilde{C}_0$. Dann ist $\mathrm{id}_C \otimes \pi : C \otimes C \to C \otimes K$ die kanonische Projektion von $C \otimes C$ auf den Untervektorraum $C \otimes K$ entlang $C \otimes \widetilde{C}_0$. (Hierbei betrachten wir $C \otimes K$ und $C \otimes \widetilde{C}_0$ als Untervektorräume von $C \otimes C$, weil $C = \widetilde{C}_0 \oplus K$ auf $C \otimes C = C \otimes \left(\widetilde{C}_0 \oplus K\right) \cong \left(C \otimes \widetilde{C}_0\right) \oplus (C \otimes K)$ führt.) Daher ist $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{id}_C \otimes \pi\right) = C \otimes \widetilde{C}_0$. Wegen $\Delta(d) \notin C \otimes \widetilde{C}_0$ ist also $\Delta(d) \notin \mathrm{Ker}\left(\mathrm{id}_C \otimes \pi\right)$ und damit $\left(\mathrm{id}_C \otimes \pi\right)(\Delta(d)) \neq 0$. Sei $\alpha = \left(\mathrm{id}_C \otimes \pi\right)(\Delta(d))$. Dann ist also $\alpha \neq 0$.

Nun gibt es ein $g \in K^*$ mit $\left(\mathrm{id}_C \otimes g\right)(\alpha) \neq 0$. (Denn sonst wäre $\left(\mathrm{id}_C \otimes g\right)(\alpha) = 0 = \left(\mathrm{id}_C \otimes g\right)(0)$ für jedes $g \in K^*$, und laut Lemma $1.9\frac{2}{20}$ aus Kapitel I (angewandt auf C, K und 0 statt V, W bzw. β) würde hieraus folgen, daß $\alpha = 0$ ist, im Widerspruch zu $\alpha \neq 0$.) Betrachten wir so ein g. Dann ist $g \circ \pi \in C^*$ und $(g \circ \pi)\left(\widetilde{C}_0\right) = g\left(\underbrace{\pi\left(\widetilde{C}_0\right)}_{=0}\right) = g(0) = 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned} d_{(1)}(g \circ \pi)\left(d_{(2)}\right) &= d_{(1)} g\left(\pi\left(d_{(2)}\right)\right) = \left(\mathrm{id}_C \otimes g\right)\left(\underbrace{d_{(1)} \otimes \pi\left(d_{(2)}\right)}_{=\left(\mathrm{id}_C \otimes \pi\right)\left(d_{(1)} \otimes d_{(2)}\right)}\right) = \left(\mathrm{id}_C \otimes g\right)\left(\left(\mathrm{id}_C \otimes \pi\right)\underbrace{\left(d_{(1)} \otimes d_{(2)}\right)}_{=\Delta(d)}\right) \\ &= \left(\mathrm{id}_C \otimes g\right)\left(\underbrace{\left(\mathrm{id}_C \otimes \pi\right)(\Delta(d))}_{=\alpha}\right) = \left(\mathrm{id}_C \otimes g\right)(\alpha) \neq 0. \end{aligned}$$

Somit gibt es ein $\varphi \in C^*$ mit $\varphi\left(\widetilde{C}_0\right) = 0$ und $d_{(1)}\varphi\left(d_{(2)}\right) \neq 0$ (nämlich $\varphi = g \circ \pi$), was zu beweisen war.

[237] *Beweis:* Sei D eine einfache Untercoalgebra von C. Wie wir wissen, ist dann $D \cap \widetilde{C}_0 \neq 0$. Nun

Definition: Sei I eine Menge. Sei $a \in \mathbb{N}^{(I)}$. (Wir schreiben $a = (a(i))_{i \in I}$; dabei ist $a(i) \in \mathbb{N}$ für jedes $i \in I$, und $a(i) \neq 0$ gilt nur für endlich viele $i \in I$.) Wir definieren $|a|$ als $|a| = \sum_{i \in I} a(i)$.

Für alle $a, b \in \mathbb{N}^{(I)}$ definiere man ein Element $a + b \in \mathbb{N}^{(I)}$ durch $(a+b)(i) = a(i) + b(i)$ für alle $i \in I$.

2.13. Satz: Sei $\operatorname{char} k = 0$, und sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra mit Basis $(x_i)_{i \in I}$, wobei $(I, \leq)$ total geordnet ist.

Für jedes $a \in \mathbb{N}^{(I)}$ definieren wir ein Element $e_a \in U(\mathfrak{g})$ durch $e_a = \dfrac{x_{i_1}^{a(i_1)} x_{i_2}^{a(i_2)} ... x_{i_n}^{a(i_n)}}{a(i_1)! a(i_2)! ... a(i_n)!}$, wobei die Elemente $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ durch die Bedingungen $\{i_1, i_2, ..., i_n\} = \{i \in I \mid a(i) \neq 0\}$ und $i_1 < i_2 < ... < i_n$ definiert sind.

1) Dann ist $(e_a)_{a \in \mathbb{N}^{(I)}}$ eine k-Basis von $U(\mathfrak{g})$.

2) Für alle $a \in \mathbb{N}^{(I)}$ gilt $\Delta(e_a) = \sum_{b+c=a} e_b \otimes e_c$. Falls $a \neq 0$ ist, dann ist

$$\Delta(e_a) - e_a \otimes 1 - 1 \otimes e_a = \sum_{\substack{b+c=a; \\ b,c \neq 0}} e_b \otimes e_c.$$

3) Für jede Bialgebra H und für jeden injektiven Liealgebrahomomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to P(H)$ ist der (nach der universellen Eigenschaft von $U(\mathfrak{g})$) induzierte Bialgebrahomomorphismus $\psi : U(\mathfrak{g}) \to H$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[dr] & P(H) \arrow[r, hook, "\text{Inklusion}"] & H \\
& U(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dotted, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, injektiv.

4) Die Algebra $k[[T_i \mid i \in I]]$ (ein Potenzreihenring in den Unbestimmten T_i mit $i \in I$) ist isomorph zur Algebra $U(\mathfrak{g})^*$.

5) Es gilt $P(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.

2.14. Satz: Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Dann ist $U(\mathfrak{g})$ eine cokommutative irreduzible Hopfalgebra.[238]

Beweis von 2.13.: **1)** Klar nach Satz 2.1. (Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt).

2) Sei $a \in \mathbb{N}^{(I)}$ beliebig.

Seien $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ so definiert, daß $\{i_1, i_2, ..., i_n\} = \{i \in I \mid a(i) \neq 0\}$ und $i_1 < i_2 < ... < i_n$. Sei $r_l = a(i_l)$ für alle l. Dann ist $e_a = \dfrac{x_{i_1}^{a(i_1)} x_{i_2}^{a(i_2)} ... x_{i_n}^{a(i_n)}}{a(i_1)! a(i_2)! ... a(i_n)!} = \dfrac{x_{i_1}^{r_1} x_{i_2}^{r_2} ... x_{i_n}^{r_n}}{r_1! r_2! ... r_n!}$ (denn $a(i_l) = r_l$ für alle l).

Definiere eine Menge $\mathfrak{S}$ durch

$$\mathfrak{S} = \{(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^n \mid \mu_l \leq r_l \text{ für alle } l \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

---

sind D und $\widetilde{C}_0$ aber Untercoalgebren von C; also muß (nach Übungsblatt 8 Aufgabe 2) auch $D \cap \widetilde{C}_0$ eine Untercoalgebra von C sein. Daraus folgt $D \cap \widetilde{C}_0 = D$ (denn da D einfach ist, ist die einzige von 0 verschiedene Untercoalgebra von D die Coalgebra D selber). Das heißt, $D \subseteq \widetilde{C}_0$, qed.

[238] *Hinweis:* Hier und im Folgenden verstehen wir unter einer "irreduziblen Hopfalgebra" stets eine Hopfalgebra, die als Coalgebra irreduzibel ist.

Wir werden nun zeigen, daß

$$\sum_{b+c=a} e_b \otimes e_c = \sum_{(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\mathfrak{S}} \frac{x_{i_1}^{\mu_1}}{\mu_1!} \cdot \frac{x_{i_2}^{\mu_2}}{\mu_2!} \cdot ... \cdot \frac{x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_n!} \otimes \frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{(r_1-\mu_1)!} \cdot \frac{x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{(r_2-\mu_2)!} \cdot ... \cdot \frac{x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_n-\mu_n)!}$$

ist.

Wir definieren eine Abbildung $\mathfrak{b} : \mathfrak{S} \to \mathbb{N}^{(I)}$ folgendermaßen: Für jedes $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathfrak{S}$ sei $\mathfrak{b}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^{(I)}$ definiert durch

$$(\mathfrak{b}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n))(i) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \notin I; \\ \mu_l, \text{ wenn } i = i_l \text{ für irgendein } l \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}.$$

Wir definieren eine Abbildung $\mathfrak{c} : \mathfrak{S} \to \mathbb{N}^{(I)}$ folgendermaßen: Für jedes $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathfrak{S}$ sei $\mathfrak{c}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^{(I)}$ definiert durch

$$(\mathfrak{c}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n))(i) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \notin I; \\ r_l - \mu_l, \text{ wenn } i = i_l \text{ für irgendein } l \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß für jedes $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathfrak{S}$ gilt: $\mathfrak{b}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) + \mathfrak{c}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) = a$. Die Abbildung

$$\mathfrak{S} \to \left\{(b, c) \in \mathbb{N}^{(I)} \times \mathbb{N}^{(I)} \mid b + c = a\right\},$$
$$(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \mapsto (\mathfrak{b}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n), \mathfrak{c}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n))$$

ist somit wohldefiniert. Diese Abbildung ist außerdem eine Bijektion, wie man leicht erkennt.[239] Somit können wir in der Summe $\sum\limits_{b+c=a} e_b \otimes e_c$ die Substitution $(b, c) \mapsto (\mathfrak{b}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n), \mathfrak{c}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n))$ durchführen, und erhalten

$$\sum_{b+c=a} e_b \otimes e_c = \sum_{(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\mathfrak{S}} e_{\mathfrak{b}(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)} \otimes e_{\mathfrak{c}(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)}.$$

Doch für jedes $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathfrak{S}$ ist

$$e_{\mathfrak{b}(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)} = \frac{x_{i_1}^{\mu_1} x_{i_2}^{\mu_2} ... x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_1! \mu_2! ... \mu_n!} = \frac{x_{i_1}^{\mu_1}}{\mu_1!} \cdot \frac{x_{i_2}^{\mu_2}}{\mu_2!} \cdot ... \cdot \frac{x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_n!} \qquad \text{und}$$
$$e_{\mathfrak{c}(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)} = \frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1} x_{i_2}^{r_2-\mu_2} ... x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_1-\mu_1)!\,(r_2-\mu_2)!...\,(r_n-\mu_n)!} = \frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{(r_1-\mu_1)!} \cdot \frac{x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{(r_2-\mu_2)!} \cdot ... \cdot \frac{x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_n-\mu_n)!}.$$

[239] *Beweis:* Für jedes Paar $(b, c) \in \mathbb{N}^{(I)} \times \mathbb{N}^{(I)}$ mit $b + c = a$ gibt es genau ein $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathfrak{S}$, welches $(b, c) = (\mathfrak{b}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n), \mathfrak{c}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n))$ erfüllt (nämlich ist dieses $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ durch

$$\mu_l = b(i_l) \qquad \text{für jedes } l \in \{1, 2, ..., n\}$$

gegeben). Somit ist die Abbildung

$$\mathfrak{S} \to \left\{(b, c) \in \mathbb{N}^{(I)} \times \mathbb{N}^{(I)} \mid b + c = a\right\},$$
$$(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \mapsto (\mathfrak{b}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n), \mathfrak{c}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n))$$

bijektiv.

Somit haben wir

$$\sum_{b+c=a} e_b \otimes e_c = \sum_{(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\mathfrak{S}} \underbrace{e_{\mathfrak{b}(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)}}_{=\frac{x_{i_1}^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdot\frac{x_{i_2}^{\mu_2}}{\mu_2!}\cdot...\cdot\frac{x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_n!}} \otimes \underbrace{e_{\mathfrak{c}(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)}}_{=\frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{(r_1-\mu_1)!}\cdot\frac{x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{(r_2-\mu_2)!}\cdot...\cdot\frac{x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_n-\mu_n)!}}$$

$$= \sum_{(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\mathfrak{S}} \frac{x_{i_1}^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdot\frac{x_{i_2}^{\mu_2}}{\mu_2!}\cdot...\cdot\frac{x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_n!} \otimes \frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{(r_1-\mu_1)!}\cdot\frac{x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{(r_2-\mu_2)!}\cdot...\cdot\frac{x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_n-\mu_n)!}.$$

Da Δ ein Algebrahomomorphismus ist, gilt nun

$$\Delta(e_a) = \frac{\Delta(x_{i_1})^{r_1}\,\Delta(x_{i_2})^{r_2}...\Delta(x_{i_n})^{r_n}}{r_1!r_2!...r_n!} \qquad \left(\text{denn } e_a = \frac{x_{i_1}^{r_1}x_{i_2}^{r_2}...x_{i_n}^{r_n}}{r_1!r_2!...r_n!}\right)$$

$$= \frac{\Delta(x_{i_1})^{r_1}}{r_1!}\frac{\Delta(x_{i_2})^{r_2}}{r_2!}...\frac{\Delta(x_{i_n})^{r_n}}{r_n!}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\mu_1=0}^{r_1}\binom{r_1}{\mu_1}x_{i_1}^{\mu_1}\otimes x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{r_1!}\cdot\frac{\sum\limits_{\mu_2=0}^{r_2}\binom{r_2}{\mu_2}x_{i_2}^{\mu_2}\otimes x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{r_2!}\cdot...\cdot\frac{\sum\limits_{\mu_n=0}^{r_n}\binom{r_n}{\mu_n}x_{i_n}^{\mu_n}\otimes x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{r_n!}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{denn für alle } i\in I \text{ ist } \Delta(x_i) = x_i\otimes 1 + 1\otimes x_i\text{, und für alle}\\ l\in\{1,2,...,n\} \text{ gilt folglich}\\ \Delta(x_{i_l})^{r_l} = (x_{i_l}\otimes 1 + 1\otimes x_{i_l})^{r_l} = \sum\limits_{\mu_l=0}^{r_l}\binom{r_l}{\mu_l}x_{i_l}^{\mu_l}\otimes x_{i_l}^{r_l-\mu_l}\\ \text{(nach der binomischen Formel)}\end{array}\right)$$

$$= \left(\sum_{\mu_1=0}^{r_1}\frac{x_{i_1}^{\mu_1}}{\mu_1!}\otimes\frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{(r_1-\mu_1)!}\right)\cdot\sum_{\mu_2=0}^{r_2}\left(\frac{x_{i_2}^{\mu_2}}{\mu_2!}\otimes\frac{x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{(r_2-\mu_2)!}\right)\cdot...\cdot\sum_{\mu_n=0}^{r_n}\left(\frac{x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_n!}\otimes\frac{x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_n-\mu_n)!}\right)$$

$$= \sum_{(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\mathfrak{S}}\left(\frac{x_{i_1}^{\mu_1}}{\mu_1!}\otimes\frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{(r_1-\mu_1)!}\right)\cdot\left(\frac{x_{i_2}^{\mu_2}}{\mu_2!}\otimes\frac{x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{(r_2-\mu_2)!}\right)\cdot...\cdot\left(\frac{x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_n!}\otimes\frac{x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_n-\mu_n)!}\right)$$

$$= \sum_{(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\mathfrak{S}}\frac{x_{i_1}^{\mu_1}}{\mu_1!}\cdot\frac{x_{i_2}^{\mu_2}}{\mu_2!}\cdot...\cdot\frac{x_{i_n}^{\mu_n}}{\mu_n!}\otimes\frac{x_{i_1}^{r_1-\mu_1}}{(r_1-\mu_1)!}\cdot\frac{x_{i_2}^{r_2-\mu_2}}{(r_2-\mu_2)!}\cdot...\cdot\frac{x_{i_n}^{r_n-\mu_n}}{(r_n-\mu_n)!} = \sum_{b+c=a} e_b\otimes e_c.$$

Falls $a \neq 0$ ist, folgt hieraus $\Delta(e_a) - e_a\otimes 1 - 1\otimes e_a = \sum\limits_{\substack{b+c=a;\\ b,c\neq 0}} e_b\otimes e_c$.

3) Nach **1)** genügt es zu zeigen, daß $(\psi(e_a))_{a\in\mathbb{N}^{(I)}}$ ein linear unabhängiges System ist. Um dies zu beweisen, werden wir durch Induktion nach n nachweisen, daß $(\psi(e_a))_{|a|\leq n}$ ein linear unabhängiges System ist für jedes $n\geq 0$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ folgt dies aus der Injektivität von φ (sowie daraus, daß $1\in H$ kein primitives Element ist).

Induktionsschritt von $n-1$ auf n: Sei $n\geq 2$. Wir nehmen an, daß $(\psi(e_a))_{|a|\leq n}$ linear abhängig ist. Dann gibt es ein $r_a\in k$ für jedes $a\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $|a| = n$ sowie ein $s_b\in k$ für jedes $b\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $|b|<n$ so, daß gilt:

$$\sum_{|a|=n} r_a\psi(e_a) = \sum_{|b|<n} s_b\psi(e_b),$$

und dabei gibt es ein $a \in \mathbb{N}^{(I)}$ mit $|a| = n$ und $r_a \neq 0$ (denn sonst wäre bereits das System $(\psi(e_a))_{|a| \leq n-1}$ linear abhängig, aber dies widerspräche der Induktionsvoraussetzung). Wir bezeichnen

$$h = \sum_{|a|=n} r_a \psi(e_a) = \sum_{|b|<n} s_b \psi(e_b).$$

Wenden wir nun die Abbildung

$$H \to H \otimes H, \qquad x \mapsto \Delta(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x$$

auf diese Gleichung an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta(h) - h \otimes 1 - 1 \otimes h &= \sum_{|a|=n} r_a \left(\Delta(\psi(e_a)) - \psi(e_a) \otimes 1 - 1 \otimes \psi(e_a)\right) \\ &= \sum_{|b|<n} s_b \left(\Delta(\psi(e_b)) - \psi(e_b) \otimes 1 - 1 \otimes \psi(e_b)\right).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}&\underbrace{\Delta(\psi(e_a))}_{\substack{=(\psi\otimes\psi)(\Delta(e_a)) \\ \text{(denn } \psi \text{ ist ein} \\ \text{Coalgebrahomomorphismus)}}} - \psi(e_a) \otimes \underbrace{1}_{=\psi(1)} - \underbrace{1}_{=\psi(1)} \otimes \psi(e_a) \\ &= (\psi \otimes \psi)(\Delta(e_a)) - \psi(e_a) \otimes \psi(1) - \psi(1) \otimes \psi(e_a) \\ &= (\psi \otimes \psi)(\Delta(e_a) - e_a \otimes 1 - 1 \otimes e_a) = (\psi \otimes \psi)\left(\sum_{\substack{b+c=a; \\ b,c \neq 0}} e_b \otimes e_c\right) \\ &\qquad \left(\begin{array}{c}\text{gemäß der Formel } \Delta(e_a) - e_a \otimes 1 - 1 \otimes e_a = \sum\limits_{\substack{b+c=a; \\ b,c\neq 0}} e_b \otimes e_c \text{, die wir} \\ \text{in } \mathbf{2)} \text{ bewiesen haben}\end{array}\right) \\ &= \sum_{\substack{b+c=a; \\ b,c \neq 0}} \psi(e_b) \otimes \psi(e_c) = \sum_{\substack{r+s=a, \\ r,s \neq 0}} \psi(e_r) \otimes \psi(e_s)\end{aligned}$$

und

$$\Delta(\psi(e_b)) - \psi(e_b) \otimes 1 - 1 \otimes \psi(e_b) = \sum_{\substack{p+q=b, \\ p,q \neq 0}} \psi(e_p) \otimes \psi(e_q) \qquad \text{(aus analogem Grund)}$$

vereinfacht sich dies zu

$$\Delta(h) - h \otimes 1 - 1 \otimes h = \sum_{|a|=n} r_a \sum_{\substack{r+s=a, \\ r,s \neq 0}} \psi(e_r) \otimes \psi(e_s) = \sum_{|b|<n} s_b \sum_{\substack{p+q=b, \\ p,q \neq 0}} \psi(e_p) \otimes \psi(e_q).$$

Mit anderen Worten:

$$\Delta(h) - h \otimes 1 - 1 \otimes h = \sum_{\substack{r,s \in \mathbb{N}^{(I)}, \\ |r+s|=n, \\ r,s \neq 0}} r_{r+s} \psi(e_r) \otimes \psi(e_s) = \sum_{\substack{p,q \in \mathbb{N}^{(I)}, \\ |p+q|<n, \\ p,q \neq 0}} s_{p+q} \psi(e_p) \otimes \psi(e_q).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist aber die Familie $(\psi(e_a))_{|a|<n}$ linear unabhängig. Folglich ist auch die Familie $(\psi(e_b)\otimes\psi(e_c))_{|b|<n,\ |c|<n}$ von Tensoren in $H\otimes H$ linear unabhängig. Also sind alle $\psi(e_r)\otimes\psi(e_s)$ mit $|r+s|=n$ und $r,s\neq 0$ und alle $\psi(e_p)\otimes\psi(e_q)$ mit $|p+q|<n$ und $p,q\neq 0$ linear unabhängig (und zwar unter sich und untereinander). Die beiden Summen $\sum\limits_{\substack{r,s\in\mathbb{N}^{(I)},\\ |r+s|=n,\\ r,s\neq 0}} r_{r+s}\psi(e_r)\otimes\psi(e_s)$ und $\sum\limits_{\substack{p,q\in\mathbb{N}^{(I)},\\ |p+q|<n,\\ p,q\neq 0}} s_{p+q}\psi(e_p)\otimes\psi(e_q)$ können folglich nur dann gleich sein, wenn alle in diesen Summen vorkommenden Koeffizienten r_{r+s} und s_{p+q} gleich 0 sind. Aus

$$\sum_{\substack{r,s\in\mathbb{N}^{(I)},\\ |r+s|=n,\\ r,s\neq 0}} r_{r+s}\psi(e_r)\otimes\psi(e_s)=\sum_{\substack{p,q\in\mathbb{N}^{(I)},\\ |p+q|<n,\\ p,q\neq 0}} s_{p+q}\psi(e_p)\otimes\psi(e_q)$$

folgt somit, daß alle in diesen Summen vorkommenden Koeffizienten r_{r+s} und s_{p+q} gleich 0 sind. Das heißt insbesondere: $r_{r+s}=0$ für alle $r\in\mathbb{N}^{(I)}$ und $s\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $|r+s|=n$ und $r,s\neq 0$. Hieraus ergibt sich $r_a=0$ für alle $a\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $|a|=n$ (denn für jedes $a\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $|a|=n$ gibt es zwei Elemente $r\in\mathbb{N}^{(I)}$ und $s\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $|r+s|=n$ und $r,s\neq 0$, die $r+s=a$ erfüllen[240]). Dies ist ein Widerspruch dazu, daß es ein $a\in\mathbb{N}^{(I)}$ gibt mit $|a|=n$ und $r_a\neq 0$.

4) Wir definieren eine k-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g})^* &\to k[[T_i \mid i\in I]],\\ f &\mapsto \sum_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} f(e_a)\,T^a, \end{aligned}$$

wobei $T^a=T_{i_1}^{a(i_1)}T_{i_2}^{a(i_2)}...T_{i_n}^{a(i_n)}$ für $\{i_1,i_2,...,i_n\}=\{i\in I\mid a(i)\neq 0\}$ mit $i_1<i_2<...<i_n$ ist.

Diese Abbildung ist ein Algebrahomomorphismus nach **2)** und ein k-Vektorraumisomorphismus nach **1)**. Also ist sie ein Algebraisomorphismus. Daraus folgt $U(\mathfrak{g})^*\cong k[[T_i\mid i\in I]]$ als k-Algebren.

5) Sei $x=\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} r_a e_a\in U(\mathfrak{g})$ mit $r_a\in k$ für alle $a\in\mathbb{N}^{(I)}$. Sei x primitiv. Wir müssen dann zeigen, daß $x\in\mathfrak{g}$ ist.

In der Tat ist $\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x$. Wegen $x=\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} r_a e_a$ wird dies zu $\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} r_a\Delta(e_a)=\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} r_a e_a\otimes 1+\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} r_a 1\otimes e_a$. Wegen $\Delta(e_a)=\sum\limits_{\substack{b,c\in\mathbb{N}^{(I)},\\ b+c=a}} e_b\otimes e_c$ und $1=e_0$ läßt sich dies zu

$$\sum_{a\in\mathbb{N}^{(I)}}\sum_{\substack{b,c\in\mathbb{N}^{(I)},\\ b+c=a}} r_a e_b\otimes e_c=\sum_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} r_a e_a\otimes e_0+\sum_{a\in\mathbb{N}^{(I)}} r_a e_0\otimes e_a$$

umformen. Also ist $r_a=0$ für alle $a\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $|a|>1$ (denn für jedes solche a gibt es $b,c\in\mathbb{N}^{(I)}$ mit $b+c=a$ und $|b|,|c|>0$; und dann kommt der Vektor $e_b\otimes e_c$ nur auf der linken Seite, aber nicht auf der rechten Seite der Gleichung vor). Also ist

[240] Dies folgt aus $n\geq 2$.

$x = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^{(I)}, \\ |a| \leq 1}} r_a e_a$. Nach Anwendung von ε folgt hieraus $r_0 = 0$ (denn da x primitiv ist, gilt $\varepsilon(x) = 0$), also $x = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^{(I)}, \\ |a| = 1}} r_a e_a$, und damit $x \in \mathfrak{g}$.

Beweis von 2.14.: Folgt aus der Filtrierung $(U_n(\mathfrak{g}))$ und 2.12., da $U_0(\mathfrak{g})$ eindimensional ist (das heißt, $k \cdot 1$ ist die einzige einfache Untercoalgebra von $U(\mathfrak{g})$).

3. Irreduzible cokommutative Hopfalgebren in Charakteristik 0

Unser nächstes Ziel ist nun der Beweis eines Satzes, der alle *irreduziblen* cokommutativen Hopfalgebren in Charakteristik 0 charakterisiert:

3.1. Satz: Sei $\operatorname{char} k = 0$. Dann sind die Funktoren

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{g} \mid \mathfrak{g} \text{ Liealgebra}\} &\to \{H \mid H \text{ irreduzible cokommutative Hopfalgebra}\}, \\ \mathfrak{g} &\mapsto U(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \{H \mid H \text{ irreduzible cokommutative Hopfalgebra}\} &\to \{\mathfrak{g} \mid \mathfrak{g} \text{ Liealgebra}\}, \\ H &\mapsto P(H) \end{aligned}$$

zueinander quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien.

Beweis von 3.1.: **1)** Nach 2.13. **5)** gilt: Für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{g} \to P(U(\mathfrak{g}))$ ein natürlicher Isomorphismus von Liealgebren.

2) Nun werden wir zeigen: Ist H eine irreduzible cokommutative Hopfalgebra, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $U(P(H)) \to H$ von Hopfalgebren.

Beweis: Nach der universellen Eigenschaft von $U(P(H))$ (also nach Folgerung 1.10. **2)**, angewandt auf $P(H)$ und id statt $\mathfrak{g}$ und f) gibt es einen Bialgebrahomomorphismus $\psi : U(P(H)) \to H$ mit $\psi(x) = x$ für alle $x \in P(H)$. Nach 2.13. **3)** ist dieser Homomorphismus ψ injektiv. Da $U(P(H))$ und H Hopfalgebren sind, ist dieser Bialgebrahomomorphismus ψ ein Hopfalgebrahomomorphismus.

Wir wollen nun beweisen, daß ψ surjektiv ist. Dazu müssen wir erst ausholen und einige dafür nötige Resultate beweisen. Damit werden wir den gesamten Rest des Abschnittes II.3 verbringen.

Definition: Sei $\mathcal{E}_k$ die Kategorie der endlichdimensionalen cokommutativen k-Coalgebren. Sei $\mathcal{C}_k$ die Kategorie aller cokommutativen k-Coalgebren.

Für jedes $C \in \mathcal{C}_k$ sei ein kontravarianter Funktor $\operatorname{Cosp} C : \mathcal{E}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Me}$ definiert durch

$$(\operatorname{Cosp} C)(E) = \operatorname{Coalg}(E, C) \qquad \text{für alle } E \in \mathcal{E}_k, \qquad \text{sowie}$$

$$(\operatorname{Cosp} C)(f) = \begin{pmatrix} \operatorname{Coalg}(E_2, C) \to \operatorname{Coalg}(E_1, C), \\ g \mapsto gf \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{E}_k(E_1, E_2) \text{ für alle } E_1, E_2 \in \mathcal{E}_k.$$

3.2. Bemerkung: 1) Wir betrachten ab jetzt Coalgebren nicht nur (wie vorhin) über einem Körper k, sondern auch über beliebigen kommutativen Ringen R; diese

Coalgebren heißen dann logischerweise *R-Coalgebren*. Natürlich gelten dann nicht mehr alle Sätze, die wir bislang für Coalgebren über einem Körper k bewiesen haben![241]

a) Sei $C \in \mathcal{C}_k$, und sei R eine kommutative endlichdimensionale Algebra. Dann ist $R \otimes C$ eine R-Coalgebra mit der Comultiplikation $\Delta_{R\otimes C} : R\otimes C \to (R \otimes C) \otimes_R (R \otimes C)$, die durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \otimes C \arrow[r, "\Delta_{R\otimes C}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id} \otimes \Delta_C"'] & (R \otimes C) \otimes_R (R \otimes C) \arrow[r, "\cong"] & R \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

definiert ist, und der Coeins

$$\begin{aligned} \varepsilon_{R\otimes C} : R \otimes C &\to R, \\ r \otimes c &\mapsto r\varepsilon_C(c). \end{aligned}$$

(Wir werden im Folgenden öfters Δ und ε statt $\Delta_{R\otimes C}$ bzw. $\varepsilon_{R\otimes C}$ schreiben, wenn (in Betracht der Elemente, auf die diese Abbildungen angewendet werden) klar ist, um was für Abbildungen es geht.) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : G(R \otimes C) &\to \operatorname{Coalg}(R^*, C) = (\operatorname{Cosp} C)(R^*), \\ \sum_i r_i \otimes c_i &\mapsto \left(f \mapsto \sum_i f(r_i) c_i \right) \end{aligned}$$

ist eine natürliche Bijektion, wobei die Menge $G(R \otimes C)$ für die R-Coalgebra $R \otimes C$ genauso definiert wird wie die Menge $G(C)$ für eine k-Coalgebra C (also durch

$$\begin{aligned} G(R \otimes C) &= \{ g \in R \otimes C \mid \Delta(g) = g \otimes g, \ \varepsilon(g) = 1 \} \\ &= \text{Menge aller Gruppenelemente von } R \otimes C \end{aligned}$$

).

b) Diese Bijektion ist ein natürlicher Isomorphismus von Gruppen, falls $C = H$ für eine Hopfalgebra H ist, wobei die Gruppenstruktur in $G(R \otimes H)$ die Multiplikation in der Algebra $R \otimes H$ ist, und die Gruppenstruktur in $\operatorname{Coalg}(R^*, H)$ die Konvolution ist.

Beweis: a) Man rechnet leicht nach, daß $R \otimes C$ eine R-Coalgebra ist.

Jetzt wollen wir beweisen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : G(R \otimes C) &\to \operatorname{Coalg}(R^*, C) = (\operatorname{Cosp} C)(R^*), \\ \sum_i r_i \otimes c_i &\mapsto \left(f \mapsto \sum_i f(r_i) c_i \right) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist (d. h. daß $\Phi(x) \in \operatorname{Coalg}(R^*, C)$ für jedes $x \in G(R \otimes C)$ gilt) und eine natürliche Bijektion ist. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

[241] Aber wenn wir im Folgenden einfach nur "Coalgebra" (nicht "T-Coalgebra" für irgendeinen Ring T) schreiben, meinen wir immer noch eine k-Coalgebra! Wenn wir von T-Coalgebren für $T \neq k$ reden, werden wir das T auch immer mitangeben.

Wir betrachten die Abbildung:

$$\widetilde{\Phi} : R \otimes C \to \operatorname{Hom}\left(R^*, C\right), \qquad r \otimes c \mapsto \left(f \mapsto f\left(r\right) c\right).$$

Es ist klar, daß diese Abbildung $\widetilde{\Phi}$ ein Vektorraumisomorphismus ist. Jetzt werden wir zeigen, daß $\widetilde{\Phi}\left(G\left(R \otimes C\right)\right) = \operatorname{Coalg}\left(R^*, C\right)$ gilt.

Beweis: Sei $x = \sum\limits_i r_i \otimes c_i \in R \otimes C$ beliebig gewählt, und sei $\varphi = \widetilde{\Phi}\left(x\right) : R^* \to C$.

Wir werden nun nachprüfen, daß $x \in G\left(R \otimes C\right)$ genau dann gilt, wenn $\varphi \in \operatorname{Coalg}\left(R^*, C\right)$ gilt. In der Tat gilt

$$\varphi = \widetilde{\Phi}\left(x\right) = \widetilde{\Phi}\left(\sum_i r_i \otimes c_i\right) = \sum_i \underbrace{\widetilde{\Phi}\left(r_i \otimes c_i\right)}_{=\left(f \mapsto f\left(r_i\right) c_i\right)} = \sum_i \left(f \mapsto f\left(r_i\right) c_i\right) = \left(f \mapsto \sum_i f\left(r_i\right) c_i\right).$$

Das heißt, $\varphi\left(f\right) = \sum\limits_i f\left(r_i\right) c_i$ für jedes $f \in R^*$. Somit gilt folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta\left(\underbrace{\varphi\left(f\right)}_{=\sum\limits_i f\left(r_i\right) c_i}\right) = \underbrace{\varphi\left(f_{(1)}\right)}_{=\sum\limits_p f_{(1)}\left(r_p\right) c_p} \otimes \underbrace{\varphi\left(f_{(2)}\right)}_{=\sum\limits_q f_{(2)}\left(r_q\right) c_q} \text{ für jedes } f \in R^*\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\sum_i f\left(r_i\right) \Delta\left(c_i\right) = \sum_{p,q} \underbrace{f_{(1)}\left(r_p\right) f_{(2)}\left(r_q\right)}_{=f\left(r_p r_q\right)} c_p \otimes c_q \text{ für jedes } f \in R^*\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\sum_i f\left(r_i\right) \Delta\left(c_i\right) = \sum_{p,q} f\left(r_p r_q\right) c_p \otimes c_q \text{ für jedes } f \in R^*\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\sum_i r_i \otimes \Delta\left(c_i\right) = \sum_{p,q} r_p r_q \otimes c_p \otimes c_q\right)
\end{aligned}$$

(hierbei haben wir im letzten Schritt Lemma $1.9\frac{2}{20}$ von Kapitel I verwendet). Andererseits gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta_{R \otimes C}\left(x\right) = x \otimes x\right) \Longleftrightarrow \left(\left(\operatorname{id} \otimes \Delta\right)\left(\sum_i r_i \otimes c_i\right) = \sum_{p,q} r_p r_q \otimes c_p \otimes c_q\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\sum_i r_i \otimes \Delta\left(c_i\right) = \sum_{p,q} r_p r_q \otimes c_p \otimes c_q\right).
\end{aligned}$$

Somit gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta\left(\varphi\left(f\right)\right) = \varphi\left(f_{(1)}\right) \otimes \varphi\left(f_{(2)}\right) \text{ für jedes } f \in R^*\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\sum_i r_i \otimes \Delta\left(c_i\right) = \sum_{p,q} r_p r_q \otimes c_p \otimes c_q\right) \Longleftrightarrow \left(\Delta_{R \otimes C}\left(x\right) = x \otimes x\right).
\end{aligned}$$

Ferner gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
&\left(\varepsilon\left(\varphi\left(f\right)\right)=\varepsilon_{R^{*}}\left(f\right)\ \text{ für jedes } f\in R^{*}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad &\left(\varepsilon\left(\sum_{i}f\left(r_{i}\right)c_{i}\right)=f\left(1\right)\ \text{ für jedes } f\in R^{*}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad &\left(\sum_{i}f\left(r_{i}\right)\varepsilon\left(c_{i}\right)=f\left(1\right)\ \text{ für jedes } f\in R^{*}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad &\left(\sum_{i}r_{i}\otimes\varepsilon\left(c_{i}\right)=1\right)\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\varepsilon_{R\otimes C}\left(x\right)=1\right).
\end{aligned}$$

Aus den letzten zwei Äquivalenzen folgt, daß $x\in G\left(R\otimes C\right)$ genau dann gilt, wenn $\varphi\in\operatorname{Coalg}\left(R^{*},C\right)$ ist. Da $\varphi=\widetilde{\Phi}\left(x\right)$ ist, bedeutet dies: Genau dann gilt $x\in G\left(R\otimes C\right)$, wenn $\widetilde{\Phi}\left(x\right)\in\operatorname{Coalg}\left(R^{*},C\right)$ ist. Somit ist $\widetilde{\Phi}\left(G\left(R\otimes C\right)\right)=\operatorname{Coalg}\left(R^{*},C\right)$.

Folglich kann man die Bijektion $\widetilde{\Phi}:R\otimes C\to\operatorname{Hom}\left(R^{*},C\right)$ auf die Teilmenge $G\left(R\otimes C\right)$ einschränken, und erhält eine Bijektion $G\left(R\otimes C\right)\to\operatorname{Coalg}\left(R^{*},C\right)$. Hieraus folgt natürlich sofort, daß die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi:G\left(R\otimes C\right)&\to\operatorname{Coalg}\left(R^{*},C\right)=\left(\operatorname{Cosp}C\right)\left(R^{*}\right),\\
\sum_{i}r_{i}\otimes c_{i}&\mapsto\left(f\mapsto\sum_{i}f\left(r_{i}\right)c_{i}\right)
\end{aligned}$$

wohldefiniert ist und eine Bijektion ist (weil sie genau die Bijektion ist, die man erhält, wenn man die Bijektion $\widetilde{\Phi}:R\otimes C\to\operatorname{Hom}\left(R^{*},C\right)$ auf die Teilmenge $G\left(R\otimes C\right)$ einschränkt). Damit ist **1) a)** bewiesen.

b) Wir zeigen nun: Für jede Hopfalgebra H ist $\Phi:G\left(R\otimes H\right)\to\operatorname{Coalg}\left(R^{*},H\right)$ ein Gruppenisomorphismus.

Beweis: Seien $\sum\limits_{i}r_{i}\otimes c_{i}=x$ und $\sum\limits_{j}s_{j}\otimes d_{j}=y$ zwei Elemente von $G\left(R\otimes H\right)$. Dann ist $xy\in G\left(R\otimes H\right)$, da $\Delta\left(xy\right)=\Delta\left(x\right)\Delta\left(y\right)=\left(x\otimes x\right)\left(y\otimes y\right)=xy\otimes xy$. Wir müssen nun zeigen, daß $\Phi\left(xy\right)=\Phi\left(x\right)*\Phi\left(y\right)$ ist. In der Tat ist

$$\Phi\left(xy\right)\left(f\right)=\sum_{i,j}f\left(r_{i}s_{j}\right)c_{i}d_{j}\qquad\left(\begin{array}{c}\text{denn wegen } x=\sum\limits_{i}r_{i}\otimes c_{i}\text{ und } y=\sum\limits_{j}s_{j}\otimes d_{j}\text{ ist}\\ xy=\left(\sum\limits_{i}r_{i}\otimes c_{i}\right)\left(\sum\limits_{j}s_{j}\otimes d_{j}\right)=\sum_{i,j}r_{i}s_{j}\otimes c_{i}d_{j}\end{array}\right)$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\Phi\left(x\right)*\Phi\left(y\right)\right)\left(f\right)&=\Phi\left(x\right)\left(f_{\left(1\right)}\right)\Phi\left(y\right)\left(f_{\left(2\right)}\right)=\sum_{i}f_{\left(1\right)}\left(r_{i}\right)c_{i}\sum_{j}f_{\left(2\right)}\left(s_{j}\right)d_{j}\\
&=\sum_{i,j}\underbrace{f_{\left(1\right)}\left(r_{i}\right)f_{\left(2\right)}\left(s_{j}\right)}_{=f\left(r_{i}s_{j}\right)}c_{i}d_{j}=\sum_{i,j}f\left(r_{i}s_{j}\right)c_{i}d_{j}
\end{aligned}$$

für jedes $f\in R^{*}$.

2) Sei $C\in\mathcal{C}_{k}$. Für je zwei endlichdimensionale kommutative Algebren R und S gilt

$$G\left(\left(R\times S\right)\otimes C\right)\cong G\left(R\otimes C\right)\times G\left(S\otimes C\right).$$

Beweis: Nach **1)** ist

$$G\left((R \times S) \otimes C\right) \cong \operatorname{Coalg}\left(\underbrace{(R \times S)^*}_{\cong R^* \oplus S^*}, C\right) \cong \operatorname{Coalg}\left(R^*, C\right) \times \operatorname{Coalg}\left(S^*, C\right)$$
$$\cong G\left(R \otimes C\right) \times G\left(S \otimes C\right),$$

wobei wir $G\left(R \otimes C\right) \cong \operatorname{Coalg}\left(R^*, C\right)$ und $G\left(S \otimes C\right) \cong \operatorname{Coalg}\left(S^*, C\right)$ benutzt haben (diese Isomorphien folgen beide aus **1)**).

3) Seien $C, D \in \mathcal{C}_k$. Sei $f : C \to D$ ein Coalgebrahomomorphismus.

Wenn für jede endlichdimensionale kommutative Algebra R die Abbildung

$$G\left(R \otimes C\right) \xrightarrow{(\mathrm{id} \otimes f)|_{G(R \otimes C)}} G\left(R \otimes D\right)$$

bijektiv ist, so ist f ein Isomorphismus.

Beweis: Wir können dies mithilfe des Endlichkeitssatzes für Coalgebren beweisen (siehe Übungsaufgabe), aber wir werden nur den Fall verwenden, wenn f injektiv ist. In diesem Fall ist die Behauptung äquivalent zum folgenden Lemma:

Lemma: Sei C eine cokommutative Coalgebra, und $D \subseteq C$ eine Untercoalgebra. Wenn für jede endlichdimensionale kommutative Algebra R die von der Inklusionsabbildung $i : D \to C$ induzierte Abbildung $G\left(R \otimes D\right) \to G\left(R \otimes C\right)$ eine Bijektion ist (nach 3.2. **1)** ist dies äquivalent dazu, daß für jede endlichdimensionale cokommutative Coalgebra E die Abbildung

$$\operatorname{Coalg}\left(E, D\right) \to \operatorname{Coalg}\left(E, C\right), \qquad \varphi \mapsto i\varphi$$

bijektiv ist), so ist $D = C$.

Beweis des Lemmas: Sei $c \in C$. Dann gibt es nach dem Endlichkeitssatz für Coalgebren eine endlichdimensionale Untercoalgebra $E \subseteq C$ mit $c \in E$. Nach Voraussetzung hat dann die kanonische Inklusionsabbildung $j : E \to C$ die Form $j = i\gamma$ für einen Coalgebrahomomorphismus $\gamma \in \operatorname{Coalg}\left(E, D\right)$ (das heißt, es gibt ein $\gamma \in \operatorname{Coalg}\left(E, D\right)$ so, daß das Diagramm
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, hook, "j"] \arrow[dl, dotted, "\gamma"'] \\ D \arrow[r, hook, "i"'] & C \end{tikzcd}$$
kommutativ ist), also $c = i\left(\gamma\left(c\right)\right) = \gamma\left(c\right) \in D$.

Damit ist das Lemma bewiesen.

3.3. Lemma: Sei H eine irreduzible cokommutative Hopfalgebra. Sei R eine endlichdimensionale kommutative Algebra. Dann ist

$$G\left(R \otimes H\right) = \left\{g \in 1 \otimes 1 + \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes H \ \mid \ \Delta_{R \otimes H}\left(g\right) = g \otimes g\right\}.$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{Ra} R$ das Jacobson-Radikal von R.

Beweis: **a)** Wir zeigen zuerst:

$$G\left(R \otimes H\right) = \operatorname{Ker}\left(\begin{array}{c} G\left(R \otimes H\right) \to G\left(\left(R \diagup \operatorname{Ra} R\right) \otimes H\right), \\ \sum\limits_i r_i \otimes x_i \mapsto \sum\limits_i \overline{r_i} \otimes x_i \end{array}\right).$$

Wir zeigen sogar stärker, daß die Gruppe $G\left(\left(R \diagup \operatorname{Ra} R\right) \otimes H\right)$ nur ein Element hat.

Beweis: Es gibt endlich viele Körpererweiterungen $k \subseteq K_i$ mit $1 \leq i \leq n$ so, daß $R \diagup \operatorname{Ra} R \cong K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$ [242].

Nach Bemerkung 3.2. **2)** gilt:

$$\begin{aligned} G\left(\left(R \diagup \operatorname{Ra} R\right) \otimes H\right) &\cong G\left(\left(K_1 \times K_2 \times ... \times K_n\right) \otimes H\right) \\ &\cong G\left(K_1 \otimes H\right) \times G\left(K_2 \otimes H\right) \times ... \times G\left(K_n \otimes H\right). \end{aligned}$$

Für jede Körpererweiterung $k \subseteq K$ ist aber $K \otimes H$ als K-Hopfalgebra irreduzibel (denn H ist als k-Hopfalgebra irreduzibel, also punktiert und irreduzibel, und jetzt wenden wir die Folgerung 4.8. an, die wir erst wesentlich später beweisen werden), also $\left|G\left(K \otimes H\right)\right| = 1$. Hieraus folgt $\left|G\left(\left(R \diagup \operatorname{Ra} R\right) \otimes H\right)\right| = 1$, was zu beweisen war.

b) Nach **a)** folgt $G\left(R \otimes H\right) \subseteq \left\{x \in 1 \otimes 1 + \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes H \mid \Delta\left(x\right) = x \otimes x\right\}$, denn

$$\operatorname{Ker}\left(R \otimes H \to \left(R \diagup \operatorname{Ra} R\right) \otimes H\right) = \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes H$$

(denn Tensorieren über dem Grundkörper k ist exakt).

c) Jetzt werden wir zeigen, daß $\left\{x \in 1 \otimes 1 + \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes H \mid \Delta\left(x\right) = x \otimes x\right\} \subseteq G\left(R \otimes H\right)$ ist, also daß für jedes $x \in 1 \otimes 1 + \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes H$ mit $\Delta\left(x\right) = x \otimes x$ gilt: $x \in G\left(R \otimes H\right)$. In der Tat führt $x \in 1 \otimes 1 + \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes H$ auf $\varepsilon\left(x\right) \in 1 + \operatorname{Ra} R$; somit ist $\varepsilon\left(x\right)$ invertierbar. Wegen $x = \varepsilon\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} = \varepsilon\left(x\right) x$ ist aber $\varepsilon\left(x\right) = \varepsilon\left(x\right) \varepsilon\left(x\right)$, und wegen der Invertierbarkeit von $\varepsilon\left(x\right)$ folgt hieraus $\varepsilon\left(x\right) = 1$. Zusammen mit $\Delta\left(x\right) = x \otimes x$ ergibt dies $x \in G\left(R \otimes H\right)$. Also ist $\left\{x \in 1 \otimes 1 + \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes H \mid \Delta\left(x\right) = x \otimes x\right\} \subseteq G\left(R \otimes H\right)$ gezeigt.

Damit ist Lemma 3.3. bewiesen.

Bemerkung: Falls k algebraisch abgeschlossen ist, wird der Beweis von 3.3. noch einfacher, weil man $K_i = k$ für alle i hat, und damit auch ohne Verweis auf Folgerung 4.8 klar ist, daß $K_i \otimes H$ irreduzibel ist.

3.4. Satz: Sei $\operatorname{char} k = 0$. Sei H eine cokommutative irreduzible Hopfalgebra. Für jede endlichdimensionale kommutative Algebra R ist dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \exp : \left(\operatorname{Ra} R\right) \otimes P\left(H\right) &\to G\left(R \otimes H\right), \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

[242] Denn seien M_1, M_2, ..., M_t paarweise verschiedene maximale Ideale in R. Nach dem chinesischen Restsatz ist dann $R \diagup \bigcap_{i=1}^{t} M_i \cong \left(R \diagup M_1\right) \times \left(R \diagup M_2\right) \times ... \times \left(R \diagup M_t\right)$. Hieraus folgt erstmal, daß $\operatorname{Max} R$ endlich ist (denn für je t paarweise verschiedene maximale Ideale M_1, M_2, ..., M_t von R gilt

$$\dim R \geq \dim\left(R \diagup \bigcap_{i=1}^{t} M_i\right) = \dim\left(R \diagup M_1\right) + \dim\left(R \diagup M_2\right) + ... + \dim\left(R \diagup M_t\right),$$

wobei jeder Summand $\dim\left(R \diagup M_i\right)$ mindestens 1 beträgt; somit ist t beschränkt, da $\dim R < \infty$ ist). Da bekanntlich $\operatorname{Ra} R = \bigcap_{M \in \operatorname{Max} R} M$ gilt (laut Folgerung 6.8 von Kapitel I), gibt es also endlich viele maximale Ideale M_1, M_2, ..., M_t von R mit $\operatorname{Ra} R = \bigcap_{i=1}^{t} M_i$, also

$$R \diagup \operatorname{Ra} R = R \diagup \bigcap_{i=1}^{t} M_i \cong \left(R \diagup M_1\right) \times \left(R \diagup M_2\right) \times ... \times \left(R \diagup M_t\right).$$

Natürlich ist $R \diagup M_i$ eine Körpererweiterung von k für jedes i (denn R ist kommutativ).

bijektiv und ein in R und H natürlicher Isomorphismus von Mengen. (Diese Abbildung exp ist wohldefiniert, da alle Elemente von $(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)$ nilpotent sind[243].)

Beweis: **1)** Wir zeigen zuerst, daß die Abbildung

$$\exp : (\operatorname{Ra} R) \otimes H \to 1 \otimes 1 + (\operatorname{Ra} R) \otimes H,$$
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

bijektiv und natürlich in R und H ist. (Dies ist eine Erweiterung der vorher definierten Abbildung $\exp : (\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) \to G(R \otimes H)$. Wir bezeichnen aber trotzdem beide Abbildungen mit exp.)

Beweis: Die Abbildung

$$\log : 1 \otimes 1 + (\operatorname{Ra} R) \otimes H \to (\operatorname{Ra} R) \otimes H,$$
$$1 + x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

ist eine Umkehrabbildung. In der Tat sind beide Abbildungen exp und log wohldefiniert, da jedes $x \in (\operatorname{Ra} R) \otimes H$ nilpotent ist (denn $\operatorname{Ra} R$ ist nilpotent), und als formale Potenzreihen sind bekanntlich $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $1 + x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ Umkehrreihen.

2) Außerdem ist exp funktoriell in R, denn für jeden Algebrahomomorphismus $\varphi : R \to S$ zwischen zwei endlichdimensionalen kommutativen Algebren R und S gilt $\varphi(\operatorname{Ra} R) \subseteq \operatorname{Ra} S$ (denn für jede endlichdimensionale kommutative Algebra T ist bekanntlich

$$\operatorname{Ra} T = \{t \in T \mid t \text{ ist nilpotent}\} = \text{größtes nilpotentes Ideal in } T$$

), und $\varphi \otimes \operatorname{id} : R \otimes H \to S \otimes H$ ist ein Ringhomomorphismus. Ferner ist exp funktoriell in H, denn für jeden Algebrahomomorphismus $\varphi : H_1 \to H_2$ ist $\operatorname{id} \otimes \varphi : R \otimes H_1 \to R \otimes H_2$ ein Ringhomomorphismus.

3) Die Abbildung $\exp : (\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) \to G(R \otimes H)$ ist die Einschränkung der Abbildung $\exp : (\operatorname{Ra} R) \otimes H \to 1 \otimes 1 + (\operatorname{Ra} R) \otimes H$ auf $(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)$. Nur müssen wir, um sie zu definieren, erstmal beweisen, daß $\exp((\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)) \subseteq G(R \otimes H)$ ist, und um zu zeigen, daß sie eine Bijektion ist, müssen wir sogar zeigen, daß $\exp((\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)) = G(R \otimes H)$ gilt.

a) Wir zeigen zuerst, daß

$$(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) = \{x \in (\operatorname{Ra} R) \otimes H \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$$

ist. (Das Δ ist in dieser Gleichung ist natürlich als $\Delta_{R \otimes H}$ zu verstehen.)

Beweis: Die Sequenz

$$0 \longrightarrow P(H) \hookrightarrow H \xrightarrow{\Delta - f} H \otimes H$$

[243] Dies folgt daraus, daß alle Elemente von $(\operatorname{Ra} R) \otimes H$ nilpotent sind (denn gemäß Lemma 6.7 **(a)** ist $\operatorname{Ra} R$ ein nilpotentes Rechtsideal, weil R endlichdimensional ist).

ist exakt, wobei $f : H \to H \otimes H$ die durch $f(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ für alle $x \in H$ definierte lineare Abbildung ist.

Da Tensorieren über k exakt ist, folgt hieraus, daß auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) \hookrightarrow (\operatorname{Ra} R) \otimes H \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes (\Delta - f)} (\operatorname{Ra} R) \otimes H \otimes H$$

exakt ist. Wegen $(\operatorname{Ra} R) \otimes H \otimes H \subseteq R \otimes H \otimes H$ ist also auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) \hookrightarrow (\operatorname{Ra} R) \otimes H \xrightarrow{\iota \otimes (\Delta - f)} R \otimes H \otimes H$$

exakt, wobei $\iota : \operatorname{Ra} R \to R$ die kanonische Inklusion ist. Andererseits ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\operatorname{Ra} R) \otimes H \arrow[r, "\iota \otimes (\Delta - f)"] \arrow[dr, "\Delta_{R\otimes H} - f_{R\otimes H}"'] & R \otimes H \otimes H \arrow[d, "u", "\cong"'] \\ & (R \otimes H) \otimes_R (R \otimes H) \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei $f_{R\otimes H} : R \otimes H \to (R \otimes H) \otimes_R (R \otimes H)$ die durch $f(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ für alle $x \in R \otimes H$ definierte lineare Abbildung ist, und $u : R \otimes H \otimes H \to (R \otimes H) \otimes_R (R \otimes H)$ der durch $u(r \otimes h \otimes h') = (r \otimes h) \otimes_R (1 \otimes h')$ für alle $r \in R$, $h \in H$ und $h' \in H$ definierte Vektorraumisomorphismus ist.[244] Somit ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) \hookrightarrow (\operatorname{Ra} R) \otimes H \xrightarrow{\Delta_{R\otimes H} - f_{R\otimes H}} (R \otimes H) \otimes_R (R \otimes H)$$

exakt, und es folgt

$$(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) = \operatorname{Ker}\left((\Delta_{R\otimes H} - f_{R\otimes H}) \mid_{(\operatorname{Ra} R)\otimes H} \right) = \{ x \in (\operatorname{Ra} R) \otimes H \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \}.$$

b) Nach 3.3. gilt:

$$\{ g \in 1 \otimes 1 + (\operatorname{Ra} R) \otimes H \mid \Delta_{R\otimes H}(g) = g \otimes g \} = G(R \otimes H).$$

c) Wegen **1)**, **a)** und **b)** müssen wir jetzt nur noch beweisen: Für alle $x \in (\operatorname{Ra} R) \otimes H$ ist

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \iff \Delta(\exp x) = \exp x \otimes \exp x.$$

[244] Denn für alle $r \in \operatorname{Ra} R$ und $h \in H$ ist

$$\begin{aligned} u(\iota \otimes (\Delta - f))(r \otimes h) &= u(r \otimes (\Delta - f)(h)) = \underbrace{u(r \otimes \Delta(h))}_{\substack{=\Delta_{R\otimes H}(r\otimes h) \\ \text{nach Definition} \\ \text{von } \Delta_{R\otimes H}}} - \underbrace{u(r \otimes f(h))}_{=u(r\otimes(h\otimes 1 + 1 \otimes h))} \\ &= \Delta_{R\otimes H}(r \otimes h) - u(r \otimes (h \otimes 1 + 1 \otimes h)) = \Delta_{R\otimes H}(r \otimes h) - u(r \otimes h \otimes 1 + r \otimes 1 \otimes h) \\ &= \Delta_{R\otimes H}(r \otimes h) - (r \otimes h) \otimes_R (1 \otimes 1) - \underbrace{(r \otimes 1) \otimes_R (1 \otimes h)}_{\substack{=(1\otimes 1)\otimes_R (r \otimes h), \\ \text{denn } r \text{ ist für } \otimes_R \\ \text{ein Skalar}}} \\ &= \Delta_{R\otimes H}(r \otimes h) - f_{R\otimes H}(r \otimes h) = (\Delta_{R\otimes H} - f_{R\otimes H})(r \otimes h). \end{aligned}$$

Beweis: Da exp injektiv ist, ist $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ äquivalent zu $\exp(\Delta(x)) = \exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$. Nun ist

$$\begin{aligned}\exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x) &= \exp(x \otimes 1)\exp(1 \otimes x) \qquad \text{(da } x \otimes 1 \text{ und } 1 \otimes x \text{ kommutieren)} \\ &= (\exp x \otimes 1)(1 \otimes \exp x) = \exp x \otimes \exp x\end{aligned}$$

und $\exp(\Delta(x)) = \Delta(\exp x)$ (da Δ ein Algebrahomomorphismus ist). Somit ist $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \iff \Delta(\exp x) = \exp x \otimes \exp x$, was zu beweisen war.

Bemerkung: Die multiplikative Gruppenstruktur in $G(R \otimes H)$ in 3.4. induziert eine Gruppenstruktur auf $(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)$. Für alle $x, y \in (\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)$ ist die Multiplikation in dieser Gruppenstruktur gegeben durch

$$x \cdot y = \log(\exp x \exp y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}([[y,x],x] + [y,[y,x]]) + \text{höhere Terme},$$

wobei $[,]$ die Lieklammer der Liealgebra $(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)$ ist[245]. (Dies ist die sogenannte *Campbell-Hausdorff-Formel*, und man kann die höheren Terme auch explizit angeben.)

Fortsetzung des Beweises von 3.1.: Wir haben bereits gezeigt (in dem bereits gegebenen Teil des Beweises zu 3.1.), daß ein injektiver Hopfalgebrahomomorphismus $\psi : U(P(H)) \to H$ existiert, der $\psi(x) = x$ für alle $x \in P(H)$ erfüllt.

Wir werden nun beweisen, daß ψ surjektiv ist. Die Einschränkung

$$P(\psi) : P(U(P(H))) \to P(H)$$

der Abbildung ψ auf $P(U(P(H)))$ ist bijektiv (nach 2.13. **5)**). Wir wollen hieraus herleiten, daß die Abbildung ψ selber surjektiv ist. Dazu sei R eine kommutative Algebra. Setze $\widetilde{H} = U(P(H))$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\operatorname{Ra} R) \otimes P\left(\widetilde{H}\right) \arrow[r, "\cong", "\exp"'] \arrow[d, "\operatorname{id} \otimes P(\psi)"'] & G\left(R \otimes \widetilde{H}\right) \arrow[d, "\operatorname{id} \otimes \psi"] \\ (\operatorname{Ra} R) \otimes P(H) \arrow[r, "\cong", "\exp"'] & G(R \otimes H) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Da $P(\psi)$ bijektiv ist, folgt hieraus, daß die Abbildung $\operatorname{id} \otimes \psi : G\left(R \otimes \widetilde{H}\right) \to G(R \otimes H)$ bijektiv ist. Nach 3.2. **3)** folgt hieraus, daß ψ bijektiv ist. Damit ist Satz 3.1. bewiesen - bis auf die Tatsache, daß wir den Beweis eines Hilfsresultates schuldig geblieben sind (nämlich der Irreduzibilität der K-Hopfalgebra $K \otimes H$ für jede Körpererweiterung $k \subseteq K$; aber im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k ist dieses Resultat unnötig).

[245] Dabei ist die Liealgebra $(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)$ folgendermaßen definiert:

Für jede k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ und jede kommutative k-Algebra A sei die k-Liealgebra $A \otimes \mathfrak{g}$ definiert als der Vektorraum $A \otimes \mathfrak{g}$ mit der Lieklammer, die durch

$$[a \otimes v, b \otimes w] = ab \otimes [v,w] \qquad \text{für alle } a \in A,\ b \in A,\ v \in \mathfrak{g} \text{ und } w \in \mathfrak{g}$$

gegeben ist. (Daß diese Liealgebra $A \otimes \mathfrak{g}$ tatsächlich wohldefiniert ist, ist leicht nachzuweisen - hier wird die Kommutativität von A verwendet.) Angewandt auf $A = \operatorname{Ra} R$ und $\mathfrak{g} = P(H)$ ergibt diese Definition eine Liealgebra $(\operatorname{Ra} R) \otimes P(H)$.

4. Struktur cokommutativer Hopfalgebren in Charakteristik 0

Nachdem Satz 3.1. bewiesen ist, wenden wir uns nun einem weiteren Ziel zu: Wir wollen jetzt *alle* cokommutativen Hopfalgebren über einem Körper k mit $\operatorname{char} k = 0$ (nicht nur die irreduziblen wie in 3.1.) charakterisieren. Dazu werden wir zuerst den Begriff des Smashproduktes ausdehnen - indem wir nämlich in gewissen Fällen eine Hopfalgebrastruktur auf selbigem definieren:

4.1. Bemerkung: Sei H eine Hopfalgebra und sei G eine Gruppe. Sei H eine $k[G]$-Linksmodulalgebra mit Strukturabbildung

$$k[G] \otimes H \to H, \qquad g \otimes x \mapsto g \cdot x \text{ für alle } g \in G \text{ und } x \in H.$$

Angenommen, für alle $g \in G$ ist

$$\widehat{g} : H \to H, \qquad x \mapsto g \cdot x$$

ein Coalgebrahomomorphismus. Dann ist $H \sharp k[G]$ eine Hopfalgebra mit der in Kapitel I.3 definierten Algebrastruktur und mit komponentenweiser Coalgebrastruktur (das heißt, für alle $x \in H$ und $g \in G$ ist $\Delta(x\sharp g) = \left(x_{(1)}\sharp g\right) \otimes \left(x_{(2)}\sharp g\right)$ und $\varepsilon(x\sharp g) = \varepsilon(x)$), und mit der Antipode

$$S(x\sharp g) = \left(1\sharp g^{-1}\right)(S(x)\sharp 1) \qquad \text{für alle } x \in H \text{ und } g \in G.$$

Beweis: Nach Definition des Smash-Produktes gilt für alle $x, y \in H$ und $a, b \in G$ die Gleichung $(x\sharp a)(y\sharp b) = x(a \cdot y)\sharp ab$. Also ist $\Delta : H\sharp k[G] \to (H\sharp k[G]) \otimes (H\sharp k[G])$ ein Algebrahomomorphismus, denn für alle $x, y \in H$ und $a, b \in G$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta(x\sharp a)\Delta(y\sharp b) &= \left(\left(x_{(1)}\sharp a\right) \otimes \left(x_{(2)}\sharp a\right)\right)\left(\left(y_{(1)}\sharp b\right) \otimes \left(y_{(2)}\sharp b\right)\right) \\ &= \underbrace{\left(x_{(1)}\sharp a\right)\left(y_{(1)}\sharp b\right)}_{=x_{(1)}\left(a\cdot y_{(1)}\right)\sharp ab} \otimes \underbrace{\left(x_{(2)}\sharp a\right)\left(y_{(2)}\sharp b\right)}_{=x_{(2)}\left(a\cdot y_{(2)}\right)\sharp ab}\end{aligned}$$

und

$$\Delta((x\sharp a)(y\sharp b)) = \Delta(x(a \cdot y)\sharp ab) = \left(x_{(1)} \underbrace{(a \cdot y)_{(1)}}_{=a\cdot y_{(1)}} \sharp ab\right) \otimes x_{(2)} \underbrace{(a \cdot y)_{(2)}}_{=a\cdot y_{(2)}} \sharp ab$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{hierbei } (a \cdot y)_{(1)} = a \cdot y_{(1)} \text{ und } (a \cdot y)_{(2)} = a \cdot y_{(2)}, \text{ da } \widehat{a} \\ \text{ein Coalgebrahomomorphismus ist}\end{array}\right),$$

also $\Delta(x\sharp a)\Delta(y\sharp b) = \Delta((x\sharp a)(y\sharp b))$ (und $\Delta(1) = 1$ ist klar). Ferner ist $\varepsilon : H\sharp k[G] \to k$ ein Algebrahomomorphismus, denn für alle $x, y \in H$ und $a, b \in G$ ist

$$\begin{aligned}\varepsilon((x\sharp a)(y\sharp b)) &= \varepsilon(x(a \cdot y)\sharp ab) = \varepsilon(x(a \cdot y)) = \varepsilon(x)\varepsilon(a \cdot y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) \\ &\qquad \text{(hierbei } \varepsilon(a \cdot y) = \varepsilon(y), \text{ da } \widehat{a} \text{ ein Coalgebrahomomorphismus ist)} \\ &= \varepsilon(x\sharp a)\varepsilon(y\sharp b)\end{aligned}$$

(und wieder ist $\varepsilon(1) = 1$ klar).

Es bleibt, für die Abbildung S das Antipodenaxiom nachzuprüfen. Für alle $x \in H$ und $g \in G$ ist

$$\left(x_{(1)}\sharp g\right) S\left(x_{(2)}\sharp g\right) = \underbrace{\left(x_{(1)}\sharp g\right)\left(1\sharp g^{-1}\right)}_{=x_{(1)}\sharp gg^{-1}=x_{(1)}\sharp 1}\left(S\left(x_{(2)}\right)\sharp 1\right) = x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right)\sharp 1 = \varepsilon\left(x\right)1\sharp 1$$

und

$$S\left(x_{(1)}\sharp g\right)\left(x_{(2)}\sharp g\right) = \left(1\sharp g^{-1}\right)\underbrace{\left(S\left(x_{(1)}\right)\sharp 1\right)\left(x_{(2)}\sharp g\right)}_{=S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}\sharp g} = S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}\sharp\underbrace{g^{-1}g}_{=1} = \varepsilon\left(x\right)1\sharp 1;$$

somit erfüllt S das Antipodenaxiom, und der Beweis ist abgeschlossen.

Unser Vorhaben ist nun zu zeigen:

Sei k algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{char} k = 0$. Dann hat jede cokommutative Hopfalgebra die Form $H\sharp k\left[G\right]$ (wie in 4.1.), wobei G eine Gruppe und $H = U\left(\mathfrak{g}\right)$ für eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist.

Zuerst aber ein weiterer Begriff:

Definition: Sei C eine Coalgebra, und sei $D \subseteq C$ eine Untercoalgebra. Dann heißt D eine *irreduzible Komponente* von C, wenn D eine maximale irreduzible Untercoalgebra von C ist. ("Maximal" heißt hier, wie immer, "maximal bezüglich Inklusion".)

Wir zeigen einige Hilfsresultate über allgemeine (nicht unbedingt cokommutative) Coalgebren:

4.2. Lemma: Sei C eine Coalgebra. Sei $\left(C_i\right)_{i\in I}$ eine Familie von Untercoalgebren von C. Sei $E \subseteq \sum\limits_{i\in I} C_i$ eine einfache Untercoalgebra. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $E \subseteq C_i$.

Beweis: Da E endlichdimensional ist, dürfen wir o. B. d. A. annehmen, daß I endlich ist. Also müssen wir nur noch zeigen: Wenn $E \subseteq C_i + C_j$ für zwei $i, j \in I$ gilt, und $E \not\subseteq C_i$, dann gilt $E \subseteq C_j$.

Dies beweisen wir wie folgt: Da E einfach ist und $E \not\subseteq C_i$ ist, ist $E \cap C_i = 0$. Also gibt es ein $f \in C^*$ mit $f\mid_E = \varepsilon\mid_E$ und $f\mid_{C_i} = 0$.

Sei $x \in E$; dann gibt es $y \in C_i$ und $z \in C_j$ mit $x = y + z$. Also ist $x = x_{(1)}\underbrace{\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=f\left(x_{(2)}\right)} =$
$x_{(1)}f\left(x_{(2)}\right) = y_{(1)}\underbrace{f\left(y_{(2)}\right)}_{=0} + z_{(1)}f\left(z_{(2)}\right) = z_{(1)}f\left(z_{(2)}\right) \in C_j$. Damit ist $E \subseteq C_j$.

4.3. Satz: Sei C eine Coalgebra.

1) Jede Summe von paarweise verschiedenen einfachen Untercoalgebren von C ist direkt.

2) Jede irreduzible Untercoalgebra von C liegt in genau einer irreduziblen Komponente von C.

3) Jede Summe von paarweise verschiedenen irreduziblen Komponenten von C ist direkt.

4) Ist C cokommutativ, so ist $C = \bigoplus\limits_{\substack{D\subseteq C\\ \text{irreduzible}\\ \text{Komponente}\\ \text{von } C}} D.$

Beweis: **1)** Seien $\left(C_i\right)_{i\in I}$ einfache Untercoalgebren von C mit $C_i \neq C_j$ für alle $i \neq j$.

Annahme: Die Summe $\sum\limits_{i\in I} C_i$ sei nicht direkt. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $C_i \cap \sum\limits_{\substack{j\in I,\\ j\neq i}} C_j \neq 0$. Dann ist $C_i \subseteq \sum\limits_{\substack{j\in I,\\ j\neq i}} C_j$ (da C_i einfach ist). Nach 4.2. gibt es also ein $j \neq i$

mit $C_i \subseteq C_j$. Da C_j einfach ist, ist also $C_i = C_j$, im Widerspruch zu $C_i \neq C_j$. Also war die Annahme falsch, qed.

2) Sei D eine irreduzible Untercoalgebra von C. Wir müssen nur zeigen: $\sum\limits_{\substack{C' \text{ irreduzible} \\ \text{Coalgebra mit} \\ D \subseteq C' \subseteq C}} C'$ ist irreduzibel.

Beweis: Sei $E \subseteq D$ die eindeutig bestimmte einfache Untercoalgebra von D. Für alle irreduziblen Untercoalgebren C' von C mit $D \subseteq C' \subseteq C$ folgt dann, daß E die eindeutig bestimmte einfache Untercoalgebra von C' ist. Sei nun $\widetilde{E}$ eine einfache Untercoalgebra von $\sum\limits_{\substack{C' \text{ irreduzible} \\ \text{Coalgebra mit} \\ D \subseteq C' \subseteq C}} C'$. Nach 4.2. gibt es dann eine irreduzible Coalgebra C' mit $D \subseteq C' \subseteq C$ mit $\widetilde{E} \subseteq C'$. Aber da E die eindeutig bestimmte einfache Untercoalgebra von C' ist, bedeutet dies $\widetilde{E} = E$. Damit ist $\sum\limits_{\substack{C' \text{ irreduzible} \\ \text{Coalgebra mit} \\ D \subseteq C' \subseteq C}} C'$ irreduzibel, was zu beweisen war.

3) Seien $(C_i)_{i \in I}$ irreduzible Komponenten von C mit $C_i \neq C_j$ für alle $i \neq j$.

Annahme: Die Summe $\sum\limits_{i \in I} C_i$ sei nicht direkt. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $C_i \cap \sum\limits_{\substack{j \in I, \\ j \neq i}} C_j \neq 0$.

Sei E die eindeutig bestimmte einfache Untercoalgebra von C_i. Aus $C_i \cap \sum\limits_{\substack{j \in I, \\ j \neq i}} C_j \neq 0$ folgt dann $E \subseteq \sum\limits_{\substack{j \in I, \\ j \neq i}} C_j$ [246]. Nach 4.2. gibt es also ein $j \neq i$ mit $E \subseteq C_j$. Somit ist C_j die (nach **2)** eindeutig bestimmte!) irreduzible Komponente von C, die E enthält, aber das ist C_i auch. Also ist $C_i = C_j$, was einen Widerspruch zu $C_i \neq C_j$ darstellt. Die Annahme war damit falsch.

4) Wir müssen (wegen **3)**) nur zeigen, daß C eine Summe irreduzibler Untercoalgebren ist. Nach dem Endlichkeitssatz für Coalgebren reicht es aus, dies nur für den Fall von $\dim C < \infty$ zu zeigen. Wir nehmen also o. B. d. A. an, daß $\dim C < \infty$ ist. Dann ist C^* eine endlichdimensionale kommutative Algebra. Nach Bemerkung 4.4. weiter unten gibt es also endlich viele lokale[247] kommutative Algebren A_1, A_2, ..., A_n mit $C^* \cong A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ als Algebra. Dann ist $C \cong A_1^* \oplus A_2^* \oplus ... \oplus A_n^*$ als Coalgebren; dabei sind A_1^*, A_2^*, ..., A_n^* irreduzible Untercoalgebren von C (da für jede endlichdimensionale kommutative Algebra A gilt: genau dann ist A lokal, wenn A^* irreduzibel ist[248]).

[246] Denn wegen $C_i \cap \sum\limits_{\substack{j \in I, \\ j \neq i}} C_j \neq 0$ hat $C_i \cap \sum\limits_{\substack{j \in I, \\ j \neq i}} C_j$ eine einfache Untercoalgebra; diese muß dann eine einfache Untercoalgebra von C_i sein, also mit E übereinstimmen.

[247] Hierbei heißt ein Ring *lokal*, wenn er genau ein maximales Linksideal hat. (Hierzu äquivalent ist folgende Definition: Ein Ring heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Rechtsideal hat.)

[248] *Beweis:* Sei A eine endlichdimensionale kommutative Algebra. Nach der Definition von lokalen Ringen gilt: Genau dann ist A lokal, wenn A genau ein maximales Ideal hat (denn da A eine kommutative Algebra ist, bedeutet "Linksideal von A" das gleiche wie "Ideal von A"). Doch genau dann hat A genau ein maximales Ideal, wenn die Coalgebra A^* genau eine einfache Untercoalgebra hat (denn laut Bemerkung 4.5 **1)** (angewandt auf $C = A^*$) stehen die maximalen Ideale von $A^{**} \cong A$ in Bijektion zu den einfachen Untercoalgebren von A^*), also irreduzibel ist. Verknüpfen wir diese beiden Äquivalenzen, so erhalten wir: Genau dann ist A lokal, wenn die Coalgebra A^* irreduzibel ist. Qed.

4.4. Bemerkung: Nach Algebra II gilt für jede endlichdimensionale Algebra A: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ sowie direkt unzerlegbare A-Linksuntermoduln $A_i \subseteq A$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ so, daß $A = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n$ gilt und der Ring $\operatorname{End}_A(A_i)$ lokal ist für alle i.

Sei $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$, wobei $e_i \in A_i$ für jedes i ist. Dann ist $e_i^2 = e_i$ und $A_i = Ae_i$ für jedes i, also $\operatorname{End}_A(A_i) = \operatorname{End}_A(Ae_i) \cong e_i A e_i$ (denn es gibt den Isomorphismus $e_i A e_i \to \operatorname{End}_A(Ae_i)$, der jedes x auf die Rechtsmultiplikation mit x abbildet).

Falls A außerdem kommutativ ist, folgt: $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus ... \oplus Ae_n$, wobei Ae_i lokaler Ring mit Eins e_i ist für alle i.

Definition: Sei V ein Vektorraum.

(a) Für jeden Untervektorraum $X \subseteq V$ definieren wir einen Untervektorraum $X^\perp \subseteq V^*$ durch

$$X^\perp = \{f \in V^* \mid \text{für alle } x \in X \text{ ist } f(x) = 0\}.$$

(b) Für jeden Untervektorraum $Y \subseteq V^*$ definieren wir einen Untervektorraum $Y^\top \subseteq V$ durch

$$Y^\top = \{v \in V \mid \text{für alle } f \in Y \text{ ist } f(v) = 0\}.$$

Bemerkung: Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum, dann ist V kanonisch isomorph zu V^{**}, und wenn wir auf diese Weise V mit V^{**} identifizieren, wird für jeden Untervektorraum $Y \subseteq V^*$ der Vektorraum $Y^\top \subseteq V$ identisch mit dem Vektorraum $Y^\perp \subseteq V^{**}$. Doch wir wollen hier nicht V mit V^{**} identifizieren, weil wir nicht nur über endlichdimensionale Vektorräume V reden.

Wir beweisen jetzt ein Resultat, das die Aufgaben 1 und 2 von Übungsblatt 12 beinhaltet:

4.5. Bemerkung: Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Dann gilt:

1) Die Abbildungen

$$\{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\} \to \{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\},$$
$$X \mapsto X^\perp$$

und

$$\{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\} \to \{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\},$$
$$Y \mapsto Y^\top$$

sind zueinander inverse Bijektionen und induzieren Bijektionen zwischen der Teilmenge

$\{X \subseteq C \mid X \text{ ist eine einfache Untercoalgebra von } C\}$ von $\{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\}$

und der Teilmenge

$\{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist ein maximales Ideal von } C^*\}$ von $\{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\}$.

2) Das Jacobson-Radikal $\operatorname{Ra}(C^*)$ von C^* erfüllt $\operatorname{Ra}(C^*) = C_0^\perp$. (Hierbei bezeichnet C_0 das Coradikal von C.)

Beweis: **1)** Wir bezeichnen mit orc_1 die Abbildung

$$\{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\} \to \{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\},$$
$$X \mapsto X^\perp,$$

und wir bezeichnen mit orc_2 die Abbildung

$$\{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\} \to \{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\},$$
$$Y \mapsto Y^\top.$$

Die Abbildungen orc_1 und orc_2 sind zueinander inverse Bijektionen (dies ist ein fundamentales Resultat aus der Linearen Algebra, und benötigt nicht die Coalgebrastruktur auf C; es reicht aus, daß C ein endlichdimensionaler Vektorraum ist). Wir müssen jetzt zeigen, daß diese Bijektionen auch Bijektionen zwischen der Teilmenge

$$\{X \subseteq C \mid X \text{ ist eine einfache Untercoalgebra von } C\} \text{ von } \{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\}$$

und der Teilmenge

$$\{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist ein maximales Ideal von } C^*\} \text{ von } \{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\}.$$

induzieren. Das heißt, wir müssen zeigen, daß folgendes gilt: Für einen Untervektorraum $X \subseteq C$ ist genau dann X eine einfache Untercoalgebra von C, wenn $\operatorname{orc}_1 X$ ein maximales Ideal von C^* ist.

(a) Für einen Untervektorraum $X \subseteq C$ ist genau dann X eine Untercoalgebra von C, wenn $X^\perp$ ein Ideal von C^* ist. (Dieses Resultat werden wir erst in Abschnitt 5 beweisen, wo es als Satz 5.9 auftauchen wird. Aber es ist ein einfaches Resultat und der Leser sollte keine Mühe haben, es selber herzuleiten.)

(b) Jetzt werden wir zeigen: Für einen Untervektorraum $X \subseteq C$ ist genau dann X eine einfache Untercoalgebra von C, wenn $X^\perp$ ein maximales Ideal von C^* ist.

$\Longrightarrow$: Angenommen, X ist eine einfache Untercoalgebra von C. Gemäß **(a)** ist also $X^\perp$ ein Ideal von C^*. Es gilt $X^\perp \neq C^*$ (denn sonst wäre $X^\perp = C^*$ und damit $\left(X^\perp\right)^\top = (C^*)^\top$, also $X = \left(X^\perp\right)^\top = (C^*)^\top = 0$ im Widerspruch zur Einfachheit von X). Für jedes Ideal Y von C^*, das $X^\perp \subseteq Y$ erfüllt, gilt entweder $Y = C^*$ oder $Y = X^\perp$ [249]. Somit ist $X^\perp$ ein maximales Ideal von C^*.

$\Longleftarrow$: Angenommen, $X^\perp$ ist ein maximales Ideal von C^*. Gemäß **(a)** ist dann X eine Untercoalgebra von C. Es gilt $X \neq 0$ (denn sonst wäre $X = 0$ und damit $X^\perp = 0^\perp = C^*$, im Widerspruch dazu, daß $X^\perp$ ein maximales Ideal von C^* ist). Für jede Untercoalgebra Y von X gilt nun entweder $Y = 0$ oder $Y = X$ [250]. Somit ist X eine einfache Untercoalgebra von C.

Damit sind beide Richtungen bewiesen, und **(b)** ist gezeigt.

(c) Aus **(b)** folgt direkt die zu beweisende Aussage, denn $X^\perp$ ist nichts anderes als $\operatorname{orc}_1 X$.

---

[249] *Beweis:* Aus $X^\perp \subseteq Y$ folgt $\left(X^\perp\right)^\top \supseteq Y^\top$, was wegen $\left(X^\perp\right)^\top = X$ zu $X \supseteq Y^\top$ führt. Ferner ist $Y^\top$ eine Untercoalgebra von C (gemäß **(a)**, denn $\left(Y^\top\right)^\perp = Y$ ist ein Ideal von C^*), also eine Untercoalgebra von X (da $X \supseteq Y^\top$). Da X einfach ist, ist also entweder $Y^\top = 0$ oder $Y^\top = X$. Hieraus folgt entweder $\left(Y^\top\right)^\perp = 0^\perp$ oder $\left(Y^\top\right)^\perp = X^\perp$. Wegen $\left(Y^\top\right)^\perp = Y$ und $0^\perp = C^*$ heißt dies: entweder $Y = C^*$ oder $Y = X^\perp$.

[250] *Beweis:* Da Y eine Untercoalgebra von X ist, ist Y eine Untercoalgebra von C, und nach **(a)** ist also $Y^\perp$ ein Ideal von C^*. Aus $Y \subseteq X$ folgt $Y^\perp \supseteq X^\perp$, und da $X^\perp$ ein maximales Ideal von C^* ist, folgt hieraus entweder $Y^\perp = C^*$ oder $Y^\perp = X^\perp$ (denn $Y^\perp$ ist ein Ideal von C^*). Folglich ist entweder $\left(Y^\perp\right)^\top = (C^*)^\top$ oder $\left(Y^\perp\right)^\top = \left(X^\perp\right)^\top$. Wegen $\left(Y^\perp\right)^\top = Y$, $(C^*)^\top = 0$ und $\left(X^\perp\right)^\top = X$ bedeutet dies: entweder $Y = 0$ oder $Y = X$.

2) (a) Laut Folgerung 6.8 in Kapitel I gilt:

Ist R ein artinscher Ring, dann ist die Schnittmenge aller maximalen Ideale von R gleich $\mathrm{Ra}\,(R)$. Das heißt, $\bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{m} \text{ maximales} \\ \text{Ideal von } R}} \mathfrak{m} = \mathrm{Ra}\,(R)$.

(b) Jetzt beweisen wir 4.5. **2)**:

Laut **1)** induziert die Abbildung

$$\{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\} \to \{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\}\,,$$
$$X \mapsto X^\perp$$

eine Bijektion zwischen der Teilmenge

$$\{X \subseteq C \mid X \text{ ist eine einfache Untercoalgebra von } C\} \text{ von } \{X \subseteq C \mid X \text{ ist Untervektorraum}\}$$

und der Teilmenge

$$\{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist ein maximales Ideal von } C^*\} \text{ von } \{Y \subseteq C^* \mid Y \text{ ist Untervektorraum}\}\,.$$

Somit ist

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ maximales} \\ \text{Ideal von } C^*}} \mathfrak{m} = \bigcap_{\substack{X \text{ einfache} \\ \text{Untercoalgebra von } C}} X^\perp = \left(\underbrace{\sum_{\substack{X \text{ einfache} \\ \text{Untercoalgebra von } C}} X}_{=C_0} \right)^\perp \qquad \text{(nach Linearer Algebra)}$$
$$= C_0^\perp.$$

Wegen $\bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{m} \text{ maximales} \\ \text{Ideal von } C^*}} \mathfrak{m} = \mathrm{Ra}\,(C^*)$ (gemäß **(a)**, denn der Ring C^* ist artinsch[251]) ist also $\mathrm{Ra}\,(C^*) = C_0^\perp$, und damit ist 4.5. **2)** gezeigt.

Bemerkung: Übrigens gilt 4.5. **2)** auch für unendlichdimensionale Coalgebren C.

4.6. Satz: Seien C und D zwei Coalgebren.

1) Dann ist $(C \otimes D)_0 \subseteq C_0 \otimes D_0$.

2) Insbesondere ist $C \otimes D$ punktiert, falls C und D punktiert sind.

3) Insbesondere ist $C \otimes D$ punktiert und irreduzibel, falls C und D punktiert und irreduzibel sind.

Beweis: **1)** Nach dem Endlichkeitssatz für Coalgebren nehmen wir o. B. d. A. an, daß C und D endlichdimensional sind. Also gibt es eine kanonische Isomorphie $C^* \otimes D^* \cong (C \otimes D)^*$.

Sei $I = C_0^\perp \otimes D^* + C^* \otimes D_0^\perp \subseteq C^* \otimes D^*$; offenbar ist I ein Ideal in $C^* \otimes D^*$.

a) Wir zeigen jetzt, daß $(C \otimes D)_0 \subseteq I^\top$ ist (wobei I als Untervektorraum von $(C \otimes D)^*$ aufgefasst wird).

Beweis: Nach Bemerkung 4.5. **2)** ist $\mathrm{Ra}\,(C^*) = C_0^\perp$ und $\mathrm{Ra}\,(D^*) = D_0^\perp$; beide Radikale $\mathrm{Ra}\,(C^*) = C_0^\perp$ und $\mathrm{Ra}\,(D^*) = D_0^\perp$ sind nilpotent (da C und D endlichdimensional sind). Daher sind auch die Ideale $C_0^\perp \otimes D^*$ und $C^* \otimes D_0^\perp$ der Algebra $C^* \otimes D^* \cong (C \otimes D)^*$ nilpotent. Folglich ist auch das Ideal $I = C_0^\perp \otimes D^* + C^* \otimes D_0^\perp$

[251] Denn C^* ist eine endlichdimensionale k-Algebra.

nilpotent (denn die Summe zweier nilpotenter Ideale ist nilpotent). Für jedes maximale Ideal $M \lhd (C \otimes D)^*$ ist somit $I \subseteq M$ [252]. Also ist $M^\top \subseteq I^\top$ für jedes maximale Ideal $M \lhd (C \otimes D)^*$. Nach 4.5. **1)** bedeutet dies: $E \subseteq I^\top$ für jede einfache Untercoalgebra $E \subseteq C \otimes D$. Das heißt, $(C \otimes D)_0 \subseteq I^\top$.

b) Nun zeigen wir, daß $I^\top \subseteq C_0 \otimes D_0$.

Beweis: Zuerst werden wir beweisen, daß $I^\top \subseteq C_0 \otimes D$ gilt. Dazu betrachten wir ein beliebiges Element $x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \otimes d_i \in I^\top$, wobei $(d_i)_i$ linear unabhängig sind. Da $I^\top \subseteq \left(C_0^\perp \otimes D^*\right)^\top$ ist (denn $C_0^\perp \otimes D^* \subseteq I$), ist also $x \in \left(C_0^\perp \otimes D^*\right)^\top$, und daher gilt für alle $f \in C_0^\perp$ und alle $g \in D^*$ die Gleichung $0 = (f \otimes g)(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \otimes g(d_i)$. Wähle nun zu jedem l ein $g_l \in D^*$ mit $g_l(d_j) = \delta_{l,j}$ für alle j. Dann folgt also $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \otimes g_l(d_i) = f(c_l)$. Da dies für alle $f \in C_0^\perp$ gilt, ist also $c_l \in \left(C_0^\perp\right)^\top = C_0$ für alle l. Damit ist $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{c_i}_{\in C_0} \otimes \underbrace{d_i}_{\in D} \in C_0 \otimes D$. Somit ist $I^\top \subseteq C_0 \otimes D$ gezeigt. Analog beweist man $I^\top \subseteq C \otimes D_0$. Somit ist $I^\top \subseteq (C_0 \otimes D) \cap (C \otimes D_0) = C_0 \otimes D_0$ (dies folgt aus Lemma 5.8 **(b)** weiter unten), was zu beweisen war.

Aus **a)** und **b)** folgt $(C \otimes D)_0 \subseteq I^\top \subseteq C_0 \otimes D_0$, und damit ist **1)** bewiesen.

2) Wenn C und D punktiert sind, dann ist $(C \otimes D)_0$ punktiert, weil $C_0 \otimes D_0$ punktiert ist und $(C \otimes D)_0 \subseteq C_0 \otimes D_0$ gilt (nach **1)**).[253] Nach 4.2. folgt hieraus, daß $C \otimes D$ punktiert ist.

3) Analog zu **2)**.

Definition: Sei C eine Coalgebra.

Für alle $n \geq 0$ definieren wir rekursiv einen Untervektorraum C_n von C wie folgt: Wie immer sei C_0 das Coradikal von C. Für jedes $n \geq 1$ definiere man C_n durch $C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C)$.

Dann ist $(C_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen des Vektorraums C. Sie heißt die *Coradikalfiltrierung* von C. (Dieser Begriff ist ein wenig gefährlich, denn wir wissen noch nicht, daß $(C_n)_{n \geq 0}$ eine Filtrierung ist; aber dies ist die Aussage von Satz 4.7 und wird später bewiesen.)

Wir wollen jetzt ein Resultat zitieren, das wir erst in Abschnitt 5 beweisen werden:

4.7. Satz: Sei C eine Coalgebra. Dann ist die Coradikalfiltrierung $(C_n)_{n \geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung der Coalgebra C.

4.8. Folgerung: Sei C eine Coalgebra, und sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung. Dann ist $(K \otimes C)_0 \subseteq K \otimes C_0$.

---

[252] Dies folgt aus Folgerung 6.10 von Kapitel I (angewandt auf $R = (C \otimes D)^*$).

[253] *Anmerkung von Darij:* Hier wird verwendet, daß die Coalgebra $C_0 \otimes D_0$ punktiert ist. Hier ist ein Beweis für diese Tatsache:

Wir haben $C_0 = \sum\limits_{\substack{X \subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} X$. Da C punktiert ist, sind aber alle einfachen Untercoalgebren von C eindimensional. Daher ist C_0 eine Summe eindimensionaler Untercoalgebren. Analog ist D_0 eine Summe eindimensionaler Untercoalgebren. Somit ist auch $C_0 \otimes D_0$ eine Summe eindimensionaler Untercoalgebren (denn das Tensorprodukt zweier eindimensionaler Coalgebren ist wieder eindimensional). Nach 4.2. ist also jede einfache Untercoalgebra von $C_0 \otimes D_0$ in einer dieser eindimensionalen Coalgebren enthalten, und damit selber eindimensional (denn ein Untervektorraum eines eindimensionalen Vektorraumes ist stets selbst eindimensional oder 0). Daher ist $C_0 \otimes D_0$ punktiert.

Insbesondere ist $K \otimes C$ punktiert, falls C punktiert ist. Ferner ist $K \otimes C$ punktiert und irreduzibel, falls C punktiert und irreduzibel ist.

Beweis: Betrachte die Coradikalfiltrierung $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq ...$ von C. Nach 4.7. ist dann $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq ...$ eine Coalgebrafiltrierung von C, und somit $K \otimes C_0 \subseteq K \otimes C_1 \subseteq K \otimes C_2 \subseteq ...$ eine Coalgebrafiltrierung von $K \otimes C$. Nach 2.12. ist dann $(K \otimes C)_0 \subseteq K \otimes C_0$.

4.9. Folgerung: Seien C und D zwei Coalgebren. Sei $f : C \to D$ ein surjektiver Coalgebrahomomorphismus. Dann ist $f(C_0) \supseteq D_0$.

Beweis: Betrachte die Coradikalfiltrierung $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq ...$ von C. Dann ist $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq ...$ eine Coalgebrafiltrierung von C (laut Satz 4.7). Somit ist $f(C_0) \subseteq f(C_1) \subseteq f(C_2) \subseteq ...$ eine Coalgebrafiltrierung von D. Nach 2.12. ist dann $D_0 \subseteq f(C_0)$.

$4.9\frac{1}{2}$. Folgerung: Seien C und D zwei Coalgebren. Sei $f : C \to D$ ein Coalgebrahomomorphismus.

a) Ist C punktiert, so ist auch $f(C)$ punktiert.

b) Ist C punktiert und irreduzibel, so ist auch $f(C)$ punktiert und irreduzibel.

Beweis:[254] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß f surjektiv ist, d. h. daß $f(C) = D$ ist (sonst ersetzen wir einfach D durch $f(C)$). Nach 4.9. ist dann $f(C_0) \supseteq D_0$.

a) Jede einfache Untercoalgebra von D ist im Coradikal D_0 enthalten, also auch in $f(C_0)$ (da $f(C_0) \supseteq D_0$). Doch da C punktiert ist, sind alle einfachen Untercoalgebren von C eindimensional, und somit ist C_0 eine Summe von eindimensionalen Coalgebren (denn $C_0 = \sum\limits_{\substack{E \subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} E$). Also ist auch $f(C_0)$ eine Summe von eindimensionalen Coalgebren (denn das Bild einer eindimensionalen Coalgebra unter f ist entweder eindimensional oder 0). Sei nun E eine einfache Untercoalgebra von D. Wie wir wissen, ist dann $E \subseteq f(C_0)$. Da $f(C_0)$ eine Summe von eindimensionalen Coalgebren ist, gibt es (laut 4.2.) also eine eindimensionale Coalgebra $G \subseteq f(C_0)$ mit $E \subseteq G$. Da G eindimensional ist, muß also E eindimensional sein (denn $E \neq 0$). Damit ist gezeigt, daß jede einfache Untercoalgebra von D eindimensional ist; daher ist D punktiert, was zu beweisen war.

b) Da C irreduzibel ist, hat C genau eine einfache Untercoalgebra. Wegen $C_0 = \sum\limits_{\substack{E \subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} E$ muß also C_0 diese einfache Untercoalgebra sein. Da C punktiert ist, ist jede einfache Untercoalgebra von C eindimensional; also ist C_0 eindimensional. Daher ist $f(C_0)$ eindimensional oder gleich 0 (denn das Bild einer eindimensionalen Coalgebra unter f ist entweder eindimensional oder 0). Wegen $f(C_0) \supseteq D_0$ ist also auch D_0 eindimensional oder gleich 0. Doch $D_0 \neq 0$ (denn sonst hätte D keine einfachen Untercoalgebren, weil $D_0 = \sum\limits_{\substack{F \subseteq D \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} F$). Also ist D_0 eindimensional.

Da jede einfache Untercoalgebra von D in D_0 enthalten ist (denn $D_0 = \sum\limits_{\substack{F \subseteq D \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} F$),

[254] Der nachfolgende Beweis stammt von mir (Darij) und ist vermutlich unnötig lang.

muß also jede einfache Untercoalgebra von D gleich D_0 sein (denn ein eindimensionaler Vektorraum enthält nur zwei Vektorräume: sich selbst und 0). Ferner ist D_0 selbst einfach (weil eindimensional). Somit besitzt D genau eine einfache Untercoalgebra, nämlich D_0. Daher ist D irreduzibel, und nach **a)** auch punktiert, was zu beweisen war.

4.10. Bemerkung: Sei G eine Gruppe. Sei H eine Hopfalgebra. Eine $k[G]$-Linksmodulalgebrastruktur auf H mit den Axiomen von 4.1. entspricht eineindeutig einer Vorgabe eines Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{Hopfaut} H$ (wobei wir mit $\operatorname{Hopfaut} H$ die Gruppe aller Hopfalgebraautomorphismen von H bezeichnen). Ausgehend von der $k[G]$-Linksmodulalgebrastruktur auf H erhält man den Gruppenhomomorphismus ρ durch $\rho(g)(x) = g \cdot x$ für alle $g \in G$ und $x \in H$.

Insbesondere induziert für jede Liealgebra $\mathfrak{g}$ jeder Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \operatorname{Lieaut} \mathfrak{g}$ [255] einen Gruppenhomomorphismus $G \to \operatorname{Lieaut} \mathfrak{g} \to \operatorname{Hopfaut}(U(\mathfrak{g}))$.

Falls $\operatorname{char} k = 0$, dann gilt nach 2.13. **5)** aber $\operatorname{Lieaut} \mathfrak{g} \cong \operatorname{Hopfaut}(U(\mathfrak{g}))$.

4.11. Satz (Cartier-Kostant): Sei H eine Hopfalgebra. Sei $G = G(H)$. Für jedes $g \in G$ sei H^g die irreduzible Komponente von H, die g enthält. Sei $H' = \sum_{g \in G} H^g$.

1) Dann ist

$$\rho : G \to \operatorname{Hopfaut} H', \qquad \rho(g)(x) = gxg^{-1} \qquad \text{für alle } g \in G \text{ und } x \in H',$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Ferner ist

$$H^1 \sharp k[G] \to H', \qquad x \sharp g \mapsto xg$$

ein Hopfalgebraisomorphismus, wobei die Hopfalgebrastruktur auf $H^1 \sharp k[G]$ wie in Bemerkung 4.1. vermöge ρ definiert ist.

2) Falls H punktiert und cokommutativ ist, so gilt $H^1 \sharp k[G] \cong H$.

Beweis: **1)** Wir wollen nicht beweisen, daß ρ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist, denn dies ist beinahe trivial.

a) Wir zeigen zuerst: Für alle $g \in G$ ist $H^g = gH^1 = H^1 g$.

Beweis: Sei $g \in G$, und sei

$$\phi : H \to H, \qquad x \mapsto gx.$$

Dann ist ϕ ein Coalgebraisomorphismus. Also ist $\phi(H^1)$ eine irreduzible Komponente von H, die $\phi(1)$ enthält (denn H^1 ist eine irreduzible Komponente von H, die 1 enthält). Wegen $\phi(1) = g$ bedeutet dies, daß $\phi(H^1)$ eine irreduzible Komponente von H ist, die g enthält. Also ist $\phi(H^1) = H^g$. Das heißt, $gH^1 = H^g$. Ebenso ist $H^1 g = H^g$.

b) Jetzt zeigen wir: Für alle $g \in G$ ist $S(H^g) \subseteq H^{g^{-1}}$.

Beweis: Da $S : H^{\mathrm{cop}} \to H$ ein Coalgebrahomomorphismus ist, ist $S(H^g)$ punktiert und irreduzibel (nach $4.9\frac{1}{2}$., denn H^g ist punktiert und irreduzibel) und erfüllt $g^{-1} = S(g) \in S(H^g)$. Daher ist $S(H^g) \subseteq H^{g^{-1}}$.

c) Nun zeigen wir, daß $(H^1)^2 = H^1$ ist (wobei $(H^1)^2 = \langle xy \mid x, y \in H^1 \rangle$ als Vektorraum).

[255] Hierbei bezeichnen wir mit $\operatorname{Lieaut} \mathfrak{g}$ die Gruppe aller Liealgebraautomorphismen der Liealgebra $\mathfrak{g}$.

Beweis: Da H^1 punktiert und irreduzibel ist, folgt aus 4.6., daß $H^1 \otimes H^1$ punktiert und irreduzibel ist. Nach $4.9\frac{1}{2}$. **b)** ist also $(H^1)^2 = \operatorname{Im}\left(H^1 \otimes H^1 \xrightarrow{\mu} H\right)$ punktiert und irreduzibel (denn μ ist ein Coalgebrahomomorphismus). Da $1 \in (H^1)^2$ ist (dies folgt aus $1 \in H^1$), folgt hieraus $(H^1)^2 \subseteq H^1$. Also ist $(H^1)^2 = H^1$ (denn $1 \in H^1$ ergibt $H^1 = H^1 \cdot \underbrace{1}_{\in H^1} \subseteq H^1 \cdot H^1 = (H^1)^2$).

d) Nach 4.3. **3)** ist $H' = \bigoplus_{g \in G} H^g$. Nach **a)** ist $H^1 \otimes kg \xrightarrow{\mu} H^g$ ein Isomorphismus für jedes $g \in G$. Nach **a)**, **b)** und **c)** sind H^1 und H' Unterhopfalgebren von H (denn wegen **a)** gilt $H^a H^b = a \underbrace{H^1 b}_{=bH^1} H^1 = ab \underbrace{(H^1)^2}_{\substack{=H^1 \\ (\text{nach } \mathbf{c)})}} = abH^1 = H^{ab}$ für alle $a, b \in G$).

Also ist

$$H^1 \otimes k[G] \to H', \qquad x \otimes g \mapsto xg$$

ein Vektorraumisomorphismus. Durch Übertragung der Hopfalgebrastruktur von H' auf $H^1 \otimes k[G]$ ergibt sich die Hopfalgebrastruktur $H^1 \sharp k[G]$, denn für alle $x \in H$ und $g \in G$ ist $\Delta(xg) = x_{(1)}g \otimes x_{(2)}g$, und für alle $x, y \in H^1$ und $a, b \in G$ ist $(xa)(yb) = x \underbrace{(aya^{-1})}_{\in H^1 \text{ nach } \mathbf{a)}} ab$. Damit ist **1)** gezeigt.

2) Folgt aus **1)** nach 4.3. **4)**.

4.12. Satz (Cartier-Kostant): Sei k algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{char} k = 0$. Sei H eine cokommutative Hopfalgebra, sei $G = G(H)$ als Gruppe, und sei $\mathfrak{g} = P(H)$ als Liealgebra. Definiere einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to \operatorname{Lieaut} \mathfrak{g}, \qquad \rho(g)(x) = gxg^{-1} \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{g} \text{ und } g \in G.$$

Dann ist

$$U(\mathfrak{g}) \sharp k[G] \to H$$

ein Hopfalgebraisomorphismus, wobei die Hopfalgebrastruktur auf $U(\mathfrak{g}) \sharp k[G]$ wie in Bemerkung 4.10. vermöge ρ definiert ist.

Beweis: Folgt aus 4.11. und 3.1.. (Man verwendet dabei 2.11. **3)**, um zu sehen, daß H punktiert ist.)

4.13. Folgerung: Sei k algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{char} k = 0$. Sei H eine cokommutative Hopfalgebra mit $\dim H < \infty$. Dann ist $H \cong k[G(H)]$.

Beweis: Dies folgt aus 4.12, sobald wir zeigen können, daß $P(H) = 0$ ist. Warum ist $P(H) = 0$?

Dies folgt aus einer Übungsaufgabe, die folgendes aussagt: Wenn H eine Bialgebra über einem Körper k der Charakteristik 0 ist, und $x \in P(H)$ ist, dann sind die Elemente $1, x, x^2, x^3, \ldots$ von H linear unabhängig.

Bemerkung: Einen anderen Beweis von Folgerung 4.13 werden in Kapitel III, 3.12 geben.

5. Hilfssätze über die duale Algebra einer Coalgebra[256]

[256] Dieser Abschnitt stammt von mir (Darij).

In diesem Abschnitt werden wir einige elementare Eigenschaften der dualen Algebra einer endlichdimensionalen Coalgebra zeigen, und die Beweise von einigen Sätzen nachholen, die wir weiter oben verwendet aber nicht bewiesen haben (insbesondere 4.7).

Lemmata aus der Linearen Algebra

Zunächst erinnern wir uns an eine Notation, die wir im vorigen Abschnitt eingeführt haben:

Definition: Sei V ein Vektorraum.

(a) Für jeden Untervektorraum $X \subseteq V$ definieren wir einen Untervektorraum $X^{\perp} \subseteq V^*$ durch

$$X^{\perp} = \{ f \in V^* \ \mid \ \text{für alle } x \in X \text{ ist } f(x) = 0 \} .$$

(b) Für jeden Untervektorraum $Y \subseteq V^*$ definieren wir einen Untervektorraum $Y^{\top} \subseteq V$ durch

$$Y^{\top} = \{ v \in V \ \mid \ \text{für alle } f \in Y \text{ ist } f(v) = 0 \} .$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, daß

- für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V und jeden Untervektorraum $X \subseteq V$ gilt: $\left(X^{\perp}\right)^{\top} = X$.
- für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V und jeden Untervektorraum $Y \subseteq V^*$ gilt: $\left(Y^{\top}\right)^{\perp} = Y$.

Sind V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume, dann können wir den Dualraum $(V \otimes W)^*$ mit dem Tensorprodukt $V^* \otimes W^*$ identifizieren. Insbesondere betrachten wir jedes Element von $V^* \otimes W^*$ als ein Element von $(V \otimes W)^*$, also als eine lineare Abbildung $V \otimes W \to k$.

Wir zeigen nun erst einmal ein Lemma über Vektorräume:

5.1. Lemma: Seien V, W, V' und W' vier Vektorräume, und seien $\phi : V \to V'$ und $\psi : W \to W'$ zwei lineare Abbildungen.

(a) Für die Abbildung $\phi \otimes \psi : V \otimes W \to V' \otimes W'$ gilt dann

$$\operatorname{Ker}(\phi \otimes \psi) = \operatorname{Ker} \phi \otimes W + V \otimes \operatorname{Ker} \psi,$$

wobei wir $\operatorname{Ker} \phi \otimes W$ und $V \otimes \operatorname{Ker} \psi$ als Untervektorräume von $V \otimes W$ betrachten.

(b) Für die Abbildung $\phi \otimes \psi : V \otimes W \to V' \otimes W'$ gilt ferner

$$\operatorname{Ker} \phi \otimes \operatorname{Ker} \psi = (\operatorname{Ker} \phi \otimes W) \cap (V \otimes \operatorname{Ker} \psi) ,$$

wobei wir $\operatorname{Ker} \phi \otimes \operatorname{Ker} \psi$, $\operatorname{Ker} \phi \otimes W$ und $V \otimes \operatorname{Ker} \psi$ als Untervektorräume von $V \otimes W$ betrachten.

Es gibt viele Methoden, dieses Lemma zu beweisen. Wir wollen hier die abstrakteste geben; sie verwendet im Wesentlichen folgende allgemeine Aussage:

5.2. Lemma: Sei R ein Ring, und sei

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "u_1"'] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "u_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "u_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "v_1"'] & B_2 \arrow[r, "b_2"] \arrow[d, "v_2"'] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "v_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "c_1"] & C_2 \arrow[r, "c_2"] & C_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{II.5.1}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Linksmoduln, dessen Zeilen und dessen Spalten allesamt exakte Sequenzen von R-Linksmoduln sind.

(a) Dann ist

$$\operatorname{Ker}(c_2 \circ v_2) = \operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2) = b_1(B_1) + u_2(A_2).$$

(b) Ferner ist

$$(b_1 \circ u_1)(A_1) = (u_2 \circ a_1)(A_1) = \operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2.$$

Beweis von Lemma 5.2: **(a)** Es gilt $\operatorname{Ker}(c_2 \circ v_2) = \operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2)$ (denn $c_2 \circ v_2 = v_3 \circ b_2$). Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2) = b_1(B_1) + u_2(A_2)$ ist. Da $b_1(B_1) + u_2(A_2) \subseteq \operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2)$ offensichtlich ist (denn

$$\begin{aligned}
&(v_3 \circ b_2)(b_1(B_1) + u_2(A_2)) \\
&= v_3(b_2(b_1(B_1) + u_2(A_2))) = \underbrace{v_3(b_2(b_1(B_1)))}_{=v_3((b_2 \circ b_1)(B_1))} + \underbrace{v_3(b_2(u_2(A_2)))}_{=(v_3 \circ b_2 \circ u_2)(A_2)} \\
&= v_3\left(\underbrace{(b_2 \circ b_1)}_{=0}(B_1)\right) + \left(v_3 \circ \underbrace{b_2 \circ u_2}_{=u_3 \circ a_2}\right)(A_2) = \underbrace{v_3(0(B_1))}_{=0} + \left(\underbrace{v_3 \circ u_3}_{=0} \circ a_2\right)(A_2) \\
&= 0 + (0 \circ a_2)(A_2) = 0
\end{aligned}$$

), müssen wir hierzu nur noch zeigen, daß $\operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2) \subseteq b_1(B_1) + u_2(A_2)$ gilt.

Sei $t \in \operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2)$ beliebig. Dann ist $(v_3 \circ b_2)(t) = 0$, also $v_3(b_2(t)) = 0$ und damit $b_2(t) \in \operatorname{Ker} v_3 = u_3(A_3)$ (denn die Spalten des Diagramms (II.5.1) sind exakt). Es gibt also ein $x \in A_3$ mit $b_2(t) = u_3(x)$. Da $a_2 : A_2 \to A_3$ surjektiv ist (denn die Zeilen des Diagramms (II.5.1) sind exakt), ist $x = a_2(x')$ für irgendein $x' \in A_2$. Nun ist

$$b_2(t - u_2(x')) = \underbrace{b_2(t)}_{=u_3(x)} - \underbrace{b_2(u_2(x'))}_{=(b_2 \circ u_2)(x')} = u_3(x) - \underbrace{(b_2 \circ u_2)}_{=u_3 \circ a_2}(x') = u_3(x) - u_3\left(\underbrace{a_2(x')}_{=x}\right) = 0,$$

also $t - u_2(x') \in \operatorname{Ker} b_2 = b_1(B_1)$ (denn die Zeilen des Diagramms (II.5.1) sind exakt). Daher ist $t = \underbrace{t - u_2(x')}_{\in b_1(B_1)} + \underbrace{u_2(x')}_{\in u_2(A_2)} \in b_1(B_1) + u_2(A_2)$. Da wir dies für jedes $t \in \operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2)$ gezeigt haben, erhalten wir also $\operatorname{Ker}(v_3 \circ b_2) \subseteq b_1(B_1) + u_2(A_2)$. Damit ist der Beweis von Lemma 5.2 **(a)** vollständig.

(b) Aus $b_1 \circ u_1 = u_2 \circ a_1$ folgt sofort $(b_1 \circ u_1)(A_1) = (u_2 \circ a_1)(A_1)$. Es bleibt also nur noch zu beweisen, daß $(u_2 \circ a_1)(A_1) = \operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2$ gilt. Da $(u_2 \circ a_1)(A_1) \subseteq \operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2$ offensichtlich ist (denn wegen

$$b_2((u_2 \circ a_1)(A_1)) = \left(\underbrace{b_2 \circ u_2}_{=u_3 \circ a_2} \circ a_1\right)(A_1) = \left(u_3 \circ \underbrace{a_2 \circ a_1}_{=0}\right)(A_1) = (u_3 \circ 0)(A_1) = 0$$

ist $(u_2 \circ a_1)(A_1) \subseteq \operatorname{Ker} b_2$, und wegen

$$v_2((u_2 \circ a_1)(A_1)) = \left(\underbrace{v_2 \circ u_2}_{=0} \circ a_1\right)(A_1) = (0 \circ a_1)(A_1) = 0$$

ist $(u_2 \circ a_1)(A_1) \subseteq \operatorname{Ker} v_2)$, müssen wir hierzu nur noch nachweisen, daß $\operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2 \subseteq (u_2 \circ a_1)(A_1)$ gilt.

Sei $t \in \operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2$ beliebig. Dann ist $t \in \operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2 \subseteq \operatorname{Ker} b_2 = b_1(B_1)$ (da die Zeilen des Diagramms (II.5.1) exakt sind). Folglich gibt es ein $x \in B_1$ mit $t = b_1(x)$. Wegen $b_1(x) = t \in \operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2 \subseteq \operatorname{Ker} v_2$ ist nun $v_2(b_1(x)) = 0$, also $0 = v_2(b_1(x)) = \underbrace{(v_2 \circ b_1)}_{=c_1 \circ v_1}(x) = c_1(v_1(x))$, und damit $0 = v_1(x)$ (denn die Abbildung c_1 ist injektiv, weil die Zeilen des Diagramms (II.5.1) exakt sind). Das heißt, $x \in \operatorname{Ker} v_1 = u_1(A_1)$ (da die Spalten des Diagramms (II.5.1) exakt sind). Somit ist

$$t = b_1\left(\underbrace{x}_{\in u_1(A_1)}\right) \in b_1(u_1(A_1)) = (b_1 \circ u_1)(A_1) = (u_2 \circ a_1)(A_1).$$

Da dies für alle $t \in \operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2$ gilt, ist damit gezeigt, daß $\operatorname{Ker} b_2 \cap \operatorname{Ker} v_2 \subseteq (u_2 \circ a_1)(A_1)$ gilt. Der Beweis von Lemma 5.2 **(b)** ist also vollständig.

Beweis von Lemma 5.1: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß die Abbildung $\psi : W \to W'$ surjektiv ist (sonst ersetzen wir einfach den Vektorraum W' durch $\psi(W)$; dabei nutzen wir aus, daß das Tensorprodukt der Identitätsabbildung $V' \to V'$ mit der kanonischen Inklusion $\psi(W) \to W'$ eine Injektion $V' \otimes \psi(W) \to V' \otimes W'$ ist).

Sei $V_0 = \operatorname{Ker} \phi$ und $W_0 = \operatorname{Ker} \psi$, und seien $i_V : V_0 \to V$ und $i_W : W_0 \to W$ die kanonischen Inklusionen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_0 \otimes W_0 \arrow[r, "\operatorname{id} \otimes i_W"] \arrow[d, "i_V \otimes \operatorname{id}"'] & V_0 \otimes W \arrow[r, "\operatorname{id} \otimes \psi"] \arrow[d, "i_V \otimes \operatorname{id}"'] & V_0 \otimes W' \arrow[r] \arrow[d, "i_V \otimes \operatorname{id}"'] & 0 . \\
0 \arrow[r] & V \otimes W_0 \arrow[r, "\operatorname{id} \otimes i_W"] \arrow[d, "\phi \otimes \operatorname{id}"'] & V \otimes W \arrow[r, "\operatorname{id} \otimes \psi"] \arrow[d, "\phi \otimes \operatorname{id}"'] & V \otimes W' \arrow[r] \arrow[d, "\phi \otimes \operatorname{id}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & V' \otimes W_0 \arrow[r, "\operatorname{id} \otimes i_W"] & V' \otimes W \arrow[r, "\operatorname{id} \otimes \psi"] & V' \otimes W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{II.5.2}$$

Die Zeilen dieses Diagramms sind allesamt exakte Sequenzen[257], und ebenso die Spalten[258]. Somit läßt sich Lemma 5.2 auf dieses kommutative Diagramm anwenden; aus Lemma 5.2 **(a)** folgt

$$\operatorname{Ker}((\operatorname{id} \otimes \psi) \circ (\phi \otimes \operatorname{id})) = \operatorname{Ker}((\phi \otimes \operatorname{id}) \circ (\operatorname{id} \otimes \psi)) = (\operatorname{id} \otimes i_W)(V \otimes W_0) + (i_V \otimes \operatorname{id})(V_0 \otimes W).$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} \underbrace{(\phi \otimes \psi)}_{=(\phi \otimes \operatorname{id}) \circ (\operatorname{id} \otimes \psi)} &= \operatorname{Ker}((\phi \otimes \operatorname{id}) \circ (\operatorname{id} \otimes \psi)) = \underbrace{(\operatorname{id} \otimes i_W)(V \otimes W_0)}_{\substack{= V \otimes W_0 \text{ (denn } \operatorname{id} \otimes i_W \text{ ist} \\ \text{nur eine Inklusionsabbildung)}}} + \underbrace{(i_V \otimes \operatorname{id})(V_0 \otimes W)}_{\substack{= V_0 \otimes W \text{ (denn } i_V \otimes \operatorname{id} \text{ ist} \\ \text{nur eine Inklusionsabbildung)}}} \\
&= V \otimes \underbrace{W_0}_{=\operatorname{Ker} \psi} + \underbrace{V_0}_{=\operatorname{Ker} \phi} \otimes W = V \otimes \operatorname{Ker} \psi + \operatorname{Ker} \phi \otimes W.
\end{aligned}$$

---

[257] denn $0 \longrightarrow W_0 \xrightarrow{i_W} W \xrightarrow{\psi} W' \longrightarrow 0$ ist eine exakte Sequenz, und über dem Körper k ist Tensorieren exakt

[258] denn $V_0 \xrightarrow{i_V} V \xrightarrow{\phi} V'$ ist eine exakte Sequenz, und über dem Körper k ist Tensorieren exakt

Damit ist Lemma 5.1 **(a)** bewiesen.

Aus Lemma 5.2 **(b)** (angewandt auf das Diagramm (II.5.2)) folgt indes

$$((\mathrm{id} \otimes i_W) \circ (i_V \otimes \mathrm{id}))\,(V_0 \otimes W_0) = ((i_V \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes i_W))\,(V_0 \otimes W_0) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \psi) \cap \operatorname{Ker}(\phi \otimes \mathrm{id})\,.$$

Nun ist $((i_V \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes i_W))\,(V_0 \otimes W_0) = V_0 \otimes W_0$ (denn $i_V \otimes \mathrm{id}$ und $\mathrm{id} \otimes i_W$ sind einfach die Inklusionsabbildungen). Nach Lemma 5.1 **(a)** (angewandt auf W und id statt W' bzw. ψ) ist indessen $\operatorname{Ker}(\phi \otimes \mathrm{id}) = \operatorname{Ker}\phi \otimes W + V \otimes \underbrace{\operatorname{Ker}\mathrm{id}}_{=0} = \operatorname{Ker}\phi \otimes W$.

Analog ist $\operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \psi) = V \otimes \operatorname{Ker}\psi$. Wir haben also

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\phi \otimes \operatorname{Ker}\psi = V_0 \otimes W_0 &= ((i_V \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes i_W))\,(V_0 \otimes W_0) \\ &= \underbrace{\operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \psi)}_{=V \otimes \operatorname{Ker}\psi} \cap \underbrace{\operatorname{Ker}(\phi \otimes \mathrm{id})}_{=\operatorname{Ker}\phi \otimes W} = (V \otimes \operatorname{Ker}\psi) \cap (\operatorname{Ker}\phi \otimes W) \\ &= (\operatorname{Ker}\phi \otimes W) \cap (V \otimes \operatorname{Ker}\psi)\,.\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 5.1 **(b)** gezeigt.

Der Beweis von Lemma 5.1 ist nunmehr vollständig.

Ein weiteres Lemma, das wir aus 5.1 herleiten werden, ist folgendes:

5.3. Lemma: Seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume. Sei A ein Untervektorraum von V, und sei B ein Untervektorraum von W. Wir betrachten $A \otimes W$, $V \otimes B$ und $A \otimes B$ als Untervektorräume von $V \otimes W$.

(a) Dann gilt

$$(A \otimes B)^\perp = A^\perp \otimes W^* + V^* \otimes B^\perp$$

als Untervektorräume von $(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$.

(b) Ferner gilt

$$(V \otimes B + A \otimes W)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp$$

als Untervektorräume von $(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$.

Beweis von Lemma 5.3: Seien $i_V : A \to V$ und $i_W : B \to W$ die kanonischen Inklusionen.

Wir haben $A^\perp = \operatorname{Ker} i_V^*$ [259]. Analog ist $B^\perp = \operatorname{Ker} i_W^*$.

Da $i_V : A \to V$ und $i_W : B \to W$ die kanonischen Inklusionen sind, ist $i_V \otimes i_W$ die kanonische Inklusion von $A \otimes B$ nach $V \otimes W$. Also ist $(i_V \otimes i_W)\,(A \otimes B) = A \otimes B$.

Für die Abbildung $i_V^* \otimes i_W^* : V^* \otimes W^* \to A^* \otimes B^*$ gilt

$$\operatorname{Ker}(i_V^* \otimes i_W^*) = (A \otimes B)^\perp$$

[259] denn für jedes $f \in V^*$ gilt folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\begin{aligned}(f \in \operatorname{Ker} i_V^*) &\Longleftrightarrow \left(\underbrace{i_V^*(f)}_{=f \circ i_V} = 0\right) \Longleftrightarrow (f \circ i_V = 0) \Longleftrightarrow \left(f\mid_{i_V(A)} = 0\right) \Longleftrightarrow (f\mid_A = 0) \\ &\qquad (\text{denn } i_V(A) = A, \text{ da } i_V \text{ die Inklusion ist}) \\ &\Longleftrightarrow (f(x) = 0 \text{ für alle } x \in A) \Longleftrightarrow \left(f \in A^\perp\right).\end{aligned}$$

[260]. Nach Lemma 5.1 **(a)** (angewandt auf V^*, W^*, A^*, B^*, i_V^* und i_W^* statt V, W, V', W', ϕ bzw. ψ) gilt nun

$$\operatorname{Ker}(i_V^* \otimes i_W^*) = \underbrace{\operatorname{Ker} i_V^*}_{=A^\perp} \otimes W^* + V^* \otimes \underbrace{\operatorname{Ker} i_W^*}_{=B^\perp} = A^\perp \otimes W^* + V^* \otimes B^\perp.$$

Wegen $\operatorname{Ker}(i_V^* \otimes i_W^*) = (A \otimes B)^\perp$ bedeutet dies $(A \otimes B)^\perp = A^\perp \otimes W^* + V^* \otimes B^\perp$, und Lemma 5.3 **(a)** ist bewiesen.

Lemma 5.1 **(a)** (diesmal angewandt auf V^*, W^*, A^*, W^*, i_V^* und id statt V, W, V', W', ϕ bzw. ψ) ergibt aber auch

$$\operatorname{Ker}(i_V^* \otimes \operatorname{id}) = \underbrace{\operatorname{Ker} i_V^*}_{=A^\perp} \otimes W^* + V^* \otimes \underbrace{\operatorname{Ker} \operatorname{id}}_{=0} = A^\perp \otimes W^* + \underbrace{V^* \otimes 0}_{=0} = A^\perp \otimes W^*.$$

Andererseits ist aber

$$\operatorname{Ker}(i_V^* \otimes \operatorname{id}) = (A \otimes W)^\perp$$

[261]. Wir haben also

$$\underbrace{\operatorname{Ker} i_V^*}_{=A^\perp} \otimes W^* = A^\perp \otimes W^* = \operatorname{Ker}(i_V^* \otimes \operatorname{id}) = (A \otimes W)^\perp$$

und analog $V^* \otimes \operatorname{Ker} i_W^* = (V \otimes B)^\perp$.

Nach Lemma 5.1 **(b)** (angewandt auf V^*, W^*, A^*, B^*, i_V^* und i_W^* statt V, W, V', W', ϕ bzw. ψ) gilt

$$\operatorname{Ker} i_V^* \otimes \operatorname{Ker} i_W^* = (\operatorname{Ker} i_V^* \otimes W^*) \cap (V^* \otimes \operatorname{Ker} i_W^*).$$

---

[260]denn für jedes $f \in V^* \otimes W^*$ gilt folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\begin{aligned}
(f \in \operatorname{Ker}(i_V^* \otimes i_W^*)) &\iff \left(\underbrace{(i_V^* \otimes i_W^*)}_{=(i_V \otimes i_W)^*}(f) = 0 \right) \iff \left(\underbrace{(i_V \otimes i_W)^*(f)}_{=f \circ (i_V \otimes i_W)} = 0 \right) \\
&\iff (f \circ (i_V \otimes i_W) = 0) \iff \left(f \mid_{(i_V \otimes i_W)(A \otimes B)} = 0 \right) \iff (f \mid_{A \otimes B} = 0) \\
&\qquad (\text{denn } (i_V \otimes i_W)(A \otimes B) = A \otimes B) \\
&\iff (f(x) = 0 \text{ für alle } x \in A \otimes B) \iff \left(f \in (A \otimes B)^\perp \right)
\end{aligned}$$

[261]denn für jedes $f \in V^* \otimes W^*$ gilt folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\begin{aligned}
(f \in \operatorname{Ker}(i_V^* \otimes \operatorname{id})) &\iff \left(\underbrace{(i_V^* \otimes \operatorname{id})}_{=(i_V \otimes \operatorname{id})^*}(f) = 0 \right) \iff \left(\underbrace{(i_V \otimes \operatorname{id})^*(f)}_{=f \circ (i_V \otimes \operatorname{id})} = 0 \right) \\
&\iff (f \circ (i_V \otimes \operatorname{id}) = 0) \iff \left(f \mid_{(i_V \otimes \operatorname{id})(A \otimes W)} = 0 \right) \iff (f \mid_{A \otimes W} = 0) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } (i_V \otimes \operatorname{id})(A \otimes W) = A \otimes W, \text{ weil} \\ i_V \otimes \operatorname{id} : A \otimes W \to V \otimes W \text{ die Inklusionsabbildung ist,} \\ \text{da } i_V : A \to V \text{ die Inklusionsabbildung ist} \end{array} \right) \\
&\iff (f(x) = 0 \text{ für alle } x \in A \otimes W) \iff \left(f \in (A \otimes W)^\perp \right)
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$\underbrace{A^{\perp}}_{=\operatorname{Ker} i_V^*} \otimes \underbrace{B^{\perp}}_{=\operatorname{Ker} i_W^*} = \operatorname{Ker} i_V^* \otimes \operatorname{Ker} i_W^* = \underbrace{(\operatorname{Ker} i_V^* \otimes W^*)}_{=(A\otimes W)^{\perp}} \cap \underbrace{(V^* \otimes \operatorname{Ker} i_W^*)}_{=(V\otimes B)^{\perp}}$$
$$= (A \otimes W)^{\perp} \cap (V \otimes B)^{\perp} = (A \otimes W + V \otimes B)^{\perp} = (V \otimes B + A \otimes W)^{\perp}.$$

Damit ist Lemma 5.3 **(b)** nachgewiesen.

Ein anderes linear-algebraisches Resultat, was wir benutzen werden, ist folgendes:

5.4. Lemma: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und sei V_k ein Untervektorraum von V für alle $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Angenommen, $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq ... \supseteq V_n$ und $V_0 = V$.

Sei W ein endlichdimensionaler Vektorraum, und sei W_k ein Untervektorraum von W für alle $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Angenommen, $W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq ... \supseteq W_n$ und $W_0 = W$.

Dann ist

$$\bigcap_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp} = \sum_{\ell=1}^{n} V_\ell^{\perp} \otimes W_{n+1-\ell}^{\perp}$$

(dies ist eine Gleichheit zwischen Untervektorräumen von $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$).

Beweis von Lemma 5.4: Zuerst einmal ist klar, daß $V_0 = V$ zu $V_0^{\perp} = V^{\perp} = 0$ führt. Analog ist $W_0^{\perp} = 0$.

Wir zeigen nun erst einmal: Für alle $k \in \{0, 1, ..., n\}$ und $\ell \in \{1, 2, ..., n\}$ ist

$$V_\ell^{\perp} \otimes W_{n+1-\ell}^{\perp} \subseteq (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp}. \qquad \text{(II.5.3)}$$

Beweis von (II.5.3): Für alle $f \in V_\ell^{\perp}$, $g \in W_{n+1-\ell}^{\perp}$, $v \in V_k$ und $w \in W_{n-k}$ gilt

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = 0 \qquad \text{(II.5.4)}$$

[262].

[262] *Beweis:* Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: Es gilt $\ell \leq k$.

Fall 2: Es gilt $n + 1 - \ell \leq n - k$.

Fall 3: Es gilt weder $\ell \leq k$ noch $n + 1 - \ell \leq n - k$.

Wir werden zeigen, daß in beiden Fällen 1 und 2 die Gleichung $(f \otimes g)(v \otimes w) = 0$ erfüllt wird, und Fall 3 gar nicht eintreten kann.

In Fall 1 ist $V_k \subseteq V_\ell$ (denn $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq ... \supseteq V_n$ und $\ell \leq k$) und damit $v \in V_\ell$ (denn $v \in V_k$), also $f(v) = 0$ (denn $f \in V_\ell^{\perp}$) und somit $(f \otimes g)(v \otimes w) = \underbrace{f(v)}_{=0} g(w) = 0$.

Im Fall 2 ist $W_{n-k} \subseteq W_{n+1-\ell}$ (denn $W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq ... \supseteq W_n$ und $n + 1 - \ell \leq n - k$) und damit $w \in W_{n+1-\ell}$ (denn $w \in W_{n-k}$), also $g(w) = 0$ (denn $g \in W_{n+1-\ell}^{\perp}$) und somit $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \underbrace{g(w)}_{=0} = 0$.

Im Fall 3 ist $\ell > k$ und $n + 1 - \ell > n - k$ (denn in Fall 3 darf weder $\ell \leq k$ noch $n + 1 - \ell \leq n - k$ gelten), also $\ell \geq k + 1$ (denn $\ell > k$), also $n + 1 = \underbrace{\ell}_{\geq k+1} + \underbrace{(n + 1 - \ell)}_{> n-k} > (k + 1) + (n - k) = n + 1$, was ein Widerspruch ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß Fall 3 gar nicht eintreten kann. Deshalb muß immer entweder Fall 1 oder Fall 2 eintreten. Da wir in beiden Fällen 1 und 2 die Gleichung $(f \otimes g)(v \otimes w) = 0$ nachgewiesen haben, ist also der Beweis von $(f \otimes g)(v \otimes w) = 0$ komplett.

Für jedes $t_1 \in V_\ell^\perp \otimes W_{n+1-\ell}^\perp$ und jedes $t_2 \in V_k \otimes W_{n-k}$ gilt nun $t_1(t_2) = 0$ [263]. Für jedes $t_1 \in V_\ell^\perp \otimes W_{n+1-\ell}^\perp$ ist also $t_1 \in (V_k \otimes W_{n-k})^\perp$. Das heißt, $V_\ell^\perp \otimes W_{n+1-\ell}^\perp \subseteq (V_k \otimes W_{n-k})^\perp$, und damit ist (II.5.3) gezeigt.

Für jedes $\ell \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt nun

$$V_\ell^\perp \otimes W_{n+1-\ell}^\perp \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^\perp$$

(nach (II.5.3)). Summieren wir dies über alle $\ell \in \{1, 2, ..., n\}$, dann erhalten wir

$$\sum_{\ell=1}^{n} V_\ell^\perp \otimes W_{n+1-\ell}^\perp \subseteq \sum_{\ell=1}^{n} \bigcap_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^\perp \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^\perp \qquad \text{(II.5.5)}$$

(denn $\bigcap\limits_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^\perp$ ist ein Vektorraum).

Um Lemma 5.4 zu beweisen, müssen wir also nur noch zeigen, daß

$$\bigcap_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^\perp \subseteq \sum_{\ell=1}^{n} V_\ell^\perp \otimes W_{n+1-\ell}^\perp \qquad \text{(II.5.6)}$$

gilt.

Beweis von (II.5.6): Setze $V_{n+1} = 0$ und $W_{n+1} = 0$.

Aus $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq ... \supseteq V_n$ und $V_n \supseteq 0 = V_{n+1}$ folgt $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq ... \supseteq V_{n+1}$, also $V_0^\perp \subseteq V_1^\perp \subseteq ... \subseteq V_{n+1}^\perp$. Das heißt, $V_\alpha^\perp \subseteq V_{\alpha+1}^\perp$ für jedes $\alpha \in \{0, 1, ..., n\}$. Analog gilt $W_\beta^\perp \subseteq W_{\beta+1}^\perp$ für jedes $\beta \in \{0, 1, ..., n\}$.

Für jedes $\alpha \in \{0, 1, ..., n\}$ gibt es einen Untervektorraum X_α von $V_{\alpha+1}^\perp$ mit $V_{\alpha+1}^\perp = V_\alpha^\perp \oplus X_\alpha$ (denn $V_\alpha^\perp \subseteq V_{\alpha+1}^\perp$, und laut einem Satz der linearen Algebra hat jeder Untervektorraum eines Vektorraums ein Komplement). Analog gibt es für jedes $\beta \in \{0, 1, ..., n\}$ einen Untervektorraum Y_β von $W_{\beta+1}^\perp$ mit $W_{\beta+1}^\perp = W_\beta^\perp \oplus Y_\beta$.

Für jedes $\alpha \in \{0, 1, ..., n+1\}$ gilt

$$V_\alpha^\perp = \bigoplus_{p=0}^{\alpha-1} X_p \qquad \text{(II.5.7)}$$

[264]. Analog gilt

$$W_\beta^\perp = \bigoplus_{q=0}^{\beta-1} Y_q \qquad \text{(II.5.8)}$$

[263] *Beweis:* Wir können den Tensor $t_1 \in V_\ell^\perp \otimes W_{n+1-\ell}^\perp$ als Linearkombination $t_1 = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i f_i \otimes g_i$ von reinen Tensoren (wobei $r \in \mathbb{N}$ ist, und $\alpha_i \in k$, $f_i \in V_\ell^\perp$ und $g_i \in W_{n+1-\ell}^\perp$ für alle i gilt) schreiben. Ferner können wir den Tensor $t_2 \in V_k \otimes W_{n-k}$ als Linearkombination $t_2 = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j v_j \otimes w_j$ von reinen Tensoren (wobei $s \in \mathbb{N}$ ist, und $\beta_j \in k$, $v_j \in V_k$ und $w_j \in W_{n-k}$ für alle j gilt) schreiben. Damit ist

$$t_1(t_2) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i \otimes g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} \beta_j v_j \otimes w_j\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \underbrace{(f_i \otimes g_i)(v_j \otimes w_j)}_{\substack{=0 \text{ (nach (II.5.4), angewandt auf} \\ f=f_i,\ g=g_i,\ v=v_j \text{ und } w=w_j)}} = 0,$$

was zu beweisen war.

[264] Dies beweist man durch Induktion nach α: Der Induktionsfang, $\alpha = 0$, ergibt sich aus $V_0^\perp = 0$. Der Induktionsschritt verwendet $V_{\alpha+1}^\perp = V_\alpha^\perp \oplus X_\alpha$.

für jedes $\beta \in \{0,1,...,n+1\}$. Angewandt auf $\beta = n+1$ ergibt dies $W_{n+1}^{\perp} = \bigoplus_{q=0}^{n} Y_q$. Wegen $W_{n+1}^{\perp} = W^*$ (denn $W_{n+1} = 0$) wird dies zu $W^* = \bigoplus_{q=0}^{n} Y_q$. Analog ist $V^* = \bigoplus_{p=0}^{n} X_p$. Aus diesen beiden Gleichheiten folgt

$$V^* \otimes W^* = \left(\bigoplus_{p=0}^{n} X_p\right) \otimes \left(\bigoplus_{q=0}^{n} Y_q\right) = \bigoplus_{p=0}^{n} \bigoplus_{q=0}^{n} X_p \otimes Y_q = \bigoplus_{(p,q)\in\{0,1,...,n\}^2} X_p \otimes Y_q.$$

Der Vektorraum $V^* \otimes W^*$ ist also die direkte Summe $\bigoplus_{(p,q)\in\{0,1,...,n\}^2} X_p \otimes Y_q$. Somit gibt es für jedes Paar $(i,j) \in \{0,1,...,n\}^2$ eine Projektion $\pi_{i,j} : V^* \otimes W^* \to X_i \otimes Y_j$ (da es von einer direkten Summe auf jeden Summanden eine Projektion gibt), und diese Projektionen erfüllen

$$\left(r = \sum_{(i,j)\in\{0,1,...,n\}^2} \pi_{i,j}(r) \qquad \text{für alle } r \in V^* \otimes W^*\right).$$

Da $\pi_{i,j}$ die Projektion der direkten Summe $\bigoplus_{(p,q)\in\{0,1,...,n\}^2} X_p \otimes Y_q$ auf den Summanden $X_i \otimes Y_j$ ist, überführt $\pi_{i,j}$ alle anderen Summanden dieser Summe nach 0. Das heißt,

$$\pi_{i,j}(X_p \otimes Y_q) = 0 \qquad \text{für alle } (p,q) \in \{0,1,...,n\}^2 \text{ mit } (p,q) \neq (i,j). \tag{II.5.9}$$

Sei nun $r \in \bigcap_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp}$. Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß $r \in \sum_{\ell=1}^{n} V_{\ell}^{\perp} \otimes W_{n+1-\ell}^{\perp}$ ist.

Aus $r \in \bigcap_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp}$ folgt, daß $r \in (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp}$ für jedes $k \in \{0,1,...,n\}$ gilt. Nach Lemma 5.3 **(a)** (angewandt auf V_k und W_{n-k} statt A bzw. B) ist aber

$$\begin{aligned}
(V_k \otimes W_{n-k})^{\perp} &= V_k^{\perp} \otimes W^* + V^* \otimes W_{n-k}^{\perp} = \left(\bigoplus_{p=0}^{k-1} X_p\right) \otimes \left(\bigoplus_{q=0}^{n} Y_q\right) + \left(\bigoplus_{p=0}^{n} X_p\right) \otimes \left(\bigoplus_{q=0}^{n-k-1} Y_q\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } V_k^{\perp} = \bigoplus_{p=0}^{k-1} X_p \text{ (nach (II.5.7)), } W^* = \bigoplus_{q=0}^{n} Y_q, \ V^* = \bigoplus_{p=0}^{n} X_p \\ \text{und } W_{n-k}^{\perp} = \bigoplus_{q=0}^{n-k-1} Y_q \text{ (nach (II.5.8))} \end{array}\right) \\
&= \bigoplus_{p=0}^{k-1} \bigoplus_{q=0}^{n} X_p \otimes Y_q + \bigoplus_{p=0}^{n} \bigoplus_{q=0}^{n-k-1} X_p \otimes Y_q \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{n} X_p \otimes Y_q + \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-k-1} X_p \otimes Y_q.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß $\pi_{i,j}(r) = 0$ für alle $(i,j) \in \{0,1,...,n\}^2$ mit $i+j > n-1$ gilt.

In der Tat sei ein Paar $(i,j) \in \{0,1,...,n\}^2$ mit $i+j > n-1$ beliebig gewählt. Aus $i+j > n-1$ folgt $i+j \geq n$ (denn $i+j$ und $n-1$ sind ganze Zahlen). Folglich gibt es ein $k \in \{0,1,...,n\}$ mit $k \leq i$ und $n-k \leq j$ (beispielsweise kann man $k = i$ nehmen). Wegen $r \in (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp} = \sum\limits_{p=0}^{k-1} \sum\limits_{q=0}^{n} X_p \otimes Y_q + \sum\limits_{p=0}^{n} \sum\limits_{q=0}^{n-k-1} X_p \otimes Y_q$ erfüllt dieses k nun

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j}(r) &\in \pi_{i,j}\left(\sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{n} X_p \otimes Y_q + \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-k-1} X_p \otimes Y_q \right) \\
&\subseteq \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{n} \underbrace{\pi_{i,j}(X_p \otimes Y_q)}_{\substack{=0 \text{ nach (II.5.9)} \\ \text{(denn wegen } p<k\leq i \\ \text{ist } (p,q)\neq(i,j))}} + \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-k-1} \underbrace{\pi_{i,j}(X_p \otimes Y_q)}_{\substack{=0 \text{ nach (II.5.9)} \\ \text{(denn wegen } q<n-k\leq j \\ \text{ist } (p,q)\neq(i,j))}} \qquad \text{(denn } \pi_{i,j} \text{ ist linear)} \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{n} 0 + \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-k-1} 0 = 0,
\end{aligned}$$

also $\pi_{i,j}(r) = 0$.

Nun ist

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{(i,j)\in\{0,1,...,n\}^2} \pi_{i,j}(r) = \sum_{\substack{(i,j)\in\{0,1,...,n\}^2; \\ i+j>n-1}} \underbrace{\pi_{i,j}(r)}_{\substack{=0 \text{ (wie wir vorhin} \\ \text{gezeigt haben)}}} + \sum_{\substack{(i,j)\in\{0,1,...,n\}^2; \\ i+j\leq n-1}} \pi_{i,j}(r) \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in\{0,1,...,n\}^2; \\ i+j>n-1}} 0}_{=0} + \sum_{\substack{(i,j)\in\{0,1,...,n\}^2; \\ i+j\leq n-1}} \underbrace{\pi_{i,j}(r)}_{\in X_i \otimes Y_j} \in \underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in\{0,1,...,n\}^2; \\ i+j\leq n-1}}}_{=\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{n-1-i}} X_i \otimes Y_j \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} X_i \otimes Y_j = \sum_{i=0}^{n-1} \left(X_i \otimes \sum_{j=0}^{n-1-i} Y_j \right).
\end{aligned}$$

Da aber $\sum\limits_{j=0}^{n-1-i} Y_j = W_{n-i}^{\perp}$ für alle $i \in \{0,1,...,n-1\}$ ist (denn nach (II.5.8) (angewandt auf $\beta = n-i$) ist $W_{n-i}^{\perp} = \bigoplus\limits_{q=0}^{n-i-1} Y_q = \sum\limits_{q=0}^{n-i-1} Y_q = \sum\limits_{j=0}^{n-i-1} Y_j = \sum\limits_{j=0}^{n-1-i} Y_j$), vereinfacht sich dies zu $r \in \sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \otimes W_{n-i}^{\perp}$. Da $X_i \subseteq V_{i+1}^{\perp}$ ist (denn laut Definition von X_α gilt $X_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}^{\perp}$ für jedes $\alpha \in \{0,1,...,n\}$), erhalten wir also

$$r \in \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{X_i}_{\subseteq V_{i+1}^{\perp}} \otimes W_{n-i}^{\perp} \subseteq \sum_{i=0}^{n-1} V_{i+1}^{\perp} \otimes W_{n-i}^{\perp} = \sum_{\ell=1}^{n} V_{\ell}^{\perp} \otimes W_{n+1-\ell}^{\perp}$$

(hier haben wir $i+1$ durch ℓ substituiert). Da wir dies für jedes $r \in \bigcap\limits_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp}$ gezeigt haben, ist also $\bigcap\limits_{k=0}^{n} (V_k \otimes W_{n-k})^{\perp} \subseteq \sum\limits_{\ell=1}^{n} V_{\ell}^{\perp} \otimes W_{n+1-\ell}^{\perp}$, und somit ist (II.5.6) nachgewiesen. Wie wir wissen, ist damit der Beweis von Lemma 5.4 abgeschlossen.

Kommen wir wieder zu einfacheren Tatsachen:

5.5. Lemma: Seien V, P und Q drei Vektorräume, und $f : V \to P$ und $g : V \to Q$ zwei lineare Abbildungen. Angenommen, $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $h : Q \to P$ mit $f = h \circ g$.

Beweis von Lemma 5.5: Sei $\psi : V \to V \diagup \operatorname{Ker} g$ die kanonische Projektion.

Wegen $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} f$ ist $f(\operatorname{Ker} g) \subseteq f(\operatorname{Ker} f) = 0$, also $f(\operatorname{Ker} g) = 0$. Somit gibt es eine lineare Abbildung $f' : V \diagup \operatorname{Ker} g \to P$ mit $f = f' \circ \psi$ (laut der universellen Eigenschaft des Faktorvektorraums). Andererseits induziert die Abbildung g einen kanonischen Vektorraumisomorphismus $g' : V \diagup \operatorname{Ker} g \to g(V)$ mit $g = g' \circ \psi$. Also ist $(g')^{-1} \circ g = \psi$.

Sei $\tau : Q \to g(V)$ eine beliebige Projektion des Vektorraums Q auf seinen Untervektorraum $g(V)$ (so eine Projektion existiert, denn von jedem Vektorraum kann man auf jeden seinen Untervektorraum eine Projektion finden). Da τ eine Projektion ist, ist $\tau(x) = x$ für alle $x \in g(V)$. Folglich ist $\tau \circ g = g$ (denn für jedes $v \in V$ ist $(\tau \circ g)(v) = \tau(g(v)) = g(v)$, weil $g(v) \in g(V)$).

Sei die lineare Abbildung $h : Q \to P$ definiert durch $h = f' \circ (g')^{-1} \circ \tau$. Um Lemma 5.5 zu beweisen, müssen wir nur noch zeigen, daß diese Abbildung h die Gleichung $f = h \circ g$ erfüllt.

In der Tat ist $h = f' \circ (g')^{-1} \circ \tau$ und damit

$$h \circ g = f' \circ (g')^{-1} \circ \underbrace{\tau \circ g}_{=g} = f' \circ \underbrace{(g')^{-1} \circ g}_{=\psi} = f' \circ \psi = f,$$

und somit ist Lemma 5.5 gezeigt.

5.6. Lemma: Seien V und U zwei Vektorräume, und sei $\Delta : V \to U$ eine lineare Abbildung. Sei B ein Untervektorraum von U. Für die zu Δ adjungierte Abbildung $\Delta^* : U^* \to V^*$ gilt dann

$$\left(\Delta^{-1}(B)\right)^{\perp} = \Delta^*\left(B^{\perp}\right)$$

als Untervektorräume von V^*.

Beweis von Lemma 5.6: Es ist klar, daß $\Delta^*\left(B^{\perp}\right) \subseteq \left(\Delta^{-1}(B)\right)^{\perp}$ ist (denn für jedes $f \in \Delta^*\left(B^{\perp}\right)$ ist $f \in \left(\Delta^{-1}(B)\right)^{\perp}$ [265]). Zum Beweis von Lemma 5.6 ist also nur noch zu zeigen, daß $\left(\Delta^{-1}(B)\right)^{\perp} \subseteq \Delta^*\left(B^{\perp}\right)$ ist.

Sei $f \in \left(\Delta^{-1}(B)\right)^{\perp}$ beliebig gewählt. Dann ist

$$f \in \left(\Delta^{-1}(B)\right)^{\perp} = \left\{\phi \in V^* \mid \phi(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Delta^{-1}(B)\right\},$$

also $f(x) = 0$ für alle $x \in \Delta^{-1}(B)$. Das heißt, $f\left(\Delta^{-1}(B)\right) = 0$, also $\Delta^{-1}(B) \subseteq \operatorname{Ker} f$.

Sei $\pi : U \to U \diagup B$ die kanonische Projektion. Dann ist $\operatorname{Ker} \pi = B$.

Sei eine lineare Abbildung $g : V \to U \diagup B$ definiert durch $g = \pi \circ \Delta$. Dann ist $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(\pi \circ \Delta) = (\pi \circ \Delta)^{-1}(0) = \Delta^{-1}\left(\underbrace{\pi^{-1}(0)}_{=\operatorname{Ker} \pi = B}\right) = \Delta^{-1}(B) \subseteq \operatorname{Ker} f$. Nach

[265] *Beweis:* Wegen $f \in \Delta^*\left(B^{\perp}\right)$ gibt es ein $g \in B^{\perp}$ mit $f = \Delta^*(g)$. Somit ist

$$f(x) = (\Delta^*(g))(x) = g\left(\underbrace{\Delta(x)}_{\in B, \text{ da } x \in \Delta^{-1}(B)}\right) = 0 \qquad \left(\text{denn wegen } g \in B^{\perp} \text{ ist } g(u) = 0 \text{ für alle } u \in B\right)$$

für alle $x \in \Delta^{-1}(B)$. Das heißt, $f \in \left\{\phi \in V^* \mid \phi(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Delta^{-1}(B)\right\} = \left(\Delta^{-1}(B)\right)^{\perp}$.

Lemma 5.5 (angewandt auf $P = k$ und $Q = U \diagup B$) gibt es also eine lineare Abbildung $h : U \diagup B \to k$ mit $f = h \circ g$. Damit ist

$$f = h \circ \underbrace{g}_{=\pi \circ \Delta} = h \circ \pi \circ \Delta = \Delta^* (h \circ \pi) \in \Delta^* \left(B^\perp\right)$$

(denn $h \circ \pi \in B^\perp$, denn für jedes $\beta \in B$ ist $(h \circ \pi)(\beta) = h \left(\underbrace{\pi(\beta)}_{=0, \text{ denn } \beta \in B = \operatorname{Ker} \pi} \right) = h(0) = 0$). Da wir dies für jedes $f \in \left(\Delta^{-1}(B)\right)^\perp$ gezeigt haben, gilt also $\left(\Delta^{-1}(B)\right)^\perp \subseteq \Delta^* \left(B^\perp\right)$, und der Beweis von Lemma 5.6 ist komplett.

Schließlich dualisieren wir Lemma 5.3:

5.7. Lemma: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und sei I_k ein Untervektorraum von V^* für alle $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Angenommen, $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n$ und $I_0 = V^*$.

Sei W ein endlichdimensionaler Vektorraum, und sei J_k ein Untervektorraum von W^* für alle $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Angenommen, $J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq ... \supseteq J_n$ und $J_0 = W^*$.

Dann ist

$$\bigcap_{k=0}^{n} \left(I_k \otimes J_{n-k}\right)^\top = \sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^\top \otimes J_{n+1-\ell}^\top$$

(dies ist eine Gleichheit zwischen Untervektorräumen von $V \otimes W$).

Beweis von Lemma 5.7: Sei $\Phi : V \to V^{**}$ der kanonische Homomorphismus von Vektorräumen, der durch

$$\Phi(v) = (f \mapsto f(v)) \qquad \text{für alle } v \in V$$

definiert ist. Da V endlichdimensional ist, ist Φ ein Isomorphismus. Bekanntlich ist $\Phi(X) = \left(X^\perp\right)^\perp$ für jeden Untervektorraum X von V. Für jeden Untervektorraum P von V^* ist somit $\Phi\left(P^\top\right) = \left(\underbrace{\left(P^\top\right)^\perp}_{=P} \right)^\perp = P^\perp$.

Sei $\Psi : W \to W^{**}$ der kanonische Homomorphismus von Vektorräumen, der durch

$$\Psi(w) = (g \mapsto g(w)) \qquad \text{für alle } w \in W$$

definiert ist. Da W endlichdimensional ist, ist Ψ ein Isomorphismus. Bekanntlich ist $\Psi(Y) = \left(Y^\perp\right)^\perp$ für jeden Untervektorraum Y von W. Für jeden Untervektorraum Q von W^* ist somit $\Psi\left(Q^\top\right) = \left(\underbrace{\left(Q^\top\right)^\perp}_{=Q} \right)^\perp = Q^\perp$.

Sei $\Gamma : V \otimes W \to (V \otimes W)^{**}$ der kanonische Homomorphismus von Vektorräumen, der durch

$$\Gamma(u) = (h \mapsto h(u)) \qquad \text{für alle } u \in V \otimes W$$

definiert ist. Da $V \otimes W$ endlichdimensional ist, ist Γ ein Isomorphismus. Bekanntlich ist $\Gamma(Z) = \left(Z^\perp\right)^\perp$ für jeden Untervektorraum Z von $V \otimes W$. Für jeden Untervektorraum R von $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$ ist somit $\Gamma\left(R^\top\right) = \left(\underbrace{\left(R^\top\right)^\perp}_{=R} \right)^\perp = R^\perp$.

Vermöge der Identifikation $V^{**} \otimes W^{**} = \left(\underbrace{V^* \otimes W^*}_{=(V\otimes W)^*}\right)^* = (V \otimes W)^{**}$ können wir behaupten, daß der Isomorphismus $\Gamma : V \otimes W \to (V \otimes W)^{**}$ identisch mit dem Isomorphismus $\Phi \otimes \Psi : V \otimes W \to V^{**} \otimes W^{**}$ ist. Und wir können dies auch beweisen:

Beweis: Für jeden reinen Tensor $t \in V \otimes W$ gilt $\Gamma(t) = (\Phi \otimes \Psi)(t)$ [266]. Die linearen Abbildungen $\Gamma : V \otimes W \to (V \otimes W)^{**}$ und $\Phi \otimes \Psi : V \otimes W \to V^{**} \otimes W^{**}$ stimmen also auf jedem reinen Tensor überein. Folglich sind diese Abbildungen Γ und $\Phi \otimes \Psi$ identisch (denn zwei lineare Abbildungen, die auf jedem reinen Tensor übereinstimmen, müssen identisch sein). Damit ist $\Gamma = \Phi \otimes \Psi$ bewiesen.

Laut Lemma 5.4 (angewandt auf V^*, W^*, I_k und J_k statt V, W, V_k bzw. W_k) ist nun

$$\bigcap_{k=0}^{n} (I_k \otimes J_{n-k})^{\perp} = \sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^{\perp} \otimes J_{n+1-\ell}^{\perp}$$

(dies ist eine Gleichheit zwischen Untervektorräumen von $V^{**} \otimes W^{**} = (V^* \otimes W^*)^*$). Da aber Γ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\Gamma\left(\bigcap_{k=0}^{n} (I_k \otimes J_{n-k})^{\top}\right) = \bigcap_{k=0}^{n} \underbrace{\Gamma\left((I_k \otimes J_{n-k})^{\top}\right)}_{\substack{=(I_k\otimes J_{n-k})^{\perp} \\ \text{(denn } \Gamma\left(P^{\top}\right)=P^{\perp} \text{ für jeden} \\ \text{Untervektorraum } P \text{ von } V^*\otimes W^*)}} = \bigcap_{k=0}^{n} (I_k \otimes J_{n-k})^{\perp} = \sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^{\perp} \otimes J_{n+1-\ell}^{\perp}.$$

---

[266] *Beweis:* Da t ein reiner Tensor ist, gilt $t = v \otimes w$ für ein $v \in V$ und ein $w \in W$. Somit ist

$$\underbrace{(\Gamma(t))}_{=(h\mapsto h(t))} (f \otimes g) = (f \otimes g)\left(\underbrace{t}_{=v\otimes w}\right) = (f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$$

für alle $f \in V^*$ und $g \in W^*$. Andererseits ist

$$\left((\Phi \otimes \Psi)\left(\underbrace{t}_{=v\otimes w}\right)\right)(f \otimes g) = ((\Phi \otimes \Psi)(v \otimes w))(f \otimes g) = \underbrace{(\Phi(v))(f)}_{\substack{=f(v) \text{ (nach der} \\ \text{Definition von } \Phi)}} \otimes \underbrace{(\Psi(w))(g)}_{\substack{=g(w) \text{ (nach der} \\ \text{Definition von } \Psi)}}$$
$$= f(v) \otimes g(w) = (\Gamma(t))(f \otimes g)$$

für alle $f \in V^*$ und $g \in W^*$. Die linearen Abbildungen $\Gamma(t) : V^* \otimes W^* \to k$ und $(\Phi \otimes \Psi)(t) : V^* \otimes W^* \to k$ stimmen also auf jedem reinen Tensor überein. Folglich sind diese Abbildungen identisch (denn zwei lineare Abbildungen, die auf jedem reinen Tensor übereinstimmen, müssen identisch sein). Wir haben also $\Gamma(t) = (\Phi \otimes \Psi)(t)$.

Andererseits ist

$$\underbrace{\Gamma}_{=\Phi\otimes\Psi}\left(\sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^\top \otimes J_{n+1-\ell}^\top\right) = (\Phi\otimes\Psi)\left(\sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^\top \otimes J_{n+1-\ell}^\top\right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\Phi\left(I_\ell^\top\right)}_{\substack{=I_\ell^\perp \text{ (denn} \\ \Phi\left(P^\top\right)=P^\perp \text{ für jeden} \\ \text{Untervektorraum } P \text{ von } V^*)}} \otimes \underbrace{\Psi\left(J_{n+1-\ell}^\top\right)}_{\substack{=J_{n+1-\ell}^\perp \text{ (denn} \\ \Psi\left(Q^\top\right)=Q^\perp \text{ für jeden} \\ \text{Untervektorraum } Q \text{ von } W^*)}}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^\perp \otimes J_{n+1-\ell}^\perp = \Gamma\left(\bigcap_{k=0}^{n} \left(I_k \otimes J_{n-k}\right)^\top\right).$$

Da Γ injektiv ist (denn Γ ist ein Isomorphismus), gilt also

$$\sum_{\ell=1}^{n} I_\ell^\top \otimes J_{n+1-\ell}^\top = \bigcap_{k=0}^{n} \left(I_k \otimes J_{n-k}\right)^\top,$$

und Lemma 5.7 ist bewiesen.

Ein weiteres Lemma über Tensorprodukte und ihre Unterräume:

5.8. Lemma: Seien V und W zwei Vektorräume. Seien A und P zwei Untervektorräume von V, und seien B und Q zwei Untervektorräume von W.

(a) Dann ist

$$(P\otimes Q)\cap(V\otimes B + A\otimes W) = P\otimes(B\cap Q) + (A\cap P)\otimes Q$$

(dies ist eine Gleichheit zwischen Untervektorräumen von $V\otimes W$). Hierbei betrachten wir $P\otimes Q$, $V\otimes B$, $A\otimes W$, $P\otimes(B\cap Q)$ und $(A\cap P)\otimes Q$ als Untervektorräume von $V\otimes W$.

(b) Ferner ist

$$(P\otimes Q)\cap(A\otimes B) = (P\cap A)\otimes(Q\cap B)$$

(dies ist eine Gleichheit zwischen Untervektorräumen von $V\otimes W$). Hierbei betrachten wir $P\otimes Q$, $A\otimes B$, und $(P\cap A)\otimes(Q\cap B)$ als Untervektorräume von $V\otimes W$.

Bemerkung: Dieses Lemma bringt manchen auf die Mutmaßung, daß auch eine Aussage der Form

$$(V\otimes Q + P\otimes W)\cap(V\otimes B + A\otimes W) = V\otimes(B\cap Q) + (A\cap P)\otimes W$$

gelten sollte. Aber dies ist im Allgemeinen falsch.

Beweis von Lemma 5.8: Seien $\phi : V \to V\diagup A$ und $\psi : W \to W\diagup B$ die kanonischen Projektionen. Dann ist $\operatorname{Ker}\phi = A$ und $\operatorname{Ker}\psi = B$.

(a) Nach Lemma 5.1 **(a)** (angewandt auf $V\diagup A$ und $W\diagup B$ statt V' bzw. W') gilt nun

$$\operatorname{Ker}(\phi\otimes\psi) = \underbrace{\operatorname{Ker}\phi}_{=A}\otimes W + V\otimes\underbrace{\operatorname{Ker}\psi}_{=B} = A\otimes W + V\otimes B = V\otimes B + A\otimes W,$$

und somit

$$(P\otimes Q)\cap\underbrace{(V\otimes B + A\otimes W)}_{=\operatorname{Ker}(\phi\otimes\psi)} = (P\otimes Q)\cap\operatorname{Ker}(\phi\otimes\psi) = \operatorname{Ker}\left((\phi\otimes\psi)\mid_{P\otimes Q}\right).$$

Seien nun $i_P : P \to V$ und $i_Q : Q \to W$ die kanonischen Inklusionen. Dann ist $i_P \otimes i_Q$ die kanonische Inklusion von $P \otimes Q$ nach $V \otimes W$. Somit ist $(\phi \otimes \psi) \mid_{P \otimes Q} = (\phi \otimes \psi) \circ (i_P \otimes i_Q) = (\phi \circ i_P) \otimes (\psi \circ i_Q)$.

Doch nach Lemma 5.1 **(a)** (angewandt auf P, Q, $V \diagup A$, $W \diagup B$, $\phi \circ i_P$ und $\psi \circ i_Q$ statt V, W, V', W', ϕ bzw. ψ) ist

$$\operatorname{Ker}\left((\phi \circ i_P) \otimes (\psi \circ i_Q)\right) = \operatorname{Ker}(\phi \circ i_P) \otimes Q + P \otimes \operatorname{Ker}(\psi \circ i_Q).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\phi \circ i_P) &= \operatorname{Ker}(\phi \mid_P) \qquad \left(\text{denn } i_P : P \to V \text{ ist die Inklusion, und somit ist } \phi \circ i_P = \phi \mid_P\right) \\ &= \underbrace{\operatorname{Ker}\phi}_{=A} \cap P = A \cap P \end{aligned}$$

und der analog zu beweisenden Gleichheit $\operatorname{Ker}(\psi \circ i_Q) = B \cap Q$ wird dies zu

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\left((\phi \circ i_P) \otimes (\psi \circ i_Q)\right) &= \underbrace{\operatorname{Ker}(\phi \circ i_P)}_{=A \cap P} \otimes Q + P \otimes \underbrace{\operatorname{Ker}(\psi \circ i_Q)}_{=B \cap Q} = (A \cap P) \otimes Q + P \otimes (B \cap Q) \\ &= P \otimes (B \cap Q) + (A \cap P) \otimes Q. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} (P \otimes Q) \cap (V \otimes B + A \otimes W) &= \operatorname{Ker}\left(\underbrace{(\phi \otimes \psi) \mid_{P \otimes Q}}_{=(\phi \circ i_P) \otimes (\psi \circ i_Q)}\right) = \operatorname{Ker}\left((\phi \circ i_P) \otimes (\psi \circ i_Q)\right) \\ &= P \otimes (B \cap Q) + (A \cap P) \otimes Q, \end{aligned}$$

und Lemma 5.8 **(a)** ist bewiesen.

(b) Nach Lemma 5.1 **(b)** (angewandt auf $V \diagup A$ und $W \diagup B$ statt V' bzw. W') gilt

$$\operatorname{Ker}\phi \otimes \operatorname{Ker}\psi = (\operatorname{Ker}\phi \otimes W) \cap (V \otimes \operatorname{Ker}\psi).$$

Wegen $\operatorname{Ker}\phi = A$ und $\operatorname{Ker}\psi = B$ vereinfacht sich dies zu

$$A \otimes B = (A \otimes W) \cap (V \otimes B).$$

Nach Lemma 5.8 **(a)** (angewandt auf 0 statt B) ist

$$(P \otimes Q) \cap (V \otimes 0 + A \otimes W) = P \otimes (0 \cap Q) + (A \cap P) \otimes Q,$$

was sich (wegen $V \otimes 0 = 0$ und $P \otimes (0 \cap Q) = 0$) zu

$$(P \otimes Q) \cap (A \otimes W) = (A \cap P) \otimes Q$$

vereinfacht. Nach Lemma 5.8 **(a)** (angewandt auf $A \cap P$ und 0 statt P bzw. A) ist ferner

$$((A \cap P) \otimes Q) \cap (V \otimes B + 0 \otimes W) = (A \cap P) \otimes (B \cap Q) + (0 \cap (A \cap P)) \otimes Q,$$

was sich (wegen $0 \otimes W = 0$ und $\underbrace{(0 \cap (A \cap P))}_{=0} \otimes Q = 0$) zu

$$((A \cap P) \otimes Q) \cap (V \otimes B) = (A \cap P) \otimes (B \cap Q)$$

vereinfacht. Somit ist

$$\begin{aligned}(P \otimes Q) \cap \underbrace{(A \otimes B)}_{=(A \otimes W) \cap (V \otimes B)} &= \underbrace{(P \otimes Q) \cap (A \otimes W)}_{=(A \cap P) \otimes Q} \cap (V \otimes B) = ((A \cap P) \otimes Q) \cap (V \otimes B) \\ &= (A \cap P) \otimes (B \cap Q).\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 5.8 **(b)** nachgewiesen.

Anwendung auf die duale Algebra

Wir haben jetzt genug reine lineare Algebra betrieben. Es wird an der Zeit, diese Lemmata auf Coalgebren anzuwenden. Wie wir wissen, wird für jede Coalgebra C der Dualraum C^* zu einer Algebra bezüglich der Faltung $*$. Für endlichdimensionale Coalgebren kann man recht viele Eigenschaften dieser dualen Algebra C^* mit Eigenschaften der Coalgebra C in Verbindung bringen. Wir beginnen mit der folgenden:

5.9. Satz: Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra, und sei X ein Untervektorraum von C.

Genau dann ist X eine Untercoalgebra von C, wenn $X^\perp$ ein Ideal von C^* ist.

Beweis von Satz 5.9: $\Longrightarrow$: Angenommen, X ist eine Untercoalgebra von C. Dann ist $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$. Für beliebige $f \in C^*$, $g \in X^\perp$ und $x \in X$ ist nun

$$(f * g)(x) = (f \otimes g)\left(\underbrace{\Delta(x)}_{\in \Delta(X) \subseteq X \otimes X}\right) \in (f \otimes g)(X \otimes X) \subseteq f(X) \underbrace{g(X)}_{=0, \text{ denn } g \in X^\perp} = 0,$$

also $(f * g)(x) = 0$. Das heißt, für alle $f \in C^*$ und $g \in X^\perp$ ist

$$f * g \in \{\varphi \in C^* \mid \varphi(x) = 0 \text{ für alle } x \in X\} = X^\perp.$$

Somit ist $X^\perp$ ein Linksideal der Algebra C^*. Analog ist $X^\perp$ ein Rechtsideal von C^*. Somit ist $X^\perp$ ein (beidseitiges) Ideal von C^*.

$\Longleftarrow$: Angenommen, $X^\perp$ ist ein Ideal von C^*. Wir wollen beweisen, daß dann X eine Untercoalgebra von C ist. Dazu zeigen wir, daß $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$ ist.

Erster Beweis von $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$*:* Sei $x_1, x_2, ..., x_\alpha$ eine Basis des Vektorraums X. Sei $x_1, x_2, ..., x_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_\beta$ eine Basis des Vektorraums C, die diese Basis $x_1, x_2, ..., x_\alpha$ fortsetzt. Sei $f_1, f_2, ..., f_\beta$ die zur Basis $x_1, x_2, ..., x_\beta$ von C duale Basis des Vektorraums C^*. Da $X = \langle x_1, x_2, ..., x_\alpha \rangle$ ist, ist dann $X^\perp = \langle f_{\alpha+1}, f_{\alpha+2}, ..., f_\beta \rangle$.

Sei $x \in X$ beliebig. Dann ist das Element $\Delta(x) \in C \otimes C$ in der Form $\Delta(x) = \sum\limits_{i=1}^{\beta} \sum\limits_{j=1}^{\beta} \lambda_{i,j} x_i \otimes x_j$ (mit $\lambda_{i,j} \in k$) darstellbar, denn $(x_i \otimes x_j)_{1 \leq i \leq \beta,\ 1 \leq j \leq \beta}$ ist eine Basis des Vektorraums $C \otimes C$ (weil $(x_i)_{1 \leq i \leq \beta} = (x_1, x_2, ..., x_\beta)$ eine Basis des Vektorraums C ist).

Für jedes $u \in \{1, 2, ..., \beta\}$ und jedes $v \in \{\alpha+1, \alpha+2, ..., \beta\}$ ist nun $f_u * f_v \in X^\perp$ (denn $f_v \in \langle f_{\alpha+1}, f_{\alpha+2}, ..., f_\beta \rangle = X^\perp$, und $X^\perp$ ist ein Ideal von C^*), also $(f_u * f_v)(x) =$

0 (denn $x \in X$). Doch wegen

$$(f_u * f_v)(x) = (f_u \otimes f_v)(\Delta(x)) = (f_u \otimes f_v)\left(\sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\beta}\lambda_{i,j}x_i \otimes x_j\right) = \sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\beta}\lambda_{i,j}\underbrace{f_u(x_i)}_{=\delta_{u,i}} \otimes \underbrace{f_v(x_j)}_{=\delta_{v,j}}$$
$$= \lambda_{u,v}$$

bedeutet dies $\lambda_{u,v} = 0$. Wir haben damit gezeigt:

Lemma A: Für jedes $u \in \{1, 2, ..., \beta\}$ und jedes $v \in \{\alpha+1, \alpha+2, ..., \beta\}$ ist $\lambda_{u,v} = 0$.

Analog läßt sich sehen:

Lemma B: Für jedes $u \in \{\alpha+1, \alpha+2, ..., \beta\}$ und jedes $v \in \{1, 2, ..., \beta\}$ ist $\lambda_{u,v} = 0$.

Damit gilt

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\beta}\lambda_{i,j}x_i \otimes x_j = \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\lambda_{i,j}x_i \otimes x_j + \sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\sum_{j=1}^{\beta}\underbrace{\lambda_{i,j}}_{=0 \text{ (nach Lemma B)}} x_i \otimes x_j$$
$$= \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\beta}\lambda_{i,j}x_i \otimes x_j = \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_{i,j}x_i \otimes x_j + \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\underbrace{\lambda_{i,j}}_{=0 \text{ (nach Lemma A)}} x_i \otimes x_j$$
$$= \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_{i,j}x_i \otimes x_j \in \langle x_1, x_2, ..., x_\alpha\rangle \otimes \langle x_1, x_2, ..., x_\alpha\rangle = X \otimes X \text{ (denn } \langle x_1, x_2, ..., x_\alpha\rangle = X).$$

Wir haben damit gezeigt, daß $\Delta(x) \in X \otimes X$ für alle $x \in X$ gilt. Das heißt, $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$.

Zweiter Beweis von $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$: Nach Lemma 5.3 (angewandt auf C, C, X und X statt V, W, A bzw. B) gilt $(X \otimes X)^{\perp} = X^{\perp} \otimes C^* + C^* \otimes X^{\perp}$.

Für jedes $t \in \Delta(X)$ und alle $f \in X^{\perp}$ und $g \in C^*$ ist nun $(f \otimes g)(t) = 0$ [267]. Das heißt, für alle $f \in X^{\perp}$ und $g \in C^*$ ist $f \otimes g \in (\Delta(X))^{\perp}$. Da $(\Delta(X))^{\perp}$ ein Vektorraum ist, ist also auch $\left\langle f \otimes g \mid f \in X^{\perp} \text{ und } g \in C^*\right\rangle \subseteq (\Delta(X))^{\perp}$. Wegen $\left\langle f \otimes g \mid f \in X^{\perp} \text{ und } g \in C^*\right\rangle = X^{\perp} \otimes C^*$ vereinfacht sich dies zu $X^{\perp} \otimes C^* \subseteq (\Delta(X))^{\perp}$. Analog zeigt man $C^* \otimes X^{\perp} \subseteq (\Delta(X))^{\perp}$. Daher ist

$$(X \otimes X)^{\perp} = \underbrace{X^{\perp} \otimes C^*}_{\subseteq(\Delta(X))^{\perp}} + \underbrace{C^* \otimes X^{\perp}}_{\subseteq(\Delta(X))^{\perp}} \subseteq (\Delta(X))^{\perp} + (\Delta(X))^{\perp} = (\Delta(X))^{\perp}$$

(denn $(\Delta(X))^{\perp}$ ist ein Vektorraum), und somit ist $\left((X \otimes X)^{\perp}\right)^{\top} \supseteq \left((\Delta(X))^{\perp}\right)^{\top}$. Wegen $\left((X \otimes X)^{\perp}\right)^{\top} = X \otimes X$ und $\left((\Delta(X))^{\perp}\right)^{\top} = \Delta(X)$ vereinfacht sich dies zu $X \otimes X \supseteq \Delta(X)$, also zu $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$.

[267] *Beweis:* Wegen $t \in \Delta(X)$ gibt es ein $x \in X$ mit $t = \Delta(x)$. Nach der Definition der Konvolution ist $(f * g)(x) = (\mu_k \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(x)$, wobei $\mu_k : k \otimes k \to k$ die kanonische Multiplikationsabbildung ist. Da aber $X^{\perp}$ ein Ideal ist, ist $f * g \in X^{\perp}$ (denn $f \in X^{\perp}$) und somit $(f * g)(x) = 0$ (wegen $x \in X$). Daher ist $0 = (f * g)(x) = (\mu_k \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(x) = \mu_k((f \otimes g)(\Delta(x)))$. Da μ_k injektiv ist, folgt hieraus $0 = (f \otimes g)\left(\underbrace{\Delta(x)}_{=t}\right) = (f \otimes g)(t)$, was zu beweisen war.

Wir haben nun auf zwei Arten bewiesen, daß $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$ ist. Also ist X eine Untercoalgebra von C.

Damit sind beide Richtungen gezeigt, und Satz 5.9 ist daher bewiesen.

5.10. Lemma: Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Seien A und B zwei Untervektorräume von C.

(a) Dann ist

$$\left(\Delta^{-1}(C \otimes B + A \otimes C)\right)^{\perp} = A^{\perp} \cdot B^{\perp}.$$

Hierbei ist $A^{\perp} \cdot B^{\perp}$ definiert als der Untervektorraum $\left\langle a * b \mid a \in A^{\perp},\ b \in B^{\perp}\right\rangle$ der Algebra C^*.

(b) Ferner ist

$$\left(\Delta^{-1}(A \otimes B)\right)^{\perp} = A^{\perp} \cdot C^* + C^* \cdot B^{\perp}.$$

(c) Sind A und B zwei Untercoalgebren von C, dann gilt $\left(\Delta^{-1}(A \otimes B)\right)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$.

Beweis von Lemma 5.10: **(a)** Nach Lemma 5.6 (angewandt auf C, $C \otimes C$ und $C \otimes B + A \otimes C$ statt V, U bzw. B) gilt

$$\begin{aligned}
\left(\Delta^{-1}(C \otimes B + A \otimes C)\right)^{\perp} &= \Delta^*\left((C \otimes B + A \otimes C)^{\perp}\right) = \Delta^*\left(A^{\perp} \otimes B^{\perp}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } (C \otimes B + A \otimes C)^{\perp} = A^{\perp} \otimes B^{\perp} \text{ nach Lemma 5.3 } \textbf{(b)} \\ \text{(angewandt auf } V = C \text{ und } W = C) \end{array}\right) \\
&= A^{\perp} \cdot B^{\perp}
\end{aligned}$$

(denn Δ^* ist die Multiplikationsabbildung der Algebra C^*). Damit ist Lemma 5.10 **(a)** gezeigt.

(b) Nach Lemma 5.6 (angewandt auf C, $C \otimes C$ und $A \otimes B$ statt V, U bzw. B) gilt

$$\begin{aligned}
\left(\Delta^{-1}(A \otimes B)\right)^{\perp} &= \Delta^*\left((A \otimes B)^{\perp}\right) = \Delta^*\left(A^{\perp} \otimes C^* + C^* \otimes B^{\perp}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } (A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes W^* + V^* \otimes B^{\perp} \text{ nach Lemma 5.3 } \textbf{(a)} \\ \text{(angewandt auf } V = C \text{ und } W = C) \end{array}\right) \\
&= A^{\perp} \cdot C^* + C^* \cdot B^{\perp}
\end{aligned}$$

(denn Δ^* ist die Multiplikationsabbildung der Algebra C^*). Damit ist Lemma 5.10 **(b)** gezeigt.

(c) Angenommen, A und B sind zwei Untercoalgebren von C. Dann sind $A^{\perp}$ und $B^{\perp}$ Ideale der Algebra C^* (gemäß Satz 5.9), und somit gilt $A^{\perp} \cdot C^* = A^{\perp}$ und $C^* \cdot B^{\perp} = B^{\perp}$. Nach Lemma 5.10 **(b)** gilt nun $\left(\Delta^{-1}(A \otimes B)\right)^{\perp} = \underbrace{A^{\perp} \cdot C^*}_{=A^{\perp}} + \underbrace{C^* \cdot B^{\perp}}_{=B^{\perp}} = A^{\perp} + B^{\perp}$, und Lemma 5.10 **(c)** ist gezeigt.

Aus diesem Lemma können wir eine Folgerung über Untercoalgebren ziehen:

5.11. Folgerung: Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra, und seien A und B zwei Untercoalgebren von C. Dann ist auch $A \cap B$ eine Untercoalgebra von C, und erfüllt $A \cap B = \Delta^{-1}(A \otimes B)$.

Beweis von Folgerung 5.11: Wir haben $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp} = \left(\Delta^{-1}(A \otimes B)\right)^{\perp}$ (nach Lemma 5.10 **(c)**) und damit

$$A \cap B = \left(\underbrace{(A \cap B)^{\perp}}_{=(\Delta^{-1}(A \otimes B))^{\perp}} \right)^{\top} = \left(\left(\Delta^{-1}(A \otimes B) \right)^{\perp} \right)^{\top} = \Delta^{-1}(A \otimes B).$$

Nun sind sind $A^{\perp}$ und $B^{\perp}$ Ideale der Algebra C^* (gemäß Satz 5.9), weil A und B Untercoalgebren von C sind. Daher ist auch $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$ ein Ideal von C^* (denn die Summe zweier Ideale ist ein Ideal). Laut Satz 5.9 (angewandt auf $X = A \cap B$) folgt hieraus, daß $A \cap B$ eine Untercoalgebra von C ist. Damit ist Folgerung 5.11 gezeigt.

Nun eine Definition:

Definition: Sei A eine Algebra, und sei $(I_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen von A. Dann heißt $(I_n)_{n \geq 0}$ eine *Idealfiltrierung* von A, wenn folgende vier Eigenschaften gelten:

1) Es ist $I_0 = A$.

2) Für alle $n, m \geq 0$ ist $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

3) Es gilt $\bigcap\limits_{n \geq 0} I_n = 0$.

4) Es gilt $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ....$

Bemerkung: Wie leicht zu erkennen ist, ist I_n ein Ideal von A für jedes $n \geq 0$, falls $(I_n)_{n \geq 0}$ eine Idealfiltrierung von A ist. (So kommt die Idealfiltrierung zu ihrem Namen.)

Unser nächster Satz bringt die Begriffe einer Coalgebrafiltrierung (dieser Begriff wurde in Abschnitt 2 definiert) und einer Idealfiltrierung miteinander in Verbindung:

5.12. Satz: Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Sei $\left(\widetilde{C}_n\right)_{n \geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen von C. Sei $(I_n)_{n \geq 0}$ die Familie von Untervektorräumen von C^*, die durch

$$I_n = \begin{cases} C^*, & \text{wenn } n = 0; \\ \widetilde{C}_{n-1}^{\perp}, & \text{wenn } n \geq 1 \end{cases} \qquad \text{für alle } n \geq 0$$

definiert ist. Genau dann ist $\left(\widetilde{C}_n\right)_{n \geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C, wenn $(I_n)_{n \geq 0}$ eine Idealfiltrierung von C^* ist.

Beweis von Satz 5.12: $\Longrightarrow$: Angenommen, $\left(\widetilde{C}_n\right)_{n \geq 0}$ sei eine Coalgebrafiltrierung von C. Wir wollen dann beweisen, daß $(I_n)_{n \geq 0}$ eine Idealfiltrierung von C^* ist.

Zuerst einmal ist $I_0 = C^*$ (nach der Definition von I_n).

Da $\left(\widetilde{C}_n\right)_{n \geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C ist, ist $\left(C, \left(\widetilde{C}_n\right)_{n \geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra. Laut der Definition einer filtrierten Coalgebra bedeutet dies, daß folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

$$\widetilde{C}_0 \subseteq \widetilde{C}_1 \subseteq \widetilde{C}_2 \subseteq ...; \qquad \text{(II.5.28)}$$

$$\bigcup_{n \geq 0} \widetilde{C}_n = C;$$

$$\left(\text{für alle } n \geq 0 \text{ und } x \in \widetilde{C}_n \text{ gilt } \Delta(x) \in \sum_{i=0}^{n} \widetilde{C}_i \otimes \widetilde{C}_{n-i} \right). \qquad \text{(II.5.29)}$$

Für jedes $n \geq 1$ ist $I_n = \widetilde{C}_{n-1}^{\perp}$ (gemäß der Definition von I_n). Da $\widetilde{C}_{n-1}$ eine Untercoalgebra von C ist (denn $\left(C, \left(\widetilde{C}_n\right)_{n\geq 0}\right)$ ist eine filtrierte Coalgebra), ist aber $\widetilde{C}_{n-1}^{\perp}$ ein Ideal von C^* (nach Satz 5.9, angewandt auf $X = \widetilde{C}_{n-1}$). Wir haben also für jedes $n \geq 1$ gezeigt, daß $\widetilde{C}_{n-1}^{\perp}$ ein Ideal von C^* ist. Wegen $\widetilde{C}_{n-1}^{\perp} = I_n$ wissen wir damit: Für jedes $n \geq 1$ ist I_n ein Ideal von C^*. Dies ist aber auch für $n = 0$ erfüllt (wegen $I_0 = C^*$). Somit ist I_n ein Ideal von C^* für alle $n \geq 0$.

Jetzt wollen wir zeigen, daß

$$I_n I_m \subseteq I_{n+m} \qquad \text{für alle } n, m \geq 0 \tag{II.5.30}$$

gilt.

Beweis von (II.5.30): Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: Es gilt $n = 0$.

Fall 2: Es gilt $m = 0$.

Fall 3: Es gilt $n > 0$ und $m > 0$.

(Diese drei Fälle schöpfen alle Möglichkeiten aus, denn $n \geq 0$ und $m \geq 0$).

Im Fall 1 ist

$$\begin{aligned}
I_n I_m &= \underbrace{I_0}_{=C^*} I_m \qquad && (\text{denn } n = 0) \\
&= C^* I_m = I_m \qquad && (\text{denn } I_m \text{ ist ein Ideal von } C^*) \\
&= I_{n+m} \qquad && (\text{denn } n = 0 \text{ ergibt } m = n + m),
\end{aligned}$$

und damit ist (II.5.30) im Fall 1 bewiesen. Analog läßt sich (II.5.30) im Fall 2 zeigen.

Ab jetzt konzentrieren wir uns auf den Fall 3. In diesem Fall ist $I_n = \widetilde{C}_{n-1}^{\perp}$ (nach der Definition von I_n) und $I_m = \widetilde{C}_{m-1}^{\perp}$ (analog) und $I_{n+m} = \widetilde{C}_{n+m-1}^{\perp}$ (ebenfalls analog, denn $n > 0$ ergibt $n + m > 0$).

Seien $u \in I_n$, $v \in I_m$ und $x \in \widetilde{C}_{n+m-1}$ beliebig gewählt. Aus $u \in I_n = \widetilde{C}_{n-1}^{\perp} = \left\{\phi \in C^* \mid \phi(c) = 0 \text{ für alle } c \in \widetilde{C}_{n-1}\right\}$ folgt $u(c) = 0$ für alle $c \in \widetilde{C}_{n-1}$, also $u\left(\widetilde{C}_{n-1}\right) = 0$. Analog ist $v\left(\widetilde{C}_{m-1}\right) = 0$. Aus (II.5.29) (angewandt auf $n + m - 1$ statt n) folgt aber $\Delta(x) \in \sum\limits_{i=0}^{n+m-1} \widetilde{C}_i \otimes \widetilde{C}_{n+m-1-i}$. Wenn wir nun die Multiplikationsabbildung auf der Algebra C^* mit μ bezeichnen, dann ist (laut der Definition der Faltung)

$$\begin{aligned}
(u*v)(x) &= (\mu\circ(u\otimes v)\circ\Delta)(x) = (\mu\circ(u\otimes v))(\Delta(x)) \in (\mu\circ(u\otimes v))\left(\sum_{i=0}^{n+m-1}\widetilde{C}_i\otimes\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right)\\
&\qquad\left(\text{denn } \Delta(x)\in\sum_{i=0}^{n+m-1}\widetilde{C}_i\otimes\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n+m-1}(\mu\circ(u\otimes v))\left(\widetilde{C}_i\otimes\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right) = \sum_{i=0}^{n+m-1}\mu\left(\underbrace{(u\otimes v)\left(\widetilde{C}_i\otimes\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right)}_{\subseteq u\left(\widetilde{C}_i\right)\otimes v\left(\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right)}\right)\\
&\subseteq \sum_{i=0}^{n+m-1}\underbrace{\mu\left(u\left(\widetilde{C}_i\right)\otimes v\left(\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right)\right)}_{\substack{=u\left(\widetilde{C}_i\right)\cdot v\left(\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right)\text{ (denn }\mu\\ \text{ist die Multiplikationsabbildung)}}} = \sum_{i=0}^{n+m-1}u\left(\widetilde{C}_i\right)\cdot v\left(\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}u\left(\underbrace{\widetilde{C}_i}_{\substack{\subseteq\widetilde{C}_{n-1}\\ \text{(nach (II.5.28),}\\ \text{wegen } i\leq n-1)}}\right)\cdot v\left(\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right) + \sum_{i=n}^{n+m-1}u\left(\widetilde{C}_i\right)\cdot v\left(\underbrace{\widetilde{C}_{n+m-1-i}}_{\substack{\subseteq\widetilde{C}_{m-1}\\ \text{(nach (II.5.28), denn}\\ \text{aus } i\geq n \text{ folgt } n+m-1-i\leq m-1)}}\right)\\
&\subseteq \sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{u\left(\widetilde{C}_{n-1}\right)}_{=0}\cdot v\left(\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right) + \sum_{i=n}^{n+m-1}u\left(\widetilde{C}_i\right)\cdot\underbrace{v\left(\widetilde{C}_{m-1}\right)}_{=0}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}0\cdot v\left(\widetilde{C}_{n+m-1-i}\right) + \sum_{i=n}^{n+m-1}u\left(\widetilde{C}_i\right)\cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

also $(u*v)(x)=0$. Da dies für alle $x\in\widetilde{C}_{n+m-1}$ gilt, ist also

$$u*v\in\left\{\phi\in C^*\ \mid\ \phi(x)=0 \text{ für alle } x\in\widetilde{C}_{n+m-1}\right\} = \widetilde{C}_{n+m-1}^{\perp} = I_{n+m}.$$

Wir haben also gezeigt: $u*v\in I_{n+m}$ für alle $u\in I_n$ und $v\in I_m$. Damit ist auch $\langle u*v\ \mid\ u\in I_n \text{ und } v\in I_m\rangle\subseteq I_{n+m}$ (da I_{n+m} ein Vektorraum ist). Da $\langle u*v\ \mid\ u\in I_n \text{ und } v\in I_m\rangle = I_nI_m$ ist, wird dies zu $I_nI_m\subseteq I_{n+m}$. Damit ist (II.5.30) auch in Fall 3 erfüllt.

Somit gilt (II.5.30) in allen drei Fällen, und ist somit bewiesen.

Schließlich haben wir

$$\bigcap_{n\geq 1} \underbrace{I_n}_{\substack{=\widetilde{C}_{n-1}^{\perp} \text{ (nach der} \\ \text{Definition von } I_n)}} = \bigcap_{n\geq 1} \widetilde{C}_{n-1}^{\perp} = \bigcap_{n\geq 0} \widetilde{C}_n^{\perp} \qquad \text{(hier haben wir } n \text{ für } n-1 \text{ substituiert)}$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0} \widetilde{C}_n\right)^{\perp} = C^{\perp}$$

$$\left(\text{denn } \sum_{n\geq 0} \widetilde{C}_n \supseteq \bigcup_{n\geq 0} \widetilde{C}_n = C \text{ und } \sum_{n\geq 0} \widetilde{C}_n \subseteq C \text{ ergeben } \sum_{n\geq 0} \widetilde{C}_n = C\right)$$

$$= 0,$$

also $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n \subseteq \bigcap\limits_{n\geq 1} I_n = 0$ und damit $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = 0$.

Schließlich gilt $\widetilde{C}_0 \subseteq \widetilde{C}_1 \subseteq \widetilde{C}_2 \subseteq ...$ (nach (II.5.28)) und damit $\widetilde{C}_0^{\perp} \supseteq \widetilde{C}_1^{\perp} \supseteq \widetilde{C}_2^{\perp} \supseteq ...$; dies läßt sich als $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$ umschreiben (denn nach der Definition von I_n ist $I_n = \widetilde{C}_{n-1}^{\perp}$ für alle $n \geq 1$). Da $I_0 = C^* \supseteq I_1$ gilt, folgt hieraus $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ....$

Insgesamt hat die Familie $(I_n)_{n\geq 0}$ also folgende vier Eigenschaften:

1) Es ist $I_0 = C^*$.

2) Für alle $n, m \geq 0$ ist $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

3) Es gilt $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = 0$.

4) Es gilt $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ....$

Hieraus folgt (laut der Definition einer Idealfiltrierung), daß $(I_n)_{n\geq 0}$ eine Idealfiltrierung von C^* ist. Damit ist die $\Longrightarrow$-Richtung von Satz 5.12 bewiesen.

$\Longleftarrow$: Angenommen, $(I_n)_{n\geq 0}$ ist eine Idealfiltrierung von C^*. Nach der Definition einer Idealfiltrierung bedeutet dies, daß folgende vier Eigenschaften gelten:

1) Es ist $I_0 = C^*$.

2) Für alle $n, m \geq 0$ ist $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

3) Es gilt $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = 0$.

4) Es gilt $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ....$

Die Relation $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ führt zu $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ....$ Da $I_n = \widetilde{C}_{n-1}^{\perp}$ für alle $n \geq 1$ gilt (laut der Definition von I_n), läßt sich dies umschreiben als $\widetilde{C}_0^{\perp} \supseteq \widetilde{C}_1^{\perp} \supseteq \widetilde{C}_2^{\perp} \supseteq ....$ Hieraus folgt $\left(\widetilde{C}_0^{\perp}\right)^{\top} \subseteq \left(\widetilde{C}_1^{\perp}\right)^{\top} \subseteq \left(\widetilde{C}_2^{\perp}\right)^{\top} \subseteq ....$ Da $\left(\widetilde{C}_k^{\perp}\right)^{\top} = \widetilde{C}_k$ für alle $k \geq 0$ gilt, vereinfacht sich dies zu $\widetilde{C}_0 \subseteq \widetilde{C}_1 \subseteq \widetilde{C}_2 \subseteq ....$

Ferner ist

$$0 = \bigcap_{n\geq 0} I_n = \underbrace{I_0}_{=C^*} \cap \bigcap_{n\geq 1} \underbrace{I_n}_{=\widetilde{C}_{n-1}^{\perp}} = C^* \cap \bigcap_{n\geq 1} \widetilde{C}_{n-1}^{\perp} = \bigcap_{n\geq 1} \widetilde{C}_{n-1}^{\perp} = \left(\sum_{n\geq 1} \widetilde{C}_{n-1}\right)^{\perp}$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0} \widetilde{C}_n\right)^{\perp} \qquad \text{(hier haben wir } n-1 \text{ durch } n \text{ substituiert)},$$

also $0^{\top} = \left(\left(\sum\limits_{n\geq 0} \widetilde{C}_n\right)^{\perp}\right)^{\top} = \sum\limits_{n\geq 0} \widetilde{C}_n$. Das heißt, $\sum\limits_{n\geq 0} \widetilde{C}_n = 0^{\top} = C$.

Für jedes $n \geq 1$ gilt $I_n = \widetilde{C}_{n-1}^{\perp}$ und daher $I_n^{\top} = \left(\widetilde{C}_{n-1}^{\perp}\right)^{\top} = \widetilde{C}_{n-1}$. Wenn wir die Variable n hier in s umbenennen, erhalten wir also: Für jedes $s \geq 1$ ist $I_s^{\top} = \widetilde{C}_{s-1}$.

Sei nun $n \geq 0$ beliebig, und sei $x \in \widetilde{C}_n$. Wir werden jetzt zeigen, daß

$$\Delta(x) \in (I_k \otimes I_{n+1-k})^{\top} \qquad \text{für alle } k \in \{0, 1, ..., n+1\} \tag{II.5.31}$$

ist.

Beweis von (II.5.31): Seien $p \in I_k$ und $q \in I_{n+1-k}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} p * q &\in I_k I_{n+1-k} \subseteq I_{k+(n+1-k)} \\ &\qquad \text{(nach der Formel } I_n I_m \subseteq I_{n+m}\text{, angewandt auf } k \text{ und } n+1-k \text{ statt } n \text{ bzw. } m) \\ &= I_{n+1} = \widetilde{C}_n^{\perp} \qquad \text{(nach der Definition von } I_{n+1}) \\ &= \left\{\phi \in C^* \mid \phi(t) = 0 \text{ für alle } t \in \widetilde{C}_n\right\}. \end{aligned}$$

Aus $x \in \widetilde{C}_n$ folgt hiermit $(p * q)(x) = 0$. Doch $(p * q)(x) = (p \otimes q)(\Delta(x))$, und somit ist

$$(p \otimes q)(\Delta(x)) = 0. \tag{II.5.32}$$

Somit ist $t(\Delta(x)) = 0$ für alle $t \in I_k \otimes I_{n+1-k}$ (denn wir können das Element $t \in I_k \otimes I_{n+1-k}$ als Summe $t = \sum\limits_{i=1}^{\xi} p_i \otimes q_i$ von reinen Tensoren schreiben, und somit ist $t(\Delta(x)) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\xi} p_i \otimes q_i\right)(\Delta(x)) = \sum\limits_{i=1}^{\xi} \underbrace{(p_i \otimes q_i)(\Delta(x))}_{=0 \text{ (nach (II.5.32))}} = 0$). Das heißt,

$$\Delta(x) \in \{\phi \in C \otimes C \mid t(\phi) = 0 \text{ für alle } t \in I_k \otimes I_{n+1-k}\} = (I_k \otimes I_{n+1-k})^{\top}.$$

Damit ist (II.5.31) gezeigt.

Aus (II.5.31) folgt

$$\Delta(x) \in \bigcap_{k=0}^{n+1} (I_k \otimes I_{n+1-k})^{\top}.$$

Anwendung von Lemma 5.7 auf C, C, I_k, I_k und $n+1$ statt V, W, I_k, J_k bzw. n ergibt aber

$$\bigcap_{k=0}^{n+1} (I_k \otimes I_{n+1-k})^{\top} = \sum_{\ell=1}^{n+1} I_\ell^{\top} \otimes I_{n+1+1-\ell}^{\top} = \sum_{i=0}^{n} I_{i+1}^{\top} \otimes I_{n+1-i}^{\top}$$
$$\text{(hier haben wir } i \text{ für } \ell - 1 \text{ in der Summe substituiert)}.$$

Da $I_s^{\top} = \widetilde{C}_{s-1}$ für jedes $s \geq 1$ gilt, ist aber $I_{i+1}^{\top} = \widetilde{C}_{(i+1)-1} = \widetilde{C}_i$ und $I_{n+1-i}^{\top} = \widetilde{C}_{(n+1-i)-1} = \widetilde{C}_{n-i}$. Wir haben also insgesamt

$$\Delta(x) \in \bigcap_{k=0}^{n+1} (I_k \otimes I_{n+1-k})^{\top} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{I_{i+1}^{\top}}_{=\widetilde{C}_i} \otimes \underbrace{I_{n+1-i}^{\top}}_{=\widetilde{C}_{n-i}} = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{C}_i \otimes \widetilde{C}_{n-i}.$$

Zusammenfassend können wir feststellen, daß wir folgendes gezeigt haben:

a) Es gilt $\widetilde{C}_0 \subseteq \widetilde{C}_1 \subseteq \widetilde{C}_2 \subseteq ....$

b) Es gilt $\bigcup\limits_{n\geq 0} \widetilde{C}_n = C$.

c) Für alle $n \geq 0$ und $x \in \widetilde{C}_n$ gilt $\Delta(x) \in \sum\limits_{i=0}^{n} \widetilde{C}_i \otimes \widetilde{C}_{n-i}$.

Somit ist $\left(C, \left(\widetilde{C}_n\right)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra. Das heißt, $\left(\widetilde{C}_n\right)_{n\geq 0}$ ist eine Coalgebrafiltrierung von C. Damit ist die $\Longleftarrow$-Richtung von Satz 5.12 bewiesen, und der Beweis von Satz 5.12 ist vollständig.

Noch eine Kleinigkeit, die wir eigentlich schon seit längerem bewiesen haben sollten:

5.13. Satz: (a) Sind A und B zwei Untercoalgebren einer Coalgebra C, dann ist auch $A \cap B$ eine Untercoalgebra von C.

(b) Sind A und B zwei Untercoalgebren einer Coalgebra C, dann ist auch $A + B$ eine Untercoalgebra von C.

(c) Die Schnittmenge endlich vieler Untercoalgebren einer Coalgebra C ist stets selber eine Untercoalgebra von C.

(d) Die Summe endlich vieler Untercoalgebren einer Coalgebra C ist stets selber eine Untercoalgebra von C.

Beweis von Satz 5.13: **(a)** Da A eine Untercoalgebra von C ist, gilt $\Delta(A) \subseteq A \otimes A$, und analog ist $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$. Nun ist

$$\Delta(A \cap B) \subseteq \underbrace{\Delta(A)}_{\subseteq A\otimes A} \cap \underbrace{\Delta(B)}_{\subseteq B\otimes B} \subseteq (A \otimes A) \cap (B \otimes B) = (A \cap B) \otimes (A \cap B)$$

(nach Lemma 5.8 **(b)**, angewandt auf C, C, A, B, A und B statt V, W, P, A, Q bzw. B), und somit ist $A \cap B$ eine Untercoalgebra von C. Satz 5.13 **(a)** ist damit bewiesen.

(b) Da A eine Untercoalgebra von C ist, gilt $\Delta(A) \subseteq \underbrace{A}_{\subseteq A+B} \otimes \underbrace{A}_{\subseteq A+B} \subseteq (A + B) \otimes (A + B)$, und analog ist $\Delta(B) \subseteq (A + B) \otimes (A + B)$. Nun ist

$$\begin{aligned}\Delta(A + B) &\subseteq \underbrace{\Delta(A)}_{\subseteq (A+B)\otimes(A+B)} + \underbrace{\Delta(B)}_{\subseteq (A+B)\otimes(A+B)} \subseteq (A + B) \otimes (A + B) + (A + B) \otimes (A + B) \\ &\subseteq (A + B) \otimes (A + B)\end{aligned}$$

(denn $(A + B) \otimes (A + B)$ ist ein Vektorraum). Somit ist $A + B$ eine Untercoalgebra von C. Satz 5.13 **(b)** ist damit bewiesen.

(c) Satz 5.13 **(c)** folgt aus Satz 5.13 **(a)** durch Induktion.

(d) Satz 5.13 **(d)** folgt aus Satz 5.13 **(b)** durch Induktion.

Damit ist Satz 5.13 komplett bewiesen.

Die Coradikalfiltrierung: Lemmata

Wir erinnern uns an eine Definition, die wir in Abschnitt 4 gegeben haben:

Definition: Sei C eine Coalgebra.

Für alle $n \geq 0$ definieren wir rekursiv einen Untervektorraum C_n von C wie folgt: Wie immer sei C_0 das Coradikal von C. Für jedes $n \geq 1$ definiere man C_n durch $C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C)$.

Dann ist $(C_n)_{n\geq 0}$ eine Familie von Untervektorräumen des Vektorraums C. Sie heißt die *Coradikalfiltrierung* von C.

Wir haben immer noch nicht gezeigt, daß $(C_n)_{n\geq 0}$ auch wirklich eine Filtrierung ist; aber dies werden wir jetzt nachholen.

Wir erinnern uns erstmal daran, daß

$$C_0 = (\text{das Coradikal von } C) = \sum_{\substack{D\subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D \qquad (\text{nach der Definition des Coradikals})$$

ist.

5.20. Lemma: Sei C eine Coalgebra, und C' eine Untercoalgebra von C. Sei $(C_n)_{n\geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C, und sei $(C'_n)_{n\geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C'. Dann ist $C'_n \subseteq C_n$ für alle $n \geq 0$.

Beweis von Lemma 5.20: Wir beweisen Lemma 5.20 durch vollständige Induktion nach n:

Induktionsanfang: Wir haben $C_0 = \sum\limits_{\substack{D\subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D$. Analog ist $C'_0 = \sum\limits_{\substack{D\subseteq C' \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D$.

Da jede einfache Untercoalgebra D von C' auch eine einfache Untercoalgebra D von C ist, ist also $C'_0 = \sum\limits_{\substack{D\subseteq C' \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D \subseteq \sum\limits_{\substack{D\subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D = C_0$. Damit ist Lemma 5.20 für $n = 0$ bewiesen, d. h. der Induktionsanfang ist fertig.

Induktionsschritt: Sei $m \geq 1$ beliebig. Angenommen, Lemma 5.20 gilt für $n = m-1$. Wir wollen zeigen, daß Lemma 5.20 auch für $n = m$ gilt.

Da Lemma 5.20 für $n = m-1$ gilt, ist $C'_{m-1} \subseteq C_{m-1}$. Nach der Definition von C_m ist nun aber $C_m = \Delta^{-1}(C \otimes C_{m-1} + C_0 \otimes C)$, und analog ist $C'_m = \Delta^{-1}\left(C' \otimes C'_{m-1} + C'_0 \otimes C'\right)$. Daher ist

$$C'_m = \Delta^{-1}\left(\underbrace{C'}_{\subseteq C} \otimes \underbrace{C'_{m-1}}_{\subseteq C_{m-1}} + \underbrace{C'_0}_{\subseteq C_0} \otimes \underbrace{C'}_{\subseteq C}\right) \subseteq \Delta^{-1}(C \otimes C_{m-1} + C_0 \otimes C) = C_m.$$

Das heißt, Lemma 5.20 gilt auch für $n = m$. Damit ist der Induktionsschritt fertig, und Lemma 5.20 ist durch Induktion bewiesen.

5.21. Lemma: Sei C eine Coalgebra, und sei $(C_n)_{n\geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C. Dann ist $C_{n-1} \subseteq C_n$ für jedes $n \geq 1$.

Beweis von Lemma 5.21: Wir werden Lemma 5.21 durch vollständige Induktion nach n beweisen:

Induktionsanfang: Wir wollen Lemma 5.21 für $n = 1$ beweisen.

Wir haben $C_0 = \sum\limits_{\substack{D\subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D$. Für jede einfache Untercoalgebra $D \subseteq C$ gilt also $D \subseteq C_0$. Für jede Untercoalgebra $D \subseteq C$ gilt aber $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$. Für jede einfache

Untercoalgebra $D \subseteq C$ gilt also $\Delta(D) \subseteq \underbrace{D}_{\subseteq C_0} \otimes \underbrace{D}_{\subseteq C_0} \subseteq C_0 \otimes C_0$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\Delta(C_0) &= \Delta\left(\sum_{\substack{D \subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D\right) = \sum_{\substack{D \subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} \underbrace{\Delta(D)}_{\subseteq C_0 \otimes C_0} && (\text{denn } \Delta \text{ ist linear}) \\
&\subseteq \sum_{\substack{D \subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} C_0 \otimes C_0 \subseteq C_0 \otimes C_0 && (\text{denn } C_0 \otimes C_0 \text{ ist ein Vektorraum}) \\
&\subseteq C \otimes C_0 + C_0 \otimes C,
\end{aligned}$$

also $C_0 \subseteq \Delta^{-1}(C \otimes C_0 + C_0 \otimes C)$. Da $C_1 = \Delta^{-1}(C \otimes C_0 + C_0 \otimes C)$ (nach der Definition von C_1) ist, wird dies zu $C_0 \subseteq C_1$. Mit anderen Worten: Lemma 5.21 gilt für $n = 1$. Damit ist der Induktionsanfang vollbracht.

Induktionsschritt: Sei $m \geq 1$ beliebig. Angenommen, Lemma 5.21 gilt für $n = m$. Wir wollen zeigen, daß Lemma 5.21 auch für $n = m + 1$ gilt.

Da Lemma 5.21 für $n = m$ gilt, ist $C_{m-1} \subseteq C_m$. Nach der Definition von C_m ist nun aber $C_m = \Delta^{-1}(C \otimes C_{m-1} + C_0 \otimes C)$, und nach der Definition von C_{m+1} ist $C_{m+1} = \Delta^{-1}(C \otimes C_m + C_0 \otimes C)$. Somit ist

$$C_m = \Delta^{-1}\left(C \otimes \underbrace{C_{m-1}}_{\subseteq C_m} + C_0 \otimes C\right) \subseteq \Delta^{-1}(C \otimes C_m + C_0 \otimes C) = C_{m+1}.$$

Das heißt, Lemma 5.21 gilt auch für $n = m + 1$. Damit ist der Induktionsschritt fertig, und Lemma 5.21 ist durch Induktion bewiesen.

5.22. Satz: Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra, und sei $(C_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C. Sei $(I_n)_{n \geq 0}$ die Familie von Untervektorräumen von C^*, die durch

$$I_n = \begin{cases} C^*, \text{ wenn } n = 0; \\ C_{n-1}^{\perp}, \text{ wenn } n \geq 1 \end{cases} \qquad \text{für alle } n \geq 0$$

definiert ist. Dann ist $I_n = (\mathrm{Ra}(C^*))^n$ für alle $n \geq 0$.

Beweis von Satz 5.22: Wir beweisen Satz 5.22 durch vollständige Induktion nach n:

Induktionsanfang: Der Induktionsanfang von diesem Induktionsbeweis wird ein wenig ungewöhnlich sein: wir werden Satz 5.22 sowohl für $n = 0$ als auch für $n = 1$ beweisen müssen. Für $n = 0$ ist Satz 5.22 trivial (denn I_0 wurde als C^* definiert, und damit ist offensichtlich $I_0 = (\mathrm{Ra}(C^*))^0$; das heißt, Satz 5.22 gilt für $n = 0$). Für $n = 1$ läßt sich Satz 5.22 folgendermaßen aus Bemerkung 4.5 folgern: Laut der Definition von C_0 ist C_0 das Coradikal von C, und nach Bemerkung 4.5. **2)** folgt hieraus $\mathrm{Ra}(C^*) = C_0^{\perp}$. Da I_1 als $C_0^{\perp}$ definiert wurde, ist nun $I_1 = C_0^{\perp} = \mathrm{Ra}(C^*) = (\mathrm{Ra}(C^*))^1$. Das heißt, Satz 5.22 gilt für $n = 1$.

Wir haben damit Satz 5.22 für $n = 0$ und für $n = 1$ nachgewiesen. Der Induktionsanfang ist vollendet.

Induktionsschritt: Sei $m \geq 1$ beliebig. Angenommen, Satz 5.22 gilt für $n = m$. Wir wollen zeigen, daß Satz 5.22 auch für $n = m + 1$ gilt.

Da Satz 5.22 für $n = m$ gilt, ist $I_m = (\mathrm{Ra}\,(C^*))^m$. Nach der Definition von I_m ist aber $I_m = C_{m-1}^\perp$ (denn $m \geq 1$), und nach der Definition von I_{m+1} ist $I_{m+1} = C_m^\perp$ (denn $m + 1 \geq 1$). Da C_m als $\Delta^{-1}(C \otimes C_{m-1} + C_0 \otimes C)$ definiert wurde, ist nun

$$\begin{aligned}
C_m^\perp &= \left(\Delta^{-1}(C \otimes C_{m-1} + C_0 \otimes C)\right)^\perp = C_0^\perp \cdot C_{m-1}^\perp \\
&\qquad \text{(nach Lemma 5.10, angewandt auf } A = C_0 \text{ und } B = C_{m-1}) \\
&= (\mathrm{Ra}\,(C^*)) \cdot (\mathrm{Ra}\,(C^*))^m \qquad \left(\text{denn } C_{m-1}^\perp = I_m = (\mathrm{Ra}\,(C^*))^m \text{ und } C_0^\perp = \mathrm{Ra}\,(C^*)\right) \\
&= (\mathrm{Ra}\,(C^*))^{m+1}.
\end{aligned}$$

Das heißt, $I_{m+1} = C_m^\perp = (\mathrm{Ra}\,(C^*))^{m+1}$. Mit anderen Worten: Satz 5.22 gilt auch für $n = m + 1$. Damit ist der Induktionsschritt fertig, und Satz 5.22 ist durch Induktion bewiesen.

Die Coradikalfiltrierung: Beweis von 4.7

Jetzt können wir endlich die eigentlich interessante Aussage zeigen: Satz 4.7. Zunächst beweisen wir ihn für den Fall, wenn C endlichdimensional ist.

Beweis von Satz 4.7 für den Fall, wenn C endlichdimensional ist: Wir definieren die Familie $(I_n)_{n\geq 0}$ wie in Satz 5.22. Gemäß Satz 5.22 gilt dann $I_n = (\mathrm{Ra}\,(C^*))^n$ für alle $n \geq 0$. Hieraus folgt sofort, daß $I_0 = C^*$ gilt, daß $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ für alle $n, m \geq 0$ gilt (denn $I_n I_m = (\mathrm{Ra}\,(C^*))^n (\mathrm{Ra}\,(C^*))^m \subseteq (\mathrm{Ra}\,(C^*))^{n+m} = I_{n+m}$), und daß $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ gilt. Ferner gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, das $(\mathrm{Ra}\,(C^*))^N = 0$ erfüllt (denn da die Algebra C^* endlichdimensional und daher Artinsch ist, ist ihr Jacobson-Radikal $\mathrm{Ra}\,(C^*)$ nilpotent), und für dieses N gilt somit $I_N = (\mathrm{Ra}\,(C^*))^N = 0$, also $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = 0$ (denn $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n \subseteq I_N = 0$). Wir haben also folgende vier Aussagen gezeigt:

1) Es ist $I_0 = C^*$.

2) Für alle $n, m \geq 0$ ist $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

3) Es gilt $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = 0$.

4) Es gilt $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq ....$

Diese vier Aussagen bedeuten, daß $(I_n)_{n\geq 0}$ eine Idealfiltrierung der Algebra C^* ist.

Wenn wir aber Satz 5.12 auf die Familie $(C_n)_{n\geq 0}$ anstelle der Familie $\left(\widetilde{C}_n\right)_{n\geq 0}$ anwenden, dann erhalten wir: Genau dann ist $(C_n)_{n\geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C, wenn $(I_n)_{n\geq 0}$ eine Idealfiltrierung von C^* ist. Da wir wissen, daß $(I_n)_{n\geq 0}$ eine Idealfiltrierung der Algebra C^* ist, können wir hieraus folgern, daß $(C_n)_{n\geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C ist. Damit ist Satz 4.7 im Fall einer endlichdimensionalen Coalgebra C bewiesen.

Bevor wir den allgemeinen Fall (wenn C nicht mehr notwendigerweise endlichdimensional sein muß) behandeln, leiten wir ein technisches Lemma her - eine Verstärkung des Endlichkeitssatzes:

5.23. Lemma: Sei C eine Coalgebra, und sei $(C_n)_{n\geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C. Für jedes $m \geq 0$ und jedes $c \in C_m$ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $c \in C'_m$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n\geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet.

Beweis von Lemma 5.23: Wir beweisen Lemma 5.23 durch vollständige Induktion nach m:

Induktionsanfang: Sei $m = 0$. Sei $c \in C_0$ beliebig. Wegen $c \in C_0 = \sum\limits_{\substack{D \subseteq C \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D$ können wir das Element c in der Form $c = d_1 + d_2 + ... + d_k$ schreiben, wobei $k \in \mathbb{N}$ und

$$(d_i \in D_i \text{ für eine einfache Untercoalgebra } D_i \text{ von } C \text{ für jedes } i \in \{1, 2, ..., k\})$$

gilt. Sei nun $C' = D_1 + D_2 + ... + D_k$. Dann ist C' eine Untercoalgebra von C (nach Satz 5.13 **(d)**, denn C' ist die Summe der Untercoalgebren D_1, D_2, ..., D_k von C). Für jedes $i \in \{1, 2, ..., k\}$ ist die Coalgebra D_i endlichdimensional (weil sie einfach ist, und jede einfache Coalgebra endlichdimensional ist); somit ist auch die Summe $C' = D_1 + D_2 + ... + D_k$ dieser Coalgebren endlichdimensional. Wir haben ferner

$$\begin{aligned}
c &= d_1 + d_2 + ... + d_k \in D_1 + D_2 + ... + D_k \subseteq \sum_{\substack{D \subseteq C' \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D \\
&\qquad (\text{denn } D_1,\ D_2,\ ...,\ D_k \text{ sind einfache Untercoalgebren von } C') \\
&= (\text{Coradikal von } C') \qquad \left(\text{denn das Coradikal von } C' \text{ ist als } \sum_{\substack{D \subseteq C' \\ \text{einfache} \\ \text{Untercoalgebra}}} D \text{ definiert}\right) \\
&= C'_0 \qquad (\text{laut der Definition von } C'_0).
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt: Für jedes $c \in C_0$ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $c \in C'_0$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet. Das heißt, Lemma 5.23 ist für $m = 0$ bewiesen. Der Induktionsanfang ist damit komplett.

Induktionsschritt: Sei $M \geq 1$ beliebig. Angenommen, Lemma 5.23 gilt für den Fall $m = M - 1$. Wir werden dann zeigen, daß Lemma 5.23 auch für den Fall $m = M$ gilt.

Da wir angenommen haben, daß Lemma 5.23 für den Fall $m = M - 1$ gilt, haben wir folgenden Fakt: Für jedes $c \in C_{M-1}$ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $c \in C'_{M-1}$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet.

Wenn wir in diesem Fakt c in x umbenennen, lautet er folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\text{Für jedes } x \in C_{M-1} \text{ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra } C' \text{ von } C, \\
&\text{die } x \in C'_{M-1} \text{ erfüllt, wobei } (C'_n)_{n \geq 0} \text{ die Coradikalfiltrierung von } C' \text{ bezeichnet.}
\end{aligned} \tag{II.5.35}$$

Da wir den Induktionsanfang bereits hinter uns haben, wissen wir ferner, daß Lemma 5.23 für den Fall $m = 0$ gilt. Das heißt: Für jedes $c \in C_0$ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $c \in C'_0$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet.

Wenn wir in diesem Fakt c in x umbenennen, lautet er folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\text{Für jedes } x \in C_0 \text{ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra } C' \text{ von } C, \\
&\text{die } x \in C'_0 \text{ erfüllt, wobei } (C'_n)_{n \geq 0} \text{ die Coradikalfiltrierung von } C' \text{ bezeichnet.}
\end{aligned} \tag{II.5.36}$$

Sei nun $c \in C_M$ beliebig. Nach der Definition von C_M ist $C_M = \Delta^{-1}(C \otimes C_{M-1} + C_0 \otimes C)$. Also ist $c \in C_M = \Delta^{-1}(C \otimes C_{M-1} + C_0 \otimes C)$ und damit $\Delta(c) \in C \otimes C_{M-1} + C_0 \otimes C$. Mit anderen Worten: $\Delta(c) = p + q$ für ein $p \in C \otimes C_{M-1}$ und ein $q \in C_0 \otimes C$.

Nun können wir den Tensor p als Summe reiner Tensoren schreiben:

$$p = \sum_{i=1}^{u} p'_i \otimes p_i, \qquad \text{wobei } u \in \mathbb{N}, \text{ sowie } p'_i \in C \text{ und } p_i \in C_{M-1} \text{ für alle } i \in \{1, 2, ..., u\}.$$

Auch den Tensor q können wir als Summe reiner Tensoren schreiben:

$$q = \sum_{j=1}^{v} q_j \otimes q'_j, \qquad \text{wobei } v \in \mathbb{N}, \text{ sowie } q_j \in C_0 \text{ und } q'_j \in C \text{ für alle } j \in \{1, 2, ..., v\}.$$

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., u\}$ können wir (II.5.35) auf $x = p_i$ anwenden, und erhalten: Für jedes $i \in \{1, 2, ..., u\}$ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $p_i \in C'_{M-1}$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet. Bezeichnen wir diese Untercoalgebra C' mit P^i [268], dann ist P^i also eine endlichdimensionale Untercoalgebra von C, die $p_i \in P^i_{M-1}$ erfüllt, wobei $(P^i_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von P^i bezeichnet.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., v\}$ können wir (II.5.36) auf $x = q_j$ anwenden, und erhalten: Für jedes $j \in \{1, 2, ..., v\}$ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $q_j \in C'_0$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet. Bezeichnen wir diese Untercoalgebra C' mit Q^j [269], dann ist Q^j also eine endlichdimensionale Untercoalgebra von C, die $q_j \in Q^j_0$ erfüllt, wobei $(Q^j_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von Q^j bezeichnet.

Nach Satz 4.3 **2)** *a)* in Kapitel I gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C mit $c \in C'$. Wir bezeichnen diese Untercoalgebra C' mit T. Dann ist also $c \in T$.

Sei nun $C' = \sum\limits_{i=1}^{u} P^i + \sum\limits_{j=1}^{v} Q^j + T$. Dann ist C' eine Untercoalgebra von C (laut Satz 5.13 **(d)**, denn C' ist die Summe der Untercoalgebren $P^1, P^2, ..., P^u, Q^1, Q^2, ..., Q^v, T$ von C). Ferner ist C' endlichdimensional (denn $C' = \sum\limits_{i=1}^{u} P^i + \sum\limits_{j=1}^{v} Q^j + T$, doch alle P^i und alle Q^j sowie T sind endlichdimensional). Aus $C' = \sum\limits_{i=1}^{u} P^i + \sum\limits_{j=1}^{v} Q^j + T$ folgt ferner, daß $P^i \subseteq C'$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., u\}$ ist, daß $Q^j \subseteq C'$ für jedes $j \in \{1, 2, ..., v\}$ ist, und daß $T \subseteq C'$ ist.

Nun bezeichne $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung der Coalgebra C'. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., u\}$ ist dann $P^i_{M-1} \subseteq C'_{M-1}$ (nach Lemma 5.20, angewandt auf $M-1$, P^i und C' statt n, C' bzw. C). Für jedes $j \in \{1, 2, ..., v\}$ ist ferner $Q^j_0 \subseteq C'_0$ (nach Lemma 5.20, angewandt auf 0, Q^j und C' statt n, C' bzw. C).

[268] dabei meinen wir mit P^i nicht die i-te Potenz von irgendeinem P, sondern ein P mit einem hochgestelltem Index i

[269] dabei meinen wir mit Q^j nicht die j-te Potenz von irgendeinem Q, sondern ein Q mit einem hochgestelltem Index j

Wegen $p = \sum\limits_{i=1}^{u} p'_i \otimes p_i$ und $q = \sum\limits_{j=1}^{v} q_j \otimes q'_j$ wird nun $\Delta(c) = p + q$ zu

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{u} \underbrace{p'_i}_{\in C} \otimes \underbrace{p_i}_{\in P^i_{M-1} \subseteq C'_{M-1}} + \sum_{j=1}^{v} \underbrace{q_j}_{\in Q^j_0 \subseteq C'_0} \otimes \underbrace{q'_j}_{\in C} \in \sum_{i=1}^{u} C \otimes C'_{M-1} + \sum_{j=1}^{v} C'_0 \otimes C$$
$$\subseteq C \otimes C'_{M-1} + C'_0 \otimes C \qquad \left(\text{denn } C \otimes C'_{M-1} \text{ und } C'_0 \otimes C \text{ sind Vektorräume}\right).$$

Andererseits ist $c \in T \subseteq C'$ und damit $\Delta(c) \in C' \otimes C'$ (denn C' ist eine Coalgebra). Zusammen mit $\Delta(c) \in C \otimes C'_{M-1} + C'_0 \otimes C$ ergibt dies

$$\Delta(c) \in (C' \otimes C') \cap \left(C \otimes C'_{M-1} + C'_0 \otimes C\right) = C' \otimes \left(C'_{M-1} \cap C'\right) + (C'_0 \cap C') \otimes C'$$
$$\left(\begin{array}{c}\text{nach Lemma 5.8 } \textbf{(a)}\text{, angewandt auf } C,\ C,\ C',\ C',\ C'_0 \text{ und } C'_{M-1} \\ \text{statt } V,\ W,\ P,\ Q,\ A \text{ bzw. } B\end{array}\right)$$
$$= C' \otimes C'_{M-1} + C'_0 \otimes C'$$
$$\left(\text{denn aus } C'_{M-1} \subseteq C' \text{ folgt } C'_{M-1} \cap C' = C'_{M-1}, \text{ und aus } C'_0 \subseteq C' \text{ folgt } C'_0 \cap C' = C'_0\right),$$

also

$$c \in \Delta^{-1}\left(C' \otimes C'_{M-1} + C'_0 \otimes C'\right).$$

Doch da $C'_M = \Delta^{-1}\left(C' \otimes C'_{M-1} + C'_0 \otimes C'\right)$ ist (nach der Definition von C'_M), wird hieraus $c \in C'_M$.

Wir haben also gezeigt: Für jedes $c \in C_M$ gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $c \in C'_M$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet. Das heißt, Lemma 5.23 gilt für $m = M$. Damit ist der Induktionsschritt fertig, und Lemma 5.23 ist durch Induktion bewiesen.

Beweis von Satz 4.7 im allgemeinen Fall: Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, in dem wir nicht mehr fordern, daß C endlichdimensional ist. Wir wollen zeigen, daß $(C_n)_{n \geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß $\left(C, (C_n)_{n \geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra ist, d. h. daß folgende drei Eigenschaften gelten:

a) Es gilt $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq ....$

b) Es gilt $\bigcup\limits_{n \geq 0} C_n = C$.

c) Für alle $n \geq 0$ und $x \in C_n$ ist $\Delta(x) \in \sum\limits_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$.

Wir werden diese drei Eigenschaften jetzt beweisen.

*Beweis von Eigenschaft **a)**:* Die Eigenschaft **a)** folgt sofort aus Lemma 5.21.

*Beweis von Eigenschaft **b)**:* Um die Eigenschaft **b)** zu beweisen, müssen wir zeigen, daß jedes $x \in C$ auch $x \in \bigcup\limits_{n \geq 0} C_n$ erfüllt. Dazu wählen wir ein beliebiges $x \in C$. Nach Satz 4.3. **1)** *a)* in Kapitel I gibt es dann eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C mit $x \in C'$. Bezeichnen wir mit $(C'_n)_{n \geq 0}$ die Coradikalfiltrierung dieser Coalgebra C'. Da C' endlichdimensional ist, können wir Satz 4.7 auf C' statt C anwenden (denn für den Fall, wenn C endlichdimensional ist, haben wir Satz 4.7 bereits bewiesen), und erhalten, daß $(C'_n)_{n \geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C' ist. Das heißt, $\left(C', (C'_n)_{n \geq 0}\right)$ ist eine filtrierte Coalgebra. Laut der Definition einer filtrierten Coalgebra folgt hieraus unter anderem, daß $\bigcup\limits_{n \geq 0} C'_n = C'$ ist. Somit ist $x \in C' = \bigcup\limits_{n \geq 0} \underbrace{C'_n}_{\subseteq C_n \text{ (nach Lemma 5.20)}} \subseteq$

$\bigcup_{n\geq 0} C_n$. Wir haben damit gezeigt: Für jedes $x \in C$ gilt $x \in \bigcup_{n\geq 0} C_n$. Daraus folgt $C \subseteq \bigcup_{n\geq 0} C_n$, also $C = \bigcup_{n\geq 0} C_n$ (denn $\bigcup_{n\geq 0} C_n \subseteq C$ ist klar). Damit ist Eigenschaft **b)** bewiesen.

Beweis von Eigenschaft ***c)**:* Seien $n \geq 0$ und $y \in C_n$ beliebig gewählt. Nach Lemma 5.23 (angewandt auf $m = n$ und $c = y$) gibt es eine endlichdimensionale Untercoalgebra C' von C, die $y \in C'_n$ erfüllt, wobei $(C'_n)_{n\geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C' bezeichnet. Da C' endlichdimensional ist, können wir Satz 4.7 auf C' statt C anwenden (denn für den Fall, wenn C endlichdimensional ist, haben wir Satz 4.7 bereits bewiesen), und erhalten, daß $(C'_n)_{n\geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C' ist. Das heißt, $\left(C', (C'_n)_{n\geq 0}\right)$ ist eine filtrierte Coalgebra. Laut der Definition einer filtrierten Coalgebra folgt hieraus unter anderem, daß $\Delta(x) \in \sum_{i=0}^{n} C'_i \otimes C'_{n-i}$ für alle $n \geq 0$ und $x \in C'_n$ gilt. Angewandt auf $x = y$ ergibt dies

$$\Delta(y) \in \sum_{i=0}^{n} \underbrace{C'_i}_{\subseteq C_i \text{ (nach Lemma 5.20)}} \otimes \underbrace{C'_{n-i}}_{\subseteq C_{n-i} \text{ (nach Lemma 5.20)}} \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}.$$

Wir haben also gezeigt: Für alle $n \geq 0$ und $y \in C_n$ ist $\Delta(y) \in \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$. Wenn wir in diesem Faktum y in x umbenennen, erhalten wir: Für alle $n \geq 0$ und $x \in C_n$ ist $\Delta(x) \in \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$. Damit ist Eigenschaft **c)** bewiesen.

Wir haben nun alle drei Eigenschaften **a)**, **b)** und **c)** bewiesen (im allgemeinen Fall). Damit haben wir gezeigt, daß $\left(C, (C_n)_{n\geq 0}\right)$ eine filtrierte Coalgebra ist, d. h. daß $(C_n)_{n\geq 0}$ eine Coalgebrafiltrierung von C ist. Satz 4.7 ist somit auch im allgemeinen Fall bewiesen.

Die Coradikalfiltrierung: Weitere Eigenschaften

Wir können ein klein wenig mehr feststellen:

5.24. Satz: Sei C eine Coalgebra, und sei $(C_n)_{n\geq 0}$ die Coradikalfiltrierung von C.
(a) Für alle $n \geq 0$ und $m \geq 0$ ist $\Delta^{-1}(C \otimes C_n + C_m \otimes C) = C_{n+m+1}$.
(b) Für alle $n \geq 0$ ist $\Delta^{-1}(C \otimes C_n) = \Delta^{-1}(C_n \otimes C) = C_n$.

Wie auch im Falle von Satz 4.7 werden wir zuerst einen Beweis geben, der nur im Fall, wenn C endlichdimensional ist, funktioniert:

Beweis von Satz 5.24 für den Fall, wenn C endlichdimensional ist: Wir werden **(a)** und **(b)** in einem Stoß beweisen. Dazu definieren wir einen Untervektorraum C_{-1} von C durch $C_{-1} = 0$. Wir definieren ferner die Familie $(I_n)_{n\geq 0}$ wie in Satz 5.22.

Dann gilt $I_n = C_{n-1}^{\perp}$ für alle ganzen $n \geq 0$ (denn für alle $n \geq 1$ ist $I_n = C_{n-1}^{\perp}$ gemäß der Definition von I_n, und für $n = 0$ folgt $I_n = C_{n-1}^{\perp}$ aus $I_n = I_0 = C^*$ und $C_{n-1} = C_{-1} = 0$). Wenn wir in dieser Tatsache $n-1$ durch ℓ substituieren, erhalten wir: Es gilt $I_{\ell+1} = C_{\ell}^{\perp}$ für alle ganzen $\ell \geq -1$.

Seien nun $n \geq -1$ und $m \geq -1$ beliebig. Nach Lemma 5.10 **(a)** (angewandt auf $A = C_m$ und $B = C_n$) gilt dann

$$\left(\Delta^{-1}(C \otimes C_n + C_m \otimes C)\right)^{\perp} = C_m^{\perp} \cdot C_n^{\perp}.$$

Andererseits gilt $I_{n+m+2} = C_{n+m+1}^{\perp}$ (nach der Formel $I_{\ell+1} = C_{\ell}^{\perp}$, angewandt auf $\ell = n+m+1$), und somit

$$\begin{aligned} C_{n+m+1}^{\perp} &= I_{n+m+2} = (\mathrm{Ra}\,(C^*))^{n+m+2} \qquad \text{(nach Satz 5.22)} \\ &= (\mathrm{Ra}\,(C^*))^{(m+1)+(n+1)} = \underbrace{(\mathrm{Ra}\,(C^*))^{m+1}}_{=I_{m+1} \text{ (nach Satz 5.22)}} \cdot \underbrace{(\mathrm{Ra}\,(C^*))^{n+1}}_{=I_{n+1} \text{ (nach Satz 5.22)}} \\ &= \underbrace{I_{m+1}}_{=C_m^{\perp}} \cdot \underbrace{I_{n+1}}_{=C_n^{\perp}} = C_m^{\perp} \cdot C_n^{\perp} = \left(\Delta^{-1}\left(C \otimes C_n + C_m \otimes C\right)\right)^{\perp}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\left(C_{n+m+1}^{\perp}\right)^{\top} = \left(\left(\Delta^{-1}\left(C \otimes C_n + C_m \otimes C\right)\right)^{\perp}\right)^{\top},$$

was sich zu

$$C_{n+m+1} = \Delta^{-1}\left(C \otimes C_n + C_m \otimes C\right)$$

vereinfacht (denn für jeden Untervektorraum X von C gilt $\left(X^{\perp}\right)^{\top} = X$, weil C endlichdimensional ist).

Wir haben damit gezeigt, daß $\Delta^{-1}\left(C \otimes C_n + C_m \otimes C\right) = C_{n+m+1}$ für alle $n \geq -1$ und $m \geq -1$ gilt. Hieraus folgt sofort Satz 5.24 **(a)** (natürlich nur im Fall, wenn C endlichdimensional ist). Ferner gilt für alle $n \geq 0$ die Gleichung $\Delta^{-1}\left(C \otimes C_n\right) = C_n$, denn Anwendung von $\Delta^{-1}\left(C \otimes C_n + C_m \otimes C\right) = C_{n+m+1}$ auf $m = -1$ ergibt $\Delta^{-1}\left(C \otimes C_n + C_{-1} \otimes C\right) = C_{n+(-1)+1}$, was sich (wegen $\underbrace{C_{-1}}_{=0} \otimes C = 0$ und $n + (-1) + 1 = n$) zu $\Delta^{-1}\left(C \otimes C_n\right) = C_n$ vereinfacht. Analog gilt $\Delta^{-1}\left(C_n \otimes C\right) = C_n$ für alle $n \geq 0$. Wir haben damit auch Satz 5.24 **(b)** gezeigt (ebenfalls nur im Fall, wenn C endlichdimensional ist).

Im Fall, wenn C endlichdimensional ist, ist damit Satz 5.24 bewiesen.

Beweis von Satz 5.24 im allgemeinen Fall: Wir wollen den Beweis von Satz 5.24 im allgemeinen Fall nicht ausführen, aber er ist sehr ähnlich zu dem Beweis von Satz 4.7 im allgemeinen Fall.

Ausblick aufs zweite Semester

Ausblick

Mit 4.12. haben wir die Struktur aller cokommutativen Hopfalgebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\operatorname{char} k = 0$ klassifiziert. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind cokommutative Hopfalgebren stets punktiert (und ferner kennen wir viele weitere punktierte Hopfalgebren). Wir können uns also allgemeiner fragen, wie punktierte Hopfalgebren aussehen. Insbesondere können wir nach Struktursätzen für punktierte Hopfalgebren suchen.

Sei H eine *punktierte* Hopfalgebra, z. B. über $\mathbb{C}$. Wie kann H aussehen?

Idee: Sei $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq ...$ die Coradikalfiltrierung. Dann ist $\operatorname{gr} H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n \diagup H_{n-1}$ (mit $H_{-1} = 0$) eine $\mathbb{N}$-graduierte Hopfalgebra; dabei ist $H_0 = k\left[G\right]$ die Gruppenalgebra. Dann ist [...]

[Falls jemand die nachfolgende halbe Stunde(?) Vorlesung im Detail mitgeschrieben hat, wäre ich daran interessiert, sie zu bekommen. Sie ist ein Ausblick auf die späten Teile von Kapitel IV: braided categories, Nicholsalgebren, Yetter-Drinfeld-Moduln.]

Zweites Semester

III. Kapitel: Endlichdimensionale Hopfalgebren

1. Hopfmoduln und Integrale

Hopfmoduln und ihre coinvarianten Elemente

In diesem Kapitel werden wir einige tiefliegende (und teils neue) Sätze über allgemeine endlichdimensionale Hopfalgebren kennenlernen. Ein Hilfsmittel zum Beweis dieser Sätze ist der Begriff der *Hopfmoduln*.

Definition: Sei H eine Hopfalgebra.

Unter einem *H-Rechtshopfmodul* verstehen wir einen Vektorraum V mit einer H-Rechtsmodulstruktur und einer H-Rechtscomodulstruktur $\delta_V : V \to V \otimes H$, die eine der folgenden zwei äquivalenten Bedingungen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ erfüllen:

Bedingung $\mathcal{B}_1$: Die Abbildung δ_V ist H-rechtslinear, wobei die H-Rechtsmodulstruktur auf dem Tensorprodukt $V \otimes H$ als die Diagonalstruktur definiert ist.[270]

Bedingung $\mathcal{B}_2$: Für alle $v \in V$ und $h \in H$ gilt $\delta_V(vh) = v_{(0)}h_{(1)} \otimes v_{(1)}h_{(2)}$, wobei wir wie üblich die Sweedler-Notation $v_{(0)} \otimes v_{(1)} = \delta_V(v)$ verwenden.

Ein *H-Rechtshopfmodulhomomorphismus* ist ein Vektorraumhomomorphismus zwischen zwei H-Rechtshopfmoduln, der sowohl H-linear, als auch H-colinear ist.

Sei $\mathcal{M}_H^H$ die Kategorie, deren Objekte die H-Rechtshopfmoduln und deren Morphismen die H-Rechtshopfmodulhomomorphismen sind.

Bemerkung: Die Definition von Hopfmoduln läßt sich auf viele Fälle verallgemeinern. Zum Beispiel sei H eine Hopfalgebra, und A eine H-Rechtscomodulalgebra, gegeben durch die Abbildung $\delta_A : A \to A \otimes H$, $a \mapsto a_{(0)} \otimes a_{(1)}$.

Ein *(A, H)-Hopfmodul* ist dann definiert als ein Vektorraum V mit einer A-Rechtsmodulstruktur und einer H-Rechtscomodulstruktur $\delta_V : V \to V \otimes H$, die eine der folgenden zwei äquivalenten Bedingungen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ erfüllen:

Bedingung $\mathcal{C}_1$: Die Abbildung δ_V ist A-rechtslinear, wobei die A-Rechtsmodulstruktur auf dem Tensorprodukt $V \otimes H$ dadurch definiert wird, daß $V \otimes H$ als $A \otimes H$-Rechtsmodul aufgefasst wird (weil V ein A-Rechtsmodul ist), und aus dieser $A \otimes H$-Rechtsmodulstruktur eine A-Rechtsmodulstruktur gewonnen wird (durch die Algebraabbildung $\delta_A : A \to A \otimes H$, $a \mapsto a_{(0)} \otimes a_{(1)}$).

Bedingung $\mathcal{C}_2$: Für alle $v \in V$ und $a \in A$ gilt $\delta_V(va) = v_{(0)}a_{(0)} \otimes v_{(1)}a_{(1)}$, wobei wir wie üblich die Sweedler-Notation $v_{(0)} \otimes v_{(1)} = \delta_V(v)$ verwenden.

Wir werden jedoch im Folgenden erstmal nur H-Hopfmoduln betrachten, und erst später (A, H)-Hopfmoduln untersuchen.

---

[270] Hierbei verwenden wir die sogenannte *Diagonalstruktur*. Diese haben wir zwar bislang nur für zwei H-Linksmoduln eingeführt, aber für H-Rechtsmoduln definiert man sie analog:

Sind V und W zwei H-Rechtsmoduln, dann definiert man auf dem Vektorraum $V \otimes W$ eine H-Rechtsmodulstruktur durch $(v \otimes w)h = vh_{(1)} \otimes wh_{(2)}$ für alle $h \in H$, $v \in V$ und $w \in W$ (wobei wir die summenlose Sweedler-Notation verwenden). Diese Struktur heißt *Diagonalstruktur* auf $V \otimes W$.

Definition: Für jeden H-Rechtshopfmodul V definieren wir einen Untervektorraum $V^{\operatorname{Co}H}$ von V durch

$$V^{\operatorname{Co}H} = \{v \in V \mid \delta_V(v) = v \otimes 1\}.$$

Wir bezeichnen die Elemente von $V^{\operatorname{Co}H}$ als H-*coinvariante Elemente* von V.

1.0. Bemerkung: Sei H eine Hopfalgebra.

1) Es ist klar, daß für jeden H-Rechtshopfmodulhomomorphismus f von einem H-Rechtshopfmodul V in einen H-Rechtshopfmodul W gilt: $f\left(V^{\operatorname{Co}H}\right) \subseteq W^{\operatorname{Co}H}$.

Den Funktor $\mathcal{M}_H^H \to \mathcal{M}_k$, der jedes Objekt $V \in \mathcal{M}_H^H$ in den Vektorraum $V^{\operatorname{Co}H}$ überführt, und der jeden Morphismus $f : V \to W$ in den Vektorraumhomomorphismus $f\mid_{V^{\operatorname{Co}H}}: V^{\operatorname{Co}H} \to W^{\operatorname{Co}H}$ überführt, bezeichnen wir kurz mit $V \mapsto V^{\operatorname{Co}H}$.

2) Für jeden Vektorraum $W \in \mathcal{M}_k$ können wir den Vektorraum $W \otimes H$ zu einem H-Rechtshopfmodul machen, indem wir die H-Rechtsmodulstruktur auf $W \otimes H$ durch

$$\operatorname{id}\otimes\mu : W \otimes H \otimes H \to W \otimes H, \qquad w \otimes x \otimes h \mapsto w \otimes xh$$

festlegen, und die H-Rechtscomodulstruktur auf $W \otimes H$ durch

$$\operatorname{id}\otimes\Delta : W \otimes H \to W \otimes H \otimes H, \qquad w \otimes h \mapsto w \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}$$

festlegen. Den Funktor $\mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_H^H$, der jedes Objekt $W \in \mathcal{M}_k$ in den so definierten H-Rechtshopfmodul $W \otimes H$ überführt, und der jeden Vektorraumhomomorphismus $f : V \to W$ in den H-Rechtshopfmodulhomomorphismus $f \otimes \operatorname{id} : V \otimes H \to W \otimes H$ überführt, bezeichnen wir kurz mit $W \mapsto W \otimes H$.

1.1. Satz: Sei H eine Hopfalgebra. Dann sind die Funktoren

$$\begin{aligned} W \mapsto W \otimes H &: \mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_H^H \qquad \text{und} \\ V \mapsto V^{\operatorname{Co}H} &: \mathcal{M}_H^H \to \mathcal{M}_k \end{aligned}$$

quasiinverse Äquivalenzen von Kategorien.

Genauer gilt:

1) Für jeden Vektorraum $W \in \mathcal{M}_k$ ist die Abbildung $W \to (W \otimes H)^{\operatorname{Co}H}$, $w \mapsto w \otimes 1$ ein kanonischer Isomorphismus von Vektorräumen.

2) Für jeden H-Rechtshopfmodul $V \in \mathcal{M}_H^H$ ist die Abbildung $V^{\operatorname{Co}H} \otimes H \to V$, $v \otimes h \mapsto vh$ ein kanonischer Isomorphismus von H-Rechtshopfmoduln. Ihre Umkehrabbildung ist $V \to V^{\operatorname{Co}H} \otimes H$, $v \mapsto \varphi\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$, wobei φ die Abbildung $V \to V^{\operatorname{Co}H}$, $v \mapsto v_{(0)} S\left(v_{(1)}\right)$ ist.

Beweis: **1)** Sei $W \in \mathcal{M}_k$. Wir müssen zeigen, daß die Abbildung $W \to (W \otimes H)^{\operatorname{Co}H}$, $w \mapsto w \otimes 1$ ein Isomorphismus von Vektorräumen und funktoriell in W ist.

Beweis: Es ist klar, daß diese Abbildung wohldefiniert, injektiv und funktoriell in W ist. Es bleibt also nur noch zu beweisen, daß sie surjektiv ist. Dazu betrachten wir ein Element $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \otimes h_i \in (W \otimes H)^{\operatorname{Co}H}$, wobei $w_i \in W$ und $h_i \in H$ für jedes i ist. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes (h_i)_{(1)} \otimes (h_i)_{(2)} = \delta_{W\otimes H}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes h_i \otimes 1$$

(denn $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \otimes h_i \in (W \otimes H)^{\operatorname{Co} H}$). Anwendung von $\operatorname{id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{id}$ auf diese Gleichung ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes \underbrace{\varepsilon\left((h_i)_{(1)}\right)(h_i)_{(2)}}_{=h_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes \varepsilon(h_i)\, 1 = \sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon(h_i) \otimes 1.$$

Daher ist $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \otimes h_i$ das Bild von $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \varepsilon(h_i)$ unter der Abbildung $W \to (W \otimes H)^{\operatorname{Co} H}$, $w \mapsto w \otimes 1$. Somit ist diese Abbildung surjektiv, was zu beweisen war.

2) Sei $V \in \mathcal{M}_H^H$. Wir müssen zeigen:

a) Die Abbildung $\varphi : V \to V^{\operatorname{Co} H}$, $v \mapsto v_{(0)} S\left(v_{(1)}\right)$ ist wohldefiniert und k-linear.

b) Die Abbildungen $V^{\operatorname{Co} H} \otimes H \to V$, $v \otimes h \mapsto vh$ und $V \to V^{\operatorname{Co} H} \otimes H$, $v \mapsto \varphi\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$ sind zueinander inverse Isomorphismen von Vektorräumen und funktoriell in V.

Beweis: **a)** Sei $v \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta_V\left(v_{(0)} S\left(v_{(1)}\right)\right) &= \left(v_{(0)}\right)_{(0)} \left(S\left(v_{(1)}\right)\right)_{(1)} \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(1)} \left(S\left(v_{(1)}\right)\right)_{(2)} \\
&\qquad \text{(gemäß Bedingung } \mathcal{B}_2 \text{ in der Definition eines Hopfmoduls)} \\
&= \left(v_{(0)}\right)_{(0)} S\left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes \left(v_{(0)}\right)_{(1)} S\left(\left(v_{(1)}\right)_{(1)}\right) \\
&\qquad \text{(denn } S \text{ ist ein Anticoalgebrahomomorphismus)} \\
&= v_{(0)} S\left(v_{(3)}\right) \otimes v_{(1)} S\left(v_{(2)}\right) = v_{(0)} S\left(v_{(2)}\right) \otimes \underbrace{\left(v_{(1)}\right)_{(1)} S\left(\left(v_{(1)}\right)_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(v_{(1)}\right)1} \\
&= v_{(0)} S\left(\underbrace{\varepsilon\left(v_{(1)}\right) v_{(2)}}_{=v_{(1)}}\right) \otimes 1 \qquad \left(\text{denn } \varepsilon\left(v_{(1)}\right) \text{ ist ein Skalar}\right) \\
&= v_{(0)} S\left(v_{(1)}\right) \otimes 1,
\end{aligned}$$

also $v_{(0)} S\left(v_{(1)}\right) \in V^{\operatorname{Co} H}$. Daher ist die Abbildung φ wohldefiniert. Die k-Linearität von φ ist klar (denn abstrakt gesehen ist $\varphi = \mu_V \circ (\operatorname{id} \otimes S) \circ \delta_V$, wobei die Abbildung $\mu_V : V \otimes H \to V$ die H-Rechtsmodulstruktur auf V beschreibt).

b) i) Sei $v \in V^{\operatorname{Co} H}$ und $h \in H$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\varphi\left((vh)_{(0)}\right) \otimes (vh)_{(1)} &= \varphi\left(v_{(0)} h_{(1)}\right) \otimes v_{(1)} h_{(2)} \\
&= \varphi\left(v h_{(1)}\right) \otimes h_{(2)} \qquad \left(\text{denn } v \in V^{\operatorname{Co} H} \text{ ergibt } v_{(0)} \otimes v_{(1)} = v \otimes 1\right) \\
&= \left(v h_{(1)}\right)_{(0)} S\left(\left(v h_{(1)}\right)_{(1)}\right) \otimes h_{(2)} = v_{(0)} h_{(1)} S\left(v_{(1)} h_{(2)}\right) \otimes h_{(3)} \\
&= v\, \underbrace{h_{(1)} S\left(h_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(h_{(1)}\right) \cdot 1} \otimes h_{(3)} \qquad \left(\text{schon wieder nach } v_{(0)} \otimes v_{(1)} = v \otimes 1\right) \\
&= v \varepsilon\left(h_{(1)}\right) \cdot 1 \otimes h_{(2)} = v \otimes \underbrace{\varepsilon\left(h_{(1)}\right) h_{(2)}}_{=h} = v \otimes h.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: Wendet man auf ein Element von $V^{\operatorname{Co} H} \otimes H$ zuerst die Abbildung $V^{\operatorname{Co} H} \otimes H \to V$, $v \otimes h \mapsto vh$, und dann die Abbildung $V \to V^{\operatorname{Co} H} \otimes H$, $v \mapsto \varphi\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$ an, dann erhält man wieder das ursprüngliche Element.

ii) Für jedes $v \in V$ ist $\varphi\left(v_{(0)}\right) v_{(1)} = v_{(0)} \underbrace{S\left(v_{(1)}\right) v_{(2)}}_{=\varepsilon\left(v_{(1)}\right)} = v_{(0)} \varepsilon\left(v_{(1)}\right) = v$.

Damit ist gezeigt: Wendet man auf ein Element von V zunächst die Abbildung $V \to V^{\operatorname{Co} H} \otimes H$, $v \mapsto \varphi\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$, und dann die Abbildung $V^{\operatorname{Co} H} \otimes H \to V$, $v \otimes h \mapsto vh$ an, dann erhält man wieder das ursprüngliche Element.

Aus **i)** und **ii)** folgt, daß die Abbildungen $V^{\operatorname{Co} H} \otimes H \to V$, $v \otimes h \mapsto vh$ und $V \to V^{\operatorname{Co} H} \otimes H$, $v \mapsto \varphi\left(v_{(0)}\right) \otimes v_{(1)}$ zueinander invers sind. Ferner sind sie Vektorraumhomomorphismen (wie man leicht einsieht, wenn man sie abstrakt aufschreibt), also Vektorraumisomorphismen (da sie zueinander invers sind). Schließlich sind diese Abbildungen funktoriell in V (das folgt aus ihren Definitionen). Damit ist 1.1. bewiesen.

1.1$\frac{1}{2}$. Erinnerung: Ist H eine Algebra, dann sind auf ihrem Dualraum $H^* = \operatorname{Hom}(H, k)$ kanonisch eine H-Linksmodulstruktur und eine H-Rechtsmodulstruktur gegeben. Und zwar ist die H-Linksmodulstruktur $(h, f) \mapsto hf$ auf H^* definiert durch $(hf)(x) = f(xh)$ für alle $f \in H^*$ und $x, h \in H$, und die H-Rechtsmodulstruktur $(h, f) \mapsto fh$ auf H^* ist definiert durch $(fh)(x) = f(hx)$ für alle $f \in H^*$ und $x, h \in H$. Diese beiden Strukturen ergänzen sich zu einer (H, H)-Bimodulstruktur auf H^*.

Achtung: Wir werden in 1.2. eine andere H-Rechtsmodulstruktur auf H^* einführen!

1.2. Hauptlemma: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann ist H^* kanonisch ein H-Rechtshopfmodul mit folgender Struktur:

Die H-Rechtscomodulstruktur auf H^* sei einfach die zur (durch Multiplikation gegebenen) H^*-Linksmodulstruktur[271] auf H^* adjungierte H-Rechtscomodulstruktur. Mit anderen Worten: Die H-Rechtscomodulstruktur auf H^* wird durch die Abbildung $\delta_{H^*} : H^* \to H^* \otimes H$ festgelegt, wobei diese Abbildung δ_{H^*} dadurch festgelegt ist, daß für jedes $p \in H^*$ gilt: für jedes $f \in H^*$ ist $p_{(0)} f\left(p_{(1)}\right) = f \cdot p$ (wobei wir wieder die Sweedler-Notation $p_{(0)} \otimes p_{(1)} = \delta_{H^*}(p)$ verwenden; dabei ist $p_{(0)} \in H^*$ und $p_{(1)} \in H$).

Die H-Rechtsmodulstruktur $(p, h) \mapsto p \lhd h$ auf H^* sei definiert durch $p \lhd h = S(h)\, p$ für alle $p \in H^*$ und $h \in H$ (wobei $S(h)\, p$ wiederum im Sinne der oben definierten H-Linksmodulstruktur auf H^* zu verstehen ist, also durch $(S(h)\, p)(x) = p(xS(h))$ für alle $x \in H$ definiert ist).[272] Mit anderen Worten: Die H-Rechtsmodulstruktur auf H^* ist so festgelegt, daß $(p \lhd h)(x) = p(xS(h))$ für alle $p \in H^*$ und $h, x \in H$ ist. Es ist zu beachten, daß diese H-Rechtsmodulstruktur $(p, h) \mapsto p \lhd h = S(h)\, p$ auf H^* nicht mit der oben (in 1.1$\frac{1}{2}$.) definierten H-Rechtsmodulstruktur $(p, h) \mapsto ph$ auf H^* übereinstimmt! Im Allgemeinen sind also $p \lhd h$ und ph verschiedene Elemente von H^*.

Die H-Rechtscomodulstruktur $\delta_{H^*} : H^* \to H^* \otimes H$ auf H^* und die H-Rechtsmodulstruktur $(p, h) \mapsto p \lhd h$ auf H^* bilden zusammen eine H-Hopfmodulstruktur auf H^*.

Beweis: Wir müssen zeigen: Für alle $p \in H^*$ und $h \in H$ gilt $\delta_{H^*}(p \lhd h) = \left(p_{(0)} \lhd h_{(1)}\right) \otimes p_{(1)} h_{(2)}$.

[271] Dies ist diejenige H^*-Linksmodulstruktur auf H^*, die von der Multiplikationsabbildung $H^* \otimes H^* \to H^*$ herrührt.

[272] Man kann diese H-Rechtsmodulstruktur natürlich auch als eine lineare Abbildung $H^* \otimes H \to H^*$, $p \otimes h \mapsto p \lhd h = S(h)\, p$ auffassen.

Beweis: Wir formen die Behauptung äquivalent um:

$$\left(\delta_{H^*}(p \lhd h) = \left(p_{(0)} \lhd h_{(1)}\right) \otimes p_{(1)} h_{(2)}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(\text{für alle } f \in H^* \text{ ist } \left(p_{(0)} \lhd h_{(1)}\right) \underbrace{f\left(p_{(1)} h_{(2)}\right)}_{\text{ein Skalar}} = f \cdot (p \lhd h)\right)$$

$$\left(\text{denn } (p \lhd h)_{(0)} f\left((p \lhd h)_{(1)}\right) = f \cdot (p \lhd h) \text{ nach der Definition von } \delta_{H^*}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(\text{für alle } f \in H^* \text{ und } x \in H \text{ ist } \underbrace{\left(p_{(0)} \lhd h_{(1)}\right)(x)}_{=p_{(0)}\left(xS\left(h_{(1)}\right)\right)} \underbrace{f\left(p_{(1)} h_{(2)}\right)}_{=\left(h_{(2)} f\right)\left(p_{(1)}\right)} = \underbrace{(f \cdot (p \lhd h))(x)}_{=f\left(x_{(1)}\right)(p \lhd h)\left(x_{(2)}\right)}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \left(\text{für alle } f \in H^* \text{ und } x \in H \text{ ist } p_{(0)}\left(xS\left(h_{(1)}\right)\right) \cdot \left(h_{(2)} f\right)\left(p_{(1)}\right) = f\left(x_{(1)}\right) \underbrace{(p \lhd h)\left(x_{(2)}\right)}_{=p\left(x_{(2)} S(h)\right)}\right).$$

Nach der Definition von δ_{H^*} gilt aber $p_{(0)} \cdot \left(h_{(2)} f\right)\left(p_{(1)}\right) = \left(h_{(2)} f\right) \cdot p$. Dies ist eine Gleichheit in H^*; wenden wir sie auf $xS\left(h_{(1)}\right) \in H$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& p_{(0)}\left(xS\left(h_{(1)}\right)\right) \cdot \left(h_{(2)} f\right)\left(p_{(1)}\right) = \left[\left(h_{(2)} f\right) \cdot p\right]\left(xS\left(h_{(1)}\right)\right) \\
& = \left(h_{(2)} f\right)\left(\left(xS\left(h_{(1)}\right)\right)_{(1)}\right) \cdot p\left(\left(xS\left(h_{(1)}\right)\right)_{(2)}\right) \\
& = \left(h_{(2)} f\right)\left(x_{(1)}\left(S\left(h_{(1)}\right)\right)_{(1)}\right) \cdot p\left(x_{(2)}\left(S\left(h_{(1)}\right)\right)_{(2)}\right) \\
& = \left(h_{(2)} f\right)\left(x_{(1)} S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right)\right) \cdot p\left(x_{(2)} S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)}\right)\right) \\
& \qquad \left(\begin{array}{c} \text{weil } \left(S\left(h_{(1)}\right)\right)_{(1)} \otimes \left(S\left(h_{(1)}\right)\right)_{(2)} = S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(2)}\right) \otimes S\left(\left(h_{(1)}\right)_{(1)}\right), \\ \text{denn } S \text{ ist ein Anticoalgebrahomomorphismus} \end{array}\right) \\
& = \underbrace{\left(h_{(3)} f\right)\left(x_{(1)} S\left(h_{(2)}\right)\right)}_{\substack{=f\left(x_{(1)} S\left(h_{(2)}\right) h_{(3)}\right) \\ =f\left(x_{(1)} \varepsilon\left(h_{(2)}\right) \cdot 1\right) \\ =f\left(\varepsilon\left(h_{(2)}\right) x_{(1)}\right)}} \cdot p\left(x_{(2)} S\left(h_{(1)}\right)\right) = f\left(\varepsilon\left(h_{(2)}\right) x_{(1)}\right) \cdot p\left(x_{(2)} S\left(h_{(1)}\right)\right) \\
& = f\left(x_{(1)}\right) \cdot p\left(x_{(2)} S\left(\underbrace{h_{(1)} \varepsilon\left(h_{(2)}\right)}_{=h}\right)\right) = f\left(x_{(1)}\right) \cdot p\left(x_{(2)} S(h)\right),
\end{aligned}$$

und gemäß der Äquivalenzumformung folgt hieraus $\delta_{H^*}(p \lhd h) = \left(p_{(0)} \lhd h_{(1)}\right) \otimes p_{(1)} h_{(2)}$, was zu beweisen war.

Integrale

Unser weiterer Plan besteht nun darin, zu zeigen, daß in jeder endlichdimensionalen Hopfalgebra H die Antipode S bijektiv ist. Dazu werden wir nachweisen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} & H^{*\,\mathrm{Co}\,H} \otimes H \to H^*, \\ & \qquad p \otimes h \mapsto S(h)\, p = p \lhd h \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist. Diese Abbildung ist aber die Verkettung

$$H^{*\operatorname{Co}H} \otimes H \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes S} H^{*\operatorname{Co}H} \otimes H \xrightarrow{p \otimes h \mapsto hp} H^* .$$

Somit muß die Abbildung $\operatorname{id} \otimes S : H^{*\operatorname{Co}H} \otimes H \to H^{*\operatorname{Co}H} \otimes H$ injektiv sein, also auch bijektiv (da $\dim \left(H^{*\operatorname{Co}H} \otimes H\right) < \infty$), und somit muß auch S bijektiv sein (denn $H^{*\operatorname{Co}H} \neq 0$).

Um diesen Plan zu erfüllen (also zu beweisen, daß die genannte Abbildung ein Isomorphismus ist), werden wir erstmal zwei Begriffe einführen:

Definition: 1) Sei H eine Algebra, und $\varepsilon : H \to k$ ein Algebrahomomorphismus. (Ein solches Paar (H, ε) heißt auch *augmentierte Algebra*.)

Sei $\Lambda \in H$. Dann heißt Λ ein *Linksintegral* von (H, ε), wenn für jedes $h \in H$ die Gleichung $h\Lambda = \varepsilon(h) \Lambda$ gilt. Ferner heißt Λ ein *Rechtsintegral* von (H, ε), wenn für jedes $h \in H$ die Gleichung $\Lambda h = \varepsilon(h) \Lambda$ gilt.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{I}_l(H)$ die Menge $\{\Lambda \in H \mid \Lambda \text{ ist ein Linksintegral von } H\}$, und wir bezeichnen mit $\mathrm{I}_r(H)$ die Menge $\{\Lambda \in H \mid \Lambda \text{ ist ein Rechtsintegral von } H\}$. Offensichtlich sind $\mathrm{I}_l(H)$ und $\mathrm{I}_r(H)$ Vektorräume.

2) Sei H eine Hopfalgebra. Unter den *Linksintegralen* und den *Rechtsintegralen* der Hopfalgebra H versteht man dann die Linksintegrale bzw. die Rechtsintegrale von (H, ε), wobei ε die Coeins der Hopfalgebra H ist. Außerdem definieren wir die *Linksintegrale* und die *Rechtsintegrale* von H^* als die Linksintegrale bzw. die Rechtsintegrale von (H^*, η^*). Dabei muß H^* nicht notwendigerweise eine Hopfalgebra sein (für $\dim H < \infty$ ist H^* eine Hopfalgebra mit der Coeins η^*, aber auch für $\dim H = \infty$ sind Linksintegrale und Rechtsintegrale von H^* wohldefiniert).[273]

$1.2\frac{1}{2}$. Beispiele: 1) Sei G eine endliche Gruppe, und sei $H = k[G]$ ihre Gruppenalgebra. Dann ist $\mathrm{I}_l(H) = \mathrm{I}_r(H) = k \cdot \Lambda$, wobei $\Lambda = \sum\limits_{g \in G} g \in H$ ist. (Dabei bedeutet $k \cdot \Lambda$ den von dem Vektor Λ erzeugten Untervektorraum des k-Vektorraums H).

Beweis: Sei $\Gamma \in H$ beliebig gewählt. Schreibe Γ in der Form $\Gamma = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g g$, wobei

[273] Wir erinnern daran, daß $\eta : k \to H$ der durch $\eta(t) = t \cdot 1_H$ für alle $t \in k$ definierte Algebrahomomorphismus ist. Somit ist $\eta^* : H^* \to k$ die Abbildung, die jedem $p \in H^*$ den Wert $p(1_H)$ zuordnet.

$\alpha_g \in k$ für jedes $g \in G$ ist. Dann gilt folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\begin{aligned}
(\Gamma \in \mathrm{I}_l(H)) &\iff (h\Gamma = \varepsilon(h)\Gamma \text{ für jedes } h \in H) \\
&\iff (h\Gamma = \varepsilon(h)\Gamma \text{ für jedes } h \in G) \\
&\qquad \text{(denn die Gruppe } G \text{ erzeugt } H \text{ als } k\text{-Vektorraum)} \\
&\iff \left(h \sum_{g\in G} \alpha_g g = \underbrace{\varepsilon(h)}_{\substack{=1,\text{ da}\\ h\in G}} \sum_{g\in G} \alpha_g g \text{ für jedes } h \in G \right) \\
&\iff \left(\sum_{g\in G} \alpha_g hg = \sum_{g\in G} \alpha_g g \text{ für jedes } h \in G \right) \\
&\iff \left(\sum_{g\in G} \alpha_{h^{-1}g} g = \sum_{g\in G} \alpha_g g \text{ für jedes } h \in G \right) \\
&\iff (\alpha_{h^{-1}g} = \alpha_g \text{ für jedes } h \in G \text{ und jedes } g \in G) \\
&\iff (\alpha_g = \alpha_e \text{ für jedes } g \in G, \text{ wobei } e \text{ das neutrale Element von } G \text{ ist}) \\
&\iff \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g = \sum_{g\in G} \alpha_e g \right) \iff \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g \in k \sum_{g\in G} g \right) \iff (\Gamma \in k \cdot \Lambda).
\end{aligned}$$

Somit ist $\mathrm{I}_l(H) = k \cdot \Lambda$. Analog zeigt man $\mathrm{I}_r(H) = k \cdot \Lambda$.

2) Sei q eine primitive n-te Einheitswurzel in k. Sei

$$H = k \left\langle g, x \mid g^n = 1,\ x^n = 0,\ gxg^{-1} = qx \right\rangle$$

die Taft-Hopfalgebra (aus Kapitel I, 2.18. **12)**). Sei $\Lambda = \sum\limits_{i=0}^{n-1} g^i x^{n-1}$ und sei $\Gamma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} q^i g^i x^{n-1}$. Dann ist $0 \neq \Lambda \in \mathrm{I}_l(H)$, $0 \neq \Gamma \in \mathrm{I}_r(H)$ und $\Lambda \notin \mathrm{I}_r(H)$.

Beweis: Die Familie $(g^i x^j)_{0\leq i,j\leq n-1}$ ist eine Basis des k-Vektorraums H (dies folgt z. B. aus Kapitel I, 3.3. **4)**). Hieraus folgt sofort $\Lambda \neq 0$ und $\Gamma \neq 0$.

Jetzt wollen wir nachprüfen, daß $\Lambda \in \mathrm{I}_l(H)$ ist, also daß $h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda$ für jedes $h \in H$ ist. Dazu reicht es aus, nachzuweisen, daß $g\Lambda = \varepsilon(g)\Lambda$ und $x\Lambda = \varepsilon(x)\Lambda$ ist (denn (g, x) ist ein Algebraerzeugendensystem von H, und um zu zeigen, daß die Gleichung $h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda$ für jedes $h \in H$ gilt, reicht es aus, sie auf einem Algebraerzeugendensystem von H nachzuprüfen). Dies ist leicht einzusehen:

$$g\Lambda = \underbrace{g \sum_{i=0}^{n-1} g^i}_{\substack{=\sum_{i=1}^{n} g^i = \sum_{i=0}^{n-1} g^i, \\ \text{da } g^n = 1 = g^0}} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} g^i x^{n-1} = \Lambda = \varepsilon(g)\Lambda;$$

$$x\Lambda = x \sum_{i=0}^{n-1} g^i x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{xg^i}_{=q^{-i}g^i x} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^{-i} g^i \underbrace{x^n}_{=0} = 0 = \varepsilon(x)\Lambda.$$

Daß $\Gamma \in \mathrm{I}_r(H)$ ist, folgt gleichermaßen aus

$$\Gamma g = \sum_{i=0}^{n-1} q^i g^i \underbrace{x^{n-1} g}_{\substack{=q^{-(n-1)} g x^{n-1} \\ =q g x^{n-1}, \text{ da} \\ q^{-(n-1)}=q, \\ \text{weil } q^n=1}} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i g^i q g x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^{i+1} g^{i+1} x^{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q^i g^i x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i g^i x^{n-1} \qquad \left(\text{da } q^n = 1 = q^0 \text{ und } g^n = 1 = g^0\right)$$

$$= \Gamma = \varepsilon(g)\,\Gamma;$$

$$\Gamma x = \sum_{i=0}^{n-1} q^i g^i \underbrace{x^{n-1} x}_{=x^n=0} = 0 = \varepsilon(x)\,\Gamma.$$

Daß $\Lambda \notin \mathrm{I}_r(H)$ ist, folgt aus

$$\Lambda g = \sum_{i=0}^{n-1} g^i \underbrace{x^{n-1} g}_{\substack{=q g x^{n-1}, \\ \text{wie oben} \\ \text{gezeigt}}} = \sum_{i=0}^{n-1} g^i q g x^{n-1} = q \sum_{i=0}^{n-1} g^{i+1} x^{n-1} = q \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g^i}_{\substack{=\sum_{i=0}^{n-1} g^i, \text{ da} \\ g^n=1=g^0}} x^{n-1} = q \sum_{i=0}^{n-1} g^i x^{n-1} = q\Lambda \neq \Lambda.$$

1.3. Lemma: Sei H eine Hopfalgebra, und sei $\lambda \in H^*$. Dann sind folgende zwei Aussagen zueinander äquivalent:

1) Es gilt $\lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$.

2) Für jedes $h \in H$ ist $h_{(1)} \lambda\left(h_{(2)}\right) = 1 \cdot \lambda(h)$.

Beweis: Wir haben folgende Kette äquivalenter Aussagen:

$$\begin{aligned}
(\lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)) &\iff (\text{für alle } p \in H^* \text{ ist } p\lambda = \eta^*(p)\,\lambda) \\
&\iff (\text{für alle } p \in H^* \text{ ist } p\lambda = p(1)\,\lambda) \\
&\iff (\text{für alle } p \in H^* \text{ und alle } h \in H \text{ ist } (p\lambda)(h) = (p(1)\,\lambda)(h)) \\
&\iff \left(\text{für alle } p \in H^* \text{ und alle } h \in H \text{ ist } p\left(h_{(1)}\lambda\left(h_{(2)}\right)\right) = p(1 \cdot \lambda(h))\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } (p\lambda)(h) = p\left(h_{(1)}\right)\lambda\left(h_{(2)}\right) = p\left(h_{(1)}\lambda\left(h_{(2)}\right)\right) \\ \text{und } (p(1)\,\lambda)(h) = p(1)\,\lambda(h) = p(1 \cdot \lambda(h)) \end{array}\right) \\
&\iff \left(\text{für alle } h \in H \text{ ist } h_{(1)}\lambda\left(h_{(2)}\right) = 1 \cdot \lambda(h)\right).
\end{aligned}$$

1.4. Satz (Larson-Sweedler): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_l(H^*) \otimes H &\to H^*, \\ \lambda \otimes x &\mapsto S(x)\,\lambda \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen[274].

[274] und sogar ein Isomorphismus von H-Hopfmoduln, wobei die H-Hopfmodulstruktur auf $\mathrm{I}_l(H^*) \otimes H$ gemäß 1.0. **2)** definiert ist, und die H-Hopfmodulstruktur auf H^* gemäß 1.2. definiert ist.

Beweis: Nach 1.2. ist $H^* \in \mathcal{M}_H^H$. Nach 1.1. **2)** ist

$$\begin{aligned} H^{*\operatorname{Co}H} \otimes H &\to H^*, \\ \lambda \otimes x &\mapsto \lambda \lhd x = S(x)\lambda \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von H-Hopfmoduln. Wir müssen also nur noch zeigen, daß $H^{*\operatorname{Co}H} = \mathrm{I}_l(H^*)$ ist.

Für jedes $\lambda \in H^*$ gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \left(\lambda \in H^{*\operatorname{Co}H}\right) &\iff (\delta_{H^*}(\lambda) = \lambda \otimes 1) \iff (\text{für alle } f \in H^* \text{ ist } \lambda f(1) = f\lambda) \\ &\qquad (\text{nach der Definition von } \delta_{H^*}) \\ &\iff (\text{für alle } f \in H^* \text{ ist } \lambda\eta^*(f) = f\lambda) \\ &\iff (\text{für alle } f \in H^* \text{ ist } f\lambda = \eta^*(f)\lambda) \\ &\iff (\lambda \text{ ist ein Linksintegral von } (H^*, \eta^*)) \iff (\lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

1.5. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra.

1) Dann sind die Vektorräume $\mathrm{I}_l(H)$ und $\mathrm{I}_r(H)$ eindimensional.

2) Die Abbildung $S : H \to H$ ist bijektiv.

3) Ist $\lambda \neq 0$ ein Element von H^*, welches $\lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$ *oder* $\lambda \in \mathrm{I}_r(H^*)$ erfüllt, dann sind die Abbildungen

$$H \to H^*, \qquad h \mapsto h\lambda$$

und

$$H \to H^*, \qquad h \mapsto \lambda h$$

Vektorraumisomorphismen.

4) Es gilt $S(\mathrm{I}_l(H)) = \mathrm{I}_r(H)$ und $S(\mathrm{I}_r(H)) = \mathrm{I}_l(H)$.

Beweis: **1)** Nach 1.4. ist $\dim(\mathrm{I}_l(H^*) \otimes H) = \dim(H^*)$, also $\dim(\mathrm{I}_l(H^*)) \cdot \dim H = \dim(H^*)$. Wegen $\dim H = \dim(H^*) \neq 0$ wird dies zu $\dim(\mathrm{I}_l(H^*)) = 1$. Angewandt auf die Hopfalgebra H^* anstatt von H ergibt dies $\dim(\mathrm{I}_l(H^{**})) = 1$. Da $H^{**} \cong H$ als Hopfalgebren (nach Kapitel I, 2.21), führt dies auf $\dim(\mathrm{I}_l(H)) = 1$. Analog ist $\dim(\mathrm{I}_r(H)) = 1$.

2) Nach 1.4. ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_l(H^*) \otimes H &\to H^*, \\ \lambda \otimes x &\mapsto S(x)\lambda \end{aligned}$$

bijektiv, also insbesondere injektiv. Diese Abbildung ist aber nichts anderes als die Verkettung

$$\mathrm{I}_l(H^*) \otimes H \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes S} \mathrm{I}_l(H^*) \otimes H \xrightarrow{\lambda \otimes x \mapsto x\lambda} H^*.$$

Somit muß auch die Abbildung $\operatorname{id} \otimes S$ injektiv sein. Also ist S injektiv (denn aus $\dim(\mathrm{I}_l(H^*)) = 1$ folgt $\mathrm{I}_l(H^*) \neq 0$). Da S ein Endomorphismus des endlichdimensionalen Vektorraumes H ist, folgt aus der Injektivität aber sofort die Bijektivität, d. h. die Abbildung S ist bijektiv.

3) Betrachten wir erstmal den Fall, wenn $\lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$ ist. Da $\lambda \neq 0$ und $\dim(\mathrm{I}_l(H^*)) = 1$ (nach dem Beweis zu **1)**) gilt, ist also $\mathrm{I}_l(H^*) = k \cdot \lambda$ (das heißt, der Vektorraum $\mathrm{I}_l(H^*)$ ist erzeugt von dem Element λ). Somit ist der Vektorraumhomomorphismus

$$H \to \mathrm{I}_l(H^*) \otimes H, \qquad x \mapsto \lambda \otimes x$$

bijektiv. Daher ist auch der Vektorraumhomomorphismus

$$H \to \mathrm{I}_l(H^*) \otimes H, \qquad x \mapsto \lambda \otimes S^{-1}(x)$$

bijektiv (denn nach **2)** ist S bijektiv). Nach 1.4. ist aber auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_l(H^*) \otimes H &\to H^*, \\ \lambda \otimes x &\mapsto S(x)\lambda \end{aligned}$$

bijektiv. Somit ist auch die Verkettung dieser zwei Abbildungen, also die Abbildung

$$H \to H^*, \qquad x \mapsto x\lambda$$

bijektiv.

Wenden wir dies auf die Hopfalgebra H^{op} anstelle von H an (welche ebenfalls eine endlichdimensionale Hopfalgebra ist[275], und für die ebenfalls $\lambda \in \mathrm{I}_l(H^{\mathrm{op}*})$ gilt[276]), so erhalten wir, daß die Abbildung

$$H^{\mathrm{op}} \to H^{\mathrm{op}*}, \qquad x^{\mathrm{op}} \mapsto x^{\mathrm{op}}\lambda^{\mathrm{op}}$$

bijektiv ist. Wegen $H^{\mathrm{op}} = H$ als Vektorräume und $H^{\mathrm{op}*} = H^*$ als Vektorräume, und da $x^{\mathrm{op}}\lambda^{\mathrm{op}} = (\lambda x)^{\mathrm{op}}$ gilt, können wir dies auch wie folgt ausdrücken: Die Abbildung

$$H \to H^*, \qquad x \mapsto \lambda x$$

ist bijektiv.

Damit haben wir die gewünschten Behauptungen im Fall $\lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$ bewiesen. Anwendung auf H^{cop} ergibt die analogen Behauptungen für den Fall $\lambda \in \mathrm{I}_r(H^*)$ (denn H^* und $H^{\mathrm{cop}*}$ sind als Vektorräume identisch, und $\mathrm{I}_r(H^*)$ und $\mathrm{I}_l(H^{\mathrm{cop}*})$ sind der gleiche Untervektorraum dieses Vektorraumes). Damit ist 1.5. **3)** gezeigt.

4) Sei $\Lambda \in H$ beliebig. Wir haben nun folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\begin{aligned}
(\Lambda \in \mathrm{I}_r(H)) &\iff (\Lambda \text{ ist ein Rechtsintegral von } (H,\varepsilon)) \\
&\iff (\Lambda g = \varepsilon(g)\Lambda \text{ für jedes } g \in H) \qquad \text{(nach der Definition eines Rechtsintegrals)} \\
&\iff (S(\Lambda g) = S(\varepsilon(g)\Lambda) \text{ für jedes } g \in H) \qquad \text{(denn nach } \mathbf{2)} \text{ ist } S \text{ bijektiv)} \\
&\iff (S(g)S(\Lambda) = \varepsilon(S(g))S(\Lambda) \text{ für jedes } g \in H) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } S(\Lambda g) = S(g)S(\Lambda) \text{ (weil } S \text{ ein Antialgebrahomomorphismus ist)} \\ \text{und } S(\varepsilon(g)\Lambda) = \underbrace{\varepsilon}_{=\varepsilon\circ S}(g)S(\Lambda) = (\varepsilon\circ S)(g)S(\Lambda) = \varepsilon(S(g))S(\Lambda) \end{array}\right) \\
&\iff (hS(\Lambda) = \varepsilon(h)S(\Lambda) \text{ für jedes } h \in H) \\
&\qquad \text{(hier haben wir } h \text{ für } S(g) \text{ substituiert, denn nach } \mathbf{2)} \text{ ist } S \text{ bijektiv)} \\
&\iff (S(\Lambda) \text{ ist ein Linksintegral von } (H,\varepsilon)) \iff (S(\Lambda) \in \mathrm{I}_l(H)) \\
&\iff \left(\Lambda \in S^{-1}(\mathrm{I}_l(H))\right).
\end{aligned}$$

Daher ist $\mathrm{I}_r(H) = S^{-1}(\mathrm{I}_l(H))$, also $S(\mathrm{I}_r(H)) = \mathrm{I}_l(H)$ (da S bijektiv ist). Analog gilt $S(\mathrm{I}_l(H)) = \mathrm{I}_r(H)$. Damit ist 1.5. **4)** gezeigt.

---

[275] Dies folgt aus Bemerkung $2.21\frac{1}{2}$. **7)** in Kapitel I, weil S bijektiv ist.

[276] da sowohl die Multiplikation als auch die Coeins in $H^{\mathrm{op}*}$ dieselben sind wie in H^*

1.6. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$, und sei $\Lambda \in H$ so gewählt, daß $\lambda\Lambda = \varepsilon$ ist. (So ein Λ existiert nach 1.5. **3)**.)

1) Dann ist (Λ) eine k-Basis des (eindimensionalen) Vektorraums $\mathrm{I}_r(H)$, und $(S(\Lambda))$ ist eine k-Basis des (eindimensionalen) Vektorraums $\mathrm{I}_l(H)$.

2) Für alle $x \in H$ gilt $x = S\left(\Lambda_{(1)}\right)\lambda\left(\Lambda_{(2)}x\right)$.

3) Für alle $x \in H$ gilt $x = \lambda\left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\Lambda_{(2)}$.

Beweis: **1)** Aus $\lambda\Lambda = \varepsilon$ folgt $\lambda(\Lambda) = (\lambda\Lambda)(1) = \varepsilon(1) = 1$, also insbesondere $\Lambda \neq 0$.

Für alle $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned}(\lambda\Lambda x)(y) &= (\lambda\Lambda)(xy) = \varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) = \underbrace{\varepsilon}_{=\lambda\Lambda}(\varepsilon(x)y) \\ &= (\lambda\Lambda)(\varepsilon(x)y) = \lambda(\Lambda\varepsilon(x)y) = (\lambda\varepsilon(x)\Lambda)(y).\end{aligned}$$

Für alle $x \in H$ ist also $\lambda\Lambda x = \lambda\varepsilon(x)\Lambda$. Nach 1.5. **3)** ist aber die Abbildung

$$H \to H^*, \qquad h \mapsto \lambda h$$

ein Isomorphismus. Aus $\lambda\Lambda x = \lambda\varepsilon(x)\Lambda$ folgt also $\Lambda x = \varepsilon(x)\Lambda$ für alle $x \in H$. Somit ist $\Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$. Da $\mathrm{I}_r(H)$ eindimensional ist, und $\Lambda \neq 0$ ist, bedeutet dies, daß (Λ) eine k-Basis des (eindimensionalen) Vektorraums $\mathrm{I}_r(H)$ ist.

Aus $\Lambda \neq 0$ folgt natürlich $S(\Lambda) \neq 0$ (denn S ist bijektiv). Da S bijektiv ist, gilt ferner

$$\begin{aligned}xS(\Lambda) &= S\left(S^{-1}(x)\right)S(\Lambda) = S\left(\underbrace{\Lambda S^{-1}(x)}_{\substack{=\varepsilon\left(S^{-1}(x)\right)\Lambda \\ (\text{da } \Lambda\in\mathrm{I}_r(H))}}\right) \qquad (\text{denn } S \text{ ist ein Antialgebrahomomorphismus}) \\ &= S\left(\varepsilon\left(S^{-1}(x)\right)\Lambda\right) = \varepsilon\left(S^{-1}(x)\right)S(\Lambda) \\ &= \varepsilon(x)S(\Lambda) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } \varepsilon\circ S^{-1} = \varepsilon, \text{ da } \varepsilon\circ S = \varepsilon, \text{ weil } S \text{ ein} \\ \text{Anticoalgebrahomomorphismus ist}\end{array}\right)\end{aligned}$$

für alle $x \in H$. Somit ist $S(\Lambda) \in \mathrm{I}_l(H)$. Zusammen mit $S(\Lambda) \neq 0$ und $\dim \mathrm{I}_l(H) = 1$ ergibt dies, daß $(S(\Lambda))$ eine k-Basis des (eindimensionalen) Vektorraums $\mathrm{I}_l(H)$ ist.

2) Für jedes $x \in H$ ist

$$\begin{aligned}S\left(\Lambda_{(1)}\right)\lambda\left(\Lambda_{(2)}x\right) &= S\left(\Lambda_{(1)}\right)\left(\Lambda_{(2)}x\right)_{(1)}\lambda\left(\left(\Lambda_{(2)}x\right)_{(2)}\right) \\ &\qquad \left(\text{denn } 1\cdot\lambda\left(\Lambda_{(2)}x\right) = \left(\Lambda_{(2)}x\right)_{(1)}\lambda\left(\left(\Lambda_{(2)}x\right)_{(2)}\right) \text{ nach 1.3., da } \lambda\in\mathrm{I}_l(H^*)\right) \\ &= \underbrace{S\left(\Lambda_{(1)}\right)\Lambda_{(2)}}_{=\varepsilon\left(\Lambda_{(1)}\right)}x_{(1)}\lambda\left(\Lambda_{(3)}x_{(2)}\right) = \varepsilon\left(\Lambda_{(1)}\right)x_{(1)}\lambda\left(\Lambda_{(2)}x_{(2)}\right) \\ &= x_{(1)}\lambda\left(\underbrace{\varepsilon\left(\Lambda_{(1)}\right)\Lambda_{(2)}}_{=\Lambda}x_{(2)}\right) = x_{(1)}\underbrace{\lambda\left(\Lambda x_{(2)}\right)}_{\substack{=(\lambda\Lambda)\left(x_{(2)}\right) \\ =\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}} = x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) = x.\end{aligned}$$

3) Anwendung von **2)** auf $x = S(\Lambda)$ ergibt

$$S(\Lambda) = S\left(\Lambda_{(1)}\right)\lambda\left(\Lambda_{(2)}S(\Lambda)\right) = S\left(\Lambda_{(1)}\right)\lambda\left(\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)S(\Lambda)\right)$$

$\big($denn nach **1)** ist $S(\Lambda) \in \mathrm{I}_l(H)$, also $\Lambda_{(2)}S(\Lambda) = \varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)S(\Lambda)\big)$

$$= S\left(\underbrace{\Lambda_{(1)}\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)}_{=\Lambda}\right)\lambda(S(\Lambda)) = S(\Lambda)\lambda(S(\Lambda)),$$

also $\lambda(S(\Lambda)) = 1$ (da $S(\Lambda) \neq 0$ nach **1)**).

Für jedes $x \in H$ ist nun

$$\lambda\left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\Lambda_{(2)} = \left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)_{(1)}\lambda\left(\left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)_{(2)}\right)\Lambda_{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{denn } 1\cdot\lambda\left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right) = \left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)_{(1)}\lambda\left(\left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)_{(2)}\right)\\ \text{nach 1.3., da } \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)\end{array}\right)$$

$$= x_{(1)}S\left(\Lambda_{(2)}\right)\lambda\left(x_{(2)}S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\Lambda_{(3)}$$

(denn S ist ein Anticoalgebrahomomorphismus)

$$= x_{(1)}\lambda\left(x_{(2)}S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\underbrace{S\left(\Lambda_{(2)}\right)\Lambda_{(3)}}_{=\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)\cdot 1} = x_{(1)}\lambda\left(x_{(2)}S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)$$

$$= x_{(1)}\lambda\left(x_{(2)}S\left(\underbrace{\Lambda_{(1)}\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)}_{=\Lambda}\right)\right) = x_{(1)}\lambda\left(x_{(2)}S(\Lambda)\right) = x_{(1)}\lambda\left(\varepsilon\left(x_{(2)}\right)S(\Lambda)\right)$$

$\big($denn nach **1)** ist $S(\Lambda) \in \mathrm{I}_l(H)$, also $x_{(2)}S(\Lambda) = \varepsilon\left(x_{(2)}\right)S(\Lambda)\big)$

$$= \underbrace{x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x}\underbrace{\lambda(S(\Lambda))}_{=1} = x.$$

Frobeniusalgebren

Sei A eine k-Algebra. Wie in $1.1\frac{1}{2}$. können wir auf dem Dualraum $A^* = \mathrm{Hom}(A,k)$ der Algebra A kanonisch eine A-Linksmodulstruktur und eine A-Rechtsmodulstruktur definieren. Und zwar sei die A-Linksmodulstruktur $(a,f) \mapsto af$ auf A^* definiert durch

$$(af)(x) = f(xa) \text{ für alle } f \in A^* \text{ und } a, x \in A,$$

und die A-Rechtsmodulstruktur $(a,f) \mapsto fa$ auf A^* sei definiert durch

$$(fa)(x) = f(ax) \text{ für alle } f \in A^* \text{ und } x, a \in A.$$

Diese beiden Strukturen zusammen ergeben eine (A,A)-Bimodulstruktur auf A^*.

In diesem Abschnitt werden wir sogenannte *Frobeniusalgebren* untersuchen; dies sind endlichdimensionale k-Algebren, bei denen diese beiden Strukturen auf A^* besondere Eigenschaften haben.

1.7. Satz: Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra, und sei $f \in A^* = \mathrm{Hom}(A,k)$. Dann sind folgende vier Aussagen zueinander äquivalent:

1) Die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

ist bijektiv.

2) Die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto fa$$

ist bijektiv.

3) Es gibt ein $n \geq 0$ sowie Elemente $x_i, y_i \in A$ für alle $1 \leq i \leq n$ derart, daß für jedes $x \in A$ gilt: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i x)$.

4) Es gibt ein $n \geq 0$ sowie Elemente $x_i, y_i \in A$ für alle $1 \leq i \leq n$ derart, daß für jedes $x \in A$ gilt: $x = \sum_{i=1}^{n} f(xx_i) y_i$.

Definition: Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Genau dann heißt A eine *Frobeniusalgebra*, wenn ein $f \in A^* = \operatorname{Hom}(A, k)$ existiert, welches die vier äquivalenten Aussagen **1)**, **2)**, **3)** und **4)** in Satz 1.7. erfüllt. In diesem Fall bezeichnet man ein solches f als *Frobeniushomomorphismus* der Frobeniusalgebra A. [277]

1.8. Bemerkung: 1) In Satz 1.7. gilt die Äquivalenz **3)** $\Longleftrightarrow$ **4)** sogar dann, wenn man die n, x_i, y_i fixiert. Das heißt, es gilt folgende stärkere Aussage:

Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra, und sei $f \in A^* = \operatorname{Hom}(A, k)$. Sei $n \geq 0$, und seien Elemente $x_i, y_i \in A$ für alle $1 \leq i \leq n$ gewählt.

Genau dann gilt $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i x)$ für alle $x \in A$, wenn $x = \sum_{i=1}^{n} f(xx_i) y_i$ für alle $x \in A$ gilt.

2) Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra.

a) Genau dann gilt die Isomorphie ${}_A A \cong {}_A A^*$ in der Kategorie ${}_A\mathcal{M}$, wenn A eine Frobeniusalgebra ist.

b) Genau dann gilt die Isomorphie $A_A \cong A^*{}_A$ in der Kategorie $\mathcal{M}_A$, wenn A eine Frobeniusalgebra ist.

Definition: Sei A eine Frobeniusalgebra, und $f \in A^*$ ein Frobeniushomomorphismus der Frobeniusalgebra A. Ist $n \geq 0$ eine natürliche Zahl, und ist $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein $2n$-Tupel von Elementen von A, welches die zwei äquivalenten Aussagen

$$\left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i x) \text{ für alle } x \in A \right) \qquad \text{und} \qquad \left(x = \sum_{i=1}^{n} f(xx_i) y_i \text{ für alle } x \in A \right)$$

[278] erfüllt, dann bezeichnet man das $2n$-Tupel $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ als *duale Erzeugendensysteme* (oder auch *duale Basen*[279]) der Frobeniusalgebra A zum Frobeniushomomorphismus f, und das Element $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ als *Casimir-Element* der Frobeniusalgebra A zum

[277] Man sollte anmerken, daß eine Frobeniusalgebra A zuweilen auch mehrere unterschiedliche Frobeniushomomorphismen f haben kann.

[278] Die Äquivalenz dieser zwei Aussagen folgt aus 1.8. **1)**.

[279] Die Bezeichnung "duale Basen" ist sehr unglücklich, und wird hier nur deshalb erwähnt, weil sie verbreitet ist. Im Allgemeinen braucht bei dualen Erzeugendensystemen $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ weder $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, noch $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von A zu sein. Insofern handelt es sich bei dualen Basen nicht unbedingt um Basen.

Frobeniushomomorphismus f. Für jede feste Frobeniusalgebra A und jeden festen Frobeniushomomorphismus $f \in A^*$ gibt es unendlich viele $2n$-Tupel $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$, die duale Erzeugendensysteme von A sind, aber diese $2n$-Tupel führen alle auf das gleiche Casimir-Element (denn das Casimir-Element läßt sich unabhängig von den x_i und y_i beschreiben - siehe Bemerkung $1.8\frac{1}{2}$. weiter unten für eine solche Beschreibung). Eine feste Frobeniusalgebra A hat also zu jedem festen Frobeniushomomorphismus $f \in A^*$ genau ein Casimir-Element.

$1.8\frac{1}{2}$. Bemerkung: Sei A eine Frobeniusalgebra, und $f \in A^*$ ein Frobeniushomomorphismus der Frobeniusalgebra A. Seien $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ duale Erzeugendensysteme der Frobeniusalgebra A zum Frobeniushomomorphismus f.

Die lineare Abbildung

$$F : A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

ist bijektiv und hat eine ebenfalls lineare Umkehrabbildung $F^{-1} : A^* \to A$.

Betrachte jetzt den kanonischen Vektorraumhomomorphismus

$$\begin{aligned} A \otimes A &\to \operatorname{Hom}(A^*, A), \\ x \otimes y &\mapsto (p \mapsto xp(y)). \end{aligned}$$

Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus, und $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ ist das Urbild von $F^{-1} \in \operatorname{Hom}(A^*, A)$ unter diesem Isomorphismus.

*Beweis von 1.7.: Beweis von **1)** $\Longrightarrow$ **3)**:* Nach **1)** ist die lineare Abbildung

$$F : A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

bijektiv. Also hat sie eine ebenfalls lineare Umkehrabbildung $F^{-1} : A^* \to A$.

Betrachte jetzt den kanonischen Vektorraumhomomorphismus

$$\begin{aligned} A \otimes A &\to \operatorname{Hom}(A^*, A), \\ x \otimes y &\mapsto (p \mapsto xp(y)). \end{aligned}$$

Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus[280]. Sei jetzt $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ das Urbild von $F^{-1} \in \operatorname{Hom}(A^*, A)$ unter diesem Isomorphismus. Dann ist F^{-1} das Bild von $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ unter diesem Isomorphismus. Mit anderen Worten: F^{-1} ist die Abbildung

$$A^* \to A, \qquad p \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i p(y_i).$$

Das heißt, $F^{-1}(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p(y_i)$ für alle $p \in A^*$.

[280] Dies sieht man schnell ein, wenn man eine Basis (a_i) von A und die zu ihr duale Basis (p_i) von A^* wählt, und dann feststellt, daß dieser Homomorphismus das Basiselement $a_i \otimes a_j$ von $A \otimes A$ auf $p_\ell \mapsto \underbrace{a_i p_\ell(a_j)}_{=a_i \delta_{\ell,j}}$ schickt für alle i und j.

Für alle $x \in A$ gilt nun

$$\begin{aligned} x &= F^{-1}(xf) && \text{(denn } F(x) = xf\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{(xf)(y_i)}_{=f(y_i x)} && \left(\text{denn } F^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(y_i) \text{ für alle } p \in A^*\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i x), \end{aligned}$$

und **3)** ist bewiesen.

*Beweis von **3)** $\Longrightarrow$ **1)**:* Nach **3)** gilt $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(y_i x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i (xf)(y_i)$ für jedes $x \in A$. Somit kann man ein Element $x \in A$ eindeutig aus xf rekonstruieren. Das heißt, die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

ist injektiv. Da $\dim A = \dim A^* < \infty$ ist, ist sie folglich auch bijektiv[281], und **1)** ist nachgewiesen.

*Beweis von **1)** $\Longrightarrow$ **2)**:* Nach **1)** ist die lineare Abbildung

$$F : A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

bijektiv. Daher ist auch die zu ihr adjungierte Abbildung $F^* : A^{**} \to A^*$ bijektiv. Wir wollen zeigen, daß die lineare Abbildung

$$G : A \to A^*, \qquad a \mapsto fa$$

auch bijektiv ist. Dazu führen wir den kanonischen Vektorraumisomorphismus $\operatorname{kan} : A \to A^{**}$ ein, der durch $\operatorname{kan} x = (p \mapsto p(x))$ für alle $x \in A$ definiert ist (er ist ein Isomorphismus, da $\dim A < \infty$ ist). Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\cong", "\operatorname{kan}"'] \arrow[rr, bend left, "G"] & A^{**} \arrow[r, "\cong", "F^*"'] & A^* \end{tikzcd}$$

(denn für jedes $x \in A$ ist

$$\begin{aligned} ((F^* \circ \operatorname{kan})(x))(a) &= (F^*(\operatorname{kan} x))(a) = (\operatorname{kan} x)(F(a)) = (F(a))\,x \\ &= (af)(x) = f(xa) = (fx)(a) = (G(x))(a) \end{aligned}$$

für jedes $a \in A$, also $(F^* \circ \operatorname{kan})(x) = G(x)$, und damit $F^* \circ \operatorname{kan} = G$). Da kan und F^* bijektiv sind, ist also auch G bijektiv. Damit ist **2)** bewiesen.

*Beweis von **2)** $\Longrightarrow$ **1)**:* Ebenso wie der Beweis von **1)** $\Longrightarrow$ **2)**, nur umgekehrt.

*Beweis von **3)** $\Longrightarrow$ **4)**:* Wir haben bereits bewiesen, daß **3)** $\Longrightarrow$ **1)** und **1)** $\Longrightarrow$ **2)**. Also können wir **2)** benutzen, und erhalten, daß die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto fa$$

[281] Denn eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen von gleicher endlicher Dimension muß stets bijektiv sein.

bijektiv ist. Zum Beweis von **4)** reicht es also, nachzuweisen, daß für jedes $x \in A$ gilt: $fx = f \sum\limits_{i=1}^{n} f(xx_i) y_i$.

Doch für jedes $y \in A$ ist

$$\left(f \sum_{i=1}^{n} f(xx_i) y_i\right)(y) = \sum_{i=1}^{n} f(xx_i) f(y_i y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} xx_i f(y_i y)\right) = f\left(x \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i y)}_{=y \text{ nach } \mathbf{3)}}\right)$$
$$= f(xy) = (fx)(y);$$

somit ist $f \sum\limits_{i=1}^{n} f(xx_i) y_i = fx$, was zu beweisen war.

Beweis von 4) $\Longrightarrow$ 2): Nach **4)** gilt $x = \sum\limits_{i=1}^{n} f(xx_i) y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (fx)(x_i) y_i$ für jedes $x \in A$. Somit kann man ein Element $x \in A$ eindeutig aus fx rekonstruieren. Das heißt, die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto fa$$

ist injektiv. Da $\dim A = \dim A^* < \infty$ ist, ist sie folglich auch bijektiv[282], und **2)** ist nachgewiesen.

Insgesamt haben wir nun die Implikationen **1)** $\Longrightarrow$ **3)**, **3)** $\Longrightarrow$ **1)**, **1)** $\Longrightarrow$ **2)**, **2)** $\Longrightarrow$ **1)**, **3)** $\Longrightarrow$ **4)** und **4)** $\Longrightarrow$ **2)** bewiesen. Aus diesen Implikationen folgt die Äquivalenz aller vier Aussagen **1)**, **2)**, **3)** und **4)**, und damit Satz 1.7. Wir wollen aber noch zusätzlich einen alternativen Beweis der Implikation **4)** $\Longrightarrow$ **3)** vorstellen, da er eine stärkere Aussage zeigt:

Beweis von 4) $\Longrightarrow$ 3): Wir haben bereits bewiesen, daß **4)** $\Longrightarrow$ **2)** und **2)** $\Longrightarrow$ **1)**. Also können wir **1)** anwenden, und erhalten: Die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

ist bijektiv. Um **3)** zu beweisen, reicht es also aus zu beweisen, daß $xf = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(y_i x) f$ für alle $x \in A$ gilt.

Doch für jedes $y \in A$ ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i x) f\right)(y) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i f(y_i x) f)(y)}_{\substack{=f(yx_i f(y_i x)) \\ =f(yx_i) f(y_i x) \\ =f(f(yx_i) y_i x)}} = \sum_{i=1}^{n} f(f(yx_i) y_i x) = f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(yx_i) y_i}_{=y \text{ (nach } \mathbf{3)})} x\right)$$
$$= f(yx) = (xf)(y),$$

und daraus folgt $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(y_i x) f = xf$, was zu beweisen war.

---

[282] Denn eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen von gleicher endlicher Dimension muß stets bijektiv sein.

Beweis von 1.8.: **1)** Im Beweis von 1.7. (nämlich beim Beweis von **3)** $\Longrightarrow$ **4)**) haben wir gezeigt: Wenn $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(y_i x)$ für alle $x \in A$ gilt, dann gilt auch $x = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x x_i) y_i$ für alle $x \in A$. Ebenfalls im Beweis von 1.7. (nämlich beim alternativen Beweis von **4)** $\Longrightarrow$ **3)**) haben wir gezeigt: Wenn $x = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x x_i) y_i$ für alle $x \in A$ gilt, dann gilt auch $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(y_i x)$ für alle $x \in A$. Damit ist 1.8. **1)** bewiesen.

2) a) $\Longrightarrow$: Wir nehmen an, daß ${}_A A \cong {}_A A^*$ in der Kategorie ${}_A\mathcal{M}$ gilt. Sei $F : A \to A^*$ ein Isomorphismus zwischen den A-Linksmoduln ${}_A A$ und ${}_A A^*$. Sei $f = F(1) \in A^*$. Dann ist $F(a) = F(a \cdot 1) = aF(1) = af$ für jedes $a \in A$. Somit ist der Isomorphismus F identisch mit der linearen Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto af.$$

Folglich ist diese lineare Abbildung bijektiv; das heißt, die Aussage **1)** von Satz 1.7. ist erfüllt, und somit ist A eine Frobeniusalgebra.

$\Longleftarrow$: Wir nehmen an, daß A eine Frobeniusalgebra ist. Dann erfüllt sie die Aussage **1)** von Satz 1.7., und somit ist die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

bijektiv. Diese lineare Abbildung ist aber trivialerweise A-linkslinear, und damit ein A-Linksmodulisomorphismus. Daher ist ${}_A A \cong {}_A A^*$ in der Kategorie ${}_A\mathcal{M}$.

b) Analog zu **a)** (unter Verwendung von Aussage **2)** von Satz 1.7. statt Aussage **1)**).

Beweis von 1.8$\frac{1}{2}$.: Daß die lineare Abbildung F bijektiv ist, folgt aus Aussage **1)** von Satz 1.7 (welche erfüllt ist, da A eine Frobeniusalgebra ist). Da die lineare Abbildung F bijektiv ist, hat sie eine ebenfalls lineare Umkehrabbildung $F^{-1} : A^* \to A$. Daß der kanonische Vektorraumhomomorphismus

$$\begin{gathered} A \otimes A \to \operatorname{Hom}(A^*, A), \\ x \otimes y \mapsto (p \mapsto xp(y)) \end{gathered}$$

ein Isomorphismus ist, wurde schon im Beweis von 1.7. (Beweis von **1)** $\Longrightarrow$ **3)**) nachgeprüft. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ das Urbild von $F^{-1} \in \operatorname{Hom}(A^*, A)$ unter diesem Isomorphismus ist. Dies ist äquivalent dazu, daß F^{-1} das Bild von $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ unter diesem Isomorphismus ist, also daß $F^{-1} = \left(p \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p(y_i)\right)$

ist. Dazu müssen wir nachprüfen, daß $F\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p\left(y_i\right)\right) = p$ für jedes $p \in A^*$ ist. Doch

$$\left(F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p\left(y_i\right)\right)\right)(x) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p\left(y_i\right)\right) f\right)(x) = f\left(x \sum_{i=1}^{n} x_i p\left(y_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(x x_i p\left(y_i\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(x x_i\right) p\left(y_i\right) = p\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f\left(x x_i\right) y_i}_{\substack{=x, \text{ da } \left(x_i, y_i\right)_{1 \leq i \leq n} \text{ duale} \\ \text{Erzeugendensysteme sind}}}\right) = p\left(x\right)$$

für alle $x \in A$, und damit $F\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p\left(y_i\right)\right) = p$, was zu beweisen war.

1.9. Folgerung: Sei A eine Frobeniusalgebra, und $f \in A^*$ ein Frobeniushomomorphismus der Frobeniusalgebra A. Seien $\left(x_i, y_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ duale Erzeugendensysteme der Frobeniusalgebra A zum Frobeniushomomorphismus f.

Für jedes $x \in A$ gilt dann $\sum\limits_{i=1}^{n} x x_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i x$.

Beweis: Sei $g \in A^*$. Nach der Aussage **1)** von Satz 1.7. (welche erfüllt ist, da A eine Frobeniusalgebra ist) ist die lineare Abbildung

$$A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

bijektiv. Somit gibt es ein $y \in A$ mit $g = yf$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} x x_i g\left(y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x x_i \left(yf\right)\left(y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x x_i f\left(y_i y\right) = x \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i f\left(y_i y\right)}_{\substack{=y, \text{ da } \left(x_i, y_i\right)_{1 \leq i \leq n} \text{ duale} \\ \text{Erzeugendensysteme sind}}} = xy$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} x_i g\left(y_i x\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i f\left(y_i x y\right)}_{\substack{=xy, \text{ da } \left(x_i, y_i\right)_{1 \leq i \leq n} \text{ duale} \\ \text{Erzeugendensysteme sind}}} = xy,$$

also

$$\sum_{i=1}^{n} x x_i g\left(y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g\left(y_i x\right) \qquad \text{für alle } g \in A^*.$$

Hieraus folgt $\sum\limits_{i=1}^{n} x x_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i x$ [283], was zu beweisen war.

---

[283] Hier haben wir folgenden Satz aus der linearen Algebra verwendet:

Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum, ist $n \geq 0$, und sind u_i, v_i, u_i', v_i' Elemente von V für alle $1 \leq i \leq n$, die $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i g\left(v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i' g\left(v_i'\right)$ für alle $g \in V^*$ erfüllen, dann gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i' \otimes v_i'$.

Endlichdimensionale Hopfalgebren als Frobeniusalgebren

1.10. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$, und sei $\Lambda \in H$ so gewählt, daß $\lambda\Lambda = \varepsilon$ ist. (So ein Λ existiert nach 1.5. **3)**.)

1) Dann ist H eine Frobeniusalgebra, und λ ist ein Frobeniushomomorphismus von H.

2) Schreibt man das Element $\Delta(\Lambda) \in H \otimes H$ in der Form $\Delta(\Lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Lambda_{1i} \otimes \Lambda_{2i}$, wobei Λ_{1i} und Λ_{2i} Elemente von H sind für alle $1 \leq i \leq n$, dann sind $(S(\Lambda_{1i}), \Lambda_{2i})_{1 \leq i \leq n}$ duale Erzeugendensysteme der Frobeniusalgebra H zum Frobeniushomomorphismus λ.

Diese Aussage wird oft auch folgendermaßen abgekürzt formuliert: $\left(S\left(\Lambda_{(1)}\right), \Lambda_{(2)}\right)$ sind duale Erzeugendensysteme der Frobeniusalgebra H zum Frobeniushomomorphismus λ.

3) Die lineare Abbildung

$$H \to H^*, \qquad a \mapsto a\lambda$$

ist bijektiv.

4) Die lineare Abbildung

$$H \to H^*, \qquad a \mapsto \lambda a$$

ist bijektiv.

5) Für jedes $x \in H$ gilt $xS\left(\Lambda_{(1)}\right) \otimes \Lambda_{(2)} = S\left(\Lambda_{(1)}\right) \otimes \Lambda_{(2)}x$.

Beweis: **1)-2)** Dies folgt daraus, daß Aussage **4)** von Satz 1.7. für $A = H$, $f = \lambda$ und $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n} = (S(\Lambda_{1i}), \Lambda_{2i})_{1 \leq i \leq n}$ erfüllt ist (denn diese Aussage ist genau Folgerung 1.6. **3)**).[284]

3)-4) Dies folgt aus den Aussagen **1)** und **2)** von Satz 1.7. (welche erfüllt sind, weil H eine Frobeniusalgebra und λ ein Frobeniushomomorphismus von H sind).

5) Dies folgt aus 1.9., angewandt auf $A = H$, $f = \lambda$ und $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n} = (S(\Lambda_{1i}), \Lambda_{2i})_{1 \leq i \leq n}$.

2. Die Ordnung der Antipode

Wir nähern uns nun dem Beweis, daß die Antipode einer endlichdimensionalen Hopfalgebra endliche Ordnung hat.

2.1. Bemerkung: 1) Sei H eine Hopfalgebra. Dann ist $\operatorname{ord} S \in \{1\} \cup \{\infty\} \cup \{\text{gerade ganze Zahlen}\}$.

Beweis: Wir müssen nur zeigen: Falls $\operatorname{ord} S$ eine ungerade ganze Zahl ist, dann ist $\operatorname{ord} S = 1$.

In der Tat nehmen wir an, daß $\operatorname{ord} S$ eine ungerade ganze Zahl ist. Dann ist also $S^{2n+1} = \mathrm{id}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Da S ein Antialgebrahomomorphismus ist, ist aber auch S^{2n+1} ein Antialgebrahomomorphismus. Das heißt, id ist ein Antialgebrahomomorphismus. Folglich ist $xy = yx$ für alle $x, y \in H$. Das heißt, H ist kommutativ. Nach Kapitel I, 2.13. **3)** folgt hieraus $S^2 = \mathrm{id}$. Zusammen mit $S^{2n+1} = \mathrm{id}$ führt dies auf $S = \mathrm{id}$, also $\operatorname{ord} S = 1$, was zu beweisen war.

2) Als Ordnungen von S^2 können alle natürlichen Zahlen und ∞ vorkommen (wenn man den Grundkörper k passend wählt).

[284] Alternativ kann man dies auch aus Folgerung 1.6. **2)** herleiten.

Beweisskizze: **a)** Sei $n \geq 1$, und sei $q \in k$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Für die in Kapitel I, 2.18. **12)** definierte Taft-Hopfalgebra H ist dann $\operatorname{ord} S^2 = n$.

b) Sei jetzt q eine Nicht-Einheitswurzel in k, die von 0 verschieden ist. Die in Kapitel I, 2.18. **11)** definierte Hopfalgebra

$$H = k \langle g, h, x \mid gh = 1 = hg,\ gx = qxg \rangle \qquad \text{mit}$$

$$\begin{array}{llll} \Delta(g) = g \otimes g, & \varepsilon(g) = 1, & \Delta(h) = h \otimes h, & \varepsilon(h) = 1, \\ \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, & \varepsilon(x) = 0, & & \\ S(g) = h, & S(h) = g, & S(x) = -hx & \end{array}$$

erfüllt dann $\operatorname{ord} S^2 = \infty$.

Definition: Sei A eine Frobeniusalgebra, und $f \in A^*$ ein Frobeniushomomorphismus der Frobeniusalgebra A. Eine Abbildung $\rho : A \to A$, die $f(xy) = f(y\rho(x))$ für alle $x, y \in A$ erfüllt, heißt *Nakayamaautomorphismus* der Frobeniusalgebra A bezüglich des Frobeniushomomorphismus f.

2.2. Bemerkung: Sei A eine Frobeniusalgebra, und $f \in A^*$ ein Frobeniushomomorphismus der Frobeniusalgebra A. Dann existiert genau ein Nakayamaautomorphismus ρ der Frobeniusalgebra A bezüglich f. Dieser Nakayamaautomorphismus ρ ist ein Algebraautomorphismus von A.

Beweis: Nach Aussage **1)** von Satz 1.7. (welche gilt, da A eine Frobeniusalgebra ist) ist die lineare Abbildung

$$F : A \to A^*, \qquad a \mapsto af$$

bijektiv, und hat somit eine lineare Umkehrabbildung F^{-1}. Nach Aussage **2)** von Satz 1.7. ist die lineare Abbildung

$$G : A \to A^*, \qquad a \mapsto fa$$

bijektiv, und hat somit eine lineare Umkehrabbildung G^{-1}.

Sei nun $\rho : A \to A$ eine Abbildung. Dann gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} &(\rho \text{ ist ein Nakayamaautomorphismus der Frobeniusalgebra } A \text{ bezüglich } f) \\ \Longleftrightarrow\ & (f(xy) = f(y\rho(x)) \text{ für alle } x, y \in A) \Longleftrightarrow ((fx)(y) = (\rho(x) f)(y) \text{ für alle } x, y \in A) \\ \Longleftrightarrow\ & (fx = \rho(x) f \text{ für alle } x \in A) \Longleftrightarrow (G(x) = F(\rho(x)) \text{ für alle } x \in A) \\ \Longleftrightarrow\ & (G = F \circ \rho) \Longleftrightarrow \left(\rho = F^{-1} \circ G\right). \end{aligned}$$

Somit existiert genau ein Nakayamaautomorphismus ρ der Frobeniusalgebra A bezüglich f, nämlich die Abbildung $\rho = F^{-1} \circ G$. Diese Abbildung ρ ist k-linear und bijektiv (denn $\rho = F^{-1} \circ G$, und beide Abbildungen F^{-1} und G sind k-linear und bijektiv) und ein Algebraendomorphismus von A (denn für alle $x, y \in A$ gilt

$$\begin{aligned} F(\rho(x) \cdot \rho(y)) &= F\left(\left(F^{-1} \circ G\right)(x) \cdot \left(F^{-1} \circ G\right)(y)\right) = F\left(F^{-1}(G(x)) \cdot F^{-1}(G(y))\right) \\ &= F\left(F^{-1}(fx) \cdot F^{-1}(fy)\right) = F^{-1}(fx) F^{-1}(fy) f = F^{-1}(fx) F\left(F^{-1}(fy)\right) \\ &= F^{-1}(fx) fy = F\left(F^{-1}(fx)\right) y = fxy = G(xy) \\ &= F\left(\left(F^{-1} \circ G\right)(xy)\right) = F(\rho(xy)), \end{aligned}$$

und wegen der Bijektivität von F führt dies auf $\rho(x) \cdot \rho(y) = \rho(xy)$). Also ist ρ ein Algebraautomorphismus von A, was zu beweisen war.

Definition: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$ und sei $0 \neq \Gamma \in \mathrm{I}_l(H)$.

Ein Element $a \in G(H)$ heißt *modulares Element* von H genau dann, wenn $\lambda p = p(a)\lambda$ für jedes $p \in H^*$ gilt.

Ein Element $\alpha \in G(H^*) = \mathrm{Alg}(H, k)$ heißt *modulare Funktion* von H genau dann, wenn $\Gamma h = \alpha(h)\Gamma$ für jedes $h \in H$ gilt.

2.3. Bemerkung: 1) Für jede endlichdimensionale Hopfalgebra H und beliebige $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$ und $0 \neq \Gamma \in \mathrm{I}_l(H)$ gibt es genau ein modulares Element $a \in G(H)$ und genau eine modulare Funktion $\alpha \in G(H^*)$. Außerdem sind diese Elemente a und α unabhängig von der Wahl von λ und Γ; deshalb kann man sie wirklich als "das modulare Element" und "die modulare Funktion" von H bezeichnen, ohne dabei λ und Γ erwähnen zu müssen.

Beweis: **a)** Wähle ein $0 \neq \Gamma \in \mathrm{I}_l(H)$. Für jedes $h \in H$ ist $\Gamma h \in \mathrm{I}_l(H)$, denn für jedes $x \in H$ ist $x\Gamma h = \varepsilon(x)\Gamma h$. Doch $\dim \mathrm{I}_l(H) = 1$ und $0 \neq \Gamma \in \mathrm{I}_l(H)$ zusammen ergeben $\mathrm{I}_l(H) = k \cdot \Gamma$, und somit gibt es für jedes $h \in H$ genau ein $\alpha(h) \in k$ mit $\Gamma h = \alpha(h)\Gamma$ (denn $\Gamma h \in \mathrm{I}_l(H) = k \cdot \Gamma$). Offenbar ist die so definierte Abbildung $\alpha : H \to k$ ein Algebrahomomorphismus. Außerdem ist sie von der Wahl des Basiselementes Γ von $\mathrm{I}_l(H)$ unabhängig (denn für jedes $h \in H$ ist $\alpha(h)$ definiert durch $\Gamma h = \alpha(h)\Gamma$, und da sich alle möglichen Werte von Γ nur um einen skalaren Faktor unterscheiden, führen sie alle auf dasselbe $\alpha(h)$).

b) Wähle ein $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$. Genauso wie in **a)** folgt, daß es für jedes $p \in H^*$ genau ein $\varphi(p) \in k$ gibt, das $\lambda p = \varphi(p)\lambda$ erfüllt. Damit ist ein Algebrahomomorphismus $\varphi : H^* \to k$ definiert. Nun ist $\mathrm{Alg}(H^*, k) = G(H^{**}) \cong G(H)$; somit gibt es genau ein $a \in G(H)$ so, daß $\varphi(p) = p(a)$ für alle $p \in H^*$ ist. Damit ist ein modulares Element $a \in G(H)$ gefunden und seine Eindeutigkeit gezeigt. Daß dieses Element von der Wahl von λ unabhängig ist, folgt daraus, daß sich alle möglichen Werte von λ nur um einen skalaren Faktor unterscheiden und daher für jedes $p \in H^*$ auf dasselbe $\varphi(p)$ führen.

2) Für jedes $0 \neq \Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$ und jedes $h \in H$ gilt: $h\Lambda = \alpha(S(h))\Lambda$, wobei α die modulare Funktion von H ist.

Beweis: Wegen $\Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$ ist $S(\Lambda) \in \mathrm{I}_l(H)$ (nach 1.5. **4)**), und somit $S(\Lambda)S(h) = \alpha(S(h))S(\Lambda)$ (nach der Definition der modularen Funktion α). Mit anderen Worten: $S(h\Lambda) = S(\alpha(S(h))\Lambda)$. Da S bijektiv ist, folgt hieraus $h\Lambda = \alpha(S(h))\Lambda$.

2.4. Satz: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$ und sei $\Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$ mit $\lambda\Lambda = \varepsilon$. Nach 1.10. ist H eine Frobeniusalgebra, und λ ein Frobeniushomomorphismus von H.

Sei ρ der Nakayamaautomorphismus von H bezüglich des Frobeniushomomorphismus λ.

Dann gilt:

1) Das Paar $\left(S\left(\Lambda_{(1)}\right), \Lambda_{(2)}\right)$ sind duale Erzeugendensysteme bezüglich λ.

2) Das Paar $\left(S\left(\Lambda_{(2)}\right), aS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)$ sind duale Erzeugendensysteme bezüglich λ, wobei $a \in G(H)$ das modulare Element von H ist.[285]

[285] Diese Aussage ist nur eine abkürzende Formulierung für folgende Aussage:

Schreibt man das Element $\Delta(\Lambda) \in H \otimes H$ in der Form $\Delta(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{1i} \otimes \Lambda_{2i}$, wobei Λ_{1i} und Λ_{2i} Elemente von H sind für alle $1 \leq i \leq n$, dann sind $\left(S(\Lambda_{2i}), aS^2(\Lambda_{1i})\right)$ duale Erzeugendensysteme der Frobeniusalgebra H zum Frobeniushomomorphismus λ, wobei $a \in G(H)$ das modulare Element

3) Für jedes $x \in H$ gilt $\rho(x) = S^2\left(x_{(1)}\right)\alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)$, wobei $\alpha \in G(H^*)$ die modulare Funktion von H ist.

4) Für jedes $x \in H$ gilt $\rho(x) = a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)S^{-2}\left(x_{(2)}\right)a$.

Beweis: Zuerst zeigen wir einige Hilfsaussagen:

a) Für jedes $h \in H$ gilt $\lambda\left(h_{(1)}\right)h_{(2)} = \lambda(h)\,a$.

b) Für jedes $h \in H$ gilt $h\Lambda = \alpha(S(h))\,\Lambda$.

c) Es gilt $S(\Lambda)\,\lambda = \varepsilon$.

Beweis: **a)** Nach der Definition von a gilt für jedes $p \in H^*$ die Beziehung $\lambda p = p(a)\,\lambda$. Für jedes $h \in H$ ist somit

$$p\left(\lambda\left(h_{(1)}\right)h_{(2)}\right) = \lambda\left(h_{(1)}\right)p\left(h_{(2)}\right) = \left(\underbrace{\lambda p}_{=p(a)\lambda}\right)(h) = (p(a)\,\lambda)(h) = p(a)\,\lambda(h) = p(a\lambda(h)).$$

Hieraus folgt $\lambda\left(h_{(1)}\right)h_{(2)} = a\lambda(h)$, und **a)** ist bewiesen.

b) Dies folgt aus 2.3. **2)**.

c) Nach 1.6. **3)** gilt $x = \lambda\left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\Lambda_{(2)}$ für jedes $x \in H$. Anwendung von ε auf diese Gleichung ergibt $\varepsilon(x) = \lambda\left(xS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right) = \lambda\left(xS\left(\underbrace{\Lambda_{(1)}\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)}_{=\Lambda}\right)\right) = \lambda(xS(\Lambda)) = (S(\Lambda)\,\lambda)(x)$, und **c)** ist bewiesen.

Nun zum eigentlichen Beweis von 2.4.:

1) Dies wissen wir bereits (1.10. **2)**).

2) Für jedes $x \in H$ ist

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)aS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\\
&= \lambda\left(x_{(1)}S\left(\Lambda_{(3)}\right)\right)x_{(2)}\underbrace{S\left(\Lambda_{(2)}\right)S^2\left(\Lambda_{(1)}\right)}_{=S\left(S\left(\Lambda_{(1)}\right)\Lambda_{(2)}\right)=S(\varepsilon(\Lambda)\cdot 1)=\varepsilon(\Lambda)\cdot 1}\\
&\qquad\left(\begin{array}{c}\text{denn nach } \mathbf{a)} \text{ (angewandt auf } h = xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\text{) ist}\\
\lambda\left(\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)_{(1)}\right)\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)_{(2)} = \lambda\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)a, \text{ also}\\
\lambda\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)a = \lambda\left(\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)_{(1)}\right)\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)_{(2)} = \lambda\left(x_{(1)}S\left(\Lambda_{(3)}\right)\right)x_{(2)}S\left(\Lambda_{(2)}\right)
\end{array}\right)\\
&= \lambda\left(x_{(1)}S\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)x_{(2)}\cdot\varepsilon\left(\Lambda_{(1)}\right)\cdot 1 = \lambda\left(x_{(1)}S\left(\underbrace{\varepsilon\left(\Lambda_{(1)}\right)\Lambda_{(2)}}_{=\Lambda}\right)\right)x_{(2)} = \lambda\left(x_{(1)}S(\Lambda)\right)x_{(2)}\\
&= (S(\Lambda)\,\lambda)\left(x_{(1)}\right)x_{(2)} = \varepsilon\left(x_{(1)}\right)x_{(2)} \qquad \text{(nach } \mathbf{c)}\text{)}\\
&= x.
\end{aligned}$$

---

von H ist.

3) Nach **1)** ist

$$\rho(x) = S\left(\Lambda_{(1)}\right) \underbrace{\lambda\left(\Lambda_{(2)}\rho(x)\right)}_{=\lambda\left(x\Lambda_{(2)}\right)} = \lambda\left(x\Lambda_{(2)}\right) S\left(\Lambda_{(1)}\right), \qquad \text{also}$$

$$\begin{aligned}
S^{-2}(\rho(x)) &= \lambda\left(x\Lambda_{(2)}\right) S^{-1}\left(\Lambda_{(1)}\right) = x_{(1)}\Lambda_{(2)}\lambda\left(x_{(2)}\Lambda_{(3)}\right) S^{-1}\left(\Lambda_{(1)}\right) \qquad (\text{nach 1.3, da } \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*))\\
&= x_{(1)} \underbrace{\Lambda_{(2)} S^{-1}\left(\Lambda_{(1)}\right)}_{\substack{=S^{-1}\left(\Lambda_{(1)}S\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)\\ =S^{-1}(\varepsilon(\Lambda)\cdot 1)\\ =\varepsilon(\Lambda)\cdot 1}} \lambda\left(x_{(2)}\Lambda_{(3)}\right) = x_{(1)}\varepsilon\left(\Lambda_{(1)}\right)\lambda\left(x_{(2)}\Lambda_{(2)}\right)\\
&= x_{(1)}\lambda\left(x_{(2)}\varepsilon\left(\Lambda_{(1)}\right)\Lambda_{(2)}\right) = x_{(1)}\lambda\left(x_{(2)}\Lambda\right) = x_{(1)}\lambda\left(\alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)\Lambda\right) \qquad (\text{nach } \mathbf{b)})\\
&= x_{(1)}\alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)\right) \qquad (\text{denn } \lambda(\Lambda) = (\lambda\Lambda)(1) = \varepsilon(1) = 1).
\end{aligned}$$

4) Nach **2)** ist

$$\rho(x) = S\left(\Lambda_{(2)}\right)\lambda\left(aS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\rho(x)\right) = S\left(\Lambda_{(2)}\right)\lambda\left(xaS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\right) = \lambda\left(xaS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)S\left(\Lambda_{(2)}\right),$$

also

$$\begin{aligned}
aS^2(\rho(x)) &= a\lambda\left(xaS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)S^3\left(\Lambda_{(2)}\right) = \lambda\left(xaS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)aS^3\left(\Lambda_{(2)}\right)\\
&= \lambda\left(x_{(1)}a_{(1)}S^2\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)x_{(2)}a_{(2)} \underbrace{S^2\left(\Lambda_{(2)}\right)S^3\left(\Lambda_{(3)}\right)}_{\substack{=S^2\left(\Lambda_{(2)}S\left(\Lambda_{(3)}\right)\right)\\ =S^2\left(\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)\cdot 1\right)\\ =\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)\cdot 1}} \qquad (\text{nach } \mathbf{a)})\\
&= \lambda\left(x_{(1)}a_{(1)}\underbrace{\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)\cdot S^2\left(\Lambda_{(1)}\right)}_{\substack{=S^2\left(\Lambda_{(1)}\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)\\ =S^2(\Lambda)}}\right)x_{(2)}a_{(2)} = \lambda\left(x_{(1)}a_{(1)}S^2(\Lambda)\right)x_{(2)}a_{(2)}\\
&= \lambda\left(x_{(1)}aS^2(\Lambda)\right)x_{(2)}a \qquad \left(\text{denn } a \in G(H), \text{ also } a_{(1)} \otimes a_{(2)} = a \otimes a\right).
\end{aligned}$$

Doch $aS^2(\Lambda) = \Lambda$, denn nach **2)** gilt für jedes x die Beziehung $x = \lambda\left(xS\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)aS^2\left(\Lambda_{(1)}\right)$, also

$$\Lambda = \underbrace{\lambda\left(\Lambda S\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)}_{\substack{=(\lambda\Lambda)\left(S\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)\\ =\varepsilon\left(S\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)\\ =\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)}} aS^2\left(\Lambda_{(1)}\right) = aS^2\left(\Lambda_{(1)}\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)\right) = aS^2(\Lambda).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
aS^2(\rho(x)) &= \lambda\left(x_{(1)}\Lambda\right)x_{(2)}a = \underbrace{\lambda\left(\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)\Lambda\right)}_{\substack{=(\lambda\Lambda)\left(\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)\cdot 1\right)\\ =\varepsilon\left(\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)\cdot 1\right)\\ =\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)}} x_{(2)}a \qquad (\text{nach } \mathbf{b)})\\
&= \alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)x_{(2)}a,
\end{aligned}$$

und damit $S^2(\rho(x)) = \alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)a^{-1}x_{(2)}a$, also $\rho(x) = \alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)a^{-1}S^{-2}\left(x_{(2)}\right)a$.

2.5. Bemerkung: Sei H eine Hopfalgebra. Dann kann man auf dem Vektorraum H eine H^*-Linksmodulstruktur $\rightharpoonup: H^* \otimes H \to H$ definieren durch

$$p \rightharpoonup x = x_{(1)} p\left(x_{(2)}\right) \qquad \text{für alle } x \in H \text{ und } p \in H^*,$$

sowie eine H^*-Rechtsmodulstruktur $\leftharpoonup: H \otimes H^* \to H$ definieren durch

$$x \leftharpoonup p = p\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} \qquad \text{für alle } x \in H \text{ und } p \in H^*.$$

Diese beiden Strukturen zusammen machen H zu einem (H^*, H^*)-Bimodul.

(Diese beiden Strukturen sind übrigens die zu der H-Rechtscomodulstruktur bzw. zu der H-Linkscomodulstruktur auf H vermöge Δ adjungierten H^*-Modulstrukturen.)

Außerdem gilt: Für alle $\varphi, \psi \in \operatorname{Alg}(H, k) = G(H^*)$ und alle $g \in G(H)$ ist

$$\varphi \rightharpoonup \left(gxg^{-1}\right) \leftharpoonup \psi = g\left(\varphi \rightharpoonup x \leftharpoonup \psi\right) g^{-1}.$$

2.6. Satz (Radford 1976): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei a das modulare Element von H, und sei α die modulare Funktion von H. Für alle $x \in H$ ist dann

$$\begin{aligned} S^4(x) &= \alpha \rightharpoonup \left(a^{-1}xa\right) \leftharpoonup \alpha^{-1} = a^{-1}\left(\alpha \rightharpoonup x \leftharpoonup \alpha^{-1}\right) a \\ &= a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) x_{(2)} \alpha\left(x_{(3)}\right) a. \end{aligned}$$

Beweis von 2.5.: Für alle $p, q \in H^*$ und alle $x \in H$ ist

$$(p \rightharpoonup x) \leftharpoonup q = \left(x_{(1)} p\left(x_{(2)}\right)\right) \leftharpoonup q = q\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} p\left(x_{(3)}\right) = p \rightharpoonup \left(q\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}\right) = p \rightharpoonup (x \leftharpoonup q).$$

Somit ergeben die H^*-Linksmodulstruktur $\rightharpoonup$ und die H^*-Rechtsmodulstruktur $\leftharpoonup$ zusammen eine (H^*, H^*)-Bimodulstruktur auf H.

Für alle $\varphi, \psi \in \operatorname{Alg}(H, k) = G(H^*)$ und alle $g \in G(H)$ ist

$$\begin{aligned} \varphi \rightharpoonup \left(gxg^{-1}\right) \leftharpoonup \psi &= \underbrace{\psi\left(gx_{(1)}g^{-1}\right)}_{\substack{=\psi\left(x_{(1)}\right),\text{ denn }\psi\text{ ist} \\ \text{Algebrahomomorphismus}}} \quad gx_{(2)}g^{-1} \quad \underbrace{\varphi\left(gx_{(3)}g^{-1}\right)}_{\substack{=\varphi\left(x_{(3)}\right),\text{ denn }\varphi\text{ ist} \\ \text{Algebrahomomorphismus}}} \\ &\qquad \left(\text{hier haben wir } g_{(1)} \otimes g_{(2)} = g \otimes g \text{ benutzt, weil } g \in G(H)\right) \\ &= g\psi\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} \varphi\left(x_{(3)}\right) g^{-1} = g\left(\varphi \rightharpoonup x \leftharpoonup \psi\right) g^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis von 2.6.: Nach 2.4. **3)** gilt: Für jedes $x \in H$ ist $\rho(x) = S^2\left(x_{(1)}\right) \alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)$ (nach 2.4. **3)**) und $\rho(x) = a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) S^{-2}\left(x_{(2)}\right) a$ (nach 2.4. **4)**), also

$$S^2\left(x_{(1)}\right) \alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)\right) = a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) S^{-2}\left(x_{(2)}\right) a.$$

Nach Multiplikation mit $\alpha\left(x_{(3)}\right)$ (von rechts) ergibt dies

$$\underbrace{S^2\left(x_{(1)}\right) \underbrace{\alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)\right) \alpha\left(x_{(3)}\right)}_{\substack{=\alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)x_{(3)}\right), \\ \text{da } \alpha \in G(H^*) = \operatorname{Alg}(H,k)}}}_{\substack{=S^2\left(x_{(1)}\right)\alpha\left(S\left(x_{(2)}\right)x_{(3)}\right) = S^2\left(x_{(1)}\right)\alpha\left(\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot 1\right) \\ = S^2\left(x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\right)\alpha(1) = S^2(x)\alpha(1) = S^2(x)}} = a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) S^{-2}\left(x_{(2)}\right) a\alpha\left(x_{(3)}\right),$$

also
$$S^2(x) = a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) S^{-2}\left(x_{(2)}\right) a\alpha\left(x_{(3)}\right).$$
Anwendung von S^2 auf diese Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} S^4(x) &= a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) x_{(2)} a\alpha\left(x_{(3)}\right) \\ &\qquad \left(\text{denn } S^2(a) = a, \text{ da } a \in G(H) \text{ und } S(h) = h^{-1} \text{ für alle } h \in G(H)\right) \\ &= a^{-1}\alpha\left(S\left(x_{(1)}\right)\right) x_{(2)}\alpha\left(x_{(3)}\right) a = a^{-1}\left(\alpha \rightharpoonup x \leftharpoonup \alpha^{-1}\right) a \qquad \left(\text{da } \alpha^{-1} = \alpha \circ S\right) \\ &= \alpha \rightharpoonup \left(a^{-1} x a\right) \leftharpoonup \alpha^{-1} \qquad (\text{nach 2.5.}). \end{aligned}$$

2.7. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann hat die Abbildung S eine endliche Ordnung (als Automorphismus des Vektorraumes H).[286]

Beweis: Die Gruppen $G(H)$ und $G(H^*)$ sind beide endlich (genauer gesagt, haben sie jeweils höchstens $\dim H$ Elemente, denn Gruppenelemente einer Coalgebra sind stets linear unabhängig). Also gibt es ein positives $\ell \in \mathbb{N}$ mit $a^\ell = 1$ und $\alpha^\ell = \varepsilon$ (denn $a \in G(H)$ und $\alpha \in G(H^*)$; genauer kann man sogar erreichen, daß $\ell \leq (\dim H)^2$ ist, weil die Gruppen $G(H)$ und $G(H^*)$ jeweils höchstens $\dim H$ Elemente haben).

Wir werden zeigen, daß $S^{4\ell} = \mathrm{id}$ ist.

Dazu reicht es aus, zu beweisen, daß für jedes $n \geq 1$ und jedes $x \in H$ die Gleichung
$$S^{4n}(x) = \alpha^n \rightharpoonup \left(a^{-n} x a^n\right) \leftharpoonup \alpha^{-n}$$
erfüllt ist. Dies beweist man am einfachsten durch Induktion nach n: Für $n = 1$ folgt dies aus 2.6.. Der Induktionsschritt von n auf $n+1$ ist dadurch gesichert, daß für jedes $x \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} S^{4(n+1)}(x) &= S^4\left(S^{4n}(x)\right) = S^4\left(\alpha^n \rightharpoonup \left(a^{-n} x a^n\right) \leftharpoonup \alpha^{-n}\right) && (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= \alpha \rightharpoonup \underbrace{\left(a^{-1}\left(\alpha^n \rightharpoonup \left(a^{-n} x a^n\right) \leftharpoonup \alpha^{-n}\right) a\right)}_{=\alpha^n \rightharpoonup \left(a^{-n-1} x a^{n+1}\right) \leftharpoonup \alpha^{-n}} \leftharpoonup \alpha && (\text{nach 2.6.}) \\ &= \alpha^{n+1} \rightharpoonup \left(a^{-n-1} x a^{n+1}\right) \leftharpoonup \alpha^{-n-1}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Definition: Eine endlichdimensionale Hopfalgebra H heißt *unimodular*, wenn $\mathrm{I}_l(H) = \mathrm{I}_r(H)$ gilt.

Mit anderen Worten: Eine endlichdimensionale Hopfalgebra H heißt *unimodular*, wenn $\alpha = \varepsilon$ ist (wobei α die modulare Funktion von H ist).

2.8. Folgerung (Larson 1971): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra.

1) Ist H unimodular, dann ist S^4 ein innerer Automorphismus der Algebra H (und zwar der durch $S^4(h) = a^{-1} h a$ für alle $h \in H$ gegebene).

2) Sind H und H^* beide unimodular, dann ist $S^4 = \mathrm{id}$.

3. Halbeinfache Hopfalgebren

Definition: Sei R ein Ring. Sei P ein R-Linksmodul.[287] Dann heißt P *projektiv*, wenn für beliebige $X, Y \in {}_R\mathcal{M}$, für jeden Epimorphismus $f : X \to Y$ und jeden

[286] Man kann sogar stärker zeigen, daß $S^{4\dim H} = \mathrm{id}$ ist, aber dies ist schwieriger zu beweisen.

[287] Analoges gilt für R-Rechtsmoduln.

Homomorphismus $g : P \to Y$ ein Homomorphismus $h : P \to X$ existiert, welcher $fh = g$ erfüllt, d. h. für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ X \arrow[r, two heads, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. (Unter Homomorphismen verstehen wir dabei immer Homomorphismen von R-Linksmoduln.)

3.1. Bemerkung: Sei R ein Ring, und sei $P \in {}_R\mathcal{M}$. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:

1) Der R-Linksmodul P ist projektiv.

2) Der Funktor $\operatorname{Hom}_R(P, -) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ (der jeden R-Linksmodul X auf $\operatorname{Hom}_R(P, X)$ abbildet) ist exakt.

3) Es gibt einen freien R-Linksmodul $F \in {}_R\mathcal{M}$ so, dass P isomorph zu einem direkten Summanden von F ist.

Beweis: ***Beweis von 1) $\Longleftrightarrow$ 2):*** Da der Funktor $\operatorname{Hom}_R(P, -) : {}_R\mathcal{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ linksexakt ist, ist die Aussage **2)** äquivalent dazu, daß für jeden Epimorphismus $f : X \to Y$ die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_R(P, X) \to \operatorname{Hom}_R(P, Y), \qquad h \mapsto fh$$

surjektiv ist; aber dies ist genau die Aussage **1)**. Somit sind die Aussagen **1)** und **2)** zueinander äquivalent.

Beweis von 3) $\Longrightarrow$ 1): **a)** Wir werden zeigen: Ist F ein freier R-Linksmodul, dann ist F projektiv.

Beweis: Sei F ein freier R-Linksmodul mit Basis $(p_i)_{i \in I}$. Sei $f : X \to Y$ ein Epimorphismus von R-Linksmoduln, und sei $g : F \to Y$ ein Homomorphismus von R-Linksmoduln. Für jedes $i \in I$ wähle ein $x_i \in X$ so, daß $f(x_i) = g(p_i)$ ist[288]. Definiere einen Homomorphismus von R-Linksmoduln $h : F \to X$ durch $h(p_i) = x_i$ für jedes $i \in I$. Dann gilt $fh = g$ (weil $(fh)(p_i) = f\left(\underbrace{h(p_i)}_{=x_i}\right) = f(x_i) = g(p_i)$ für alle $i \in I$ ist), was zu beweisen war.

b) Wir werden zeigen: Ist F ein projektiver R-Linksmodul, und sind P und Q zwei Untermoduln von F mit $P \oplus Q = F$, dann ist auch P projektiv.

Beweis: Sei $f : X \to Y$ ein Epimorphismus, und sei $g : P \to Y$ ein Homomorphismus von R-Linksmoduln. Setze g fort zu einem R-Linksmodulhomomorphismus $\widetilde{g} : F \to Y$ mit $\widetilde{g}\mid_P = g$ und $\widetilde{g}\mid_Q = 0$. Da F projektiv ist, gibt es dann einen R-Linksmodulhomomorphismus $h : F \to X$ mit $fh = \widetilde{g}$. Daraus folgt $fh' = g$, wobei $h' = h\mid_P$ ist (denn $fh' = fh\mid_P = \widetilde{g}\mid_P = g$), was zu beweisen war.

Aus **a)** und **b)** folgt **3)** $\Longrightarrow$ **1)**.

Beweis von 1) $\Longrightarrow$ 3): Es gibt einen freien Modul $F \in {}_R\mathcal{M}$ und einen Epimorphismus $f : F \to P$; und zwar können wir solche F und f wie folgt konstruieren:

Sei $(p_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von P (zum Beispiel $\{p_i \mid i \in I\} = P$). Sei $F = R^{(I)}$ der freie R-Linksmodul mit Basis $(e_i)_{i \in I}$. Definiere einen R-Linksmodulhomomorphismus

[288] So ein $x_i \in X$ existiert, weil f ein Epimorphismus ist.

$f : F \to P$ durch $f(e_i) = p_i$ für alle $i \in I$. Dann ist f ein Epimorphismus. Da P projektiv ist, folgt hieraus, daß es einen R-Linksmodulhomomorphismus $h : P \to F$ gibt, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ F \arrow[r, two heads, "f"'] & P \end{tikzcd}$$

kommutiert. Daraus folgt $F = \operatorname{Im} h \oplus \operatorname{Ker} f$ [289], und somit ist h ein Monomorphismus, also $P \cong \operatorname{Im} h$.

3.1$\frac{1}{2}$. Bemerkung: Sei R ein Ring, und sei $P \in {}_R\mathcal{M}$ ein endlich erzeugter projektiver R-Linksmodul. Dann gibt es einen freien R-Linksmodul F mit endlicher Basis so, dass P isomorph zu einem direkten Summanden von F ist.

Beweis von Bemerkung 3.1$\frac{1}{2}$: Um Bemerkung 3.1$\frac{1}{2}$ nachzuweisen, verfahre man genauso wie im Beweis von **1)** $\Longrightarrow$ **3)** während des Beweises von Bemerkung 3.1, mit dem einzigen Unterschied, daß man das Erzeugendensystem $(p_i)_{i\in I}$ von P nicht mehr beliebig wählen darf, sondern so wählen muss, daß es endlich ist (dies ist möglich, da P endlich erzeugt ist). Dies hat zur Folge, daß F ein freier R-Linksmodul mit endlicher Basis ist. Bemerkung 3.1$\frac{1}{2}$ ist damit gezeigt.

3.2. Beispiele: 1) Sei $R = \mathbb{Z}$, und sei P ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist P genau dann projektiv, wenn P frei ist.

Beweis: Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist jede endlich erzeugte abelsche Gruppe eine direkte Summe einer freien abelschen Gruppe und einer Torsionsgruppe. Somit ist jede torsionsfreie endlich erzeugte abelsche Gruppe frei. Daher ist ein direkter Summand einer freien endlich erzeugten abelschen Gruppe wiederum frei (denn er ist offensichtlich torsionsfrei); das heißt, jede projektive endlich erzeugte abelsche Gruppe ist frei[290]. Die Umkehrrichtung ist trivial.

2) Es gibt einen Ring R und einen projektiven Modul $P \in {}_R\mathcal{M}$, der nicht frei ist.

Beweis: Für jeden Ring R und jedes Element $e \in R$ mit $e^2 = e$ ist der R-Linksmodul Re projektiv (denn $Re \oplus R(1-e) = R$). Aber frei ist Re im Allgemeinen nicht.[291]

Zum Beispiel seien A und B Ringe, und sei $R = A \times B$ und $P = A \times 0 = Re$, wobei $e = (1,0) \in R$. Dann ist P projektiv, aber nicht frei (solange A und B von 0 verschieden sind - denn $(0,1)P = 0$).

Definition: Sei A eine Algebra (wie immer, bedeutet dies eine k-Algebra, wobei k unser fester Grundkörper ist). Wir definieren eine Algebra A^{e} durch $A^{\mathrm{e}} = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ (zu verstehen als Tensorprodukt von Algebren). (Diese Algebra A^{e} heißt *"enveloping algebra"* von A.)

Dann ist A ein A^{e}-Linksmodul vermöge $(x \otimes y^{\mathrm{op}}) \cdot a = xay$ für alle $x, y, a \in A$.

---

[289] Denn für jedes $x \in F$ ist $x = h(f(x)) + (x - h(f(x))) \in \operatorname{Im} h + \operatorname{Ker} f$ (wobei $h(f(x)) \in \operatorname{Im} h$ trivial ist, und $x - h(f(x)) \in \operatorname{Ker} f$ wegen $f(x - h(f(x))) = f(x) - f(h(f(x))) = f(x) - \underbrace{(f \circ h)}_{=\mathrm{id}}(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$ gilt), also $F = \operatorname{Im} h + \operatorname{Ker} f$, aber andererseits ist $\operatorname{Im} h \cap \operatorname{Ker} f = 0$ (denn $\operatorname{Im} h \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im}\left(h\mid_{\operatorname{Ker}(fh)}\right) = \operatorname{Im}(h\mid_{\operatorname{Ker}\mathrm{id}}) = \operatorname{Im}(h\mid_0) = 0$), und somit gilt $F = \operatorname{Im} h \oplus \operatorname{Ker} f$.

[290] Denn laut Bemerkung 3.1$\frac{1}{2}$ ist jede projektive endlich erzeugte abelsche Gruppe ein direkter Summand einer freien endlich erzeugten abelschen Gruppe.

[291] Falls R kommutativ ist, ist der R-Modul Re genau dann frei, wenn $e = 0$ oder $e = 1$ ist.

Die Algebra A heißt eine *separable Algebra*, wenn A als A^e-Linksmodul projektiv ist.

3.3. Bemerkung: Sei A eine Algebra. Dann ist A tatsächlich (wie oben definiert) ein A^e-Linksmodul, und die Abbildung $\mu : A^e \to A$, $x \otimes y^{\mathrm{op}} \mapsto xy$ ist A^e-linkslinear.

Beweis: Für $x, y, u, v, a \in A$ gilt

$$(u \otimes v^{\mathrm{op}})\left((x \otimes y^{\mathrm{op}})\, a\right) = (u \otimes v^{\mathrm{op}})\, xay = uxayv = \underbrace{\left(ux \otimes (yv)^{\mathrm{op}}\right)}_{\substack{=ux \otimes v^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} \\ =(u \otimes v^{\mathrm{op}})(x \otimes y^{\mathrm{op}})}} a = \left((u \otimes v^{\mathrm{op}})\,(x \otimes y^{\mathrm{op}})\right) a.$$

Daher ist A tatsächlich ein A^e-Linksmodul.

Für $x, y, u, v \in A$ gilt

$$\mu\left(\underbrace{(u \otimes v^{\mathrm{op}})\,(x \otimes y^{\mathrm{op}})}_{\substack{=ux \otimes v^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} \\ =ux \otimes (yv)^{\mathrm{op}}}}\right) = uxyv = (u \otimes v^{\mathrm{op}}) \cdot xy = (u \otimes v^{\mathrm{op}}) \cdot \mu\,(x \otimes y^{\mathrm{op}})\,.$$

Somit ist μ eine A^e-linkslineare Abbildung.

3.4. Satz: Sei A eine k-Algebra.

a) Dann sind folgende drei Aussagen **1)**, **2)** und **3)** zueinander äquivalent:

1) Die Algebra A ist separabel.

2) Es gibt eine A^e-linkslineare Abbildung $f : A \to A^e$, die $\mu f = \mathrm{id}$ erfüllt, d. h. für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ A^e \arrow[r, two heads, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

kommutiert.

3) Es gibt ein $n \geq 0$ und Elemente $x_i, y_i \in A$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ so, dass für jedes $x \in A$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} xx_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i x$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$.

b) Außerdem gilt für die Elemente x_i, y_i aus Aussage **3)**, daß $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}}$ ein Idempotent in A^{op} ist (ein sogenanntes *Separabilitätsidempotent*).

Beweis: **a)** Um die Äquivalenz der drei Aussagen **1)**, **2)** und **3)** zu beweisen, reicht es aus, die Implikationen **1)** $\Longrightarrow$ **2)**, **2)** $\Longrightarrow$ **1)**, **2)** $\Longrightarrow$ **3)** und **3)** $\Longrightarrow$ **2)** zu überprüfen. Tun wir dies also:

Beweis von 1) $\Longrightarrow$ 2): Angenommen, Aussage **1)** sei erfüllt. Die Algebra A sei also separabel. Das bedeutet, daß A als A^e-Linksmodul projektiv ist. Da $\mu : A^e \to A$ ein Epimorphismus von A^e-Linksmoduln ist, folgt hieraus Aussage **2)** (nach der Definition von "projektiv"). Wir haben also Aussage **2)** aus Aussage **1)** hergeleitet. Damit ist **1)** $\Longrightarrow$ **2)** gezeigt.

Beweis von 2) $\Longrightarrow$ 1): Angenommen, Aussage **2)** gelte. Laut **2)** ist $A^e = f\,(A) \oplus \operatorname{Ker} \mu$, und da $f\,(A)$ und $\operatorname{Ker} \mu$ beides Untermoduln des A^e-Linksmoduls A^e sind, ist also $f\,(A)$ ein direkter Summand des A^e-Linksmoduls A^e. Somit ist $f\,(A)$ ein direkter Summand eines freien A^e-Linksmoduls. Das heißt, $f\,(A)$ ist ein projektiver A^e-Linksmodul. Da $f\,(A) \cong A$ als A^e-Linksmodul ist (denn $f : A \to A^e$ ist ein

A^e-Linksmodulhomomorphismus, der wegen $\mu f = \mathrm{id}$ auch noch injektiv ist), ist also A ein projektiver A^e-Linksmodul. Das heißt, A ist separabel. Damit ist **2)** $\Longrightarrow$ **1)** nachgewiesen.

Beweis von 2) $\Longrightarrow$ 3): Angenommen, Aussage **2)** gelte. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $x_i, y_i \in A$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ so, dass $f(1) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}}$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mu\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}}\right) = \mu(f(1)) = 1.$$

Für alle $x \in A$ ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x \otimes 1^{\mathrm{op}}) \cdot 1) = (x \otimes 1^{\mathrm{op}}) f(1) \qquad \text{(denn } f \text{ ist } A^e\text{-linkslinear)} \\ &= (x \otimes 1^{\mathrm{op}}) \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}} = \sum_{i=1}^{n} x x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(x) &= f((1 \otimes x^{\mathrm{op}}) \cdot 1) = (1 \otimes x^{\mathrm{op}}) f(1) \qquad \text{(denn } f \text{ ist } A^e\text{-linkslinear)} \\ &= (1 \otimes x^{\mathrm{op}}) \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \underbrace{x^{\mathrm{op}} y_i^{\mathrm{op}}}_{=(y_i x)^{\mathrm{op}}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (y_i x)^{\mathrm{op}}, \end{aligned}$$

also $\sum\limits_{i=1}^{n} x x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes (y_i x)^{\mathrm{op}}$. Mit anderen Worten: $\sum\limits_{i=1}^{n} x x_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i x$. Damit ist **2)** $\Longrightarrow$ **3)** nachgewiesen.

Beweis von 3) $\Longrightarrow$ 2): Angenommen, Aussage **3)** sei wahr. Definiere eine Abbildung $f : A \to A^e$ durch $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}}$ für alle $x \in A$. Dann folgt $\mu f = \mathrm{id}$ (da $(\mu f)(x) = \mu\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x x_i y_i = x \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{=1} = x$ für alle $x \in A$). Außerdem ist diese Abbildung f eine A^e-linkslineare Abbildung, denn für alle $x, y \in A$ und $a \in A$ gilt

$$f((x \otimes y^{\mathrm{op}}) a) = f(xay) = \sum_{i=1}^{n} xayx_i \otimes y_i^{\mathrm{op}}$$

und

$$(x \otimes y^{\mathrm{op}}) f(a) = (x \otimes y^{\mathrm{op}}) \sum_{i=1}^{n} a x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}} = \sum_{i=1}^{n} x a x_i \otimes \underbrace{y^{\mathrm{op}} y_i^{\mathrm{op}}}_{=(y_i y)^{\mathrm{op}}} = \sum_{i=1}^{n} x a x_i \otimes (y_i y)^{\mathrm{op}} = \sum_{i=1}^{n} xayx_i \otimes y_i^{\mathrm{op}},$$

da $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i y = \sum\limits_{i=1}^{n} y x_i \otimes y_i$. Wir haben also **3)** $\Longrightarrow$ **2)** gezeigt.

Somit ist die Äquivalenz der drei Aussagen **1)**, **2)** und **3)** bewiesen. Wir haben damit Satz 3.4 **a)** gezeigt.

b) ***Beweis von b):*** Für (x_i, y_i) wie in **3)** definiere man f so wie im obigen Beweis von **3)** $\Longrightarrow$ **2)**, und man setze $e = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^{\mathrm{op}}$. Dann ist $f(1) = e$, also

$$e = f(1) = f(e \cdot 1) = ef(1) = e^2.$$

Definition: Sei R ein Ring. Dann heißt R *halbeinfach*, wenn für alle $X \in {}_R\mathcal{M}$ gilt: Jeder Untermodul Y von X ist ein direkter Summand von X (als R-Linksmodul).

Bemerkung: Man kann leicht nachweisen: Genau dann ist R halbeinfach, wenn jeder R-Linksmodul projektiv ist.

Äquivalenterweise gilt: Genau dann ist R halbeinfach, wenn jede kurze exakte Folge von R-Linksmoduln zerfällt.

Nach Wedderburn-Artin gilt: Genau dann ist R halbeinfach, wenn es endlich viele Schiefkörper D_1, D_2, ..., D_t und ganze Zahlen $n_i \geq 1$ für alle $i \in \{1, 2, ..., t\}$ gibt, für die $R \cong \prod\limits_{i=1}^{t} \mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ gilt.

Außerdem gilt: Genau dann ist R halbeinfach, wenn für alle $X \in \mathcal{M}_R$ gilt: Jeder Untermodul Y von X ist ein direkter Summand von X. (Das heißt, wir können in der Definition des Begriffes "halbeinfach" Linksmoduln durch Rechtsmoduln ersetzen, und der Begriff bleibt der Gleiche. Diese Tatsache wird öfters auch als "R linkshalbeinfach $\Longleftrightarrow$ R rechtshalbeinfach" formuliert.)

3.5. Satz: Sei A eine Algebra. Ist A separabel, dann ist A halbeinfach.

Beweis: Sei $X \in {}_A\mathcal{M}$, und sei $Y \subseteq X$ ein Untermodul. Da Y ein direkter Summand von X *als k-Vektorraum* ist, gibt es eine k-lineare Abbildung $f : X \to Y$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "="'] & X \arrow[dl, "f"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Betrachten wir diese Abbildung f.

Da A separabel ist, gibt es (gemäß Satz 3.4 **a)**) ein $n \geq 0$ und Elemente $x_i, y_i \in A$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ so, dass für jedes $x \in A$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} xx_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i x$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$. Wir wählen ein solches n und solche Elemente $x_i, y_i \in A$.

Für jedes $a \in A$ gilt dann $\sum\limits_{i=1}^{n} ax_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i a$ (denn dies ist nur eine Umschreibung der Aussage, daß $\sum\limits_{i=1}^{n} xx_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i x$ für jedes $x \in A$ ist).

Definiere eine Abbildung $\widetilde{f} : X \to Y$ durch $\widetilde{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(y_i x)$ für alle $x \in X$. Dann ist $\widetilde{f}$ eine wohldefinierte Abbildung (denn $Y \subseteq X$ ist ein A-Untermodul). Ferner ist $\widetilde{f}$ eine A-linkslineare Abbildung, denn für alle $a \in A$ und $x \in X$ ist

$$\widetilde{f}(ax) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i ax) = \sum_{i=1}^{n} ax_i f(y_i x) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{denn } \sum_{i=1}^{n} ax_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i a, \\ \text{also } \sum_{i=1}^{n} ax_i \otimes y_i x = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i ax \end{array} \right)$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i x) = a\widetilde{f}(x).$$

Außerdem ist $\widetilde{f}\mid_Y = \mathrm{id}$, denn für alle $y \in Y$ ist

$$\widetilde{f}(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{f(y_i y)}_{\substack{=y_i y, \text{ da} \\ y_i y \in Y \text{ und} \\ f\mid_Y = \mathrm{id}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{=1} y = y.$$

Daher ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "="'] & X \arrow[dl, "\widetilde{f}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

kommutativ, und es folgt, daß Y ein direkter Summand von X ist, was zu beweisen war.

3.6. Satz: a) Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $0 \neq \Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$. Dann sind folgende drei Aussagen zueinander äquivalent:

1) Die Algebra H ist halbeinfach.

2) Die Algebra H ist separabel.

3) Es gilt $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$.

b) Wenn die äquivalenten Aussagen **1)**, **2)** und **3)** gelten, dann ist H unimodular.

Beweis: **a)** ***Beweis von 1) $\Longrightarrow$ 3):*** Wir betrachten k als einen H-Linksmodul vermöge ε (die H-Linksmodulstruktur auf k ist also gegeben durch $h \cdot 1 = \varepsilon(h) \cdot 1$ für alle $h \in H$). Diesen H-Linksmodul nennen wir ${}_\varepsilon k$.

Dann ist $\varepsilon : H \to {}_\varepsilon k$ eine H-linkslineare Abbildung. Da $\operatorname{Ker}\varepsilon$ ein direkter Summand von H *als H-Linksmodul* ist (denn H ist halbeinfach), und da der H-Linksmodulepimorphismus $\varepsilon : H \to {}_\varepsilon k$ einen H-Linksmodulisomorphismus $H \diagup \operatorname{Ker}\varepsilon \to {}_\varepsilon k$ induziert, gibt es also eine H-linkslineare Abbildung $f : {}_\varepsilon k \to H$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & {}_\varepsilon k \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "="', "\mathrm{id}"] \\ H \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] & {}_\varepsilon k \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Also ist $f(1) \in \mathrm{I}_l(H)$ (denn für jedes $h \in H$ ist $hf(1) = f(h \cdot 1) = \varepsilon(h) f(1)$).

Außerdem ist $\varepsilon(f(1)) = 1$, also $\varepsilon(\mathrm{I}_l(H)) \neq 0$. Wegen $\varepsilon(\mathrm{I}_l(H)) = \varepsilon(\mathrm{I}_r(H))$ (laut dem 1. Abschnitt) ist also auch $\varepsilon(\mathrm{I}_r(H)) \neq 0$, also $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$ (denn laut Folgerung 1.5. **1)** ist $\mathrm{I}_r(H)$ eindimensional, also $\mathrm{I}_r(H) = k \cdot \Lambda$).

Beweis von 3) $\Longrightarrow$ 2): Nach 1.10. **5)** gilt für alle $x \in H$ die Gleichung $xS\left(\Lambda_{(1)}\right) \otimes \Lambda_{(2)} = S\left(\Lambda_{(1)}\right) \otimes \Lambda_{(2)} x$. Außerdem ist $S\left(\Lambda_{(1)}\right) \Lambda_{(2)} = \varepsilon\left(\Lambda\right) \cdot 1 \neq 0$. Nach 3.4. **a)** folgt hieraus, daß H separabel ist (man muß nur noch Λ so normieren, daß $\varepsilon\left(\Lambda\right) = 1$ wird).

Beweis von 2) $\Longrightarrow$ 1): Nach 3.5.

b) Sei $0 \neq \Gamma \in \mathrm{I}_l\left(H\right)$, und sei α modulare Funktion von H. Für alle $h \in H$ ist dann $\Gamma h = \alpha\left(h\right)\Gamma$. Anwendung von ε auf diese Gleichung ergibt $\varepsilon\left(\Gamma\right)\varepsilon\left(h\right) = \alpha\left(h\right)\varepsilon\left(\Gamma\right)$. Nach **3)** ist aber $\varepsilon\left(\Gamma\right) \neq 0$. Also folgt hieraus $\varepsilon\left(h\right) = \alpha\left(h\right)$. Das heißt, $\varepsilon = \alpha$, was zu beweisen war.

3.7. Folgerung (Maschke): Sei G eine endliche Gruppe, und sei $k\left[G\right]$ die Gruppenalgebra von G. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

1) Die Algebra $k\left[G\right]$ ist halbeinfach.

2) Es gilt $\left|G\right| \cdot 1_k \neq 0$. Mit anderen Worten: es gilt $\operatorname{char} k = 0$ oder $\operatorname{char} k = p > 0$ für ein $p \nmid \left|G\right|$.

Bemerkung: Trivialerweise ist die Algebra $\left(k\left[G\right]\right)^* \cong k^G$ (wobei wir hier die Hopfalgebrastruktur auf $k\left[G\right]$ verwenden) immer halbeinfach.

3.8. Bemerkung: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Die sogenannte *Spurabbildung* Tr_V wird definiert als die Abbildung von $\operatorname{End} V$ nach k, die jedem Endomorphismus von V die Spur dieses Endomorphismus zuordnet.

Hier sind zwei Eigenschaften dieser Spurabbildung Tr_V:

(a) Die k-lineare Abbildung $V^* \otimes V \to \operatorname{Hom}\left(V,V\right)$, $f \otimes v \mapsto \left(x \mapsto f\left(x\right)v\right)$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen. Bezeichnen wir dessen Umkehrabbildung mit $\phi : \operatorname{Hom}\left(V,V\right) \to V^* \otimes V$, dann ist die Komposition

$$\operatorname{Hom}\left(V,V\right) \xrightarrow{\quad\phi\quad} V^* \otimes V \xrightarrow[f\otimes v \mapsto f(v)]{\text{Auswertung:}} k$$

die Spurabbildung Tr_V.

(b) Sei $f \in \operatorname{End} V$ beliebig. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ seien $f_i \in V^*$ und $v_i \in V$ beliebig. Angenommen, für alle $v \in V$ gilt $f\left(v\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\left(v\right) v_i$. Dann ist die Spur des Endomorphismus $f \in \operatorname{End} V$ gleich $\mathrm{Tr}_V f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\left(v_i\right)$.

Beweis: Laut Definition von ϕ ist ϕ die Umkehrabbildung der k-linearen Abbildung $V^* \otimes V \to \operatorname{Hom}\left(V,V\right)$, $f \otimes v \mapsto \left(x \mapsto f\left(x\right)v\right)$. Die Umkehrabbildung ϕ^{-1} von ϕ ist also wiederum die k-lineare Abbildung $V^* \otimes V \to \operatorname{Hom}\left(V,V\right)$, $f \otimes v \mapsto \left(x \mapsto f\left(x\right)v\right)$. Das heißt, $\phi^{-1}\left(f \otimes v\right) = \left(x \mapsto f\left(x\right)v\right)$ für alle $f \in V^*$ und $v \in V$. Wenn wir in diesem Resultat f und v in g und w umbenennen, dann erhalten wir: $\phi^{-1}\left(g \otimes w\right) = \left(x \mapsto g\left(x\right)w\right)$ für alle $g \in V^*$ und $w \in V$.

Sei $\operatorname{ev} : V^* \otimes V \to k$ die durch

$$\operatorname{ev}\left(f \otimes v\right) = f\left(v\right) \qquad \text{für alle } f \in V^* \text{ und } v \in V$$

definierte k-lineare Abbildung. Dies ist die Abbildung, die in Bemerkung 3.8 **(a)** als "Auswertung" bezeichnet wurde.

(a) Um Bemerkung 3.8 **(a)** zu beweisen, müssen wir zeigen, daß $\operatorname{ev} \circ \phi = \mathrm{Tr}_V$ gilt (denn ev ist die Abbildung $V^* \otimes V \to k$, die in Bemerkung 3.8 **(a)** als "Auswertung" bezeichnet wurde).

Zuerst bemerken wir, daß $\operatorname{End} V = \operatorname{Hom}\left(V,V\right)$ ist; deshalb haben Tr_V und ϕ die gleiche Definitionsmenge.

Sei $f \in \operatorname{End} V$ beliebig.

Sei $(w_1, w_2, ..., w_m)$ eine Basis von V, und sei $(e_1, e_2, ..., e_m)$ die zu ihr duale Basis von V^*. Dann ist $(e_i(f(w_j)))_{1 \leq i,j \leq m}$ die darstellende Matrix der Abbildung $f \in \operatorname{End} V$ bezüglich der Basis $(w_1, w_2, ..., w_m)$. Somit ist die Spur von f gleich der Spur dieser Matrix. Das heißt, die Spur von f ist gleich $\operatorname{Tr}\left((e_i(f(w_j)))_{1 \leq i,j \leq m}\right) = \sum\limits_{j=1}^{m} e_j(f(w_j))$.

Da $\operatorname{Tr}_V f$ die Spur von f ist, gilt also: $\operatorname{Tr}_V f = \sum\limits_{j=1}^{m} e_j(f(w_j))$.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., m\}$ sei nun $g_j \in V^*$ definiert durch $g_j = e_j \circ f$. Dann ist

$$\phi^{-1}(g_j \otimes w_j) = \left(x \mapsto \underbrace{g_j}_{=e_j \circ f}(x)\, w_j\right)$$

$$\left(\text{denn für alle } g \in V^* \text{ und } w \in V \text{ gilt } \phi^{-1}(g \otimes w) = (x \mapsto g(x)\, w)\right)$$

$$= \left(x \mapsto \underbrace{(e_j \circ f)(x)}_{=e_j(f(x))} w_j\right) = (x \mapsto e_j(f(x))\, w_j)$$

für alle $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Also ist

$$\phi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m} g_j \otimes w_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\phi^{-1}(g_j \otimes w_j)}_{=(x \mapsto e_j(f(x)) w_j)} \qquad \left(\text{denn } \phi^{-1} \text{ ist } k\text{-linear}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (x \mapsto e_j(f(x))\, w_j) = \left(x \mapsto \underbrace{\sum_{j=1}^{m} e_j(f(x))\, w_j}_{\substack{=f(x) \\ \text{(denn } (w_1, w_2, ..., w_m) \text{ und} \\ (e_1, e_2, ..., e_m) \text{ sind zueinander} \\ \text{duale Basen)}}}\right) = (x \mapsto f(x)) = f.$$

Also ist $\sum\limits_{j=1}^{m} g_j \otimes w_j = \phi(f)$. Nun ist

$$(\operatorname{ev} \circ \phi)(f) = \operatorname{ev}\left(\underbrace{\phi(f)}_{= \sum_{j=1}^{m} g_j \otimes w_j}\right) = \operatorname{ev}\left(\sum_{j=1}^{m} g_j \otimes w_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\operatorname{ev}(g_j \otimes w_j)}_{\substack{=g_j(w_j) \\ \text{(nach der Definition von ev)}}} \qquad (\text{denn ev ist } k\text{-linear})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{g_j}_{=e_j \circ f}(w_j) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(e_j \circ f)(w_j)}_{=e_j(f(w_j))} = \sum_{j=1}^{m} e_j(f(w_j)) = \operatorname{Tr}_V f.$$

Da dies für alle $f \in \operatorname{End} V$ bewiesen wurde, gilt also $\operatorname{ev} \circ \phi = \operatorname{Tr}_V$. Damit ist Bemerkung 3.8 **(a)** gezeigt.

(b) Nach Bemerkung 3.8 **(a)** gilt $\operatorname{ev} \circ \phi = \operatorname{Tr}_V$ (denn ev ist die Abbildung $V^* \otimes V \to k$, die in Bemerkung 3.8 **(a)** als "Auswertung" bezeichnet wurde). Für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ist

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(f_i \otimes v_i) &= (x \mapsto f_i(x) v_i) \\
&\qquad \left(\text{denn für alle } g \in V^* \text{ und } w \in V \text{ gilt } \phi^{-1}(g \otimes w) = (x \mapsto g(x) w)\right) \\
&= (v \mapsto f_i(v) v_i) \qquad (\text{hier haben wir } x \text{ durch } v \text{ substituiert}).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i\right) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\phi^{-1}(f_i \otimes v_i)}_{=(v \mapsto f_i(v) v_i)} \qquad \left(\text{denn } \phi^{-1} \text{ ist } k\text{-linear}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n (v \mapsto f_i(v) v_i) = \left(v \mapsto \underbrace{\sum_{i=1}^n f_i(v) v_i}_{=f(v)}\right) = (v \mapsto f(v)) = f,
\end{aligned}$$

also $\sum\limits_{i=1}^n f_i \otimes v_i = \phi(f)$.

Nach der Definition von Tr_V ist nun

$$\begin{aligned}
&(\text{Spur des Endomorphismus } f) \\
&= \underbrace{\operatorname{Tr}_V}_{=\operatorname{ev} \circ \phi} f = (\operatorname{ev} \circ \phi)(f) = \operatorname{ev}\left(\underbrace{\phi(f)}_{=\sum\limits_{i=1}^n f_i \otimes v_i}\right) = \operatorname{ev}\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \underbrace{\operatorname{ev}(f_i \otimes v_i)}_{\substack{=f_i(v_i) \\ (\text{nach der Definition von ev})}} \qquad (\text{denn ev ist } k\text{-linear}) \\
&= \sum_{i=1}^n f_i(v_i).
\end{aligned}$$

Damit ist Bemerkung 3.8 **(b)** bewiesen.

3.8$\frac{1}{2}$. Bemerkung: Bemerkung 3.8 ist uns deshalb wichtig, weil wir sie im Beweis von Lemma 3.9 verwenden werden. Sie hat allerdings auch eine weitere wichtige Bedeutung in der Algebra: Durch Bemerkung 3.8 **(a)** läßt sich der Begriff der Spur eines Endomorphismus eines endlich erzeugten projektiven Moduls über einem kommutativen Ring definieren. Genauer:

Die Spur eines Endomorphismus f eines endlichdimensionalen Vektorraumes V über einem Körper k wird bekanntlich definiert als die Summe der Diagonalelemente der darstellenden Matrix von f bezüglich einer Basis von V. Diese Definition läßt sich nicht auf den Fall eines endlich erzeugten projektiven Moduls über einem kommutativen Ring übertragen, da projektive Moduln im Allgemeinen keine Basen haben. Für projektive Moduln definiert man die Spur daher folgendermaßen:

Ist R ein kommutativer Ring, und P ein endlich erzeugter projektiver R-Modul, dann ist die R-lineare Abbildung

$$P^* \otimes_R P \to \operatorname{Hom}_R(P, P), \qquad f \otimes v \mapsto (x \mapsto f(x)\, v)$$

ein Isomorphismus von R-Moduln, wobei P^* den R-Modul $\operatorname{Hom}_R(P, R)$ bezeichnet.[292] Bezeichnen wir dessen Umkehrabbildung mit $\phi_P : \operatorname{Hom}_R(P, P) \to P^* \otimes_R P$, dann bezeichnet man die Komposition

$$\operatorname{Hom}_R(P, P) \xrightarrow{\phi_P} P^* \otimes_R P \xrightarrow[f \otimes v \mapsto f(v)]{\text{Auswertung:}} R$$

als die *Spurabbildung* Tr_P. Diese Definition der Spurabbildung Tr_P steht nicht im Konflikt mit der Definition der Spurabbildung Tr_V in Bemerkung 3.8, denn (gemäß Bemerkung 3.8 **(a)**) sind diese beiden Definitionen im Falle eines endlichdimensionalen Vektorraumes über einem Körper zueinander äquivalent. Bemerkung 3.8 **(b)** verallgemeinert sich auf den Fall eines endlich erzeugten projektiven Moduls über einem kommutativen Ring.

3.9. Lemma: Sei H eine Frobeniusalgebra mit Frobeniushomomorphismus f und dualen Erzeugendensystemen $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$.

1) Ist $\varphi \in \operatorname{End}_k H$, dann ist $\operatorname{Tr} \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varphi(y_i)\, x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i \varphi(x_i))$.

2) Seien $\alpha \in k$ und $e \in H$ so gewählt, daß $e^2 = \alpha e$ ist. Sei $\varphi \in \operatorname{End}_k(eH)$. Dann ist $\alpha \operatorname{Tr}_{eH} \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varphi(ey_i)\, x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i \varphi(ex_i))$.

Beweis: **1)** ist offensichtlich ein Spezialfall von **2)** (für $e = 1$ und $\alpha = 1$).

*Beweis von **2)**:* Für alle $x \in H$ ist $ex = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(y_i ex)$ (da $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ duale Erzeugendensysteme sind). Multiplikation dieser Gleichung mit e ergibt

$$\underbrace{e^2}_{=\alpha e} x = \sum_{i=1}^{n} e x_i f(y_i ex).$$

Auf beide Seiten dieser Gleichung können wir nun φ anwenden, und bekommen

$$\alpha \varphi(ex) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(ex_i)\, f(y_i ex).$$

Hieraus folgt, daß

$$\alpha \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(ex_i)\, f(y_i v) \qquad \text{für alle } v \in eH$$

[292] Allgemeiner gilt: Ist R ein kommutativer Ring, und sind P und Q zwei R-Moduln, von denen mindestens einer endlich erzeugt und projektiv ist, dann ist die Abbildung

$$P^* \otimes_R Q \to \operatorname{Hom}_R(P, Q), \qquad f \otimes v \mapsto (x \mapsto f(x)\, v)$$

ein Isomorphismus von R-Moduln. Wir wollen dies hier nicht beweisen.

(denn jedes $v \in eH$ läßt sich in der Form $v = ex$ für ein $x \in H$ schreiben). Nach 3.8. **(b)** (angewandt auf eH, $\alpha\varphi$, $x \mapsto f(y_i x)$ und $\varphi(ex_i)$ statt V, f, f_i und v_i) folgt hieraus $\operatorname{Tr}_{eH}(\alpha\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i \varphi(ex_i))$, also $\alpha \operatorname{Tr}_{eH} \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i \varphi(ex_i))$.

Ebenso zeigt man für alle $x \in H$ die Gleichung $ex = \sum\limits_{i=1}^{n} f(exx_i) y_i$ und folgert daraus $\alpha \operatorname{Tr}_{eH} \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varphi(ey_i) x_i)$. Damit ist 3.9. bewiesen.

3.9$\frac{1}{2}$. Lemma: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$, und sei $\Lambda \in H$ so gewählt, daß $\lambda\Lambda = \varepsilon$ ist. (So ein Λ existiert nach 1.5. **3)**.)

1) Ist $\varphi \in \operatorname{End}_k H$, dann ist $\operatorname{Tr} \varphi = \lambda\left(\varphi\left(\Lambda_{(2)}\right) S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right) = \lambda\left(\Lambda_{(2)} \varphi\left(S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\right)$.

2) Seien $\alpha \in k$ und $e \in H$ so gewählt, daß $e^2 = \alpha e$ ist. Sei $\varphi \in \operatorname{End}_k(eH)$. Dann ist $\alpha \operatorname{Tr}_{eH} \varphi = \lambda\left(\varphi\left(e\Lambda_{(2)}\right) S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right) = \lambda\left(\Lambda_{(2)} \varphi\left(eS\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\right)$.

Beweis: Nach Folgerung 1.10. ist H eine Frobeniusalgebra, und λ ein Frobeniushomomorphismus von H mit dualen Erzeugendensystemen $\left(S\left(\Lambda_{(1)}\right), \Lambda_{(2)}\right)$. Somit folgen sämtliche Aussagen von Lemma 3.9$\frac{1}{2}$ aus Lemma 3.9 (angewandt auf λ und $\left(S\left(\Lambda_{(1)}\right), \Lambda_{(2)}\right)$ statt f und $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$).

3.10. Satz: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$, und sei $\Lambda \in H$ so gewählt, daß $\lambda\Lambda = \varepsilon$ ist. (So ein Λ existiert nach 1.5. **3)**.)

1) Dann ist $\operatorname{Tr}_H(S^2) = \lambda(1)\varepsilon(\Lambda)$. (Dies ist bekannt als die *1. Spurformel.*)

2) Für alle $e \in H$ und $\alpha \in k$, die $e^2 = \alpha e$ und $S^2(e) = e$ erfüllen, gilt $\alpha \operatorname{Tr}_{eH}(S^2 |_{eH}) = \varepsilon(\Lambda)\lambda(e)$.

Beweis: **1)** folgt aus **2)** für $e = 1$ und $\alpha = 1$.

Beweis von 2): Nach Lemma 3.9$\frac{1}{2}$. **2)** (angewandt auf $\varphi = S^2 |_{eH}$) ist

$$\alpha \operatorname{Tr}_{eH}\left(S^2 |_{eH}\right) = \lambda\left(\underbrace{S^2\left(e\Lambda_{(2)}\right)}_{=S^2(e)S^2\left(\Lambda_{(2)}\right)} S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right) = \lambda\left(\underbrace{S^2(e)}_{=e} \underbrace{S^2\left(\Lambda_{(2)}\right) S\left(\Lambda_{(1)}\right)}_{=S\left(\Lambda_{(1)} S\left(\Lambda_{(2)}\right)\right)}\right)$$
$$= \lambda\left(eS\left(\underbrace{\Lambda_{(1)} S\left(\Lambda_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(\Lambda)\cdot 1}\right)\right) = \lambda(e\varepsilon(\Lambda)) = \varepsilon(\Lambda)\lambda(e),$$

was zu beweisen war.

3.11. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra.

1) Dann ist $\operatorname{Tr}_H(S^2) \neq 0$ genau dann, wenn H und H^* halbeinfach sind.

2) Wenn $(\dim H) \cdot 1_k \neq 0$ und $S_H^2 = \mathrm{id}$, dann sind H und H^* halbeinfach.

Beweis: **1)** Wähle ein $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$. (So ein λ existiert laut Folgerung 1.5. **1)** (angewandt auf H^* statt H).) Wähle nun ein $\Lambda \in H$, das $\lambda\Lambda = \varepsilon$ erfüllt. (So ein Λ existiert nach Folgerung 1.5. **3)**.) Nach Folgerung 1.6. **1)** ist dann $0 \neq \Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$.

Gemäß Folgerung 1.5. **4)** (angewandt auf H^* statt H) ist $S_{H^*}(\mathrm{I}_l(H^*)) = \mathrm{I}_r(H^*)$. Aus $\lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$ folgt nun $S_{H^*}(\lambda) \in S_{H^*}(\mathrm{I}_l(H^*)) = \mathrm{I}_r(H^*)$. Da $S_{H^*}(\lambda) = \lambda \circ S_H$ ist, ist also $\lambda \circ S_H \in \mathrm{I}_r(H^*)$.

Gemäß Satz 3.6. **a)** ist H genau dann halbeinfach, wenn $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$ ist.

Doch bekanntlich ist $\eta^* : H^* \to k$ die Coeins der Hopfalgebra H^*, wobei $\eta : k \to H$ die Einsabbildung der Hopfalgebra H ist. Gemäß Satz 3.6. **a)** (angewandt auf H^* und $\lambda \circ S_H$ statt H und Λ) ist also H^* genau dann halbeinfach, wenn $\eta^* (\lambda \circ S_H) \neq 0$ ist (denn wegen $\lambda \neq 0$ ist $\lambda \circ S_H \neq 0$, und wir wissen daß $\lambda \circ S_H \in \mathrm{I}_r (H^*)$ ist). Da $\eta^* (\lambda \circ S_H) = (\lambda \circ S_H) (1) = \lambda \left(\underbrace{S_H (1)}_{=1} \right) = \lambda (1)$ ist, wissen wir damit: Genau dann ist H^* halbeinfach, wenn $\lambda (1) \neq 0$ ist.

Wir wissen damit insgesamt: Genau dann sind H und H^* halbeinfach, wenn $\varepsilon (\Lambda) \neq 0$ und $\lambda (1) \neq 0$ ist. Das heißt: Genau dann sind H und H^* halbeinfach, wenn $\lambda (1) \varepsilon (\Lambda) \neq 0$ ist. Da nun aber $\mathrm{Tr}_H (S^2) = \lambda (1) \varepsilon (\Lambda)$ gilt (nach 3.10. **1)**), ist damit Folgerung 3.11 **1)** gezeigt.

2) Dies folgt aus **1)**, denn $\mathrm{Tr}_H \, \mathrm{id} = (\dim H) \cdot 1_k$.

3.12. Bemerkung: Aus 3.11. folgt ein Spezialfall des Struktursatzes cokommutativer Hopfalgebren (Folgerung 4.13 aus Kapitel II):

Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} k = 0$, und ist H eine endlichdimensionale cokommutative Hopfalgebra, dann gibt es eine endliche Gruppe G, für die H isomorph zur Gruppenalgebra $k [G]$ ist.

Beweis: Da H^* eine endlichdimensionale kommutative Hopfalgebra ist, gilt $S_{H^*}^2 = \mathrm{id}$. Ferner ist $(\dim H) \cdot 1_k \neq 0$ (denn $\operatorname{char} k = 0$). Nach 3.11. **2)** ist also H^* halbeinfach. Nach Wedderburn-Artin folgt daraus $H^* \cong k^n$ als Algebren, wobei $n = \dim H$ (weil k algebraisch abgeschlossen ist). Wegen $G (H) \cong \mathrm{Alg} (H^*, k)$ ist also $|G (H)| = |\mathrm{Alg} (H^*, k)| = |\mathrm{Alg} (k^n, k)| = n = \dim H$, und somit ist $H = k [G (H)]$ (denn $G (H)$ ist linear unabhängig).

Nächste Ziele: Als nächstes haben wir vor, zu beweisen:

A) Sind H und H^* halbeinfach, dann ist $(\dim H) \cdot 1_k \neq 0$.

B) Wenn $\operatorname{char} k = 0$ ist, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Die Algebra H ist halbeinfach.

b) Die Algebra H^* ist halbeinfach.

c) Es gilt $S^2 = \mathrm{id}$.

Für die Beweise dieser Resultate brauchen wir die Theorie der Charaktere.

Definition: Sei H eine Algebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$ ein (über k) endlichdimensionaler H-Linksmodul. Dann definieren wir ein $\chi_V \in H^*$ wie folgt: Für jedes $h \in H$ sei $\chi_V (h) = \mathrm{Tr}_V L_h$, wobei $L_h : V \to V$ die Linksmultiplikation mit h ist (also die k-lineare Abbildung $V \to V$, $v \mapsto hv$). (Man bezeichnet L_h auch öfters mit $\widehat{h}$.)

Dieses Element $\chi_V \in H^*$ heißt *Charakter* von V.

3.13. Lemma: Sei H eine Hopfalgebra, und seien $V, W \in {}_H\mathcal{M}$ zwei (über k) endlichdimensionale H-Linksmoduln.

1) Wenn $V \cong W$ als H-Linksmoduln gilt, dann ist $\chi_V = \chi_W$.

2) Es gilt $\chi_V (1) = \dim V$.

3) Es gilt $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

4) Es gilt $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$ in H^* (wobei das Produkt in H^*, wie immer, die Konvolution ist).

5) Für jedes $\varphi \in \mathrm{End}_k V$ ist $\mathrm{Tr}_V \varphi = \mathrm{Tr}_{V^*} (\varphi^*)$.

6) Es gilt $\chi_{V^*} = \chi_V \circ S = S^* (\chi_V)$. (Falls $\dim H < \infty$ ist, gilt $S^* = S_{H^*}$.)

7) Für den H-Linksmodul k gilt $\chi_k = \varepsilon$.

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussage **1)** gilt nicht immer, aber unter manchen Bedingungen doch. (Beispielsweise gilt: Sind V und W zwei H-Linksmoduln mit $\chi_V = \chi_W$, und ist H halbeinfach und gilt $\operatorname{char} k = 0$, dann gilt $V \cong W$ als H-Linksmoduln.)

Beweis von Lemma 3.13.: **1)**, **2)**, **3)** und **7)** sind klar.

4) a) Zeige: Für jede $\varphi \in \operatorname{End}_k V$ und $\psi \in \operatorname{End}_k W$ ist $\operatorname{Tr}_{V\otimes W}(\varphi \otimes \psi) = \operatorname{Tr}_V \varphi \cdot \operatorname{Tr}_W \psi$.

Beweis: Sei $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ eine Basis von V, und sei $(w_j)_{1\leq j\leq m}$ eine Basis von W. Sei $\varphi(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} v_i$ und $\psi(w_l) = \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_{k,l} w_k$. Dann ist

$$(\varphi \otimes \psi)(v_j \otimes w_l) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,j} v_i \otimes \beta_{k,l} w_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,j} \beta_{k,l} v_i \otimes w_k.$$

Also ist

$$\operatorname{Tr}_{V\otimes W}(\varphi \otimes \psi) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \alpha_{j,j} \beta_{l,l} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j}}_{=\operatorname{Tr}_V \varphi} \underbrace{\sum_{l=1}^{m} \beta_{l,l}}_{=\operatorname{Tr}_W \psi} = \operatorname{Tr}_V \varphi \cdot \operatorname{Tr}_W \psi.$$

b) Nach **a)** gilt für alle $h \in H$ die Beziehung

$$\operatorname{Tr}_{V\otimes W}\left(L_{h_{(1)}} \otimes L_{h_{(2)}}\right) = \operatorname{Tr}_V L_{h_{(1)}} \cdot \operatorname{Tr}_W L_{h_{(2)}} = \chi_V\left(h_{(1)}\right) \cdot \chi_W\left(h_{(2)}\right) = (\chi_V \chi_W)(h),$$

aber andererseits ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_{V\otimes W}\left(L_{h_{(1)}} \otimes L_{h_{(2)}}\right) &= \operatorname{Tr}_{V\otimes W}\left(V \otimes W \to V \otimes W,\ v \otimes w \mapsto \left(h_{(1)} \otimes h_{(2)}\right)(v \otimes w)\right) \\ &= \operatorname{Tr}_{V\otimes W} L_{h_{(1)}\otimes h_{(2)}} = \operatorname{Tr}_{V\otimes W} L_h,\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

5) Sei $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ eine Basis von V. Sei $\varphi(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} v_i$. Sei $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ die zu $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ duale Basis von V^*. Dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi^*(f_l))(v_j) &= f_l\left(\underbrace{\varphi(v_j)}_{=\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} v_i}\right) = f_l\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \underbrace{f_l(v_i)}_{\substack{=\delta_{l,i} \text{ (da } (f_i)_{1\leq i\leq n} \text{ die zu} \\ (v_i)_{1\leq i\leq n} \text{ duale Basis von } V^* \text{ ist)}}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \delta_{l,i} = \alpha_{l,j}.\end{aligned}$$

Also ist $\varphi^*(f_l) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{l,k} f_k$, und damit $\operatorname{Tr}_{V^*}(\varphi^*) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{k,k} = \operatorname{Tr}_V \varphi$.

6) Sei $h \in H$. Dann ist $\chi_{V^*}(h) = \mathrm{Tr}_{V^*}(L_h : V^* \to V^*)$. Die Abbildung $L_h : V^* \to V^*$ bildet dabei jedes $f \in V^*$ auf $hf \in V^*$ ab, wobei $hf : V \to k$ die lineare Abbildung ist, die jedes $v \in V$ in $f(S(h)v)$ überführt. Wir haben also $L_h = L^*_{S(h)}$. Damit ist

$$\begin{aligned}\chi_{V^*}(h) &= \mathrm{Tr}_{V^*}(L_h : V^* \to V^*) \\ &= \mathrm{Tr}_{V^*}\left(L^*_{S(h)} : V^* \to V^*\right) = \mathrm{Tr}_V\left(L_{S(h)} : V \to V\right) \qquad (\text{nach } \mathbf{5)}) \\ &= \chi_V(S(h)),\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Definition: Sei H eine Hopfalgebra. Die Menge $R(H) = \{\chi_V \mid V \in {}_H\mathcal{M} \text{ mit } \dim V < \infty\}$ ist ein Unterring von H^* und heißt *Charakterring* von H.

3.14. Bemerkung: Daß $R(H)$ tatsächlich ein Unterring von H^* ist, folgt aus 3.13. (genauer gesagt, aus 3.13. **3)**, **4)** und **7)**).

Eine wichtige Strategie bei der Untersuchung halbeinfacher Hopfalgebren besteht darin, von Eigenschaften des Charakterrings $R(H)$ auf Eigenschaften von H zu schließen.

3.15. Lemma: Sei H eine Hopfalgebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$. Sei ${}_\varepsilon V$ der triviale H-Modul auf dem Vektorraum V (das heißt, als Vektorraum ist ${}_\varepsilon V = V$, aber jedes $h \in H$ operiert auf ${}_\varepsilon V$ durch $hv = \varepsilon(h)v$ für alle $v \in {}_\varepsilon V$).

1) Dann ist

$$\begin{aligned}H \otimes {}_\varepsilon V &\to H \otimes V, \\ h \otimes v &\mapsto h_{(1)} \otimes h_{(2)}v\end{aligned}$$

ein Isomorphismus von H-Linksmoduln.

2) Für jeden projektiven H-Linksmodul P ist der H-Linksmodul $P \otimes V$ ebenfalls projektiv.

Beweis: **1)** Die Abbildung

$$\begin{aligned}H \otimes {}_\varepsilon V &\to H \otimes V, \\ h \otimes v &\mapsto h_{(1)} \otimes h_{(2)}v\end{aligned}$$

ist offenbar H-linear.

Die Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned}H \otimes V &\to H \otimes {}_\varepsilon V, \\ h \otimes v &\mapsto h_{(1)} \otimes S\left(h_{(2)}\right)v,\end{aligned}$$

denn Hintereinanderausführung ergibt

$$\begin{aligned}&h \otimes v \mapsto h_{(1)} \otimes h_{(2)}v \mapsto h_{(1)} \otimes S\left(h_{(2)}\right)h_{(3)}v = h \otimes v \qquad \text{und} \\ &h \otimes v \mapsto h_{(1)} \otimes S\left(h_{(2)}\right)v \mapsto h_{(1)} \otimes h_{(2)}S\left(h_{(3)}\right)v = h \otimes v.\end{aligned}$$

2) folgt aus **1)**, denn: Seien $P, Q \in {}_H\mathcal{M}$ so, daß $P \oplus Q \cong H^{(I)}$ ein freier H-Modul ist. Dann ist

$$\begin{aligned}(P \otimes V) \oplus (Q \otimes V) &\cong \underbrace{(P \oplus Q)}_{\cong H^{(I)}} \otimes V \cong H^{(I)} \otimes V \cong (H \otimes V)^{(I)} \\ &\cong (H \otimes {}_\varepsilon V)^{(I)} \qquad (\text{nach } \mathbf{1)}) \\ &\cong H^{(I)} \otimes \underbrace{{}_\varepsilon V}_{\cong k^{(\dim V)}} \cong H^{(I)} \otimes k^{(\dim V)} \cong \left(H^{(I)}\right)^{(\dim V)}\end{aligned}$$

(wobei die H-Linksmodulstruktur auf k durch $h \cdot \lambda = \varepsilon(h) \cdot \lambda$ für alle $h \in H$ und $\lambda \in k$ definiert ist), und somit ist $P \otimes V$ projektiv.

3.16. Lemma: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei χ_H der Charakter der regulären Darstellung, also des kanonischen H-Linksmoduls H.

1) Dann gilt $\chi_H^2 = \dim H \cdot \chi_H$.

2) Ferner gilt $S_{H^*}^2(\chi_H) = \chi_H \circ S^2 = \chi_H$.

3) Für alle $\Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$ und $\Gamma \in \mathrm{I}_l(H)$ ist $\chi_H(\Lambda) = \varepsilon(\Lambda)$ und $\chi_H(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma)$.

Beweis: **1)** Nach 3.15. **1)** ist $H \otimes {}_\varepsilon H \cong H \otimes H$ in ${}_H\mathcal{M}$. Aber $H \otimes {}_\varepsilon H \cong H^{\dim H}$ in ${}_H\mathcal{M}$ (denn der H-Linksmodul ${}_\varepsilon H$ ist trivial, also eine direkte Summe von $\dim H$ Untermoduln, die jeweils isomorph zu ${}_\varepsilon k$ sind, und $H \otimes {}_\varepsilon k \cong H$ in ${}_H\mathcal{M}$). Also ist $H^{\dim H} \cong H \otimes H$ in ${}_H\mathcal{M}$. Nach 3.13. **1)** ist also $\chi_{H^{\dim H}} = \chi_{H \otimes H}$. Nach 3.13. **3)** ist aber $\chi_{H^{\dim H}} = \dim H \cdot \chi_H$, und nach 3.13. **4)** ist $\chi_{H \otimes H} = \chi_H^2$. Daraus folgt $\dim H \cdot \chi_H = \chi_H^2$.

2) Allgemeiner gilt für jeden Algebraautomorphismus $\varphi : H \to H$ die Gleichung $\chi_H \circ \varphi = \chi_H$.

Beweis: Sei $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis von H. Sei $h \in H$. Sei $hv_j = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_{i,j} v_i$ für alle j. Dann ergibt sich $\varphi(hv_j) = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_{i,j} \varphi(v_i)$. Da φ ein Algebraautomorphismus ist, ist nun $\varphi(h)\varphi(v_j) = \varphi(hv_j) = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_{i,j} \varphi(v_i)$. Da $\varphi(v_1), \varphi(v_2), ..., \varphi(v_n)$ eine Basis von H ist, folgt hieraus $\chi_H(\varphi(h)) = \chi_H(h)$. Da dies für alle $h \in H$ gilt, ist damit $\chi_H \circ \varphi = \chi_H$ bewiesen.

Anwendung von $\chi_H \circ \varphi = \chi_H$ auf $\varphi = S^2$ ergibt $\chi_H \circ S^2 = \chi_H$. Ferner ist offensichtlich $S_{H^*}^2(\chi_H) = (S^*)^2(\chi_H) = \chi_H \circ S^2$.

3) a) Sei $\Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$ beliebig. Wir wollen zeigen, daß $\chi_H(\Lambda) = \varepsilon(\Lambda)$ gilt.

Beweis: Gemäß Folgerung 1.5. **1)** (angewandt auf H^* statt H) ist der Vektorraum $\mathrm{I}_l(H^*)$ eindimensional. Es existiert also ein $0 \neq \widetilde{\lambda} \in \mathrm{I}_l(H^*)$. Betrachte dieses $\widetilde{\lambda}$. Laut Folgerung 1.5. **3)** (angewandt auf $\widetilde{\lambda}$ statt λ) ist nun die Abbildung

$$H \to H^*, \qquad h \mapsto \widetilde{\lambda} h$$

ein Vektorraumisomorphismus. Somit existiert ein $\widetilde{\Lambda} \in H$ mit $\widetilde{\lambda}\widetilde{\Lambda} = \varepsilon$. Betrachte dieses $\widetilde{\Lambda}$. Aus $\widetilde{\lambda}\widetilde{\Lambda} = \varepsilon$ folgt $\widetilde{\lambda}\left(\widetilde{\Lambda}\right) = \underbrace{\left(\widetilde{\lambda}\widetilde{\Lambda}\right)}_{=\varepsilon}(1) = \varepsilon(1) = 1$.

Nach Folgerung 1.6. **1)** (angewandt auf $\widetilde{\Lambda}$ und $\widetilde{\lambda}$ statt Λ und λ) ist $\left(\widetilde{\Lambda}\right)$ eine Basis des (eindimensionalen) Vektorraums $\mathrm{I}_r(H)$. Also ist $\widetilde{\Lambda}$ Rechtsintegral.

Nun ist

$$\begin{aligned}\chi_H(\Lambda) = \mathrm{Tr}_H(L_\Lambda) &= \widetilde{\lambda}\left(\widetilde{\Lambda}_{(2)} L_\Lambda\left(S\left(\widetilde{\Lambda}_{(1)}\right)\right)\right) \\ &\qquad \left(\text{nach Lemma } 3.9\frac{1}{2}. \text{ (angewandt auf } \widetilde{\lambda}, \widetilde{\Lambda} \text{ und } L_\Lambda \text{ statt } \lambda, \Lambda \text{ und } \varphi)\right) \\ &= \widetilde{\lambda}\left(\widetilde{\Lambda}_{(2)} \Lambda S\left(\widetilde{\Lambda}_{(1)}\right)\right).\end{aligned}$$

Da Λ ein Rechtsintegral ist, ist aber $\widetilde{\Lambda}_{(2)} \Lambda S\left(\widetilde{\Lambda}_{(1)}\right) = \widetilde{\Lambda}_{(2)} \varepsilon\left(S\left(\widetilde{\Lambda}_{(1)}\right)\right)\Lambda = \underbrace{\widetilde{\Lambda}_{(2)} \varepsilon\left(\widetilde{\Lambda}_{(1)}\right)}_{=\widetilde{\Lambda}}\Lambda =$

$\widetilde{\Lambda}\Lambda = \varepsilon(\Lambda)\widetilde{\Lambda}$ (da $\widetilde{\Lambda}$ ein Rechtsintegral ist), also $\chi_H(\Lambda) = \widetilde{\lambda}\left(\widetilde{\Lambda}_{(2)}\Lambda S\left(\widetilde{\Lambda}_{(1)}\right)\right) = \lambda\left(\varepsilon(\Lambda)\widetilde{\Lambda}\right) = \varepsilon(\Lambda)\underbrace{\widetilde{\lambda}\left(\widetilde{\Lambda}\right)}_{=1} = \varepsilon(\Lambda)$.

b) Sei $\Gamma \in \mathrm{I}_l(H)$ beliebig. Wir wollen zeigen, daß $\chi_H(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma)$ gilt.

Beweis: Gemäß Folgerung 1.5. **1)** (angewandt auf H^* statt H) ist der Vektorraum $\mathrm{I}_l(H^*)$ eindimensional. Es existiert also ein $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$. Betrachte dieses λ. Laut Folgerung 1.5. **3)** ist nun die Abbildung

$$H \to H^*, \qquad h \mapsto \lambda h$$

ein Vektorraumisomorphismus. Somit existiert ein $\Lambda \in H$ mit $\lambda\Lambda = \varepsilon$. Betrachte dieses Λ.

Nach der Aussage **c)** im Beweis von Satz 2.4 ist $S(\Lambda)\lambda = \varepsilon$. Also ist $\lambda(S(\Lambda)) = \underbrace{(S(\Lambda)\lambda)}_{=\varepsilon}(1) = \varepsilon(1) = 1$.

Nach Folgerung 1.6. **1)** ist (Λ) eine Basis des (eindimensionalen) Vektorraums $\mathrm{I}_r(H)$. Also ist $(S(\Lambda))$ eine Basis des (eindimensionalen) Vektorraums $S(\mathrm{I}_r(H)) = \mathrm{I}_l(H)$ (nach Folgerung 1.5. **4)**).

Nun ist

$$\begin{aligned}\chi_H(\Gamma) = \mathrm{Tr}_H(L_\Gamma) &= \lambda\left(\Lambda_{(2)}L_\Gamma\left(S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right)\right)\\ &\qquad\left(\text{nach Lemma } 3.9\tfrac{1}{2}.\ \mathbf{1)}\ \text{(angewandt auf } L_\Gamma \text{ statt } \varphi)\right)\\ &= \lambda\left(\Lambda_{(2)}\Gamma S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right).\end{aligned}$$

Da Γ ein Linksintegral ist, ist aber $\Lambda_{(2)}\Gamma S\left(\Lambda_{(1)}\right) = \varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)\Gamma S\left(\Lambda_{(1)}\right) = \Gamma S\left(\underbrace{\Lambda_{(1)}\varepsilon\left(\Lambda_{(2)}\right)}_{=\Lambda}\right) = \Gamma S(\Lambda) = \varepsilon(\Gamma)S(\Lambda)$ (denn $S(\Lambda)$ ist ein Linksintegral), also $\chi_H(\Gamma) = \lambda\left(\Lambda_{(2)}\Gamma S\left(\Lambda_{(1)}\right)\right) = \lambda(\varepsilon(\Gamma)S(\Lambda)) = \varepsilon(\Gamma)\underbrace{\lambda(S(\Lambda))}_{=1} = \varepsilon(\Gamma)$.

3.17. Satz (Larson-Radford 1988): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann ist $\mathrm{Tr}(S^2) = \dim H \cdot \mathrm{Tr}_{\chi_H H^*}(S_{H^*}^2 \mid_{\chi_H H^*})$. (Dies ist die sogenannte *2. Spurformel.*)

Beweis: Nach 3.16. ist $S_{H^*}^2(\chi_H) = \chi_H$ und $\chi_H^2 = \dim H \cdot \chi_H$.

Sei $0 \neq \Gamma \in \mathrm{I}_l(H)$. Sei $\widetilde{\Gamma} \in \mathrm{I}_l((H^*)^*)$, wobei $\widetilde{\Gamma} : H^* \to k$ die durch $\widetilde{\Gamma}(p) = p(\Gamma)$ für alle $p \in H^*$ definierte k-lineare Abbildung ist.

Sei $\gamma \in H^*$ mit $\widetilde{\Gamma}\gamma = \varepsilon_{H^*}$. Dann ist $\widetilde{\Gamma}$ Frobeniushomomorphismus von H^*, und $\left(S\left(\gamma_{(1)}\right), \gamma_{(2)}\right)$ sind duale Erzeugendensysteme.

Jetzt wenden wir 3.10. **2)** an auf χ_H statt e, $\dim H$ statt α, H^* statt H, γ statt Λ und $\widetilde{\Gamma}$ statt λ. Wir erhalten $\dim H \cdot \mathrm{Tr}(S_{H^*}^2 \mid_{\chi_H H^*}) = \varepsilon_{H^*}(\gamma)\widetilde{\Gamma}(\chi_H)$. Wegen

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}(\chi_H) = \chi_H(\Gamma) &= \varepsilon(\Gamma) \qquad \text{(nach 3.16.)}\\ &= \widetilde{\Gamma}\left(\underbrace{\varepsilon_H}_{=1_{H^*}}\right) = \widetilde{\Gamma}(1_{H^*})\end{aligned}$$

wird dies aber zu

$$\begin{aligned}\dim H\cdot\operatorname{Tr}\left(S_{H^*}^2\,|_{\chi_H H^*}\right) &= \varepsilon_{H^*}(\gamma)\,\widetilde{\Gamma}\,(1_{H^*}) = \widetilde{\Gamma}\,(1_{H^*})\,\varepsilon_{H^*}(\gamma)\\ &= \operatorname{Tr}_{H^*}\left(S_{H^*}^2\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{nach 3.10. }\mathbf{1)}\text{ (angewandt auf }H^*,\ S_{H^*},\\ \widetilde{\Gamma}\text{ und }\gamma\text{ statt }H,\ S,\ \lambda\text{ und }\Lambda)\end{array}\right)\\ &= \operatorname{Tr}_{H^*}\left((S^*)^2\right) = \operatorname{Tr}_H\left(S^2\right) \qquad (\text{nach 3.13. }\mathbf{5)})\,.\end{aligned}$$

3.18. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Angenommen, H und H^* sind beide halbeinfach. Dann ist $\dim H\cdot 1_k\neq 0$. Das heißt, $p\nmid\dim H$, falls $\operatorname{char} k=p>0$.

Beweis: Nach 3.10. **1)** ist $0\neq\operatorname{Tr}\left(S^2\right)$, da H und H^* halbeinfach sind. Nach 3.17. folgt hieraus $\dim H\cdot 1_k\neq 0$.

Definition: Sei C eine Coalgebra. Dann nennen wir C *cohalbeinfach*, wenn $C=C_0$ gilt, d. h. wenn C die Summe der einfachen Untercoalgebren von C ist. (Dabei bezeichnet C_0 das Coradikal von C.)

3.19. Bemerkung: 1) Sei C eine endlichdimensionale Coalgebra. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

a) Die Coalgebra C ist cohalbeinfach.

b) Die Algebra C^* ist halbeinfach.

Beweis: Nach Kapitel II, 4.3. **1)**, ist Aussage **a)** äquivalent dazu, daß es einfache Untercoalgebren $C_i\subseteq C$ gibt mit $1\leq i\leq t$ (wobei $t\in\mathbb{N}$), die $C=\bigoplus_{i=1}^{t}C_i$ erfüllen. Dies ist wiederum äquivalent dazu, daß $C^*=\bigoplus_{i=1}^{t}C_i^*$ ist, wobei C_i^* einfache Algebren sind für alle $1\leq i\leq t$. Nach Wedderburn-Artin (siehe Bemerkung 3.19. **2)** unten) ist dies aber äquivalent zu **b)**.

2) Da wir ihn jetzt mehrmals verwendet haben, sollten wir den Satz von Wedderburn-Artin auch einmal formulieren:

Satz von Wedderburn-Artin: Sei A eine endlichdimensionale Algebra.

a) Genau dann ist A halbeinfach, wenn es ein $t\geq 1$ und k-Algebren D_i für alle $1\leq i\leq t$ gibt so, daß jedes D_i ein Schiefkörper ist, und $A\cong\prod_{i=1}^{t}\mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ als k-Algebren gilt für bestimmte ganze Zahlen $n_i\geq 1$ für alle $1\leq i\leq t$.

b) Die Algebra A ist genau dann einfach, wenn es eine k-Algebra D gibt, die ein Schiefkörper ist, und $A\cong\mathrm{M}_n(D)$ für eine ganze Zahl $n\geq 1$ gilt.

c) Falls die Algebra A einfach ist, dann gibt es einen einfachen A-Linksmodul E, für den gilt: Für jedes $M\in{}_A\mathcal{M}$ gibt es eine Menge I so, daß $M\cong E^{(I)}$ (und damit insbesondere $M\cong E^n$ für ein eindeutig bestimmtes $n\in\mathbb{N}$, falls $\dim M<\infty$ ist).

3) Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra, und sei $k\subseteq\ell$ eine Körpererweiterung. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

a) Die Algebra H ist halbeinfach.

b) Die Algebra $\ell\otimes_k H$ ist (als ℓ-Algebra) halbeinfach.

Beweis: Wir definieren wie in Kapitel II, 3.2. **1)** eine ℓ-Hopfalgebrastruktur auf $\ell\otimes_k H$. [293]

[293] Genauer gesagt wurde in Kapitel II, 3.2. **1)** eine ℓ-Coalgebrastruktur auf $\ell\otimes_k H$ definiert. Wenn wir diese Struktur mit der kanonischen ℓ-Algebrastruktur auf $\ell\otimes_k H$ verknüpfen, erhalten wir eine

Sei $0 \neq \Lambda \in \mathrm{I}_r(H)$. Dann ist $0 \neq 1 \otimes \Lambda \in \mathrm{I}_r(\ell \otimes_k H)$, denn für alle $\alpha \in \ell$ und $h \in H$ ist

$$(1 \otimes \Lambda)(\alpha \otimes h) = \alpha \otimes \underbrace{\Lambda h}_{\substack{=\Lambda\varepsilon(h) \\ (\text{da } \Lambda \in \mathrm{I}_r(H))}} = \alpha \otimes \Lambda\varepsilon(h) = (1 \otimes \Lambda)\,\alpha\varepsilon(h) \otimes 1$$

$$= \underbrace{\varepsilon(h)\,\alpha}_{=\varepsilon_{\ell\otimes H}(\alpha\otimes h)} \otimes \Lambda = \varepsilon_{\ell\otimes H}(\alpha \otimes h) \cdot (1 \otimes \Lambda).$$

Ferner ist $\varepsilon_{\ell\otimes H}(1 \otimes \Lambda) = \varepsilon(\Lambda)$. Nach 3.6. **a)** folgt hieraus die Behauptung.

Bemerkung: Obwohl in Bemerkung **3)** beide Aussagen **a)** und **b)** nur von der Algebrastruktur auf H abhängen (und nicht etwa von der Coalgebrastruktur), würde Bemerkung **3)** nicht mehr gelten, wenn man "Hopfalgebra" durch "Algebra" ersetzen würde![294]

3.20. Satz (Larson-Radford 1988): Sei $\operatorname{char} k = 0$, und sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:

1) Die Algebra H ist halbeinfach.

2) Die Algebra H ist cohalbeinfach.

3) Es gilt $S^2 = \mathrm{id}$.

Beweis: Nach 3.19. **3)** können wir o. B. d. A. annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist.

*Beweis von **3)** $\Longrightarrow$ **1)** und **2)**:* Folgt aus 3.11. **2)**, wobei $\dim H \cdot 1_k \neq 0$ wegen $\operatorname{char} k = 0$, und 3.19. **1)**.

*Beweis von **1)** und **2)** $\Longrightarrow$ **3)**:* Wegen **1)** und **2)** gelten (nach 3.6. **b)**) für das modulare Element $a \in H$ und die modulare Funktion $\alpha \in H^*$ die Gleichungen $a = 1$ und $\alpha = \varepsilon$. Nach dem Satz von Radford (2.6.) folgt hieraus $S^4 = \mathrm{id}$. Für $S^2 : H \to H$ gilt also $\mathrm{Tr}(S^2) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, wobei $n = \dim H$ und $\mu_i \in \{1, -1\}$ für alle $1 \leq i \leq n$ (denn schreibt man $S^2 : H \to H$ als eine Matrix, dann hat diese Matrix (wegen $(S^2)^2 = S^4 = \mathrm{id}$) die Eigenwerte 1 und -1 (möglicherweise mehrfach), und die Spur einer Matrix ist ja die Summe ihrer Eigenwerte).

Ebenso gibt es ein $1 \leq m \leq n$ mit $\mathrm{Tr}(S^2_{H^*}\,|_{\chi_H H^*}) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j$ wobei $m = \dim(\chi_H H^*)$ und $\nu_j \in \{1, -1\}$ für alle $1 \leq j \leq m$ (denn $(S^2_{H^*}\,|_{\chi_H H^*})^2 = \mathrm{id}$). Folglich ist $\mathrm{Tr}(S^2_{H^*}\,|_{\chi_H H^*}) \in \mathbb{Z}$.

Nach der 2. Spurformel gilt aber $\mathrm{Tr}(S^2) = \underbrace{\dim H}_{=n} \cdot \underbrace{\mathrm{Tr}_{\chi_H H^*}\left(S^2_{H^*}\,|_{\chi_H H^*}\right)}_{\in\mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z}$, also $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \mathrm{Tr}(S^2) \in n\mathbb{Z}$. Ferner ist $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \mathrm{Tr}(S^2) \neq 0$ (denn nach der 1. Spurformel gilt $\mathrm{Tr}(S^2) = \underbrace{\lambda(1)}_{\neq 0 \text{ wegen } \mathbf{2)}} \underbrace{\varepsilon(\Lambda)}_{\neq 0 \text{ wegen } \mathbf{1)}}$). Aber $\mu_i \in \{1, -1\}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Somit ist

---

ℓ-Bialgebrastruktur auf $\ell \otimes_k H$, und wenn wir zudem noch eine Antipode $S_{\ell\otimes_k H}$ auf $\ell \otimes_k H$ durch $S_{\ell\otimes_k H} = \ell \otimes S_H : \ell \otimes_k H \to \ell \otimes_k H$ definieren, so bekommen wir eine ℓ-Hopfalgebrastruktur auf $\ell \otimes_k H$. Dies ist die ℓ-Hopfalgebrastruktur, um die es hier geht.

[294] *Allerdings:* In dem Fall, wenn $\operatorname{char} k = 0$ ist, gilt Bemerkung **3)** auch dann, wenn H nur eine Algebra (und keine Hopfalgebra) ist. Dies ist ein bekannter Satz aus der Darstellungstheorie von Algebren.

entweder $\mu_i = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$, oder $\mu_i = -1$ für alle $1 \leq i \leq n$ (denn eine Summe von n Zahlen aus der Menge $\{1, -1\}$, die nicht gleich 0 ist, kann nur dann durch n teilbar sein, wenn entweder alle diese Zahlen gleich 1 oder alle diese Zahlen gleich -1 sind). In ersterem Fall ist $S^2 = \mathrm{id}$, und in zweiterem $S^2 = -\mathrm{id}$ (denn S^2 ist diagonalisierbar, weil $\operatorname{char} k = 0$ und $S^4 = \mathrm{id}$ ist). Doch $S^2 = -\mathrm{id}$ kann nicht eintreten (denn $S^2(1) = 1 \neq -1$). Also muß $S^2 = \mathrm{id}$ sein, und **3)** ist bewiesen.

Beweis von 2) $\Longrightarrow$ 1): Nach 3.10. und 3.6. reicht es aus zu zeigen: Wenn H cohalbeinfach ist, dann ist $\operatorname{Tr}_H(S^2) \neq 0$.

Beweis: Da H cohalbeinfach ist, gibt es einfache Untercoalgebren $C_1, C_2, ..., C_n$ von H mit $C_i \neq k \cdot 1$ für alle i und $C_i \neq C_j$ für alle $i \neq j$ so, daß $H = k \cdot 1 \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ ist.

Nach 3.21. **3)** (weiter unten) gilt $S^2(C_i) = C_i$ für jedes i. Somit ist $S^2 \mid_{C_i} : C_i \to C_i$ ein Coalgebraautomorphismus für jedes i. Folglich ist $(S^2 \mid_{C_i})^* : C_i^* \to C_i^*$ ein Algebraautomorphismus für jedes i. Nenne $\varphi_i = (S^2 \mid_{C_i})^*$. Man bedenke, daß dieses φ_i ein Automorphismus endlicher Ordnung ist (denn $S^4 = \mathrm{id}$ nach Radford).

Wir suchen jetzt $\operatorname{Tr} \varphi_i = \operatorname{Tr}\left((S^2 \mid_{C_i})^*\right)$.

Aus $H = k \cdot 1 \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$ folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_H\left(S^2\right) &= 1 + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Tr}_{C_i}\left(S^2 \mid_{C_i}\right) \qquad \left(\text{denn } S^2(k \cdot 1) = k \cdot 1 \text{ und } S^2(C_i) = C_i \text{ für jedes } i\right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Tr} \underbrace{\left((S^2 \mid_{C_i})^*\right)}_{=\varphi_i} = 1 + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Tr} \varphi_i.
\end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, 2, ..., m\}$ beliebig. Nach Wedderburn-Artin ist $C_i^* \cong \mathrm{M}_{n_i}(k) \cong \operatorname{End}_{k\mathcal{M}}(k^{n_i})$ als Algebra für passendes n_i. Es gibt also einen Algebraisomorphismus $\Upsilon_i : C_i^* \to \operatorname{End}_{k\mathcal{M}}(k^{n_i})$. Der Algebraautomorphismus φ_i von C_i^* ergibt damit einen Algebraautomorphismus $\Upsilon_i \circ \varphi_i \circ \Upsilon_i^{-1}$ von $\operatorname{End}_{k\mathcal{M}}(k^{n_i})$. Dieser Algebraautomorphismus $\Upsilon_i \circ \varphi_i \circ \Upsilon_i^{-1}$ hat endliche Ordnung (da φ_i endliche Ordnung hat). Nach Satz 3.22 **2)** (weiter unten) gibt es also n_i Einheitswurzeln $\lambda_{i,j}$ für $1 \leq j \leq n_i$ mit $\operatorname{Tr}\left(\Upsilon_i \circ \varphi_i \circ \Upsilon_i^{-1}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}^{-1}$. Da $\operatorname{Tr}\left(\Upsilon_i \circ \varphi_i \circ \Upsilon_i^{-1}\right) = \operatorname{Tr} \varphi_i$ ist, vereinfacht sich dies zu $\operatorname{Tr} \varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}^{-1}$.

Wir haben damit gezeigt: Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ gibt es n_i Einheitswurzeln $\lambda_{i,j}$ für $1 \leq j \leq n_i$ mit $\operatorname{Tr} \varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \cdot \sum\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}^{-1}$.

Da die $\lambda_{i,j}$ endlich viele Einheitswurzeln in k sind, und $\operatorname{char} k = 0$ ist, gibt es einen Körperhomomorphismus $\sigma : \underbrace{\mathbb{Q}(\lambda_{i,j} \mid i, j)}_{\text{ein Unterkörper von } k} \to \mathbb{C}$. Da ein Körperhomomorphismus stets Einheitswurzeln in Einheitswurzeln überführt, ist $\sigma(\lambda_{i,j})$ eine Einheitswurzel für jedes $1 \leq i \leq m$ und jedes $1 \leq j \leq n_i$.

Da σ ein Körperhomomorphismus ist, und $\operatorname{Tr}_H(S^2) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Tr} \varphi_i$ gilt, ist

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\operatorname{Tr}_H\left(S^2\right)\right) &= 1 + \sigma\left(\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Tr} \varphi_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \sigma\left(\lambda_{i,j}\right) \cdot \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sigma\left(\lambda_{i,j}\right)\right)^{-1}\right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \sigma\left(\lambda_{i,j}\right) \cdot \overline{\sum_{j=1}^{n_i} \sigma\left(\lambda_{i,j}\right)}}_{\geq 0}\right) \\
&\qquad \left(\text{denn Einheitswurzeln } z \in \mathbb{C} \text{ erfüllen } z^{-1} = \overline{z}\right) \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

also $\operatorname{Tr}_H(S^2) \neq 0$. Nach 3.11. **1)** folgt hieraus **1)**.

Beweis von ***1)*** $\Longrightarrow$ ***2)****:* Wir haben **2)** $\Longrightarrow$ **1)** bewiesen. Durch Dualität folgt hieraus auch **1)** $\Longrightarrow$ **2)** (denn nach Bemerkung 3.19. **1)** ist eine endlichdimensionale Coalgebra genau dann cohalbeinfach, wenn ihre duale Algebra halbeinfach ist).

3.21. Satz: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra, und sei $0 \neq \lambda \in \mathrm{I}_l(H^*)$.

Sei eine bilineare Form $\langle , \rangle : H \times H \to k$ definiert durch $\langle x, y \rangle = \lambda(xS(y))$ für alle $x, y \in H$. Dann folgt:

1) Für alle $x, y \in H$ und $p \in H^*$ ist $\langle x \leftharpoonup p, y \rangle = \langle x, p \rightharpoonup y \rangle$.

2) Es gilt die sogenannte *Orthogonalitätsrelation:* Sind C und D zwei Untercoalgebren von H mit $C \cap D = 0$, dann ist $\langle C, D \rangle = 0$.

3) Ist H cohalbeinfach, und ist $C \subseteq H$ eine einfache Untercoalgebra, dann ist $S^2(C) = C$.

Zur Erinnerung: Die Linksoperation $\rightharpoonup$ von H^* auf H ist definiert durch $p \rightharpoonup x = x_{(1)} p\left(x_{(2)}\right)$ für alle $x \in H$ und $p \in H^*$. Die Rechtsoperation $\leftharpoonup$ von H^* auf H ist definiert durch $x \leftharpoonup p = p\left(x_{(1)}\right) x_{(2)}$ für alle $x \in H$ und $p \in H^*$.

Beweis: **1)** Nach Larson-Sweedler und 1.4. ist

$$\phi : H \to H^*, \qquad x \mapsto S(x)\lambda$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{M}_H^H$, also insbesondere H-colinear, also H^*-linkslinear. Letzteres bedeutet: Für alle $p \in H^*$ und $x \in H$ ist $\phi(p \rightharpoonup x) = \underbrace{p \cdot \phi(x)}_{\substack{\text{Multiplikation} \\ \text{in } H^*}}$. Für alle $x, y \in H$

und $p \in H^*$ gilt nun

$$\langle y, p \rightharpoonup x\rangle = \lambda\left(yS\left(p \rightharpoonup x\right)\right) = \left(\underbrace{\underbrace{S\left(p \rightharpoonup x\right)\lambda}_{=\phi(p\rightharpoonup x)}}_{\text{(nach der Definition von }\phi)}\right)(y) = \underbrace{\left(\phi\left(p \rightharpoonup x\right)\right)}_{=p\cdot\phi(x)}(y)$$

$$= \left(p \cdot \underbrace{\underbrace{\phi\left(x\right)}_{=S(x)\lambda}}_{\text{(nach der Definition von }\phi)}\right)(y) = \left(p \cdot \left(S\left(x\right)\lambda\right)\right)(y) = p\left(y_{(1)}\right)\underbrace{\left(S\left(x\right)\lambda\right)\left(y_{(2)}\right)}_{=\lambda\left(y_{(2)}S(x)\right)}$$

$$= p\left(y_{(1)}\right)\lambda\left(y_{(2)}S\left(x\right)\right) = \lambda\left(\underbrace{p\left(y_{(1)}\right)y_{(2)}}_{=y\leftharpoonup p}S\left(x\right)\right) = \lambda\left(\left(y \leftharpoonup p\right)S\left(x\right)\right) = \langle y \leftharpoonup p, x\rangle .$$

Vertauschen wir in dieser Gleichheit x und y, haben wir damit $\langle x, p \rightharpoonup y\rangle = \langle x \leftharpoonup p, y\rangle$, qed.

2) Wähle einen Untervektorraum $X \subseteq H$ so, daß $H = C \oplus D \oplus X$ ist. Wähle ein $p \in H^*$ mit $p\mid_C = \varepsilon\mid_C$, $p\mid_D = 0$ und $p\mid_X = 0$. Für alle $c \in C$ und $d \in D$ ist dann $c = c \leftharpoonup p$, also

$$\langle c, d\rangle = \langle c \leftharpoonup p, d\rangle = \left\langle c, \underbrace{p \rightharpoonup d}_{=0}\right\rangle \qquad \text{(nach } \mathbf{1)}\text{)}$$
$$= 0.$$

3) Wir nehmen an, daß $S^2(C) \neq C$ ist. Da C und damit auch $S^2(C)$ einfache Coalgebren sind, ist also $S^2(C) \cap C = 0$. Nach **2)** ist also $\langle S^2(x), y\rangle = 0$ für alle $x, y \in C$. Doch $\langle S^2(x), y\rangle = \lambda\left(S^2(x)S(y)\right) = (\lambda \circ S)(yS(x))$. Andererseits ist $\lambda \circ S \in \mathrm{I}_r(H^*) = \mathrm{I}_l(H^*)$ (denn H^* ist halbeinfach, also unimodular), also $\lambda \circ S = \beta\lambda$ für ein $0 \neq \beta \in k$ (denn $\lambda \circ S \in \mathrm{I}_l(H^*) = k\lambda$). Insgesamt haben wir also $0 = \langle S^2(x), y\rangle = \underbrace{(\lambda \circ S)}_{=\beta\lambda}(yS(x)) = \beta\lambda(yS(x))$. Also gilt $\lambda(yS(x)) = 0$ für alle $x, y \in C$ (denn $\beta \neq 0$).

Hieraus folgt $0 = \lambda\left(\underbrace{x_{(1)}S\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(x)\cdot 1}\right)$ für alle $x \in C$. Also $0 = \lambda(\varepsilon(x) \cdot 1) = \varepsilon(x) \cdot \underbrace{\lambda(1)}_{\neq 0\text{, da } H \text{ cohalbeinfach ist}}$. Wir erhalten damit $\varepsilon(x) = 0$ für alle $x \in C$. Da C eine Coalgebra ist, folgt hieraus $x = x_{(1)}\underbrace{\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=0} = 0$ für alle $x \in C$, also $C = 0$, was ein Widerspruch ist.

3.22. Satz: Sei V ein k-Vektorraum mit $\dim V = d < \infty$. Sei $\operatorname{char} k = 0$ (diese Bedingung ist strenggenommen unnötig, aber sie vereinfacht unseren Beweis). Sei $\varphi : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$ ein Algebraautomorphismus. Dann gilt:

1) (Satz von Skolem-Noether) Der Algebraautomorphismus φ ist ein innerer Automorphismus. Das heißt, es gibt ein $q \in \operatorname{Aut} V$ so, daß für alle $p \in \operatorname{End} V$ gilt: $\varphi(p) = qpq^{-1}$.

2) Ist k algebraisch abgeschlossen, und ist φ ein Automorphismus endlicher Ordnung n, dann gibt es Einheitswurzeln $\lambda_j \in k$ für $1 \leq j \leq d$ mit $\operatorname{Tr} \varphi = \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j \cdot \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j^{-1}$ und $\lambda_j^n = 1$ für alle $1 \leq j \leq d$.

Beweis: **1)** Betrachte V als $\operatorname{End} V$-Linksmodul durch $pv = p(v)$ für jedes $p \in \operatorname{End} V$ und jedes $v \in V$.

Wir definieren einen $\operatorname{End} V$-Linksmodul ${}_\varphi V$ wie folgt: Als Vektorraum sei ${}_\varphi V = V$. Die $\operatorname{End} V$-Linksmodulstruktur auf ${}_\varphi V$ sei definiert durch $p \cdot_\varphi v = \varphi(p) v$ für jedes $p \in \operatorname{End} V$ und jedes $v \in V$.

Wir wissen (nach der Übungsaufgabe 2 von Blatt 3 von vorigem Semester), daß jeder endlichdimensionale $\operatorname{End} V$-Linksmodul isomorph zu U^t für ein $t \in \mathbb{N}$ ist, wobei U der (bis auf Isomorphie einzige) einfache $\operatorname{End} V$-Linksmodul ist, nämlich $U = V$. Folglich sind zwei endlichdimensionale $\operatorname{End} V$-Linksmoduln bereits dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Also ist $V \cong {}_\varphi V$ als $\operatorname{End} V$-Moduln. Das heißt, es gibt ein $q \in \operatorname{Aut} V$ so, daß für jedes $p \in \operatorname{End} V$ und jedes $v \in V$ gilt: $q(pv) = (\varphi(p))(q(v))$.

Das heißt, $qp = \varphi(p) q$ für jedes $p \in \operatorname{End} V$. Mit anderen Worten, $qpq^{-1} = \varphi(p)$ für jedes $p \in \operatorname{End} V$, was zu beweisen war.

2) Nach **1)** gibt es ein $q \in \operatorname{Aut} V$ so, daß für alle $p \in \operatorname{End} V$ gilt: $\varphi(p) = qpq^{-1}$. Wegen $\operatorname{ord} \varphi = n$ folgt hieraus $q^n p q^{-n} = p$ für alle $p \in \operatorname{End} V$. Daher ist $q^n \in Z(\operatorname{End} V) = k \cdot \operatorname{id}$. Also gibt es ein $0 \neq \beta \in k$ mit $q^n = \beta \cdot \operatorname{id}$.

Da k algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $\alpha \in k$ mit $\beta = \alpha^n$. Daraus folgt $(\alpha^{-1} q)^n = \operatorname{id}$. Wir können also o. B. d. A. den Automorphismus q durch $\alpha^{-1} q$ ersetzen, und haben dann $q^n = \operatorname{id}$. Dann ist q diagonalisierbar (wiederum weil k algebraisch abgeschlossen ist, und weil $\operatorname{char} k = 0$ ist). Also gibt es eine Basis $v_1, ..., v_d$ von V, die aus Eigenvektoren von q besteht. Betrachten wir diese Basis $v_1, ..., v_d$. Für jedes $j \in \{1, 2, ..., d\}$ sei $\lambda_j \in k$ der Eigenwert von q zum Eigenvektor v_j. Dann ist $q(v_j) = \lambda_j v_j$ für alle $1 \leq j \leq d$. Hieraus folgt $\lambda_j^n = 1$ (da $q^n = \operatorname{id}$) und $q^{-1}(v_j) = \lambda_j^{-1} v_j$ für alle $1 \leq j \leq d$.

Nun ist aber $(p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ eine Basis von $\operatorname{End} V$, wobei $p_{i,j} \in \operatorname{End} V$ so definiert ist, daß $p_{i,j}(v_l) = \delta_{i,l} v_j$ für jedes l gilt.

Für alle i, j, l gilt also

$$\begin{aligned}(\varphi(p_{i,j}))(v_l) &= \left(q p_{i,j} q^{-1}\right)(v_l) = (q p_{i,j}) \left(\underbrace{q^{-1}(v_l)}_{=\lambda_l^{-1} v_l} \right) = (q p_{i,j}) \left(\lambda_l^{-1} v_l\right) \\ &= q\left(\lambda_l^{-1} \delta_{i,l} v_j\right) = \underbrace{\lambda_l^{-1} \delta_{i,l}}_{=\lambda_i^{-1} \delta_{i,l}} \lambda_j v_j = \lambda_i^{-1} \delta_{i,l} \lambda_j v_j = \lambda_i^{-1} \lambda_j \underbrace{\delta_{i,l} v_j}_{=p_{i,j}(v_l)} = \lambda_i^{-1} \lambda_j p_{i,j}(v_l).\end{aligned}$$

Somit gilt $\varphi(p_{i,j}) = \lambda_i^{-1} \lambda_j p_{i,j}$ für alle i und j. Damit ist $\operatorname{Tr} \varphi = \sum\limits_{i,j} \lambda_i^{-1} \lambda_j = \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j \cdot \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j^{-1}$.

Wir werden die Eigenschaften halbeinfacher Hopfalgebren und der Moduln über ihnen in Kapitel III.5 weiter untersuchen. Wir werden wir aber zunächst zurückgehen zu allgemeinen endlichdimensionalen Hopfalgebren. Bevor wir dies jedoch tun, wollen wir der Vollständigkeit halber zeigen, wie Satz 3.22 auch ohne die Bedingung $\operatorname{char} k = 0$ gezeigt werden kann. Dazu benötigen wir ein Lemma aus der linearen Algebra:

3.30. Lemma: Sei V ein k-Vektorraum mit $\dim V = d < \infty$. Seien $q, r \in \operatorname{End} V$ beliebig. Sei $\varphi : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V$ die Abbildung, die durch

$$\varphi(p) = qpr \qquad \text{für alle } p \in \operatorname{End} V$$

definiert ist. Dann ist φ eine k-lineare Abbildung mit $\operatorname{Tr} \varphi = (\operatorname{Tr} q) \cdot (\operatorname{Tr} r)$.

Beweis von Lemma 3.30: Daß φ eine k-lineare Abbildung ist, ist klar. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\operatorname{Tr} \varphi = (\operatorname{Tr} q) \cdot (\operatorname{Tr} r)$ ist.

Sei $(e_1, e_2, ..., e_d)$ eine Basis des Vektorraums V. Sei $\operatorname{mat} : \operatorname{End} V \to \operatorname{M}_d(k)$ die Abbildung, die durch

$$\operatorname{mat} f = (\text{darstellende Matrix von } f \text{ bezüglich der Basis } (e_1, e_2, ..., e_d)) \qquad \text{für jedes } f \in \operatorname{End} V$$

definiert ist. Für jedes $f \in \operatorname{End} V$ ist dann

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{mat} f) = \operatorname{Tr}(\text{darstellende Matrix von } f \text{ bezüglich der Basis } (e_1, e_2, ..., e_d)) = \operatorname{Tr} f.$$

Bekanntlich ist mat ein k-Algebraisomorphismus.

Sei $Q = \operatorname{mat} q$ und $R = \operatorname{mat} r$. Da $\operatorname{Tr}(\operatorname{mat} f) = \operatorname{Tr} f$ für jedes $f \in \operatorname{End} V$ gilt, gilt insbesondere $\operatorname{Tr}(\operatorname{mat} q) = \operatorname{Tr} q$. Wegen $\operatorname{mat} q = Q$ wird dies zu $\operatorname{Tr} Q = \operatorname{Tr} q$. Analog ist $\operatorname{Tr} R = \operatorname{Tr} r$.

Sei $\widetilde{\varphi} : \operatorname{M}_d(k) \to \operatorname{M}_d(k)$ die Abbildung, die durch $\widetilde{\varphi} = \operatorname{mat} \circ \varphi \circ \operatorname{mat}^{-1}$ definiert ist. Dann ist $\widetilde{\varphi}$ eine k-lineare Abbildung und erfüllt $\operatorname{Tr} \widetilde{\varphi} = \operatorname{Tr}(\operatorname{mat} \circ \varphi \circ \operatorname{mat}^{-1}) = \operatorname{Tr} \varphi$ [295]. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(P) &= \left(\operatorname{mat} \circ \varphi \circ \operatorname{mat}^{-1}\right)(P) = \operatorname{mat}\left(\underbrace{\varphi\left(\operatorname{mat}^{-1}(P)\right)}_{=q \circ \operatorname{mat}^{-1}(P) \circ r}\right) = \operatorname{mat}\left(q \circ \operatorname{mat}^{-1}(P) \circ r\right) \\
&= \underbrace{(\operatorname{mat} q)}_{=Q} \cdot \underbrace{\left(\operatorname{mat}\left(\operatorname{mat}^{-1}(P)\right)\right)}_{=P} \cdot \underbrace{(\operatorname{mat} r)}_{=R} \qquad (\text{denn mat ist ein } k\text{-Algebrahomomorphismus}) \\
&= QPR \qquad \text{für alle } P \in \operatorname{M}_d(k).
\end{aligned}$$

Für jede $i, j \in \{1, 2, ..., d\}$ sei $E_{i,j} \in \operatorname{M}_d(k)$ die Matrix, die eine 1 an der (i,j)-ten Stelle und eine 0 an jeder anderen Stelle hat. Dann ist $(E_{i,j})_{i,j \in \{1,2,...,d\}}$ eine Basis des k-Vektorraums $\operatorname{M}_d(k)$. Die zu dieser Basis $(E_{i,j})_{i,j \in \{1,2,...,d\}}$ duale Basis von $(\operatorname{M}_d(k))^*$ ist dann $(F_{i,j})_{i,j \in \{1,2,...,d\}}$, wobei $F_{i,j}$ (für beliebige $i, j \in \{1, 2, ..., d\}$) als diejenige Abbildung $\operatorname{M}_d(k) \to k$ definiert ist, die jede $d \times d$-Matrix A auf den (i,j)-ten Eintrag von A abbildet. Somit gilt

$$\operatorname{Tr} \widetilde{\varphi} = \sum_{i,j \in \{1,2,...,d\}} F_{i,j}\left(\widetilde{\varphi}(E_{i,j})\right)$$

[295] An dieser Stelle verwenden wir ein Standardresultat aus der linearen Algebra:
Sind A und B zwei endlichdimensionale k-Vektorräume, und ist $f : A \to B$ ein Vektorraumisomorphismus, dann gilt $\operatorname{Tr}\left(f \circ \rho \circ f^{-1}\right) = \operatorname{Tr} \rho$ für jedes $\rho \in \operatorname{End} A$.

(nach der Definition der Spur oder nach Bemerkung 3.8 **(b)**). Doch da

$$\begin{aligned}
F_{i,j}\left(\widetilde{\varphi}\left(E_{i,j}\right)\right) &= \left(\text{der } (i,j)\text{-te Eintrag der Matrix } \widetilde{\varphi}\left(E_{i,j}\right)\right) \\
&= \left(\text{der } (i,j)\text{-te Eintrag der Matrix } QE_{i,j}R\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } \widetilde{\varphi}\left(E_{i,j}\right) = QE_{i,j}R \text{ (denn } \widetilde{\varphi}\left(P\right) = QPR \text{ für alle } P \in \mathrm{M}_d\left(k\right)\text{))}\right) \\
&= \left(\text{der } (i,i)\text{-te Eintrag der Matrix } Q\right) \cdot \left(\text{der } (j,j)\text{-te Eintrag der Matrix } R\right) \\
&\qquad \left(\text{nach der Definition von } E_{i,j} \text{ und des Produktes von Matrizen}\right)
\end{aligned}$$

für jede $i, j \in \{1, 2, ..., d\}$ gilt, vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\widetilde{\varphi} &= \sum_{i,j\in\{1,2,...,d\}} \left(\text{der } (i,i)\text{-te Eintrag der Matrix } Q\right) \cdot \left(\text{der } (j,j)\text{-te Eintrag der Matrix } R\right) \\
&= \underbrace{\sum_{i\in\{1,2,...,d\}} \left(\text{der } (i,i)\text{-te Eintrag der Matrix } Q\right)}_{=\operatorname{Tr} Q = \operatorname{Tr} q} \cdot \underbrace{\sum_{j\in\{1,2,...,d\}} \left(\text{der } (j,j)\text{-te Eintrag der Matrix } R\right)}_{=\operatorname{Tr} R = \operatorname{Tr} r} \\
&= \left(\operatorname{Tr} q\right) \cdot \left(\operatorname{Tr} r\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{Tr}\widetilde{\varphi} = \operatorname{Tr}\varphi$ wird dies zu $\operatorname{Tr}\varphi = (\operatorname{Tr} q) \cdot (\operatorname{Tr} r)$. Damit ist Lemma 3.30 bewiesen.

3.31. Folgerung: Satz 3.22 gilt auch ohne die Bedingung $\operatorname{char} k = 0$.

Beweis von Folgerung 3.31: **1)** Im Beweis von Satz 3.22 **1)** haben wir nirgendwo benutzt, daß $\operatorname{char} k = 0$ ist. Also gilt Satz 3.22 **1)** auch ohne die Bedingung $\operatorname{char} k = 0$.

2) Um Satz 3.22 ohne die Bedingung $\operatorname{char} k = 0$ zu beweisen, verfahren wir genauso wie im Beweis von Satz 3.22 weiter oben, bis zu der Stelle, an der behauptet wird, daß q diagonalisierbar ist. Diese Behauptung können wir hier nicht mehr machen, da wir nicht mehr $\operatorname{char} k = 0$ voraussetzen. Jedoch können wir folgendermaßen weiterargumentieren:

Nach Lemma 3.30 (angewandt auf $r = q^{-1}$) ist $\operatorname{Tr}\varphi = (\operatorname{Tr} q) \cdot (\operatorname{Tr}(q^{-1}))$.

Seien nun $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d$ die Eigenwerte von q (mit ihren algebraischen Vielfachheiten). Bekanntlich muß ein Polynom, das einen Endomorphismus eines Vektorraumes annihiliert, auch jeden seiner Eigenwerte annihilieren. Somit gilt $\lambda_i^n = 1$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., d\}$ (denn $q^n = 1$). Ferner sind $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, ..., \lambda_d^{-1}$ die Eigenwerte von q^{-1} (da $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d$ die Eigenwerte von q sind). Folglich ist $\operatorname{Tr}(q^{-1}) = \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j^{-1}$. Andererseits ist $\operatorname{Tr} q = \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j$ (da $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d$ die Eigenwerte von q sind). Somit wird $\operatorname{Tr}\varphi = (\operatorname{Tr} q) \cdot (\operatorname{Tr}(q^{-1}))$ zu $\operatorname{Tr}\varphi = \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j \cdot \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j^{-1}$. Somit gilt Satz 3.22 **2)** auch ohne die Bedingung $\operatorname{char} k = 0$.

4. Die Sätze von Nichols-Zoeller und Skryabin

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Lösung einer **Vermutung von Kaplansky (1975)** beschäftigen:

Ist H eine Hopfalgebra, und ist $A \subseteq H$ eine Unterhopfalgebra von H, dann ist H als A-Linksmodul und als A-Rechtsmodul frei.

Diese Vermutung ist, so wie sie formuliert ist, *falsch* - auch über dem Grundkörper $\mathbb{C}$. Der **Satz von Nichols-Zoeller** (1989) besagt aber: Ist H eine endlichdimensionale Hopfalgebra, und ist $A \subseteq H$ eine Unterhopfalgebra von H, dann ist H als A-Linksmodul und als A-Rechtsmodul frei.

Der **Satz von Skryabin** (2006) beantwortet einen anderen Sonderfall von Kaplanskys Vermutung positiv, sogar etwas verallgemeinert: Ist H eine endlichdimensionale Hopfalgebra, und ist $A \subseteq H$ eine Rechtscoidealunteralgebra, dann ist H als A-Linksmodul und als A-Rechtsmodul frei. Dabei verwenden wir den folgenden Begriff:

Definition: Sei H eine Hopfalgebra, und sei A eine Unteralgebra von H. Genau dann heißt A eine *Rechtscoidealunteralgebra* von H, wenn $\Delta(A) \subseteq A \otimes H$ ist. Genau dann heißt A eine *Linkscoidealunteralgebra* von H, wenn $\Delta(A) \subseteq H \otimes A$ ist.

Einführendes Beispiel: Gruppenalgebren

Wir werden im Folgenden den Beweis des Satzes von Skryabin nachvollziehen. Zuerst jedoch sehen wir uns einen Sonderfall an: nämlich wenn H die Gruppenalgebra einer Gruppe G ist und A die Gruppenalgebra einer Untergruppe G' von G.

4.1. Bemerkung: Sei G eine Gruppe, und sei $G' \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir schreiben die Gruppe G in der Form $G = \bigcup\limits_{i \in I} g_i \cdot G'$ mit $g_i \in G$ für alle $i \in I$, wobei $(g_i \cdot G') \cap (g_j \cdot G') = \varnothing$ für alle $i \neq j$ ist.

Sei $G \diagup G' = \{g \cdot G' \mid g \in G\} = \{g_i \cdot G' \mid i \in I\} = \{\overline{g_i} \mid i \in I\}$.

Die Sequenz von Mengen

$$G \times G' \underset{\mathrm{pr}_1}{\overset{\mathrm{mult}}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{\quad\mathrm{kan}\quad} G/G'$$

ist exakt (im Sinne des Differenzcokerns), wobei $\mathrm{mult} : G \times G' \to G$ die Multiplikationsabbildung ist (definiert durch $\mathrm{mult}(g, g') = gg'$ für alle $g \in G$ und $g' \in G'$), und $\mathrm{pr}_1 : G \times G' \to G$ die Projektion auf die erste Koordinate ist (definiert durch $\mathrm{pr}_1(g, g') = g$ für alle $g \in G$ und $g' \in G'$).

1) In Beispiel 2.1 **1)** von Kapitel I haben wir eine Coalgebra $k[S]$ für jede Menge S definiert[296]. Gemäß dieser Definition seien die drei Coalgebren $k[G]$, $k[G']$ und $k[G \diagup G']$ definiert.

Wir betrachten $k[G']$ als Untercoalgebra von $k[G]$ (indem wir jedes $g \in G'$ mit dem enstprechenden Basiselement $g \in G$ identifizieren). Sei $\mathrm{mult} : k[G] \otimes k[G'] \to k[G]$ die k-lineare Abbildung, die $\mathrm{mult}(g \otimes g') = gg'$ für alle $g \in G$ und $g' \in G'$ erfüllt.

a) Die Sequenz von Coalgebren

$$k[G] \otimes k[G'] \underset{\mathrm{id} \otimes \varepsilon}{\overset{\mathrm{mult}}{\rightrightarrows}} k[G] \xrightarrow{\quad\mathrm{kan}\quad} k[G/G'] \longrightarrow 0$$

[296]Wir erinnern uns noch einmal an die Definition, die wir in Beispiel 2.1 **1)** von Kapitel I (dort allerdings mit anderer Notation) gegeben haben:

Definition: Sei S eine beliebige Menge. Dann definieren wir folgendermaßen eine Coalgebra $k[S]$: Sei $k[S]$ der freie k-Modul mit Basis S. Sei $\Delta : k[S] \to k[S] \otimes k[S]$ die k-lineare Abbildung, die

$$\Delta(s) = s \otimes s \qquad \text{für alle } s \in S$$

erfüllt. Sei $\varepsilon : k[S] \to k$ die k-lineare Abbildung, die

$$\varepsilon(s) = 1 \qquad \text{für alle } s \in S$$

erfüllt. Dann ist $(k[S], \Delta, \varepsilon)$ eine Coalgebra. Diese Coalgebra bezeichnen wir kurz mit $k[S]$.

ist exakt (im Sinne des Differenzcokerns)[297]. Hierbei ist die kanonische Abbildung $\mathrm{kan} : k[G] \to k[G/G']$ durch $\mathrm{kan}\, g = \overline{g}$ für alle $g \in G$ definiert; diese Abbildung ist ein Coalgebrahomomorphismus.

b) Wir definieren ferner eine $k[G]$-Linksmodulstruktur auf $k[G/G']$ durch $g \cdot \overline{g_i} = \overline{gg_i}$ für jedes $g \in G$ und $i \in I$. (Diese $k[G]$-Linksmodulstruktur erfüllt allgemeiner $g \cdot \overline{h} = \overline{gh}$ für jedes $g \in G$ und $h \in G$; sie ist also unabhängig von der Wahl der g_i.) Dann induziert obige exakte Sequenz einen kanonischen Isomorphismus $k[G] / \left(k[G](k[G'])^+\right) \to k[G/G']$ von $k[G]$-Linksmoduln.

Beweis: **a)** Für jedes $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g g \in k[G]$, mit $\alpha_g \in k$ für alle $g \in G$, gilt folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\left(0 = \mathrm{kan}\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)\right) \iff \left(0 = \sum_{g\in G} \alpha_g \overline{g}\right) \qquad \left(\text{denn } \mathrm{kan}\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g\in G} \alpha_g \overline{g}\right)$$
$$\iff \left(\text{für jedes } i \text{ ist } \sum_{g'\in G'} \alpha_{g_i g'} = 0\right).$$

Das heißt,

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{kan} : k[G] \to k[G/G']\right) = \left\{\sum_{g\in G} \alpha_g g \in k[G] \mid \text{für jedes } i \text{ ist } \sum_{g'\in G'} \alpha_{g_i g'} = 0\right\}.$$

Andererseits ist $(k[G'])^+ = \mathrm{Ker}\left(\varepsilon : k[G'] \to k\right) = \sum\limits_{g'\in G'} k(g'-1)$.[298] Also ist $k[G](k[G'])^+ = \sum\limits_{g'\in G'} k[G](g'-1)$. Doch

$$\sum_{g'\in G'} k[G](g'-1) = \left\{\sum_{g\in G} \alpha_g g \in k[G] \mid \text{für jedes } i \text{ ist } \sum_{g'\in G'} \alpha_{g_i g'} = 0\right\}$$

(dies ist leicht zu zeigen). Also ist

$$\sum_{g'\in G'} k[G](g'-1) = \left\{\sum_{g\in G} \alpha_g g \in k[G] \mid \text{für jedes } i \text{ ist } \sum_{g'\in G'} \alpha_{g_i g'} = 0\right\}$$
$$= \mathrm{Ker}\left(\mathrm{kan} : k[G] \to k[G/G']\right).$$

---

[297] Der Coalgebrahomomorphismus $\mathrm{id} \otimes \varepsilon : k[G] \otimes k[G'] \to k[G]$ überführt $g \otimes g'$ nach g für alle $g \in G$ und $g' \in G'$.

[298] Wir haben hier verwendet, daß $\mathrm{Ker}\left(\varepsilon : k[G'] \to k\right) = \sum\limits_{g'\in G'} k(g'-1)$ ist. Dies ist eine bekannte Tatsache, aber der *Beweis* ist einfach: Daß $\mathrm{Ker}\left(\varepsilon : k[G'] \to k\right) \supseteq \sum\limits_{g'\in G'} k(g'-1)$ ist, ist klar. Um $\mathrm{Ker}\left(\varepsilon : k[G'] \to k\right) \subseteq \sum\limits_{g'\in G'} k(g'-1)$ zu zeigen, sei $\sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'} g' \in \mathrm{Ker}\left(\varepsilon : k[G'] \to k\right)$; dann ist $\sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'} = 0$ (denn $\sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'}$ ist das Bild von $\sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'} g'$ unter der Abbildung $\varepsilon : k[G'] \to k$) und damit $\sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'} g' = \sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'} g' - \sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'} = \sum\limits_{g'\in G'} \alpha_{g'}(g'-1) \in \sum\limits_{g'\in G'} k(g'-1)$. Damit ist $\mathrm{Ker}\left(\varepsilon : k[G'] \to k\right) \subseteq \sum\limits_{g'\in G'} k(g'-1)$ gezeigt. Somit ist $\mathrm{Ker}\left(\varepsilon : k[G'] \to k\right) = \sum\limits_{g'\in G'} k(g'-1)$ bewiesen.

Da $\sum\limits_{g' \in G'} k[G](g'-1) = (\mathrm{kan} - \mathrm{id} \otimes \varepsilon)(k[G] \otimes k[G'])$ ist (wie man leicht sieht), ist also

$$(\mathrm{kan} - \mathrm{id} \otimes \varepsilon)(k[G] \otimes k[G']) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{kan} : k[G] \to k[G \diagup G']\right).$$

Das heißt, die Sequenz

$$k[G] \otimes k[G'] \overset{\mathrm{mult}}{\underset{\mathrm{id} \otimes \varepsilon}{\Longrightarrow}} k[G] \xrightarrow{\quad \mathrm{kan} \quad} k[G/G'] \xrightarrow{\qquad} 0$$

ist exakt.

b) Die obige Sequenz ist (wie man leicht zeigt) nicht nur eine Sequenz von Coalgebren, sondern auch eine Sequenz von $k[G]$-Linksmoduln. Da sie exakt ist, induziert sie also einen kanonischen Isomorphismus $k[G] \diagup (\mathrm{Ker}(\mathrm{kan} : k[G] \to k[G \diagup G'])) \to k[G \diagup G']$ von $k[G]$-Linksmoduln. Wegen $\mathrm{Ker}(\mathrm{kan} : k[G] \to k[G \diagup G']) = \sum\limits_{g' \in G'} k[G](g'-1) = k[G](k[G'])^+$ ist dies also ein kanonischer Isomorphismus $k[G] \diagup \left(k[G](k[G'])^+\right) \to k[G \diagup G']$ von $k[G]$-Linksmoduln, was zu beweisen war.

2) Wir haben $k[G'] = k[G]^{\mathrm{Co}(k[G \diagup G'])}$, wobei $k[G]^{\mathrm{Co}(k[G \diagup G'])}$ durch

$$k[G]^{\mathrm{Co}(k[G \diagup G'])} = \left\{x \in k[G] \mid x_{(1)} \otimes \mathrm{kan}\left(x_{(2)}\right) = x \otimes 1 \text{ in } k[G] \otimes k[G \diagup G']\right\}$$

definiert ist. (Hier meinen wir mit 1 das Element $\mathrm{kan}\, 1 \in k[G \diagup G']$, wobei 1 das neutrale Element von G ist.)

Beweis: Für jedes $x = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g g \in k[G]$ gilt $x_{(1)} \otimes \mathrm{kan}\left(x_{(2)}\right) = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g g \otimes \overline{g}$ und $x \otimes 1 = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g g \otimes 1$. Also gilt $x_{(1)} \otimes \mathrm{kan}\left(x_{(2)}\right) = x \otimes 1$ genau dann, wenn $\alpha_g \overline{g} = \alpha_g \overline{1}$ für alle $g \in G$ ist, also wenn $x \in k[G']$ ist.

3) Die Abbildung

$$\begin{aligned} & k[G] \to k[G \diagup G'] \otimes k[G'], \\ & \quad g \mapsto \overline{g_i} \otimes g', \text{ wobei } i \in I \text{ und } g' \in G' \text{ so gewählt sind, daß } g = g_i g' \text{ gilt} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Coalgebren, und ferner $k[G']$-rechtslinear und $k[G \diagup G']$-linkscolinear[299].

Also ist $(g_i)_{i \in I}$ eine Basis von $k[G]$ als $k[G']$-Rechtsmodul.

Dies folgt direkt aus der Restklassenzerlegung von G modulo G' (man vergleiche mit dem Satz von Lagrange aus der Gruppentheorie).

4.2. Bemerkung: Seien $G' \subseteq G$ und $G \diagup G'$ wie in 4.1., und sei ferner die Gruppe G endlich. Betrachten wir $k[G]$ und $k[G']$ jetzt nicht mehr nur als Coalgebren, sondern als Hopfalgebren.

Sei $\pi : k^G \to k^{G'}$ die Restriktionsabbildung, die jedes Element von k^G (das ja eine Funktion von G nach k ist) auf G' einschränkt. Sei $\iota = \mathrm{kan}^* : k[G \diagup G']^* \to k[G]^*$, wobei $\mathrm{kan} : k[G] \to k[G \diagup G']$ wie in 4.1. definiert ist. Sei $i_1 : k^G \to k^G \otimes k^{G'}$ die lineare Abbildung, die $i_1(x) = x \otimes 1$ für jedes $x \in k^G$ erfüllt.

Durch Dualisieren der Sequenz

$$k[G] \otimes k[G'] \overset{\mathrm{mult}}{\underset{\mathrm{id} \otimes \varepsilon}{\Longrightarrow}} k[G] \xrightarrow{\quad \mathrm{kan} \quad} k[G/G'] \xrightarrow{\qquad} 0$$

[299] Dabei wird die $k[G \diagup G']$-Linkscomodulstruktur auf $k[G]$ definiert durch $\delta(g) = \overline{g} \otimes g$ für alle $g \in G$.

folgt die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} k\left[G/G'\right]^{*} & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & k\left[G\right]^{*} & \Longrightarrow & k\left[G\right]^{*}\otimes k\left[G'\right]^{*}, \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ k^{G/G'} & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & k^{G} & \underset{i_1}{\overset{(\mathrm{id}\otimes\pi)\Delta}{\Longrightarrow}} & k^{G}\otimes k^{G'} \end{array}$$

wobei $(\mathrm{id}\otimes\pi)\,\Delta\,(x) = x_{(1)}\otimes\pi\left(x_{(2)}\right)$ für alle $x\in k^G$ ist.

Also ist $\pi : k^G \to k^{G'}$ eine surjektive Abbildung von Hopfalgebren und $\left(k^G\right)^{\operatorname{Co} k^{G'}} = \operatorname{Im}\iota$.

Hierbei gilt: $\left(e_g\right)_{g\in G}$ ist eine k-Basis von $k^G \cong k\left[G\right]^*$, und zwar die duale Basis zur Basis $\left(g\right)_{g\in G}$ von $k\left[G\right]$. Das heißt, $e_g\left(h\right) = \delta_{g,h}$ für alle $g,h\in G$. Für jedes $g\in G$ ist $\Delta\left(e_g\right) = \sum\limits_{\substack{a,b\in G,\\ ab=g}} e_a\otimes e_b$.

Für jedes i ist $\iota\left(e_{\overline{g_i}}\right) = \sum\limits_{g'\in G'} e_{g_ig'}$. Sei nun $A = \operatorname{Im}\iota$. Bezeichne ferner die Hopfalgebra k^G als H. Dann ist $A\subseteq H$ eine Unteralgebra mit $\Delta\left(A\right)\subseteq H\otimes A$. Das heißt, A ist eine Linkscoidealunteralgebra von H. Genau dann ist $A\subseteq H$ eine Unterhopfalgebra, wenn $G'\lhd G$ ist.

Beweis: Da kan ein Coalgebrahomomorphismus ist, ist ι ein Algebrahomomorphismus (denn $\iota = \operatorname{kan}^*$). Also ist A eine Unteralgebra von H (da $A = \operatorname{Im}\iota$).

Für alle i definiere $a_i\in A$ als $a_i = \sum\limits_{g'\in G'} e_{g_ig'}$. Dann hat A die k-Basis $\left(a_i\right)_{i\in I}$. Für alle i ist

$$\begin{aligned}\Delta\left(a_i\right) &= \sum_{g'\in G'}\Delta\left(e_{g_ig'}\right) = \sum_{g'\in G'}\sum_{\substack{a,b\in G,\\ ab=g_ig'}} e_a\otimes e_b = \sum_{\substack{g'\in G',\\ a\in G}} e_a\otimes e_{a^{-1}g_ig'} \\ &= \sum_{a\in G} e_a\otimes\sum_{g'\in G'} e_{a^{-1}g_ig'}\in H\otimes A.\end{aligned}$$

Das heißt, $\Delta\left(A\right)\subseteq H\otimes A$. Andererseits gilt für alle i auch

$$\Delta\left(a_i\right) = \sum_{g'\in G'}\Delta\left(e_{g_ig'}\right) = \sum_{g'\in G'}\sum_{\substack{a,b\in G,\\ ab=g_ig'}} e_a\otimes e_b = \sum_{\substack{g'\in G',\\ b\in G}} e_{g_ig'b^{-1}}\otimes e_b.$$

Somit gilt $\Delta\left(a_i\right)\in A\otimes H$ für alle i genau dann, wenn $G'\lhd G$ ist.

Nun haben wir folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}&\left(A\subseteq H \text{ ist eine Unterhopfalgebra}\right)\\ \Longleftrightarrow\ &\left(A\subseteq H \text{ ist eine Unterbialgebra}\right) &&\left(\text{nach Satz } 2.21\tfrac{16}{20}. \text{ und Folgerung } 2.14\tfrac{1}{4}\right)\\ \Longleftrightarrow\ &\left(\Delta\left(A\right)\subseteq A\otimes A\right) &&\left(\text{denn } A \text{ ist eine Unteralgebra von } H\right)\\ \Longleftrightarrow\ &\left(\Delta\left(A\right)\subseteq A\otimes H\right) &&\left(\text{denn } \Delta\left(A\right)\subseteq H\otimes A\right)\\ \Longleftrightarrow\ &\left(\Delta\left(a_i\right)\in A\otimes H \text{ für alle } i\right)\\ \Longleftrightarrow\ &\left(G'\lhd G\right) &&\left(\text{wie oben gezeigt}\right).\end{aligned}$$

Soweit zum Fall, daß H die Gruppenalgebra einer Gruppe ist. Dieses ist einer der einfachsten Fälle (Gruppenalgebren sind eine der einfachsten Klassen von Hopfalgebren). Jetzt kommen wir zurück zum allgemeinen Fall einer beliebigen Hopfalgebra.

Linkscoidealunteralgebren vs. Coideale-und-Rechtsideale

4.3. Bemerkung: Sei H eine Hopfalgebra.

1) Definiere eine Menge $\operatorname{LCISA} H$ durch

$$\operatorname{LCISA} H = \{K \subseteq H \mid K \text{ ist eine Linkscoidealunteralgebra}\}.$$

Definiere eine Menge $\operatorname{CRI} H$ durch

$$\operatorname{CRI} H = \{I \subseteq H \mid I \text{ ist ein Coideal und ein Rechtsideal von } H\}.$$

Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \operatorname{LCISA} H &\to \operatorname{CRI} H, \\ K &\mapsto K^{+}H \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{CRI} H &\to \operatorname{LCISA} H, \\ I &\mapsto H^{\operatorname{Co}(H/I)} \end{aligned}$$

wohldefiniert, wobei $K^{+} = \operatorname{Ker}(\varepsilon\mid_K) = \operatorname{Ker}\varepsilon \cap K$ und $H^{\operatorname{Co}(H/I)} = \left\{x \in H \mid x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} = x \otimes \overline{1} \text{ in } H \otimes H/I\right\}$ (dies ist eine gewisse Erweiterung unseres Begriffes von $V^{\operatorname{Co} H}$).

2) Diese beiden Abbildungen induzieren Bijektionen auf den Teilmengen, für die H als K-Linksmodul treuflach ist, und H links treucoflach über H/I ist. Wir werden dies hier nicht beweisen, und nicht einmal definieren, was "treuflach" und "treucoflach" bedeuten, aber wir werden etwas schwächeres beweisen:

3) Sei $K \subseteq H$ eine Linkscoidealunteralgebra. Sei $I = K^{+}H$. Dann ist $K \subseteq H^{\operatorname{Co}(H/I)}$.

*Beweis von **1)**:* **a)** Sei $K \subseteq H$ eine Linkscoidealunteralgebra. Zeige: $K^{+}H \subseteq H$ ist ein Coideal und ein Rechtsideal.

Beweis: Für jedes $x \in K^{+}$ ist $\Delta(x) \in x \otimes 1 + H \otimes K^{+}$ (denn da $K \subseteq H$ eine Linkscoidealunteralgebra ist, gilt $\Delta(K) \subseteq H \otimes K$; somit ist $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ mit $x_{(2)} \in K$, und daher

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot 1 + x_{(1)} \otimes \left(x_{(2)} - \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot 1\right) \\ &= \underbrace{x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x} \otimes 1 + x_{(1)} \otimes \underbrace{\left(x_{(2)} - \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot 1\right)}_{\substack{\in \operatorname{Ker}\varepsilon \text{ und } \in K, \\ \text{also } \in \operatorname{Ker}\varepsilon \cap K = K^{+}}} \in x \otimes 1 + H \otimes K^{+} \end{aligned}$$

). Somit ist $\Delta(K^{+}H) \subseteq K^{+}H \otimes H + H \otimes K^{+}H$ (und natürlich $\varepsilon(K^{+}H) = 0$), weshalb $K^{+}H$ ein Coideal ist. Daß $K^{+}H$ ein Rechtsideal ist, ist sowieso klar.

b) Sei $I \subseteq H$ ein Coideal und ein Rechtsideal. Sei $K = H^{\operatorname{Co}(H/I)}$. Zeige: $K \subseteq H$ ist eine Linkscoidealunteralgebra.

Beweis: **ba)** Zeige: $\Delta(K) \subseteq H \otimes K$.

Beweis: Sei $x \in K$. Dann ist $x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} = x \otimes \overline{1}$ in $H \otimes H \diagup I$, wobei $\overline{y}$ das kanonische Bild von y in $H \diagup I$ bezeichnet (für jedes $y \in H$).

Anwendung von $\Delta \otimes \mathrm{id}$ auf $x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} = x \otimes \overline{1}$ ergibt $x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes \overline{x_{(3)}} = x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes \overline{1}$ in $H \otimes H \otimes H \diagup I$, also $x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \varphi)$, wobei $\varphi : H \to H \otimes H \diagup I$ die durch

$$\varphi(y) = y_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} - y \otimes \overline{1} \qquad \text{für alle } y \in H$$

definierte lineare Abbildung ist. Doch $\operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \varphi) = H \otimes \underbrace{\operatorname{Ker} \varphi}_{=K} = H \otimes K$. Also ist $x_{(1)} \otimes x_{(2)} \in H \otimes K$, und somit ist $\Delta(K) \subseteq H \otimes K$.

(Alternativer Beweis: $K = \operatorname{Ker} \varphi$, und φ ist H-linkscolinear.)

bb) Zeige: $K \subseteq H$ ist eine Unteralgebra.

Beweis: Seien $x, y \in K$. Dann ist auch $xy \in K$, denn

$$\begin{aligned}
(xy)_{(1)} \otimes \overline{(xy)_{(2)}} &= x_{(1)} y_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)} y_{(2)}} = x_{(1)} y_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} y_{(2)} \\
&\qquad \text{(denn da } I \text{ ein Rechtsideal ist, ist } H \diagup I \text{ kanonisch ein } H\text{-Rechtsmodul)} \\
&= \underbrace{\left(x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}}\right)}_{= x \otimes \overline{1} \text{ (denn } x \in K)} \left(y_{(1)} \otimes y_{(2)}\right) = \left(x \otimes \overline{1}\right) \left(y_{(1)} \otimes y_{(2)}\right) = xy_{(1)} \otimes \overline{1} y_{(2)} \\
&= xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} = \left(x \otimes \overline{1}\right) \underbrace{\left(y_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}}\right)}_{= y \otimes \overline{1} \text{ (da } y \in K)} = \left(x \otimes \overline{1}\right) \left(y \otimes \overline{1}\right) = xy \otimes \overline{1}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit $1 \in K$ ergibt dies, daß $K \subseteq H$ eine Unteralgebra ist.

c) Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\operatorname{LCISA} H &\to \operatorname{CRI} H, \\
K &\mapsto K^+ H
\end{aligned}$$

ist wohldefiniert (denn laut **a)** (und gemäß den Definitionen von $\operatorname{CRI} H$ und $\operatorname{LCISA} H$) ist $K^+ H \in \operatorname{CRI} H$ für jedes $K \in \operatorname{LCISA} H$). Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\operatorname{CRI} H &\to \operatorname{LCISA} H, \\
I &\mapsto H^{\operatorname{Co}(H \diagup I)}
\end{aligned}$$

ist wohldefiniert (denn laut **b)** (und gemäß den Definitionen von $\operatorname{CRI} H$ und $\operatorname{LCISA} H$) ist $H^{\operatorname{Co}(H \diagup I)} \in \operatorname{LCISA} H$ für jedes $I \in \operatorname{CRI} H$)

Beweis von ***2)****:* Siehe Seminar.

Beweis von ***3)****:* Für alle $y \in K$ ist $\overline{y} = \varepsilon(y) \cdot \overline{1}$ in $H \diagup I$ (weil $y - \varepsilon(y) \cdot 1 \in K^+ \subseteq K^+ H = I$).

Sei $x \in K$. Dann ist $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \Delta(x) \in \Delta(K) \subseteq H \otimes K$ (denn K ist eine Linkscoidealunteralgebra), und somit können wir o. B. d. A. annehmen, daß $x_{(2)} \in K$

ist[300]. Somit gilt

$$\begin{aligned}
x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} &= x_{(1)} \otimes \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot \overline{1} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn für alle } y \in K \text{ ist } \overline{y} = \varepsilon\left(y\right) \cdot \overline{1} \text{ in } H \diagup I, \\ \text{und wegen } x_{(2)} \in K \text{ ergibt dies } \overline{x_{(2)}} = \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \cdot \overline{1} \end{array}\right) \\
&= \underbrace{x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x} \otimes \overline{1} = x \otimes \overline{1} \qquad \text{in } H \otimes H \diagup I,
\end{aligned}$$

also $x \in H^{\mathrm{Co}(H \diagup I)}$.

Damit ist gezeigt: Für jedes $x \in K$ ist $x \in H^{\mathrm{Co}(H \diagup I)}$. Also gilt $K \subseteq H^{\mathrm{Co}(H \diagup I)}$, was zu beweisen war.

Hilfsmittel aus der Algebra

Wir werden uns jetzt auf den Beweis des Satzes von Skryabin vorbereiten, indem wir einige algebraische Resultate rekapitulieren.

Definition: Ein Ring A heißt *linkshalbeinfach*, wenn für jeden A-Linksmodul $X \in {}_A\mathcal{M}$ und jeden Untermodul $Y \subseteq X$ gilt: Y ist ein direkter Summand von X. Analog definiert man *rechtshalbeinfache* Ringe, indem man Linksmoduln durch Rechtsmoduln ersetzt.

4.4. Bemerkung: Sei A ein Ring.

1) Folgende fünf Aussagen sind zueinander äquivalent:

a) Der Ring A ist linkshalbeinfach.

b) Der Ring A ist rechtshalbeinfach.

c) Der Modul ${}_AA$ ist artinsch, und $\mathrm{Ra}\, A = 0$.

d) Der Modul A_A ist artinsch, und $\mathrm{Ra}\, A = 0$.

e) Es gibt ein $t \geq 1$ und Schiefkörper $D_1, D_2, ..., D_t$ sowie ganze Zahlen $n_1, n_2, ..., n_t \geq 1$, für die gilt: $A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t)$.

Wenn diese fünf äquivalenten Aussagen gelten, nennt man den Ring A auch einfach *halbeinfach*.

Beweis: Standard (evtl. später).

2) Der Ring A heißt *semilokal*, wenn $A \diagup \mathrm{Ra}\, A$ halbeinfach ist, also $A \diagup \mathrm{Ra}\, A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t)$ nach **1)**.

Satz: Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Dann ist A linksartinsch und rechtsartinsch, und $\mathrm{Ra}\, A$ ist nilpotent. Die Algebra $A \diagup \mathrm{Ra}\, A$ ist halbeinfach, da artinsch und $\mathrm{Ra}\left(A \diagup \mathrm{Ra}\, A\right) = 0$. Nach Wedderburn-Artin gibt es also ein $t \geq 1$ und Schiefkörper D_1, D_2, ..., D_t sowie ganze Zahlen $n_1, n_2, ..., n_t \geq 1$, für die gilt: $A \diagup \mathrm{Ra}\, A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t)$, wobei D_1, D_2, ..., D_t außerdem noch endlichdimensionale k-Algebren sind.

Sei $\mathrm{Max}\, A = \{P \subseteq A \mid P \text{ ist ein maximales Ideal}\}$ (wobei wir unter *Idealen* zweiseitige Ideale verstehen). Dann ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Max}\left(A \diagup \mathrm{Ra}\, A\right) = \mathrm{Max}\left(\mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t)\right) \\
&= \left\{0 \times A_2 \times ... \times A_t, A_1 \times 0 \times A_3 \times ... \times A_t, ..., A_1 \times A_2 \times ... \times A_{t-1} \times 0\right\},
\end{aligned}$$

[300] Diese Aussage ist formal gesehen Humbug, denn ein allein stehendes $x_{(2)}$ (ohne ein $x_{(1)}$ im selben Term) ist sinnlos. Doch was wir eigentlich mit der Aussage "wir können o. B. d. A. annehmen, daß $x_{(2)} \in K$ ist" meinen, ist folgendes: Wir können den Tensor $\Delta(x)$ als eine Linearkombination $\sum\limits_{i=1}^{u} \alpha_i x_{1i} \otimes x_{2i}$ von reinen Tensoren $x_{1i} \otimes x_{2i}$ schreiben, die $x_{2i} \in K$ für alle $i \in \{1, 2, ..., u\}$ erfüllen.

wobei $A_i = \mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ für alle $i \in \{1,2,...,t\}$ sein soll. Somit ist $\operatorname{Max} A$ eine endliche Menge mit t Elementen (denn $\operatorname{Max}(A\diagup \operatorname{Ra} A)$ ist kanonisch isomorph zu $\operatorname{Max} A$). Für jedes $P \in \operatorname{Max} A$ ist $A\diagup P \cong \mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ für ein $i \in \{1,2,...,t\}$. Also gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen endlichdimensionalen einfachen $A\diagup P$-Linksmodul $U \in {}_{A\diagup P}\mathcal{M}$ (nämlich $D_i^{n_i}$ als Spaltenraum), und dieser $A\diagup P$-Linksmodul U erfüllt folgende Eigenschaft: Für jeden endlich erzeugten $A\diagup P$-Linksmodul $M \in {}_{A\diagup P}\mathcal{M}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M \cong U^n$.

Definition: Dieses n heißt *Länge* von M und wird mit $\ell_{A\diagup P}(M)$ bezeichnet.

Für je zwei endlich erzeugte $A\diagup P$-Linksmoduln $M, N \in {}_{A\diagup P}\mathcal{M}$ gilt also: Genau dann ist $M \cong N$, wenn $\ell_{A\diagup P}(M) = \ell_{A\diagup P}(N)$ ist. Genau dann gibt es einen Epimorphismus $M \to N$, wenn $\ell_{A\diagup P}(M) \geq \ell_{A\diagup P}(N)$ ist.

Definition: Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Sei $M \in {}_A\mathcal{M}$ ein endlich erzeugter A-Linksmodul.

Für jedes $P \in \operatorname{Max} A$ definiere den sogenannten *P-Rang* $r_P(M) \in \mathbb{Q}$ von M durch $r_P(M) = \dfrac{\ell_{A\diagup P}(M\diagup MP)}{\ell_{A\diagup P}(A\diagup P)}$.

Alles Obige läßt sich ebenso für Rechtsmoduln statt Linksmoduln ausführen.

4.5. Lemma: Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Sei $V \in \mathcal{M}_A$ ein endlich erzeugter A-Rechtsmodul mit $V \neq 0$.

1) Sei $P \in \operatorname{Max} A$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $r_P(V) = n$, wenn $V\diagup VP \cong (A\diagup P)^n$ (der freie $(A\diagup P)$-Rechtsmodul mit Rang n) ist.

2) Sei $P \in \operatorname{Max} A$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen,

a) es gelte $r_P(V) = n$, und

b) es gelte $r_P(V) \geq r_Q(V)$ für alle $Q \in \operatorname{Max} A$.

Dann gibt es Elemente $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, welche V als A-Rechtsmodul erzeugen, und für die $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ eine Basis des $A\diagup P$-Rechtsmoduls $V\diagup VP$ ist.

Beweis: **1)** $\Longrightarrow$: Nach Voraussetzung ist $n = r_P(V) = \dfrac{\ell_{A\diagup P}(V\diagup VP)}{\ell_{A\diagup P}(A\diagup P)}$, also $\ell_{A\diagup P}(V\diagup VP) = n\ell_{A\diagup P}(A\diagup P) = \ell_{A\diagup P}((A\diagup P)^n)$, also $V\diagup VP \cong (A\diagup P)^n$.

$\Longleftarrow$: Wenn $V\diagup VP \cong (A\diagup P)^n$, dann ist

$$r_P(V) = \frac{\ell_{A\diagup P}(V\diagup VP)}{\ell_{A\diagup P}(A\diagup P)} = \frac{\ell_{A\diagup P}((A\diagup P)^n)}{\ell_{A\diagup P}(A\diagup P)} = \frac{n\ell_{A\diagup P}(A\diagup P)}{\ell_{A\diagup P}(A\diagup P)} = n.$$

2) Für alle $Q \in \operatorname{Max} A$ ist $n = r_P(V) \geq r_Q(V) = \dfrac{\ell_{A\diagup Q}(V\diagup VQ)}{\ell_{A\diagup Q}(A\diagup Q)}$, also $n\ell_{A\diagup Q}(A\diagup Q) \geq \ell_{A\diagup Q}(V\diagup VQ)$. Wegen $n\ell_{A\diagup Q}(A\diagup Q) = \ell_{A\diagup Q}((A\diagup Q)^n)$ heißt dies $\ell_{A\diagup Q}((A\diagup Q)^n) \geq \ell_{A\diagup Q}(V\diagup VQ)$. Für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ gibt es also einen $A\diagup Q$-Epimorphismus $f_Q : (A\diagup Q)^n \to V\diagup VQ$, wobei $f_P : (A\diagup P)^n \to V\diagup VP$ ein Isomorphismus ist.

Daher gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V/V\operatorname{Ra} A \arrow[r, "\cong"] & \prod\limits_{Q\in\operatorname{Max} A} V/VQ \arrow[r, "\operatorname{Pr}_Q"] & V/VQ \\
(A/\operatorname{Ra} A)^n \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\cong"] & \prod\limits_{Q\in\operatorname{Max} A} (A/Q)^n \arrow[u, "\prod\limits_{Q\in\operatorname{Max} A} f_Q"] \arrow[r, "\operatorname{Pr}_Q"] & (A/Q)^n \arrow[u, "f_Q"']
\end{tikzcd},$$

wobei der Isomorphismus $V \diagup V \operatorname{Ra} A \to \prod\limits_{Q \in \operatorname{Max} A} V \diagup VQ$ definiert ist durch $\overline{v} \mapsto (\pi_Q(\overline{v}))_{Q \in \operatorname{Max} A}$, wobei

$$\pi_Q : V \diagup V \operatorname{Ra} A \to V \diagup VQ, \qquad \overline{v} \mapsto \pi_Q(v) = \text{Restklasse von } v \text{ in } V \diagup VQ$$

die kanonischen Epimorphismen sind, und ferner $A \diagup \operatorname{Ra} A \to \prod\limits_{Q \in \operatorname{Max} A} A \diagup Q$ der Isomorphismus aus Bemerkung 4.6. (unten) ist. Hierbei ist die Abbildung $f : (A \diagup \operatorname{Ra} A)^n \to V \diagup V \operatorname{Ra} A$ durch dieses Diagramm definiert; dieses f ist ein A-Rechtsmodulepimorphismus (da f_Q ein Epimorphismus für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ ist).

Sei $e_1, e_2, ..., e_n$ die Standardbasis von $(A \diagup \operatorname{Ra} A)^n$. Da f ein Epimorphismus ist, gibt es also $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ so, daß $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ ein Erzeugendensystem vom A-Rechtsmodul $V \diagup V \operatorname{Ra} A$ ist. Hieraus folgt (gemäß Folgerung 6.9 von Kapitel I, angewandt auf A statt R), daß $v_1, v_2, ..., v_n$ ein Erzeugendensystem des A-Rechtsmoduls V ist.

Außerdem folgt, daß $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ eine Basis des $A \diagup P$-Rechtsmoduls $V \diagup VP$ ist, denn:

Die untere Zeile

$$(A/\operatorname{Ra} A)^n \xrightarrow{\quad\cong\quad} \left(\prod_{Q \in \operatorname{Max} A} A/Q\right)^n \cong \prod_{Q \in \operatorname{Max} A} (A/Q)^n \xrightarrow{\quad \operatorname{Pr}_Q \quad} (A/Q)^n$$

des obigen kommutativen Diagramms überführt ein $(\overline{a_i})_{1 \leq i \leq n} \in (A \diagup \operatorname{Ra} A)^n$ zuerst in $\left((\pi_Q(\overline{a_i}))_{1 \leq i \leq n}\right)_{Q \in \operatorname{Max} A} \in \prod\limits_{Q \in \operatorname{Max} A} (A \diagup Q)^n$ und danach in $(\pi_Q(\overline{a_i}))_{1 \leq i \leq n}$; daher wird eine Standardbasis stets auf eine Standardbasis abgebildet, und wegen der Kommutativität des Diagramms (und da f_P ein Isomorphismus ist) folgt somit, daß $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ eine Basis des $A \diagup P$-Rechtsmoduls $V \diagup VP$ ist.

4.6. Bemerkung: Wir haben in 4.5. folgende Resultate verwendet:

1) Sei A eine endlichdimensionale Algebra, und sei $\{P_1, P_2, ..., P_t\} = \operatorname{Max} A$, wobei $P_i \neq P_j$ für alle $i \neq j$ ist. Dann sind P_i und P_j relativ prim für alle $i \neq j$ (das heißt, $P_i + P_j = A$), und $\bigcap\limits_{i=1}^{t} P_i = \operatorname{Ra} A$.

Beweis: Daß P_i und P_j relativ prim für alle $i \neq j$ sind, ist klar.

Die Beziehung $\bigcap\limits_{i=1}^{t} P_i = \operatorname{Ra} A$ folgt aus $A \diagup \operatorname{Ra} A \cong \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times ... \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t)$ in 4.4.

2) Allgemein gilt:

Chinesischer Restsatz für Moduln: Ist A ein Ring, ist $M \in \mathcal{M}_A$, und sind I_1, I_2, ..., I_t paarweise relativ prime Ideale in A (das heißt, I_1, I_2, ..., I_t sind Ideale von A, die $I_i + I_j = A$ für alle $i \neq j$ erfüllen), dann ist die Abbildung

$$M \diagup M \bigcap_{i=1}^{t} I_i \to \prod_{i=1}^{t} M \diagup M I_i, \qquad m \mapsto (\overline{m})_{1 \leq i \leq t}$$

ein A-Rechtsmodulisomorphismus.

Beweis: Nach Algebra I ist die Abbildung

$$A \to \prod_{i=1}^{t} A/I_i, \qquad a \mapsto (\overline{a})_{1 \le i \le t}$$

surjektiv. Ebenso ist die Abbildung

$$M \to \prod_{i=1}^{t} M/MI_i, \qquad m \mapsto (\overline{m})_{1 \le i \le t}$$

surjektiv. Ihr Kern ist offensichtlich

$$\operatorname{Ker}\left(M \to \prod_{i=1}^{t} M/MI_i, \qquad m \mapsto (\overline{m})_{1 \le i \le t}\right) = \bigcap_{i=1}^{t} MI_i.$$

Wir müssen also nur noch nachweisen, daß

$$\bigcap_{i=1}^{t} MI_i = M \bigcap_{i=1}^{t} I_i$$

ist.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $t = 2$. In diesem Fall ist $I_1 + I_2 = A$, und zu zeigen ist $MI_1 \cap MI_2 = M(I_1 \cap I_2)$.

Beweis: Seien $a \in I_1$ und $b \in I_2$ mit $a + b = 1$ (solche a und b existieren, da $I_1 + I_2 = A$). Für jedes $x \in MI_1 \cap MI_2$ ist dann

$$\begin{aligned} x = x(a+b) &= \underbrace{x}_{\substack{\in MI_1 \cap MI_2 \\ \subseteq MI_2}} \underbrace{a}_{\in I_1} + \underbrace{x}_{\substack{\in MI_1 \cap MI_2 \\ \subseteq MI_1}} \underbrace{b}_{\in I_2} \\ &\in M \underbrace{I_2 I_1}_{\subseteq I_1 \cap I_2} + M \underbrace{I_1 I_2}_{\subseteq I_1 \cap I_2} \subseteq M(I_1 \cap I_2) + M(I_1 \cap I_2) = M(I_1 \cap I_2). \end{aligned}$$

Daher ist $MI_1 \cap MI_2 \subseteq M(I_1 \cap I_2)$. Trivialerweise ist $MI_1 \cap MI_2 \supseteq M(I_1 \cap I_2)$. Damit ist $MI_1 \cap MI_2 = M(I_1 \cap I_2)$ gezeigt.

Jetzt beweisen wir die Aussage $\bigcap_{i=1}^{t} MI_i = M \bigcap_{i=1}^{t} I_i$ für beliebige t durch Induktion nach t. Den Fall $t = 2$ haben wir schon erledigt. Nun der *Induktionsschritt von t auf $t+1$:* Wir haben

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{t+1} MI_i = \bigcap_{i=1}^{t} MI_i \cap MI_{t+1} &= M \bigcap_{i=1}^{t} I_i \cap MI_{t+1} \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= M\left(\bigcap_{i=1}^{t} I_i \cap I_{t+1}\right) \qquad \left(\text{nach dem Fall } t = 2, \text{ da } \bigcap_{i=1}^{t} I_i \text{ und } I_{t+1} \text{ relativ prim sind}\right). \end{aligned}$$

3) Die Aussagen über Isomorphismen im Beweis von 4.5. folgen aus **1)** und **2)**.

Costabile Ideale und Rechtscomodulunteralgebren

Definition: 1) Sei H eine Hopfalgebra, und sei A eine H-Rechtscomodulalgebra vermöge einer Abbildung $\delta : A \to A \otimes H$. Ein Ideal J von A heiße H*-costabil*, wenn es ein H-Untercomodul von A ist (d. h. wenn $\delta(J) \subseteq J \otimes H$ ist).

Für jedes Ideal $J \lhd A$ bezeichne $I^H(J)$ das größte in J enthaltene Ideal von A, das ein H-Untercomodul von A (das heißt, H-costabil) ist. Mit anderen Worten: $I^H(J)$ ist die Summe aller $I \lhd A$, die $\delta(I) \subseteq I \otimes H$ und $I \subseteq J$ erfüllen.

Die H-Rechtscomodulalgebra A heißt H*-einfach*, wenn für jedes H-costabile Ideal $J \lhd A$ mit $J \neq A$ gilt: $J = 0$. Mit anderen Worten: Die H-Rechtscomodulalgebra A heißt H*-einfach*, wenn für jedes Ideal $J \lhd A$, das ein H-Untercomodul von A ist und $J \neq A$ erfüllt, gilt: $J = 0$.

2) Sei H eine Hopfalgebra (wie immer mit Comultiplikation Δ), und sei $A \subseteq H$ eine Unteralgebra. Wenn $\Delta(A) \subseteq A \otimes H$ ist, dann wird A kanonisch zu einer H-Rechtscomodulalgebra vermöge der Abbildung $\Delta\mid_A : A \to A \otimes H$. In diesem Fall sagt man, A sei eine H*-Rechtscomodulunteralgebra* von H.

4.7. Lemma: Sei H eine Hopfalgebra, und sei A eine H-Rechtscomodulunteralgebra von H (also eine Unteralgebra von H mit $\Delta(A) \subseteq A \otimes H$). Sei $A^+ = \operatorname{Ker}(\varepsilon_H \mid_A)$. Dann ist $A^+ \in \operatorname{Max} A$ und $I^H(A^+) = 0$.

Beweis: Daß $A^+ \in \operatorname{Max} A$ ist, ist trivial[301]. Wir wollen jetzt zeigen, daß $I^H(A^+) = 0$ ist.

Sei $J \lhd A$ ein H-costabiles Ideal mit $J \subseteq A^+$. Wir müssen dann beweisen, daß $J = 0$ ist.

In der Tat ist JH ein Unter-H-Hopfmodul von H (das heißt, $JH \in \mathcal{M}_H^H$ mit der H-Rechtsmodulstruktur $JH \otimes H \to JH$, $j \otimes h \mapsto jh$, und der H-Rechtscomodulstruktur $\Delta_H \mid_{JH}$). Doch die einzigen Unter-H-Hopfmoduln von H sind 0 und H (nach der Kategorienäquivalenz aus Satz 1.1, welche k auf H abbildet, denn die einzigen Untervektorräume von k sind 0 und k). Also ist $JH = 0$ oder $JH = H$. Doch wegen $\varepsilon(JH) = 0$ (da $J \subseteq A^+ \subseteq H^+$) ist $JH \neq H$. Also ist $JH = 0$ und damit $J = 0$.

Wir wiederholen nun eine Definition, die wir schon am Anfang von Kapitel III.1 gegeben haben, allerdings mit anderen Bezeichnungen:

Definition: Sei H eine Hopfalgebra, und A eine H-Rechtscomodulalgebra mit der H-Rechtscomodulstruktur $\delta : A \to A \otimes H$. Unter einem (A, H)*-Hopfmodul* verstehen wir dann einen Vektorraum V mit einer A-Rechtsmodulstruktur und einer H-Rechtscomodulstruktur $\rho : V \to V \otimes H$, die eine der folgenden zwei äquivalenten Bedingungen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ erfüllen:

Bedingung $\mathcal{C}_1$*:* Die Abbildung ρ ist A-rechtslinear, wobei die A-Rechtsmodulstruktur auf dem Tensorprodukt $V \otimes H$ dadurch definiert wird, daß $V \otimes H$ als $A \otimes H$-Rechtsmodul aufgefasst wird (weil V ein A-Rechtsmodul ist), und aus dieser $A \otimes H$-Rechtsmodulstruktur eine A-Rechtsmodulstruktur gewonnen wird (durch die Algebraabbildung $\delta : A \to A \otimes H$, $a \mapsto a_{(0)} \otimes a_{(1)}$).

Bedingung $\mathcal{C}_2$*:* Für alle $v \in V$ und $a \in A$ gilt $\rho(va) = v_{(0)}a_{(0)} \otimes v_{(1)}a_{(1)}$, wobei wir wie üblich die Sweedler-Notation $v_{(0)} \otimes v_{(1)} = \rho(v)$ und $a_{(0)} \otimes a_{(1)} = \delta(a)$ verwenden. (Mit anderen Worten: Für alle $v \in V$ und $a \in A$ gilt $\rho(va) = \rho(v)\,\delta(a)$, wobei man $(v \otimes g)(a \otimes h) = va \otimes gh$ für alle $v \in V$, $a \in A$ und $g, h \in H$ setzt.)

Unter einem Homomorphismus zwischen zwei (A, H)-Hopfmoduln verstehen wir

[301] Denn die lineare Abbildung $\varepsilon_H \mid_A : A \to k$ ist nicht identisch 0 (da $(\varepsilon_H \mid_A)(1) = 1 \neq 0$), und somit ist $A \diagup A^+ = A \diagup \operatorname{Ker}(\varepsilon_H \mid_A) \cong k$ ein Körper.

einen Vektorraumhomomorphismus, der sowohl A-rechtslinear, als auch H-rechtscolinear ist.

Die Kategorie aller (A, H)-Hopfmoduln wird mit $\mathcal{M}_A^H$ bezeichnet.

4.8. Bemerkung: 1) Sei $V \in \mathcal{M}_A^H$, und sei $X \subseteq V$ ein H-Rechtsuntercomodul von V. Dann ist $XA \subseteq V$ ein Unter-(A, H)-Hopfmodul von V.

Beweis: Sei $\rho : V \to V \otimes H$ die H-Comodulstruktur auf V. Für alle $x \in X$ und $a \in A$ ist dann

$$\rho(xa) = x_{(0)}a_{(0)} \otimes x_{(1)}a_{(1)} \in XA \otimes H$$

(denn $x \in X$ impliziert $x_{(0)} \in X$, da $\rho(X) \subseteq X \otimes H$ ist, weil $X \subseteq V$ ein H-Rechtsuntercomodul von V ist). Somit ist XA ein H-Rechtsuntercomodul von V. Daß XA ein A-Rechtsuntermodul von V ist, ist klar. Somit ist XA ein Unter-(A, H)-Hopfmodul von V.

2) Sei $V \in \mathcal{M}_A^H$, sei $\rho : V \to V \otimes H$ die H-Comodulstruktur auf V. Sei $(v_i)_{i \in I}$ ein A-Modulerzeugendensystem von V. Dann ist $(\rho(v_i))_{i \in I}$ ein $A \otimes H$-Modulerzeugendensystem von $V \otimes H$.

Beweis: Für jedes $v \in V$ ist

$$\rho\left(v_{(0)}\right)\left(\underbrace{1 \otimes S\left(v_{(1)}\right)}_{\in A \otimes H}\right) = v_{(0)} \otimes \underbrace{v_{(1)}S\left(v_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(v_{(1)}\right)\cdot 1} = v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right) \otimes 1 = v \otimes 1.$$

Also bilden die Elemente $(\rho(v))_{v \in V}$ ein $A \otimes H$-Erzeugendensystem von $V \otimes H$.

Außerdem gibt es für jedes $v \in V$ eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in A$ für jedes $i \in I$ und $a_i \neq 0$ nur für endlich viele i, die $v = \sum_i v_i a_i$ erfüllt, und hieraus folgt $\rho(v) = \sum_i \rho(v_i a_i) = \sum_i \rho(v_i)\delta(a_i)$. Hieraus folgt die Behauptung.

3) Sei H eine Hopfalgebra, und sei $A \subseteq H$ eine Rechtscoidealunteralgebra. Dann ist A insbesondere eine H-Rechtscomodulalgebra. Damit ist der Begriff eines (A, H)-Hopfmoduls und die Kategorie $\mathcal{M}_A^H$ definiert.

4) Sei H eine Hopfalgebra, und sei A eine Rechtscomodulalgebra mit H-Rechtscomodulstruktur $\delta : A \to A \otimes H$. Sei I ein H-costabiles Ideal von A. Dann ist I ein (A, H)-Hopfmodul mit der Abbildung $\mu_A \mid_{I \otimes A}$ als A-Rechtsmodulstruktur und der Abbildung $\delta \mid_I^{I \otimes H}$ als H-Rechtscomodulstruktur[302].

Definition: Sei R ein Ring. Der Ring R heißt *schwach endlich*[303], wenn für jedes natürliche $n \geq 1$ jeder R-Modulepimorphismus $f : R^n \to R^n$ auch ein Isomorphismus ist. Mit anderen Worten: Der Ring R heißt *schwach endlich*, wenn für jedes natürliche $n \geq 1$ jedes n-elementige R-Modulerzeugendensystem von R^n eine Basis von R^n ist.

4.9. Bemerkung: a) Sei R eine endlichdimensionale Algebra über einem Körper k. Dann ist R schwach endlich. (Dies ist klar.)

b) Sei R ein rechtsnoetherscher Ring. Dann ist R schwach endlich. (Siehe Algebra II für den Beweis.)

c) Sei R eine schwach endliche Algebra über einem Körper k, und E eine endlichdimensionale Algebra über dem gleichen Körper k. Dann ist auch $R \otimes E$ schwach endlich.

[302] Dabei verstehen wir unter $\delta \mid_I^{I \otimes H}$ die Abbildung von I nach $I \otimes H$, welche aus der Abbildung $\delta : A \to A \otimes H$ durch Einschränkung auf I hervorgeht. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\delta(I) \subseteq I \otimes H$ ist (weil I ein H-costabiles Ideal ist).

[303] Der englische Begriff hierfür ist "*weakly finite*".

d) Sei R ein kommutativer Ring. Dann ist R schwach endlich. (Dies ist ein recht bekannter Satz aus der kommutativen Algebra.)

4.10. Lemma: Sei H eine schwach endliche Hopfalgebra (d. h. eine Hopfalgebra, die als Ring schwach endlich ist).

Sei A eine endlichdimensionale H-Rechtscomodulalgebra[304]. Sei $P \lhd A$ mit $I^H(P) = 0$. Sei $V \in \mathcal{M}_A^H$, sei $n \geq 0$, und seien $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ Elemente von V, die V als A-Rechtsmodul erzeugen. Angenommen, $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ sei eine Basis des $A \diagup P$-Rechtsmoduls $V \diagup VP$ (wobei $\overline{v_i}$ die Restklasse von v_i modulo dem Ideal VP bezeichnet). Dann ist $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis des A-Rechtsmoduls V.

Beweis: Wir müssen nur beweisen, daß $v_1, v_2, ..., v_n$ linear unabhängig sind.

Seien $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i a_i = 0$. Wir müssen dann zeigen, daß $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ist.

Beweis: Wir nehmen o. B. d. A. an, daß $n \geq 1$ ist (denn sonst ist die Behauptung klar).

Sei $K = \delta^{-1}(P \otimes H)$, wobei $\delta : A \to A \otimes H$ die H-Rechtscomodulstruktur auf A ist. Dann ist $K \lhd A$ (denn δ ist ein Algebrahomomorphismus, während $P \otimes H$ ein Ideal der Algebra $A \otimes H$ ist; somit ist $\delta^{-1}(P \otimes H)$ ein Ideal der Algebra A). Ferner ist K ein H-costabiles Ideal von A (denn H ist eine Coalgebra, A und $A \otimes H$ sind zwei H-Rechtscomoduln[305], und $\delta : A \to A \otimes H$ ist eine H-colineare Abbildung[306], und $P \otimes H$ ist ein Untercomodul von $A \otimes H$ [307]; laut Kapitel I, 4.1. **4)** ist daher auch $\delta^{-1}(P \otimes H)$ ein Untercomodul von A, also H-costabil). Schließlich ist $K \subseteq P$ (denn für jedes $a \in K$ ist $a_{(0)} \otimes a_{(1)} = \delta(a) \in P \otimes H$, also $a = a_{(0)} \varepsilon\left(a_{(1)}\right) \in P$).

Doch wegen $I^H(P) = 0$ ist jedes in P enthaltene H-costabile Ideal von A gleich 0. Also ist $K = 0$.

Jetzt werden wir zeigen, daß $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ist, indem wir nachrechnen, daß $a_i \in K$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ist.

Beweis: Aus $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i a_i = 0$ folgt $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(v_i)\,\delta(a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(v_i a_i) = \rho\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i a_i}_{=0}\right) = 0$ in $V \otimes H$ (wobei $\rho : V \to V \otimes H$ die H-Comodulstruktur auf V ist). Somit ist auch $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\rho(v_i)\delta(a_i)} = 0$ in $(V \otimes H) \diagup (VP \otimes H)$, wobei $\overline{\delta(a_i)} \in (A \diagup P) \otimes H \cong (A \otimes H) \diagup (P \otimes H)$ die Äquivalenzklasse von $\delta(a_i) \in A \otimes H$ modulo $P \otimes H$ bezeichnet.

Nach 4.8. **2)** ist $\rho(v_1), \rho(v_2), ..., \rho(v_n)$ ein Erzeugendensystem des $A \otimes H$-Rechtsmoduls $V \otimes H$. Somit ist $\overline{\rho(v_1)}, \overline{\rho(v_2)}, ..., \overline{\rho(v_n)}$ ein Erzeugendensystem des $(A \diagup P) \otimes H$-Rechtsmoduls $(V \otimes H) \diagup (VP \otimes H) \cong (V \diagup VP) \otimes H$.

---

[304] Unter einer "endlichdimensionalen H-Rechtscomodulalgebra" verstehen wir, wie immer, eine H-Rechtscomodulalgebra, die, *als k-Vektorraum*, endlichdimensional ist.

[305] wobei die H-Rechtscomodulstruktur auf $A \otimes H$ einfach die Abbildung

$$\delta_{A \otimes H} = \mathrm{id} \otimes \Delta : A \otimes H \to A \otimes H \otimes H$$

sein soll

[306] denn $\delta_{A \otimes H} \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \delta = (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta$ (weil A ein H-Rechtscomodul ist)

[307] Denn $\delta_{A \otimes H}(P \otimes H) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(P \otimes H) \subseteq P \otimes H \otimes H$.

Aber nach Voraussetzung ist $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ eine Basis des $A \diagup P$-Rechtsmoduls $V \diagup VP$. Somit ist $\overline{v_1} \otimes 1, \overline{v_2} \otimes 1, ..., \overline{v_n} \otimes 1$ eine Basis des $(A \diagup P) \otimes H$-Rechtsmoduls $(V \diagup VP) \otimes H$. Mit anderen Worten: $\overline{v_1 \otimes 1}, \overline{v_2 \otimes 1}, ..., \overline{v_n \otimes 1}$ ist eine Basis des $(A \diagup P) \otimes H$-Rechtsmoduls $(V \otimes H) \diagup (VP \otimes H)$ (denn $(V \otimes H) \diagup (VP \otimes H) \cong (V \diagup VP) \otimes H$).

Da $(A \diagup P) \otimes H$ schwach endlich ist (nach 4.9 **c)**, denn nach Voraussetzung ist H schwach endlich, und $A \diagup P$ ist endlichdimensional), muß also $\overline{\rho(v_1)}, \overline{\rho(v_2)}, ..., \overline{\rho(v_n)}$ auch eine Basis des $(A \diagup P) \otimes H$-Rechtsmoduls $(V \otimes H) \diagup (VP \otimes H)$ sein (denn sie ist ein Erzeugendensystem und hat genauso viele Elemente wie die Basis $\overline{v_1 \otimes 1}, \overline{v_2 \otimes 1}, ..., \overline{v_n \otimes 1}$), und ist daher insbesondere linear unabhängig. Aus $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\rho(v_i) \delta(a_i)} = 0$ folgt also $\overline{\delta(a_i)} = 0$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$, also $\delta(a_i) \in P \otimes H$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$, und somit $a_i \in \delta^{-1}(P \otimes H) = K = 0$, also $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$, was zu beweisen war.

4.11. Satz: Sei H eine schwach endliche Hopfalgebra (d. h. eine Hopfalgebra, die als Ring schwach endlich ist).

Sei A eine endlichdimensionale H-Rechtscomodulalgebra. Angenommen, A sei H-einfach. Sei $V \in \mathcal{M}_A^H$ ein (A, H)-Hopfmodul, welches als A-Rechtsmodul endlich erzeugt ist. Dann gibt es ein positives $t \in \mathbb{N}$ so, daß V^t als A-Rechtsmodul frei ist.

Beweis: Da die Menge $\operatorname{Max} A$ endlich ist, gibt es ein $P \in \operatorname{Max} A$ so, daß $r_P(V) \geq r_Q(V)$ für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ gilt. Sei $t = \ell_{A \diagup P}(A \diagup P)$. Dann ist $r_P(V^t) = \dfrac{\ell_{A \diagup P}(V^t \diagup V^t P)}{\ell_{A \diagup P}(A \diagup P)} = \dfrac{t \ell_{A \diagup P}(V \diagup VP)}{t} = \ell_{A \diagup P}(V \diagup VP) \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} r_P\left(V^t\right) &= \frac{\ell_{A \diagup P}(V^t \diagup V^t P)}{\ell_{A \diagup P}(A \diagup P)} = \frac{t \ell_{A \diagup P}(V \diagup VP)}{\ell_{A \diagup P}(A \diagup P)} = t \frac{\ell_{A \diagup P}(V \diagup VP)}{\ell_{A \diagup P}(A \diagup P)} = t r_P(V) \geq t r_Q(V) \\ &= t \frac{\ell_{A \diagup Q}(V \diagup VQ)}{\ell_{A \diagup Q}(A \diagup Q)} = \frac{t \ell_{A \diagup Q}(V \diagup VQ)}{\ell_{A \diagup Q}(A \diagup Q)} = \frac{\ell_{A \diagup Q}(V^t \diagup V^t Q)}{\ell_{A \diagup Q}(A \diagup Q)} = r_Q\left(V^t\right) \end{aligned}$$

für alle $Q \in \operatorname{Max} A$. Nach Lemma 4.5. **2)** gibt es also ein A-Rechtsmodulerzeugendensystem $v_1, v_2, ..., v_n$ von V^t so, daß $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ eine Basis des $A \diagup P$-Rechtsmoduls $V^t \diagup V^t P$ ist.

Da A eine H-einfache H-Rechtscomodulalgebra ist, gilt $I^H(P) = 0$. Nach Lemma 4.10. ist also $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Basis des A-Rechtsmoduls V^t.

4.11$\frac{1}{2}$. Bemerkung: Wie der Beweis von Satz 4.11. zeigt, kann man in Satz 4.11. die Bedingung "A sei H-einfach" ersetzen durch die schwächere Bedingung "es gibt ein $P \in \operatorname{Max} A$ so, daß $I^H(P) = 0$ und $r_P(V) \geq r_Q(V)$ für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ gilt". Genau mit dieser schwächeren Bedingung werden wir Satz 4.11. später auch verwenden.

4.12. Satz: Sei H eine schwach endliche Hopfalgebra (d. h. eine Hopfalgebra, die als Ring schwach endlich ist).

Sei A eine endlichdimensionale H-Rechtscomodulalgebra. Dann sind folgende drei Aussagen zueinander äquivalent:

1) Die H-Rechtscomodulalgebra A ist H-einfach.

2) Für jedes $P \in \operatorname{Max} A$ gilt $I^H(P) = 0$.

3) Es gibt ein $P \in \operatorname{Max} A$ mit $I^H(P) = 0$.

Beweis: Die Implikationen **1)** $\Longrightarrow$ **2)** und **2)** $\Longrightarrow$ **3)** sind beide trivial.

Beweis von 2) $\Longrightarrow$ 1): Angenommen, Aussage **2)** gelte. Sei $J \lhd A$ ein H-costabiles Ideal von A mit $J \neq A$. Dann gibt es ein $P \in \operatorname{Max} A$ mit $J \subseteq P$. Nach Aussage **2)** ist aber $I^H(P) = 0$, also $J = 0$. Somit ist **1)** bewiesen.

Beweis von 3) $\Longrightarrow$ 2): Angenommen, Aussage **3)** sei erfüllt. Dann gibt es ein $P \in \operatorname{Max} A$ mit $I^H(P) = 0$. Halten wir dieses P fest.

Sei $I \lhd A$ ein minimales von 0 verschiedenes H-costabiles Ideal von A. (So ein I existiert, denn $\dim A < \infty$ und da A selbst H-costabil ist, weil $A \in \mathcal{M}_A^H$.) Dann ist $I \in \mathcal{M}_A^H$.

a) Zuerst werden wir zeigen: Für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ mit $I^H(Q) \neq 0$ gilt $I = IQ$.

Beweis: Wegen $I^H(Q) \neq 0$ gibt es ein H-costabiles $J \lhd A$ mit $J \neq 0$ und $J \subseteq Q$.

Wenn $IJ = 0$ wäre, würde $IJ \subseteq P$ folgen, also $I \subseteq P$ oder $J \subseteq P$ (denn P ist ein Primideal), was im Widerspruch zu $I^H(P) = 0$ stünde (denn I und J sind beide H-costabil). Also muß $IJ \neq 0$ sein.

Somit ist IJ ein von 0 verschiedenes H-costabiles Ideal von A, und natürlich ist $IJ \subseteq I$. Da aber I ein *minimales* von 0 verschiedenes H-costabiles Ideal von A ist, folgt hieraus $IJ = I$. Wegen $J \subseteq Q$ folgt daraus wiederum $IQ = I$, was zu beweisen war.

b) Wähle ein $P_0 \in \operatorname{Max} A$ derart, daß $I^H(P_0) = 0$ und $r_{P_0}(I) \geq r_Q(I)$ für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ mit $I^H(Q) = 0$ gilt.[308]

Für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ mit $I^H(Q) \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} r_Q(I) &= \frac{\ell_{A/Q}(I/IQ)}{\ell_{A/Q}(A/Q)} = \frac{0}{\ell_{A/Q}(A/Q)} \qquad && (\text{da } I = IQ \text{ nach } \mathbf{a)}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

und somit gilt $r_{P_0}(I) \geq r_Q(I)$ auch für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ mit $I^H(Q) \neq 0$ (und nicht nur für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ mit $I^H(Q) = 0$). Insgesamt erhalten wir also, daß $r_{P_0}(I) \geq r_Q(I)$ für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ gilt.

Nun ist I ein (A, H)-Hopfmodul, welches als A-Rechtsmodul endlich erzeugt ist[309]. Nach dem Satz 4.11. (mit der schwächeren Bedingung von Bemerkung $4.11\frac{1}{2}$.) gibt es also ein positives $t \in \mathbb{N}$ so, daß I^t als A-Rechtsmodul frei ist[310]. Das heißt, $I^t \cong A^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $Q \in \operatorname{Max} A$ ist dann $I/IQ \neq 0$ (denn

$$\begin{aligned} (I/IQ)^t &\cong I^t/I^tQ \cong A^n/A^nQ \qquad && \big(\text{denn } I^t \cong A^n\big) \\ &\cong (A/Q)^n \neq 0 \end{aligned}$$

), also $I \neq IQ$ und damit $I^H(Q) = 0$ (nach **a)**), womit Aussage **2)** bewiesen ist. Damit ist der Beweis von 4.12. abgeschlossen.

Definition: Wir kennen die Kategorie $\mathcal{M}_A^H$, deren Objekte die (A, H)-Hopfmoduln sind. Wir werden jetzt eine analoge Kategorie namens ${}_A\mathcal{M}^H$ einführen:

[308] So ein P_0 existiert, denn wegen $\dim A < \infty$ ist $\operatorname{Max} A$ endlich.

[309] Die endliche Erzeugtheit folgt aus $\dim I < \infty$, was wiederum aus $I \subseteq A$ und $\dim A < \infty$ folgt.

[310] Hierbei verstehen wir unter I^t die direkte Summe $\underbrace{I \oplus I \oplus \ldots \oplus I}_{t \text{ mal}}$, nicht das Idealprodukt $\underbrace{I \cdot I \cdot \ldots \cdot I}_{t \text{ mal}}$.

Sei H eine Hopfalgebra, und A eine H-Rechtscomodulalgebra, gegeben durch die Abbildung $\delta_A : A \to A \otimes H$, $a \mapsto a_{(0)} \otimes a_{(1)}$. Wir definieren eine Kategorie ${}_A\mathcal{M}^H$ wie folgt:

Als *Objekt von* ${}_A\mathcal{M}^H$ bezeichnen wir jeden Vektorraum V mit einer A-Linksmodulstruktur und einer H-Rechtscomodulstruktur $\rho : V \to V \otimes H$, der eine der folgenden zwei äquivalenten Bedingungen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ erfüllt:

Bedingung $\mathcal{D}_1$*:* Die Abbildung ρ ist A-linkslinear, wobei die A-Linksmodulstruktur auf dem Tensorprodukt $V \otimes H$ dadurch definiert wird, daß $V \otimes H$ als $A \otimes H$-Linksmodul aufgefasst wird (weil V ein A-Linksmodul ist), und aus dieser $A \otimes H$-Linksmodulstruktur eine A-Linksmodulstruktur gewonnen wird (durch die Algebraabbildung $\delta_A : A \to A \otimes H$, $a \mapsto a_{(0)} \otimes a_{(1)}$).

Bedingung $\mathcal{D}_2$*:* Für alle $v \in V$ und $a \in A$ gilt $\rho(av) = a_{(0)}v_{(0)} \otimes a_{(1)}v_{(1)}$, wobei wir wie üblich die Sweedler-Notation $v_{(0)} \otimes v_{(1)} = \rho(v)$ verwenden.

Als *Morphismus von* ${}_A\mathcal{M}^H$ bezeichnen wir jeden Vektorraumhomomorphismus zwischen zwei Objekten von ${}_A\mathcal{M}^H$, welcher A-linkslinear und gleichzeitig H-rechtscolinear ist.

Auf diese Weise haben wir eine Kategorie ${}_A\mathcal{M}^H$ definiert.

4.13. Lemma: Sei H eine Hopfalgebra, und A eine H-Rechtscomodulalgebra. Sei $V \in {}_A\mathcal{M}^H$ endlichdimensional (als k-Vektorraum). Dann läßt sich der Dualraum $V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$ folgendermaßen kanonisch zu einem (A, H)-Hopfmodul machen:

Sei eine A-Rechtsmodulstruktur auf V^* definiert durch $(fa)(v) = f(av)$ für alle $f \in V^*$, $a \in A$ und $v \in V$.

Sei eine H-Rechtscomodulstruktur $\rho_{V^*} : V^* \to V^* \otimes H$, $f \mapsto f_{(0)} \otimes f_{(1)}$ auf V^* so definiert, daß $f_{(0)}(v) f_{(1)} = f\left(v_{(0)}\right) S\left(v_{(1)}\right)$ für alle $f \in V^*$ und $v \in V$ gilt. (Die H-Rechtscomodulstruktur $\rho_{V^*} : V^* \to V^* \otimes H$ ist durch diese Bedingung eindeutig definiert und existiert.[311])

Auf diese Weise wird V^* zu einem (A, H)-Hopfmodul; das heißt, $V^* \in \mathcal{M}_A^H$.

Beweis: **1)** Wir wollen zeigen, daß die Abbildung $\rho_{V^*} : V^* \to V^* \otimes H$ coassoziativ ist.

Beweis: Sei $f \in V^*$. Dann müssen wir zeigen, daß $\left(f_{(0)}\right)_{(0)} \otimes \left(f_{(0)}\right)_{(1)} \otimes f_{(1)} = f_{(0)} \otimes \Delta\left(f_{(1)}\right)$ in $V^* \otimes H \otimes H$ gilt.

Dazu reicht es aus zu zeigen, daß $\left(f_{(0)}\right)_{(0)}(v) \left(f_{(0)}\right)_{(1)} \otimes f_{(1)} = f_{(0)}(v) \Delta\left(f_{(1)}\right)$ in $H \otimes H$ für jedes $v \in V$ gilt.

Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned}\left(f_{(0)}\right)_{(0)}(v)\left(f_{(0)}\right)_{(1)} \otimes f_{(1)} &= f_{(0)}\left(v_{(0)}\right) S\left(v_{(1)}\right) \otimes f_{(1)} = S\left(v_{(1)}\right) \otimes f_{(0)}\left(v_{(0)}\right) f_{(1)} \\ &= S\left(v_{(1)}\right) \otimes f\left(\left(v_{(0)}\right)_{(0)}\right) S\left(\left(v_{(0)}\right)_{(1)}\right) = S\left(v_{(2)}\right) \otimes f\left(v_{(0)}\right) S\left(v_{(1)}\right)\end{aligned}$$

[311]Denn die Bedingung, daß $f_{(0)}(v) f_{(1)} = f\left(v_{(0)}\right) S\left(v_{(1)}\right)$ für alle $f \in V^*$ gilt, bedeutet nichts anderes, als daß die lineare Abbildung $i \circ \rho_{V^*} : V^* \to \operatorname{Hom}(V, H)$ mit der linearen Abbildung

$$V^* \to \operatorname{Hom}(V, H), \qquad f \mapsto \left(v \mapsto f\left(v_{(0)}\right) S\left(v_{(1)}\right)\right)$$

übereinstimmt, wobei

$$i : V^* \otimes H \to \operatorname{Hom}(V, H), \qquad f \otimes h \mapsto (v \mapsto f(v) h)$$

der kanonische Homomorphismus ist. Und da i ein Isomorphismus ist (da $\dim V < \infty$), ist dadurch die Abbildung ρ_{V^*} eindeutig bestimmt und existiert.

und

$$f_{(0)}(v)\,\Delta\left(f_{(1)}\right)=\Delta\left(f_{(0)}(v)\,f_{(1)}\right)=\Delta\left(f\left(v_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right)\right)=f\left(v_{(0)}\right)\underbrace{\Delta\left(S\left(v_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=S\left(v_{(2)}\right)\otimes S\left(v_{(1)}\right),\text{ da }S\text{ ein}\\ \text{Anticoalgebrahomomorphismus}\\ \text{ist}}}$$
$$=f\left(v_{(0)}\right)S\left(v_{(2)}\right)\otimes S\left(v_{(1)}\right)=S\left(v_{(2)}\right)\otimes f\left(v_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right).$$

2) Jetzt wollen wir zeigen, daß die Abbildung $\rho_{V^*}:V^*\to V^*\otimes H$ counitär ist.
Beweis: Für alle $f\in V^*$ ist $f_{(0)}\varepsilon\left(f_{(1)}\right)=f$, denn für alle $v\in V$ gilt

$$\begin{aligned}\left(f_{(0)}\varepsilon\left(f_{(1)}\right)\right)(v)&=f_{(0)}(v)\,\varepsilon\left(f_{(1)}\right)=\varepsilon\left(f_{(0)}(v)\,f_{(1)}\right)=\varepsilon\left(f\left(v_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right)\right)=f\left(v_{(0)}\right)\varepsilon\left(S\left(v_{(1)}\right)\right)\\&=f\left(v_{(0)}\right)\varepsilon\left(v_{(1)}\right)\qquad(\text{da }\varepsilon\circ S=\varepsilon)\\&=f\left(v_{(0)}\varepsilon\left(v_{(1)}\right)\right)=f(v).\end{aligned}$$

3) Jetzt werden wir beweisen, daß $\rho_{V^*}:V^*\to V^*\otimes H$ eine A-rechtslineare Abbildung ist.
Beweis: Für alle $f\in V^*$ und $a\in A$ gilt

$$f_{(0)}a_{(0)}\otimes f_{(1)}a_{(1)}=(fa)_{(0)}\otimes(fa)_{(1)}\qquad\text{in }V^*\otimes H,$$

denn für alle $v\in V$ gilt

$$\left(f_{(0)}a_{(0)}\right)(v)\,f_{(1)}a_{(1)}=(fa)_{(0)}(v)\,(fa)_{(1)},$$

da

$$\begin{aligned}\left(f_{(0)}a_{(0)}\right)(v)\,f_{(1)}a_{(1)}&=\underbrace{f_{(0)}\left(a_{(0)}v\right)f_{(1)}}_{=f\left(\left(a_{(0)}v\right)_{(0)}\right)S\left(\left(a_{(0)}v\right)_{(1)}\right)}a_{(1)}=f\left(\left(a_{(0)}v\right)_{(0)}\right)S\left(\left(a_{(0)}v\right)_{(1)}\right)a_{(1)}\\&=f\left(a_{(0)}v_{(0)}\right)\underbrace{S\left(a_{(1)}v_{(1)}\right)}_{=S\left(v_{(1)}\right)S\left(a_{(1)}\right)}a_{(2)}=f\left(a_{(0)}v_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right)\underbrace{S\left(a_{(1)}\right)a_{(2)}}_{=\varepsilon\left(a_{(1)}\right)\cdot 1}\\&=f\left(a_{(0)}\varepsilon\left(a_{(1)}\right)v_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right)=f\left(av_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right)\end{aligned}$$

und

$$(fa)_{(0)}(v)\,(fa)_{(1)}=(fa)\left(v_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right)=f\left(av_{(0)}\right)S\left(v_{(1)}\right)$$

ist. Damit ist **3)** bewiesen.

Wegen **1)** und **2)** ist (V^*,ρ_{V^*}) ein H-Rechtscomodul, und wegen **3)** ergibt diese H-Rechtscomodulstruktur zusammen mit der A-Rechtsmodulstruktur eine (A,H)-Hopfmodulstruktur auf V^*, was zu beweisen war.

Nun ein Lemma aus der Algebra:

4.14. Lemma: Sei A ein Ring, und sei V ein A-Rechtsmodul. Seien $t\geq 1$ und $n\geq 0$ natürliche Zahlen, die $V^t\cong A^n$ in $\mathcal{M}_A$ erfüllen. Angenommen, es gibt einen Körper K und einen Ringhomomorphismus $\varphi:A\to K$.

Dann ist V ein freier A-Rechtsmodul.

Beweis: Wir betrachten K als A-Linksmodul vermöge des Ringhomomorphismus $\varphi:A\to K$. Aus $V^t\cong A^n$ in $\mathcal{M}_A$ folgt dann $V^t\otimes_A K\cong A^n\otimes_A K\cong K^n$ in $\mathcal{M}_K$. Wegen

$V^t \otimes_A K \cong (V \otimes_A K)^t$ wird dies zu $(V \otimes_A K)^t \cong K^n$ in $\mathcal{M}_K$. Damit ist $n = ts$, wobei s die Dimension von $V \otimes_A K$ als K-Vektorraum bezeichnet. Somit gilt $V^t \cong (A^s)^t$ in $\mathcal{M}_A$ (denn $V^t \cong A^n = A^{ts} \cong (A^s)^t$ in $\mathcal{M}_A$). Nach dem Satz von Krull-Remak-Schmidt[312] (den wir anwenden dürfen, da V ein noetherscher und artinscher A-Rechtsmodul ist, weil $V^t \cong A^n$ ein solcher ist) folgt hieraus $V \cong A^s$ in $\mathcal{M}_A$, was zu beweisen war.

4.15. Satz: Sei H eine schwach endliche Hopfalgebra (d. h. eine Hopfalgebra, die als Ring schwach endlich ist).

Sei $A \subseteq H$ eine endlichdimensionale H-Rechtscoidealunteralgebra von H.

1) Dann ist A eine Frobeniusalgebra.

2) Angenommen, die Hopfalgebra H ist endlichdimensional. Dann ist H als A-Linksmodul frei und als A-Rechtsmodul frei.[313]

Beweis: **a)** Wir wollen zeigen: Jedes endlichdimensionale $V \in \mathcal{M}_A^H$ ist ein freier A-Rechtsmodul.

Beweis: Nach 4.7. und 4.12. (**3)** $\Longrightarrow$ **1)**) ist A eine H-einfache H-Rechtscomodulalgebra. Nach 4.11. gibt es also ein $t \in \mathbb{N}$ so, daß V^t als A-Rechtsmodul frei ist. Nach 4.14. (angewandt auf $K = k$ und $\varphi = \varepsilon : A \to k$) ist also V selber ein freier A-Rechtsmodul.

b) Jetzt werden wir beweisen: Jedes endlichdimensionale $V \in {}_A\mathcal{M}^H$ ist ein freier A-Linksmodul.

Beweis: Der Vektorraumisomorphismus

$$V \to V^{**}, \qquad v \mapsto (f \mapsto f(v))$$

ist A-linear, also ein A-Linksmodulisomorphismus. Das heißt, $V \cong V^{**}$ in ${}_A\mathcal{M}$.

Nach 4.13. ist $V^* \in \mathcal{M}_A^H$, und nach **a)** ist daher V^* ein freier A-Rechtsmodul. Damit ist V^{**} ein freier A-Linksmodul.[314] Wegen $V \cong V^{**}$ in ${}_A\mathcal{M}$ ist also V ein freier A-Linksmodul, was zu beweisen war.

c) *Beweis von **1)**:* Wegen $\Delta(A) \subseteq A \otimes H$ ist $A \in {}_A\mathcal{M}^H$, und nach 4.13. folgt hieraus $A^* \in \mathcal{M}_A^H$. Nach **a)** ist also A^* ein freier A-Rechtsmodul. Wegen $\dim A^* = \dim A < \infty$ folgt daraus sofort $A^* \cong A$ in $\mathcal{M}_A$. Nach 1.8. **2) b)** ist daher A eine Frobeniusalgebra, und **1)** ist bewiesen.

d) *Beweis von **2)**:* Die Hopfalgebra H selber ist ein H-Rechtscomodul mit der H-Rechtscomodulstruktur $\Delta : H \to H \otimes H$. Somit ist $H \in {}_A\mathcal{M}^H$ und $H \in \mathcal{M}_A^H$. Nach **b)** und **a)** ist also H ein freier A-Linksmodul und ein freier A-Rechtsmodul, und **2)** ist bewiesen.

4.16. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra, und sei $A \subseteq H$ eine Rechtscoidealunteralgebra.

1) Dann ist $A_A \subseteq H_A$ ein A-direkter Summand (also ein direkter Summand als A-Rechtsmodul).

[312] auch als "Satz von Krull-Schmidt" bekannt

[313] Dies gilt auch ohne die Bedingung, daß H endlichdimensional ist (solange H weiterhin schwach endlich bleibt), aber wir werden dies nur für endlichdimensionale H beweisen.

[314] *Bemerkung von Darij:* An dieser Stelle ist mir nicht klar, warum V^{**} ein freier A-Linksmodul ist. Allerdings sehe ich folgenden Beweis dafür:

Zuerst lese man Teil **c)** von dem Beweis von Satz 4.15. (dieser Teil **c)** ist unabhängig von Teil **b)**). Damit ist gezeigt, daß A eine Frobeniusalgebra ist. Das heißt, $A \cong A^*$ in ${}_A\mathcal{M}$. Nun ist V^* ein freier A-Rechtsmodul; das heißt, $V^* \cong A^\ell$ in $\mathcal{M}_A$ für irgendein $\ell \in \mathbb{N}$ (denn V^* ist endlichdimensional). Also ist $V^{**} \cong (A^\ell)^* \cong (A^*)^\ell \cong A^\ell$ in ${}_A\mathcal{M}$ (denn $A^* \cong A$ in ${}_A\mathcal{M}$). Somit ist der A-Linksmodul V^{**} frei, was zu beweisen war.

2) Ferner ist ${}_A A \subseteq {}_A H$ ebenfalls ein A-direkter Summand (also ein direkter Summand als A-Linksmodul).

Beweis: **1)** Wir haben $H \diagup A \in \mathcal{M}_A^H$, da $H \in \mathcal{M}_A^H$ und $A \in \mathcal{M}_A^H$. (Die H-Rechtscomodulstruktur auf $H \diagup A$ ist dabei gegeben durch

$$\begin{aligned} H \diagup A &\to H \diagup A \otimes H, \\ \overline{x} &\mapsto \overline{x_{(1)}} \otimes x_{(2)}. \end{aligned}$$

) Nach dem Beweis von 4.15. **a)** ist also $H \diagup A$ ein freier A-Rechtsmodul, also insbesondere projektiv. Also gibt es eine A-rechtslineare Abbildung $f : H \diagup A \to H$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H/A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "="] \\ H \arrow[r, "\mathrm{kan}"'] & H/A \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Somit ist $H = A \oplus X$ für einen freien A-Rechtsmodul $X \cong f\,(H \diagup A)$.

2) folgt aus **1)** durch Anwendung von **1)** auf H^{op}.

Anwendung auf die Quotiententheorie

4.17. Satz: Sei H eine Hopfalgebra. Sei $K \subseteq H$ eine Linkscoidealunteralgebra.

1) Dann ist

$$\begin{aligned} H \otimes_K H &\to H \otimes H \diagup K^+ H, \\ x \otimes y &\mapsto xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen (und sogar ein Isomorphismus von H-Linksmoduln und von $H \diagup K^+ H$-Rechtscomoduln).

2) Falls

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook] & H \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] & H \otimes_K H \end{tikzcd}$$

exakt ist (wobei die Abbildungen $i_1, i_2 : H \to H \otimes_K H$ durch $i_1(x) = x \otimes 1$ und $i_2(x) = 1 \otimes x$ für alle $x \in H$ definiert sind), dann ist $K = H^{\mathrm{Co}\left(H \diagup K^+ H\right)}$.

Beweis: Nach Bemerkung 4.3. **3)** gilt $K \subseteq H^{\mathrm{Co}(H \diagup I)}$, wenn wir $I = K^+ H$ setzen. Das heißt, $K \subseteq H^{\mathrm{Co}(H \diagup I)} = H^{\mathrm{Co}\left(H \diagup K^+ H\right)}$.

1) Sei $\phi : H \otimes K \otimes H \to H \otimes K \otimes H$ die durch

$$\phi\,(x \otimes k \otimes y) = xk_{(1)} y_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes y_{(2)} \qquad \text{für alle } x, y \in H \text{ und } k \in K$$

definierte lineare Abbildung[315]. Sei $\mathrm{kan}_1 : H \otimes H \to H \otimes H$ die durch

$$\mathrm{kan}_1\,(x \otimes y) = xy_{(1)} \otimes y_{(2)} \qquad \text{für alle } x, y \in H$$

definierte lineare Abbildung. Sei $\mathrm{kan}_2 : H \otimes_K H \to H \otimes H \diagup K^+ H$ die durch

$$\mathrm{kan}_2\,(x \otimes y) = xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} \qquad \text{für alle } x, y \in H$$

[315] Daß ϕ ein wohldefinierter Vektorraumhomomorphismus ist, folgt aus $\Delta(K) \subseteq H \otimes K$.

definierte lineare Abbildung[316]. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \otimes K \otimes H \arrow[r, shift left, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes ky"] \arrow[r, shift right, "x\otimes k\otimes y\mapsto xk\otimes y"'] \arrow[d, "\phi", "\cong"'] & H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{kan}:x\otimes y\mapsto x\otimes y"] \arrow[d, "\mathrm{kan}_1"] & H \otimes_K H \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{kan}_2"] & 0\, . \\
H \otimes K \otimes H \arrow[r, shift left, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes ky"] \arrow[r, shift right, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes\varepsilon(k)y"'] & H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{kan}:x\otimes y\mapsto x\otimes\overline{y}"] & H \otimes H/K^+H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beide Zeilen in diesem Diagramm sind offensichtlich exakt. Die Abbildung $\mathrm{kan}_1 : H \otimes H \to H \otimes H$ ist bijektiv, und die Umkehrabbildung kan_1^{-1} erfüllt $\mathrm{kan}_1^{-1}(x \otimes y) = xS\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)}$ für alle $x, y \in H$ (gemäß Kapitel I, Satz $2.21\frac{15}{20}$[317]). Die Abbildung ϕ ist ebenfalls bijektiv, und die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : H \otimes K \otimes H \to H \otimes K \otimes H$ erfüllt $\phi^{-1}(x \otimes k \otimes y) = xS\left(y_{(1)}\right) S\left(k_{(1)}\right) \otimes k_{(2)} \otimes y_{(2)}$ für alle $x, y \in H$ und $k \in K$ [318].

Das obige Diagramm ist kommutativ (denn die Unterdiagramme

$$\begin{tikzcd}
H \otimes K \otimes H \arrow[r, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes ky"] \arrow[d, "\phi", "\cong"'] & H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{kan}_1"] \\
H \otimes K \otimes H \arrow[r, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes ky"] & H \otimes H
\end{tikzcd}\ , \qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes K \otimes H \arrow[r, "x\otimes k\otimes y\mapsto xk\otimes y"'] \arrow[d, "\phi", "\cong"'] & H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{kan}_1"] \\
H \otimes K \otimes H \arrow[r, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes\varepsilon(k)y"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{kan}:x\otimes y\mapsto x\otimes y"] \arrow[d, "\mathrm{kan}_1"] & H \otimes_K H \arrow[d, "\mathrm{kan}_2"] \\
H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{kan}:x\otimes y\mapsto x\otimes\overline{y}"] & H \otimes H/K^+H
\end{tikzcd}$$

---

[316]Diese Abbildung kan_2 ist wohldefiniert, denn die Abbildung

$$\mathrm{kan}_2' : H \times H \to H \otimes H\diagup K^+H, \qquad (x, y) \mapsto xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}}$$

ist K-tensoriell, weil für alle $x, y \in H$ und $k \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{kan}_2'(x, ky) &= x\,(ky)_{(1)} \otimes \overline{(ky)_{(2)}} = xk_{(1)}y_{(1)} \otimes \overline{k_{(2)}y_{(2)}} \\
&= xky_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} \qquad \left(\text{da } k_{(1)} \otimes \overline{k_{(2)}} = k \otimes \overline{1}, \text{ weil } k \in K \subseteq H^{\mathrm{Co}\left(H\diagup K^+H\right)}\right) \\
&= \mathrm{kan}_2'(xk, y) \qquad \text{in } H \otimes H\diagup K^+H.
\end{aligned}$$

[317]genauer gesagt: gemäß dem Beweis von Aussage 1 im Beweis von Kapitel I, Satz $2.21\frac{15}{20}$

[318]In der Tat ist dadurch eine lineare Abbildung $\phi^{-1} : H \otimes K \otimes H \to H \otimes K \otimes H$ definiert (da $\Delta(K) \subseteq H \otimes K$), und daß diese Abbildung tatsächlich die Umkehrabbildung von ϕ ist, sieht man daran, daß sie $\phi(x \otimes k \otimes y) = xk_{(1)}y_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes y_{(2)}$ in

$$\begin{aligned}
&xk_{(1)} \underbrace{y_{(1)}S\left(y_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(y_{(1)}\right)} S\left(k_{(2)}\right) \otimes k_{(3)} \otimes y_{(3)} = xk_{(1)}\varepsilon\left(y_{(1)}\right) S\left(k_{(2)}\right) \otimes k_{(3)} \otimes y_{(2)} \\
&= x \underbrace{k_{(1)}S\left(k_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(k_{(1)}\right)} \otimes k_{(3)} \otimes \underbrace{\varepsilon\left(y_{(1)}\right) y_{(2)}}_{=y} = x\varepsilon\left(k_{(1)}\right) \otimes k_{(2)} \otimes y = x \otimes \varepsilon\left(k_{(1)}\right) k_{(2)} \otimes y = x \otimes k \otimes y
\end{aligned}$$

überführt (für alle $x, y \in H$ und $k \in H$), und genauso umgekehrt.

sind kommutativ[319]). Nach einem bekannten Diagrammlemma[320] folgt hieraus, daß kan_2 ein Isomorphismus ist, was zu beweisen war.

*Alternativer Beweis für **1)**:* Die Abbildung

$$\begin{aligned} H \otimes H \diagup K^+ H &\to H \otimes_K H, \\ x \otimes \overline{y} &\mapsto xS\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} \end{aligned}$$

ist wohldefiniert[321]. Offenbar ist sie eine Umkehrabbildung zu kan_2 (dies zeigt man wie bei kan_1).

2) Wie schon gezeigt, ist $K \subseteq H^{\mathrm{Co}\left(H \diagup K^+ H\right)}$.

Wir müssen beweisen, daß $K = H^{\mathrm{Co}\left(H \diagup K^+ H\right)}$ ist.

---

[319]Denn verfolgt man ein Element durch diese drei Diagramme, erhält man nach kurzer Rechnung

$$\begin{tikzcd} x \otimes k \otimes y \arrow[r, mapsto, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes ky"] \arrow[d, mapsto, "\phi", "\cong"'] & x \otimes ky \arrow[d, mapsto, "\mathrm{kan}_1"] \\ xk_{(1)}y_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes y_{(2)} \arrow[r, mapsto, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes ky"] & x\left(ky\right)_{(1)} \otimes \left(ky\right)_{(2)} \end{tikzcd} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} x \otimes k \otimes y \arrow[r, mapsto, "x\otimes k\otimes y\mapsto xk\otimes y"'] \arrow[d, mapsto, "\phi", "\cong"'] & xk \otimes y \arrow[d, mapsto, "\mathrm{kan}_1"] \\ xk_{(1)}y_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes y_{(2)} \arrow[r, mapsto, "x\otimes k\otimes y\mapsto x\otimes \varepsilon(k) y"'] & xky_{(1)} \otimes y_{(2)} \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} x \otimes y \arrow[r, mapsto, "\mathrm{kan}: x\otimes y\mapsto x\otimes y"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{kan}_1"] & x \otimes y \arrow[d, mapsto, "\mathrm{kan}_2"] \\ xy_{(1)} \otimes y_{(2)} \arrow[r, mapsto, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{kan}: x\otimes y\mapsto x\otimes \overline{y}"] & xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} \end{tikzcd}$$

[320]Dieses Lemma besagt: Ist

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, und sind beide Zeilen exakt, und sind f und g Isomorphismen, dann ist auch h ein Isomorphismus. [Dieses Lemma ist ein Sonderfall des Fünferlemmas.]

[321]Denn die Abbildung

$$\begin{aligned} H \otimes H &\to H \otimes_K H, \\ x \otimes y &\mapsto xS\left(y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} \end{aligned}$$

ist identisch Null auf $H \otimes K^+ H$ (denn für alle $h \in H$ und $k \in K^+$ und $x \in H$ überführt sie $x \otimes kh$ nach

$$\begin{aligned} xS\left(k_{(1)}h_{(1)}\right) \otimes k_{(2)}h_{(2)} &= xS\left(h_{(1)}\right) S\left(k_{(1)}\right) \otimes k_{(2)}h_{(2)} \\ &= xS\left(h_{(1)}\right) \underbrace{S\left(k_{(1)}\right) k_{(2)}}_{\substack{=\varepsilon(k)=0, \\ \text{da } k\in K^+}} \otimes h_{(2)} \qquad \left(\text{da } k_{(2)} \in K, \text{ da } \Delta\left(k\right) \in \Delta\left(K\right) \subseteq H \otimes K\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

).

Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] \arrow[d, "="'] & H \otimes_K H \arrow[d, "\operatorname{kan}_2"] \\
0 \arrow[r] & H^{\operatorname{Co}\left(H/K^+H\right)} \arrow[r, hook] & H \arrow[r, shift left, "x\mapsto x\otimes\overline{1}"] \arrow[r, shift right, "x\mapsto x_{(1)}\otimes\overline{x_{(2)}}"'] & H \otimes H/K^+H
\end{tikzcd}.$$

Nach der Voraussetzung ist die obere Zeile dieses Diagramms exakt. Nach der Definition von $H^{\operatorname{Co}\left(H/K^+H\right)}$ ist die untere Zeile exakt. Nach **1)** ist kan_2 ein Isomorphismus. Nach einem ähnlichen Diagrammlemma wie oben[322] folgt hieraus, daß die Inklusion $K \subseteq H^{\operatorname{Co}\left(H/K^+H\right)}$ ein Isomorphismus ist, also daß $K = H^{\operatorname{Co}\left(H/K^+H\right)}$ ist.

4.18. Bemerkung: Sei H eine Algebra[323], und sei $K \subseteq H$ eine Unteralgebra. Angenommen, H sei als K-Linksmodul oder als K-Rechtsmodul treuflach, *oder* K sei als K-Linksmodul oder als K-Rechtsmodul ein direkter Summand von H. In jedem dieser vier Fälle ist die Folge

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook] & H \arrow[r, shift left, "i_1"] \arrow[r, shift right, "i_2"'] & H \otimes_K H
\end{tikzcd}$$

exakt.

Beweis: Wenn H als K-Linksmodul oder als K-Rechtsmodul treuflach ist, dann folgt die Behauptung durch treuflachen Abstieg (siehe Seminar).

Wenn K als K-Linksmodul ein direkter Summand von H ist (d. h. wenn ${}_K K \subseteq {}_K H$ ein direkter Summand in ${}_K\mathcal{M}$ ist): Dann gibt es eine K-linkslineare Abbildung $f : H \to K$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook] \arrow[d, "="'] & H \arrow[dl, "f"] \\
K &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Wir müssen nun zeigen: $K = \{x \in H \mid x \otimes 1 = 1 \otimes x \text{ in } H \otimes_K H\}$.

Beweis: Daß $K \subseteq \{x \in H \mid x \otimes 1 = 1 \otimes x \text{ in } H \otimes_K H\}$ ist, ist klar. Zum Beweis von $K \supseteq \{x \in H \mid x \otimes 1 = 1 \otimes x \text{ in } H \otimes_K H\}$ sei $x \in H$ ein Element mit $x \otimes 1 = 1 \otimes x$ in $H \otimes_K H$. Anwendung der Abbildung $\operatorname{id} \otimes f : H \otimes_K H \to H \otimes_K K$ auf die Gleichung $1 \otimes x = x \otimes 1$ ergibt $1 \otimes f(x) = x \otimes f(1)$ in $H \otimes_K K \cong H$, also $f(x) = x \underbrace{f(1)}_{\substack{=1, \text{ da} \\ 1 \in K}}$, und damit $x = f(x) \in K$, was zu beweisen war.

[322] Und zwar ist das Diagrammlemma, welches wir diesmal benutzen, das folgende: Ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z'
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, und sind beide Zeilen exakt, und sind g und h Isomorphismen, dann ist auch f ein Isomorphismus. [Dieses Lemma ist ein Sonderfall des Fünferlemmas.]

[323] nicht notwendigerweise eine Hopfalgebra

Wenn K als K-Rechtsmodul ein direkter Summand von H ist, gestaltet sich der Beweis analog. Damit ist Bemerkung 4.18 komplett bewiesen.

4.18$\frac{1}{2}$. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei K eine Rechtscoidealunteralgebra von H. Dann ist $K = H^{\mathrm{Co}\left(H\diagup K^+H\right)}$.

Beweis: Gemäß Folgerung 4.16. **1)** ist K ein direkter Summand von H als K-Rechtsmodul. Laut Bemerkung 4.18 folgt hieraus, daß die Folge

$$0 \longrightarrow K \hookrightarrow H \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} H \otimes_K H$$

exakt ist. Dies ergibt wiederum nach Satz 4.17. **2)**, daß $K = H^{\mathrm{Co}\left(H\diagup K^+H\right)}$ ist. Folgerung 4.18$\frac{1}{2}$ ist somit bewiesen.

4.19. Satz (Quotiententheorie): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann sind

$$\{K \mid K \subseteq H \text{ ist Linkscoidealunteralgebra}\} \to \{I \mid I \subseteq H \text{ ist Coideal und } H\text{-Linksideal}\},$$
$$K \mapsto HK^+$$

und

$$\{I \mid I \subseteq H \text{ ist Coideal und } H\text{-Linksideal}\} \to \{K \mid K \subseteq H \text{ ist Linkscoidealunteralgebra}\},$$
$$I \mapsto H^{\mathrm{Co}(H\diagup I)}$$

zueinander inverse Bijektionen.

Beweis: Nach Bemerkung 4.3. **1)** (angewandt auf die Hopfalgebra[324] H^{op} statt H) sind beide Abbildungen wohldefiniert[325]. Jetzt wollen wir zeigen, daß diese Abbildungen zueinander inverse Bijektionen sind**:**

1) Sei $K \subseteq H$ eine Linkscoidealunteralgebra. Zu zeigen ist: $K = H^{\mathrm{Co}\left(H\diagup HK^+\right)}$. Doch dies folgt aus 4.18$\frac{1}{2}$, angewandt auf H^{op} statt H.

2) Sei $I \subseteq H$ ein Linksideal von H, welches auch ein Coideal ist. Sei $K = H^{\mathrm{Co}(H\diagup I)}$. Zu zeigen ist: $I = HK^+$.

---

[324] An dieser Stelle verwenden wir die Tatsache, daß die Bialgebra H^{op} eine Hopfalgebra ist. Dies läßt sich folgendermaßen beweisen:

Beweis: Die Antipode S der Hopfalgebra H ist bijektiv (laut Folgerung 1.5. **2)** in Kapitel III). Hieraus folgt (nach Bemerkung 2.21$\frac{1}{2}$. **7)** in Kapitel I), daß die Bialgebra H^{op} eine Hopfalgebra ist.

[325] denn (unter Verwendung der Notationen von Bemerkung 4.3. **1)**) gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{LCISA}\left(H^{\mathrm{op}}\right) &= \{K \subseteq H^{\mathrm{op}} \mid K \text{ ist eine Linkscoidealunteralgebra}\}\\ &= \{K \subseteq H \mid K \text{ ist eine Linkscoidealunteralgebra}\}\\ &= \{K \mid K \subseteq H \text{ ist eine Linkscoidealunteralgebra}\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{CRI}\left(H^{\mathrm{op}}\right) &= \{I \subseteq H^{\mathrm{op}} \mid I \text{ ist ein Coideal und ein Rechtsideal von } H^{\mathrm{op}}\}\\ &= \{I \subseteq H \mid I \text{ ist ein Coideal und ein Linksideal von } H\}\\ &= \{I \mid I \subseteq H \text{ ist Coideal und } H\text{-Linksideal}\}\end{aligned}$$

In der Tat ist $H \to H/I$ ein surjektiver Coalgebrahomomorphismus und gleichzeitig ein H-Linksmodulhomomorphismus. Also ist $(H/I)^* \to H^*$ ein injektiver Algebrahomomorphismus und gleichzeitig ein H-Linkscomodulhomomorphismus. Das heißt, $(H/I)^*$ ist bis auf Isomorphie eine Linkscoidealunteralgebra von H^*.

Die Sequenz

$$K \xhookrightarrow{\text{Inklusion}} H \underset{x \mapsto x \otimes \overline{1}}{\overset{x \mapsto x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}}}{\rightrightarrows}} H \otimes H/I$$

ist exakt (denn $K = H^{\mathrm{Co}(H/I)}$). Also ist auch die Sequenz

$$H^* \otimes (H/I)^* \underset{\mathrm{id} \otimes \varepsilon}{\overset{\text{mult}}{\rightrightarrows}} H^* \xrightarrow{\text{Restriktion}} K^* \longrightarrow 0$$

exakt, wobei die kanonische Injektion $(H/I)^* \to H^*$ als Inklusion betrachtet wird (d. h. der Dualraum $(H/I)^*$ wird mit dem Unterraum $\{f \in H^* \mid f(I) = 0\}$ identifiziert), und $\text{mult} : H^* \otimes (H/I)^* \to H^*$ die k-lineare Abbildung ist, die durch

$$\text{mult}(f \otimes g) = f * g \qquad \text{für alle } f \in H^* \text{ und } g \in (H/I)^*$$

definiert ist (man benutzt hierbei, daß $g \in H^*$ vermöge der Inklusion $(H/I)^* \subseteq H^*$ ist). Somit ist $K^* = H^* / ((\text{mult} - \mathrm{id} \otimes \varepsilon)(H^* \otimes (H/I)^*))$. Wegen

$$\begin{aligned} \Bigg(\underbrace{\text{mult} - \mathrm{id} \otimes \varepsilon}_{= \text{mult} \circ (\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} - \eta\varepsilon))}\Bigg)(H^* \otimes (H/I)^*) &= \text{mult}\Bigg(\underbrace{(\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} - \eta\varepsilon))(H^* \otimes (H/I)^*)}_{= \mathrm{id}(H^*) \otimes (\mathrm{id} - \eta\varepsilon)(H^* \otimes (H/I)^*)}\Bigg) \\ &= \underbrace{\mathrm{id}(H^*)}_{= H^*} \cdot \underbrace{(\mathrm{id} - \eta\varepsilon)((H/I)^*)}_{= ((H/I)^*)^+} = H^* ((H/I)^*)^+ \end{aligned}$$

vereinfacht sich dies zu $K^* = H^* / \left(H^* ((H/I)^*)^+\right)$.

Nun wissen wir, daß $(H/I)^*$ eine Linkscoidealunteralgebra von H^* ist (wenn wir $(H/I)^*$ wie oben mit einer Teilmenge von H^* identifizieren). Nach **1)** (angewandt auf die Hopfalgebra H^* in der Rolle von H und die Linkscoidealunteralgebra $(H/I)^*$ in der Rolle von K) ergibt dies $(H/I)^* = H^{*\,\mathrm{Co}\left(H^*/H^*((H/I)^*)^+\right)}$, also $(H/I)^* = H^{*\,\mathrm{Co}\,K^*}$ (da $H^* / \left(H^* ((H/I)^*)^+\right) = K^*$).

Doch wegen

$$\Bigg(\underbrace{\mu \mid_{H \otimes K} - \mathrm{id} \otimes \varepsilon}_{= \mu|_{H \otimes K} \circ (\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} - \eta\varepsilon))}\Bigg)(H \otimes K) = \underbrace{\mathrm{id}(H)}_{= H} \cdot \underbrace{(\mathrm{id} - \eta\varepsilon)(K)}_{= K^+} = HK^+$$

ist die Sequenz

$$H \otimes K \underset{\mathrm{id} \otimes \varepsilon}{\overset{\mu|_{H \otimes K}}{\rightrightarrows}} H \xrightarrow{\text{Projektion}} H/HK^+$$

exakt, und somit ist auch die (durch Dualisieren entstandene) Sequenz

$$(H/HK^+)^* \hookrightarrow H^* \underset{x \mapsto x \otimes \overline{1}}{\overset{x \mapsto x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}}}{\rightrightarrows}} H^* \otimes K^*$$

exakt (wobei K^* als Faktorvektorraum von H^* aufgefasst wird). Hieraus folgt $(H \diagup HK^+)^* = H^{*\operatorname{Co} K^*}$. Aus $(H \diagup I)^* = H^{*\operatorname{Co} K^*}$ wird also $(H \diagup I)^* = (H \diagup HK^+)^*$, und somit $I = HK^+$, was zu beweisen war.

Bevor wir zu einem der sogenannten Normalbasissätze für Hopfalgebren kommen, definieren wir eine Notation:

Definition: Sei A eine Algebra und C eine Coalgebra. Seien V und W zwei Vektorräume, auf denen sowohl A-Linksmodulstrukturen als auch C-Rechtscomodulstrukturen definiert sind. Dann schreiben wir "$.V^{\cdot} \cong .W^{\cdot}$ bezüglich A und C" genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ gibt, der gleichzeitig ein A-Linksmodulisomorphismus und ein C-Rechtscomodulisomorphismus ist.

Bemerkung: Die Aussage "$.V^{\cdot} \cong .W^{\cdot}$ bezüglich A und C" ist *stärker* als die Aussage "V und W sind zueinander isomorph als A-Linksmoduln und zueinander isomorph als C-Rechtscomoduln". Denn wenn $.V^{\cdot} \cong .W^{\cdot}$ bezüglich A und C gilt, dann ist klar, daß V und W zueinander isomorph als A-Linksmoduln und zueinander isomorph als C-Rechtscomoduln sind, aber die Umkehrung gilt nicht notwendigerweise[326].

4.20. Satz (Normalbasis): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $I \subseteq H$ ein Hopfideal. Sei $K = H^{\operatorname{Co}(H \diagup I)}$. Dann gilt

$$.H^{\cdot} \cong .K \otimes H \diagup I^{\cdot} \qquad \text{bezüglich } K \text{ und } H \diagup I.$$

Beweis: Wir haben $I = K^+H = HK^+$ (denn nach 4.19 ist $I = HK^+$, und nach 4.19, angewandt auf H^{op} statt H, ist $I = K^+H$).

Sei $\overline{H}$ die Hopfalgebra $H \diagup I$.

Wir definieren eine k-lineare Abbildung $\Phi : H \otimes \overline{H} \to H \otimes \overline{H}$ durch

$$\Phi\left(x \otimes y\right) = x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} S\left(y\right) \qquad \text{für alle } x \in H \text{ und } y \in H \diagup I.$$

Wir definieren ferner eine k-lineare Abbildung $\Psi : H \otimes \overline{H} \to H \otimes \overline{H}$ durch

$$\Psi\left(x \otimes y\right) = x_{(1)} \otimes S^{-1}\left(y\right) \overline{x_{(2)}} \qquad \text{für alle } x \in H \text{ und } y \in H \diagup I$$

(dabei verwenden wir, daß die Antipode S der Hopfalgebra $H \diagup I$ ein Inverses hat; dies folgt aus Folgerung 1.5. **2)** in Kapitel III). Dann ist $\Phi \circ \Psi = \operatorname{id}$ [327], und somit ist die Abbildung Φ surjektiv. Da $\Phi : H \otimes \overline{H} \to H \otimes \overline{H}$ ein Endomorphismus des

[326] Es kann passieren, daß V und W zueinander isomorph als A-Linksmoduln und zueinander isomorph als C-Rechtscomoduln sind, aber es keinen Isomorphismus $V \to W$ gibt, der *gleichzeitig* ein A-Linksmodulisomorphismus und ein C-Rechtscomodulisomorphismus ist.

[327] denn für alle $x \in H$ und $y \in \overline{H}$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\Phi \circ \Psi\right)\left(x \otimes y\right) &= \Phi\left(\underbrace{\Psi\left(x \otimes y\right)}_{= x_{(1)} \otimes S^{-1}(y)\overline{x_{(2)}}}\right) = \Phi\left(x_{(1)} \otimes S^{-1}\left(y\right)\overline{x_{(2)}}\right) = \left(x_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \overline{\left(x_{(1)}\right)_{(2)}} S\left(S^{-1}\left(y\right)\overline{x_{(2)}}\right) \\ &= x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} \underbrace{S\left(S^{-1}\left(y\right)\overline{x_{(3)}}\right)}_{\substack{= S\left(\overline{x_{(3)}}\right) S\left(S^{-1}(y)\right) \text{ (denn } S \\ \text{ist ein Antialgebrahomomorphismus)}}} = x_{(1)} \otimes \underbrace{\overline{x_{(2)}} S\left(\overline{x_{(3)}}\right)}_{= \overline{x_{(2)} S\left(x_{(3)}\right)} = \overline{\varepsilon\left(x_{(2)}\right) 1}} \underbrace{S\left(S^{-1}\left(y\right)\right)}_{= y} \\ &= x_{(1)} \otimes \overline{\varepsilon\left(x_{(2)}\right) 1} y = x_{(1)} \varepsilon\left(x_{(2)}\right) \otimes y = x \otimes y\end{aligned}$$

endlichdimensionalen Vektorraums $H \otimes \overline{H}$ ist, ist Φ also bijektiv (denn ein surjektiver Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ist stets bijektiv), und wegen $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ ist folglich $\Psi = \Phi^{-1}$.

Sei $\mathrm{kan}_2 : H \otimes_K H \to H \otimes H \diagup K^+H$ die durch

$$\mathrm{kan}_2 (x \otimes y) = xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} \qquad \text{für alle } x, y \in H$$

definierte lineare Abbildung.[328] Laut 4.17. **1)** ist diese Abbildung kan_2 ein Isomorphismus. Wegen $H \diagup \underbrace{K^+H}_{=I} = H \diagup I = \overline{H}$ wird $\mathrm{kan}_2 : H \otimes_K H \to H \otimes H \diagup K^+H$ zu $\mathrm{kan}_2 : H \otimes_K H \to H \otimes \overline{H}$.

Wenn wir die Isomorphismen $\mathrm{kan}_2 : H \otimes_K H \to H \otimes \overline{H}$ und $\Phi : H \otimes \overline{H} \to H \otimes \overline{H}$ verketten, erhalten wir einen Isomorphismus $\Phi \circ \mathrm{kan}_2 : H \otimes_K H \to H \otimes \overline{H}$. Für alle $x \in H$ und $y \in H$ gilt

$$(\Phi \circ \mathrm{kan}_2) (x \otimes y) = x_{(1)} y \otimes \overline{x_{(2)}} \tag{III.4.10}$$

[329].

Da $K = H^{\mathrm{Co}(H \diagup I)}$ eine Linkscoidealunteralgebra von H ist (gemäß Satz 4.19) und eine Rechtscoidealunteralgebra von H ist (analog), können wir Satz 4.15 **2)** auf K statt A anwenden. Wir erhalten, daß H als K-Linksmodul frei und als K-Rechtsmodul frei ist. Da H als K-Linksmodul frei und endlichdimensional ist, gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit ${}_K H \cong {}_K K^t$. Wegen $H \neq 0$ ist $t \geq 1$.

Wir wollen jetzt auf mehreren Vektorräumen K-Linksmodulstrukturen und $\overline{H}$-Rechtscomodulstrukturen einführen:

- Für jeden K-Linksmodul U sei eine K-Linksmodulstruktur auf dem Vektorraum $H \otimes_K U$ definiert durch

  $$k (x \otimes u) = kx \otimes u \qquad \text{für alle } k \in K,\ x \in H \text{ und } u \in U.$$

  [330] Angewandt auf $U = H$, auf $U = K^t$ und auf $U = K$ ergibt dies K-Linksmodulstrukturen auf den Vektorräumen $H \otimes_K H$, $H \otimes_K K^t$ und $H \otimes_K K$.

- Für jeden K-Linksmodul U sei eine $\overline{H}$-Rechtscomodulstruktur auf dem Vektorraum $H \otimes_K U$ definiert durch

  $$\begin{aligned} \delta_{H \otimes_K U} : H \otimes_K U &\to (H \otimes_K U) \otimes \overline{H}, \\ x \otimes u &\mapsto \left(x_{(1)} \otimes u\right) \otimes \overline{x_{(2)}} \qquad \text{für alle } x \in H \text{ und } u \in U. \end{aligned}$$

---

[328] Daß diese Abbildung wohldefiniert ist, wurde im Beweis von 4.17. **1)** gezeigt.

[329] denn

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \mathrm{kan}_2) (x \otimes y) &= \Phi \left(\underbrace{\mathrm{kan}_2 (x \otimes y)}_{= xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}}} \right) = \Phi \left(xy_{(1)} \otimes \overline{y_{(2)}} \right) = \left(xy_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \overline{\left(xy_{(1)}\right)_{(2)} S \left(\overline{y_{(2)}}\right)} \\ &= x_{(1)} y_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)} y_{(2)}} S \left(\overline{y_{(3)}}\right) = x_{(1)} y_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)} \underbrace{y_{(2)} S \left(y_{(3)}\right)}_{= \varepsilon \left(y_{(2)}\right)}} = x_{(1)} \underbrace{y_{(1)} \varepsilon \left(y_{(2)}\right)}_{= y} \otimes \overline{x_{(2)}} \\ &= x_{(1)} y \otimes \overline{x_{(2)}} \end{aligned}$$

[330] Dies ist genau die K-Linksmodulstruktur, die entsteht, wenn man den (K, K)-Bimodul H (die (K, K)-Bimodulstruktur auf H wird einfach durch Multiplikation gegeben) mit dem K-Linksmodul U tensoriert.

[331] Angewandt auf $U = H$, auf $U = K^t$ und auf $U = K$ ergibt dies $\overline{H}$-Rechtscomodulstrukturen auf den Vektorräumen $H \otimes_K H$, $H \otimes_K K^t$ und $H \otimes_K K$.

- Auf dem Vektorraum H selber ist eine K-Linksmodulstruktur gegeben (durch Multiplikation).

- Auf dem Vektorraum H sei eine $\overline{H}$-Rechtscomodulstruktur definiert durch

$$\delta_H : H \to H \otimes \overline{H},$$
$$x \mapsto x_{(1)} \otimes \overline{x_{(2)}} \qquad \text{für alle } x \in H.$$

[332]

- Für jeden K-Linksmodul U sei eine K-Linksmodulstruktur auf dem Vektorraum $U \otimes \overline{H}$ definiert durch

$$k\left(u \otimes h\right) = ku \otimes h \qquad \text{für alle } k \in K,\ u \in U \text{ und } h \in \overline{H}.$$

[333] Angewandt auf $U = H$, auf $U = K^t$ und auf $U = K$ ergibt dies K-Linksmodulstrukturen auf den Vektorräumen $H \otimes \overline{H}$, $K^t \otimes \overline{H}$ und $K \otimes \overline{H}$.

- Für jeden Vektorraum U sei eine $\overline{H}$-Rechtscomodulstruktur auf dem Vektorraum $U \otimes \overline{H}$ definiert durch

$$\delta_{U \otimes \overline{H}} : U \otimes \overline{H} \to \left(U \otimes \overline{H}\right) \otimes \overline{H},$$
$$u \otimes y \mapsto \left(u \otimes y_{(1)}\right) \otimes y_{(2)} \qquad \text{für alle } x \in U \text{ und } y \in \overline{H}.$$

[334] Angewandt auf $U = H$, auf $U = K^t$ und auf $U = K$ ergibt dies $\overline{H}$-Rechtscomodulstrukturen auf den Vektorräumen $H \otimes \overline{H}$, $K^t \otimes \overline{H}$ und $K \otimes \overline{H}$.

---

[331] Diese $\overline{H}$-Rechtscomodulstruktur ist wohldefiniert, denn die Abbildung

$$H \times U \to (H \otimes_K U) \otimes \overline{H}, \qquad (x, u) \mapsto \left(x_{(1)} \otimes u\right) \otimes \overline{x_{(2)}}$$

ist K-tensoriell (denn für alle $x \in H$, $u \in U$ und $k \in K$ schickt sie (xk, u) auf

$$\left((xk)_{(1)} \otimes u\right) \otimes \overline{(xk)_{(2)}} = \left(x_{(1)}k_{(1)} \otimes u\right) \otimes \overline{x_{(2)}k_{(2)}} = \left(x_{(1)}k_{(1)} \otimes u\right) \otimes \overline{x_{(2)}\varepsilon\left(k_{(2)}\right)}$$
$$\left(\begin{array}{c}\text{denn } \overline{x_{(2)}k_{(2)}} = \overline{x_{(2)}\varepsilon\left(k_{(2)}\right)} \text{ in } \overline{H}\text{, weil } \overline{H} = H \diagup I \text{ und} \\ x_{(2)}k_{(2)} - x_{(2)}\varepsilon\left(k_{(2)}\right) = \underbrace{x_{(2)}}_{\in H}\underbrace{\left(k_{(2)} - \varepsilon\left(k_{(2)}\right)\right)}_{\in K^+} \in HK^+ = I\end{array}\right)$$
$$= \left(x_{(1)}\underbrace{k_{(1)}\varepsilon\left(k_{(2)}\right)}_{=k} \otimes u\right) \otimes \overline{x_{(2)}} = \left(x_{(1)} \otimes ku\right) \otimes \overline{x_{(2)}}$$

und (x, ku) auf $\left(x_{(1)} \otimes ku\right) \otimes \overline{x_{(2)}}$ (was das gleiche ist)). Daß sie tatsächlich coassoziativ und counitär ist, ist nicht schwer nachzuprüfen.

[332] Diese $\overline{H}$-Rechtscomodulstruktur ist wohldefiniert, coassoziativ und counitär (dies ist alles beinahe trivial).

[333] Dies ist genau die K-Linksmodulstruktur, die entsteht, wenn man den (K, k)-Bimodul U mit dem k-Linksmodul $\overline{H}$ tensoriert.

[334] Daß diese $\overline{H}$-Rechtscomodulstruktur wohldefiniert, coassoziativ und counitär ist, ist leicht zu sehen.

Die Abbildung $\Phi \circ \operatorname{kan}_2 : H \otimes_K H \to H \otimes \overline{H}$ ist K-linkslinear[335] und $\overline{H}$-rechtscolinear[336].

Wir betrachten nun folgende Kette (kein Kettenkomplex) von Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd} H^t \arrow[r, "\cong"'] & (H \otimes_K K)^t \arrow[r, "\cong"'] & H \otimes_K K^t \arrow[r, "\cong"'] & H \otimes_K H \arrow[d, "\Phi\circ\operatorname{kan}_2", "\cong"'] \\ & \left(K \otimes \overline{H}\right)^t & K^t \otimes \overline{H} \arrow[l, "\cong"'] & H \otimes \overline{H} \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

(wobei wir die Isomorphismen $H \otimes_K K^t \to H \otimes_K H$ und $H \otimes \overline{H} \to K^t \otimes \overline{H}$ aus der Isomorphie ${}_K H \cong {}_K K^t$ bekommen haben). Alle Isomorphismen in dieser Kette sind gleichzeitig K-linkslinear und $\overline{H}$-rechtscolinear (mit den vorhin definierten K-Linksmodulstrukturen und $\overline{H}$-Rechtscomodulstrukturen auf den Vektorräumen). Die Verkettung dieser Isomorphismen ist also ein K-linkslinearer und $\overline{H}$-rechtscolinearer Isomorphismus $H^t \to \left(K \otimes \overline{H}\right)^t$. Bezeichnen wir diesen Isomorphismus mit Ξ. Dann ist Ξ ein Isomorphismus von $H^t \to \left(K \otimes \overline{H}\right)^t$, welcher gleichzeitig ein K-Linksmodulisomorphismus und ein $\overline{H}$-Rechtscomodulisomorphismus ist (denn er ist K-linkslinear und $\overline{H}$-rechtscolinear). Nach Folgerung 6.52 (angewandt auf H, $K \otimes \overline{H}$, K, $\overline{H}$ und Ξ statt V, W, A, C und Φ) gibt es also einen Isomorphismus $\xi : H \to K \otimes \overline{H}$, der gleichzeitig ein K-Linksmodulisomorphismus und ein $\overline{H}$-Rechtscomodulisomorphismus ist. Das heißt, $.H^{\cdot} \cong .K \otimes \overline{H}^{\cdot}$ bezüglich K und $\overline{H}$. Wegen $\overline{H} = H \diagup I$ ist damit Satz 4.20 bewiesen.[337]

---

[335] denn für alle $k \in K$, $x \in H$ und $y \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
&(\Phi \circ \operatorname{kan}_2)\left(k\left(x \otimes y\right)\right) \\
&= (\Phi \circ \operatorname{kan}_2)\left(kx \otimes y\right) = (kx)_{(1)}\, y \otimes \overline{(kx)_{(2)}} \qquad \text{(nach (III.4.10))} \\
&= k_{(1)} x_{(1)} y \otimes \overline{k_{(2)} x_{(2)}} \\
&= k x_{(1)} y \otimes \overline{1 x_{(2)}} \qquad \left(\text{denn wegen } k \in K = H^{\operatorname{Co}(H \diagup I)} = H^{\operatorname{Co} \overline{H}} \text{ ist } k_{(1)} \otimes \overline{k_{(2)}} = k \otimes \overline{1}\right) \\
&= k \underbrace{x_{(1)} y \otimes \overline{x_{(2)}}}_{=(\Phi\circ\operatorname{kan}_2)(x\otimes y) \text{ (nach (III.4.10))}} = k\left(\Phi \circ \operatorname{kan}_2\right)\left(x \otimes y\right)
\end{aligned}$$

[336] *Beweis:* Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H \otimes_K H \arrow[r, "\Phi\circ\operatorname{kan}_2"] \arrow[d, "\delta_{H\otimes_K H}"'] & H \otimes \overline{H} \arrow[d, "\delta_{H\otimes\overline{H}}"] \\ (H \otimes_K H) \otimes \overline{H} \arrow[r, "(\Phi\circ\operatorname{kan}_2)\otimes\operatorname{id}"'] & \left(H \otimes \overline{H}\right) \otimes \overline{H} \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, denn verfolgt man ein Element $x \otimes y \in H \otimes_K H$ durch dieses Diagramm, so erhält man

$$\begin{tikzcd} x \otimes y \arrow[r, mapsto, "\Phi\circ\operatorname{kan}_2"] \arrow[d, mapsto, "\delta_{H\otimes_K H}"'] & x_{(1)} y \otimes \overline{x_{(2)}} \arrow[d, mapsto, "\delta_{H\otimes\overline{H}}"] \\ \left(x_{(1)} \otimes y\right) \otimes \overline{x_{(2)}} \arrow[r, mapsto, "(\Phi\circ\operatorname{kan}_2)\otimes\operatorname{id}"'] & \left(x_{(1)} y \otimes \overline{x_{(2)}}\right) \otimes \overline{x_{(3)}} \end{tikzcd}$$

(hier wurde (III.4.10) zweimal verwendet). Somit ist $\Phi \circ \operatorname{kan}_2$ eine $\overline{H}$-rechtscolineare Abbildung.

[337] Dieser Beweis von Satz 4.20 ist nicht genau der Beweis, der in der Vorlesung gegeben wurde, sondern eine Variation davon.

4.21. Satz (Normalbasis): Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei $K \subseteq H$ eine Unterhopfalgebra. Dann ist

$$^{\cdot}H_{.} \cong {}^{\cdot}H \diagup HK^{+} \otimes K_{.} \quad \text{als } H \diagup HK^{+}\text{-Linkscomoduln und als } K\text{-Rechtsmoduln;}$$

$$_{.}H^{\cdot} \cong {}_{.}K \otimes H \diagup K^{+}H^{\cdot} \quad \text{als } K\text{-Linksmoduln und als } H \diagup K^{+}H\text{-Rechtscomoduln.}$$

Beweis: Die erste Isomorphie folgt aus 4.20. durch Dualisieren.

Die zweite Isomorphie folgt aus 4.20. durch Anwendung von $\operatorname{op}\operatorname{cop}$.

Bemerkung: Die Theorie der Normalbasissätze beschränkt sich nicht auf Satz 4.20 und 4.21. Es gilt auch ein Analogon von Satz 4.21 für Rechtscoidealunteralgebren statt Unterhopfalgebren K. Normalbasissätze gelten auch für allgemeine Linkscoidealunteralgebren, Coideal + Linksideal statt Unterhopfalgebra, Quotientenhopfalgebra.

5. Darstellungen halbeinfacher Hopfalgebren

[**Vorbemerkung:** Dieser Abschnitt stammt aus der Feder von mir, Darij Grinberg. Im Moment ist er eine Baustelle; irgendwann in Zukunft wird er einige Resultate über Moduln über halbeinfachen Hopfalgebren enthalten.

Momentan ist hinsichtlich Darstellungstheorie zu verweisen auf:

"*Representation Theory of Semisimple Hopf Algebras*" von S. Montgomery im Sammelband "K. W. Roggenkamp and M. Stefanescu (eds.): *Algebra - Representation Theory*" (S. 189-218).]

Wir werden nun die Theorie der Moduln über halbeinfachen Hopfalgebren (Kapitel III.3) fortführen. Ein mit der Darstellungstheorie endlicher Gruppen vertrauter Leser viele der folgenden Sätze als Verallgemeinerungen bekannter Eigenschaften von Darstellungen endlicher Gruppen wiedererkennen. Denn für jede endliche Gruppe G ist eine Darstellung von G (das heißt, ein G-Linksmodul) nichts anderes als ein $k[G]$-Linksmodul, und viele Eigenschaften von Hopfalgebren, die wir in Kapitel III.1-3 bewiesen haben, lassen sich auf die Hopfalgebra $k[G]$ anwenden (denn laut Beispiel $1.2\frac{1}{2}$. **1)** ist die Hopfalgebra $k[G]$ stets unimodular, und laut 3.7. ist sie genau dann halbeinfach, wenn $\operatorname{char} k \nmid |G|$ ist).

Einfache H-Linksmoduln und das Schur-Lemma

[...]

[Hier wird noch alles überarbeitet.]

[...]

Zuerst werden wir einige grundlegende Aussagen nachweisen, die von Moduln über halbeinfachen Algebren – nicht notwendigerweise Hopfalgebren – handeln. Die Hopfalgebrastruktur wird erst später benötigt.

Definition: Sei H eine Algebra, und sei $V \in {}_{H}\mathcal{M}$. Dann heißt der H-Linksmodul V *einfach*, wenn $V \neq 0$ ist, und jeder H-Untermodul von V entweder $= 0$ oder $= V$ ist.

5.1. Beispiel: Man bezeichnet H-Linksmoduln auch als *Darstellungen der Algebra H*, und einfache H-Linksmoduln auch als *irreduzible Darstellungen der Algebra H*. Dies geht auf folgende Tatsache zurück: Ist G eine Gruppe, so sind die $k[G]$-Linksmoduln nichts anderes als die Darstellungen der Gruppe G (denn eine Darstellung der Gruppe G ist ein Vektorraum mit einer G-Linksmodulstruktur, und eine

G-Linksmodulstruktur entspricht eineindeutig einer $k[G]$-Linksmodulstruktur). Die einfachen $k[G]$-Linksmoduln sind die irreduziblen Darstellungen der Gruppe G.

5.2. Bemerkung: Sei H eine halbeinfache Algebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$ von 0 verschieden. Ist der H-Linksmodul V nicht einfach, dann existieren zwei von 0 verschiedene Untermoduln V_1 und V_2 von V, die $V = V_1 \oplus V_2$ erfüllen.

Beweis: Da der H-Linksmodul V von 0 verschieden und nicht einfach ist, existiert ein von 0 und von V verschiedener Untermodul V_1 von V. Da H halbeinfach ist, ist dieser Untermodul V_1 von V ein direkter Summand von V; das heißt, es gibt einen Untermodul V_2 von V, der $V = V_1 \oplus V_2$ erfüllt. Wir wissen, daß $V_1 \neq 0$ ist, und aus $V_1 \neq V$ folgt auch $V_2 \neq 0$, was zu beweisen war.

5.3. Lemma: Sei H eine halbeinfache Algebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$ endlichdimensional. Dann ist V eine direkte Summe endlich vieler einfacher H-Linksmoduln.

Beweis: Sei n die größte natürliche Zahl, für die n von 0 verschiedene Untermoduln V_1, V_2, ..., V_n von V existieren, welche $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$ erfüllen.[338] Gäbe es ein $i \in \{1, 2, ..., n\}$, für welches der H-Linksmodul V_i nicht einfach wäre, dann gäbe es zwei von 0 verschiedene Untermoduln $V_{i,1}$ und $V_{i,2}$ von V_i mit $V_i = V_{i,1} \oplus V_{i,2}$ (wegen 5.2.), und somit wäre

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_{i-1} \oplus V_i \oplus V_{i+1} \oplus ... \oplus V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_{i-1} \oplus V_{i,1} \oplus V_{i,2} \oplus V_{i+1} \oplus ... \oplus V_n,$$

was im Widerspruch zur Maximalität von n stünde. Also muß für jedes $i \in \{1, 2, ..., n\}$ der H-Linksmodul V_i einfach sein, und damit ist 5.3. bewiesen.

5.4. Satz (Schur): Sei H eine Algebra, und seien $V, W \in {}_H\mathcal{M}$.

1) Ist V ein einfacher H-Linksmodul, dann ist jeder von 0 verschiedene H-Linksmodulhomomorphismus $f : V \to W$ injektiv.

2) Ist W ein einfacher H-Linksmodul, dann ist jeder von 0 verschiedene H-Linksmodulhomomorphismus $f : V \to W$ surjektiv.

3) Sind V und W zwei einfache H-Linksmoduln, dann ist jeder von 0 verschiedene H-Linksmodulhomomorphismus $f : V \to W$ ein H-Linksmodulisomorphismus.

4) Sind V und W zwei einfache H-Linksmoduln, sind n und m zwei positive ganze Zahlen, und ist $f : V^n \to W^m$ ein von 0 verschiedener H-Linksmodulhomomorphismus, dann ist $V \cong W$ in ${}_H\mathcal{M}$.

Beweis: **1)** Offensichtlich ist $\operatorname{Ker} f$ ein Untermodul von V. Da V einfach ist, folgt hieraus, daß entweder $\operatorname{Ker} f = 0$ oder $\operatorname{Ker} f = V$ ist. Doch $\operatorname{Ker} f = V$ ist nicht möglich (da f von 0 verschieden ist); also ist $\operatorname{Ker} f = 0$, und somit ist f injektiv.

2) Offensichtlich ist $f(V)$ ein Untermodul von W. Da W einfach ist, folgt hieraus, daß entweder $f(V) = 0$ oder $f(V) = W$ ist. Doch $f(V) = 0$ ist unmöglich (da f von 0 verschieden ist); also ist $f(V) = W$, und daher ist f surjektiv.

3) Folgt aus **1)** und **2)**.

4) Für jedes $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sei $\phi_k : V \to V^n$ die Injektion, die durch $\phi_k(v) = (0, 0, ..., 0, v, 0, 0, ..., 0)$ (wobei das v hier an der k-ten Stelle im n-Tupel steht) für alle

[338] So eine Zahl n existiert, denn aus den Bedingungen $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$ und $V_i \neq 0$ für alle i folgt

$$\begin{aligned} n &\leq \dim V_1 + \dim V_2 + ... + \dim V_n \qquad \text{(denn für jedes } i \text{ ist } V_i \neq 0 \text{ und daher } 1 \leq \dim V_i) \\ &= \dim(V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n) = \dim V \end{aligned}$$

für n, woraus (wegen $\dim V < \infty$) folgt, daß die Menge aller solchen Zahlen n beschränkt ist und somit eine größte solche Zahl existiert.

$v \in V$ definiert ist. Dann ist $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus ... \oplus \phi_n : V^n \to V^n$ die Identitätsabbildung. Da $f \neq 0$ ist, gibt es also ein $k \in \{1, 2, ..., n\}$ mit $f \circ \phi_k \neq 0$.

Für jedes $\ell \in \{1, 2, ..., m\}$ sei $\pi_\ell : W^m \to W$ die Surjektion, die durch $\pi_\ell(w_1, w_2, ..., w_m) = w_\ell$ für alle $(w_1, w_2, ..., w_m) \in W^m$ definiert ist. Dann ist $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus ... \oplus \pi_m : W^m \to W^m$ die Identitätsabbildung. Da $f \circ \phi_k \neq 0$ ist, gibt es also ein $\ell \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $\pi_\ell \circ f \circ \phi_k \neq 0$.

Somit ist $\pi_\ell \circ f \circ \phi_k : V \to W$ ein von 0 verschiedener H-Linksmodulhomomorphismus. Da V und W zwei einfache H-Linksmoduln sind, folgt aus **3)** somit, daß $\pi_\ell \circ f \circ \phi_k : V \to W$ ein Isomorphismus ist, und damit ist $V \cong W$ in ${}_H\mathcal{M}$. Damit ist **4)** gezeigt.

5.5. Satz (Schur): Sei H eine Algebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$ ein einfacher H-Linksmodul. Dann ist $\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(V, V)$ ein Schiefkörper.

Beweis: Wegen $\operatorname{id}_V \in \operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(V, V)$ und $\operatorname{id}_V \neq 0$ (da $V \neq 0$) ist $\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(V, V) \neq 0$.

Jedes von 0 verschiedene Element von $\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(V, V)$ ist ein von 0 verschiedener H-Linksmodulhomomorphismus von V nach V, und daher (nach 5.4. **3)**) ein Isomorphismus, also in $\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(V, V)$ invertierbar. Damit ist $\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(V, V)$ ein Schiefkörper.

5.6. Satz: Sei H eine halbeinfache Algebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$ endlichdimensional.

Dann gibt es eine nichtnegative ganze Zahl m, sowie m Untermoduln W_1, W_2, ..., W_m von V, sowie m einfache H-Linksmoduln U_1, U_2, ..., U_m und m positive ganze Zahlen a_1, a_2, ..., a_m so, daß folgende drei Eigenschaften gelten:

a) Für je zwei $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $i \neq j$ gilt $U_i \ncong U_j$ in ${}_H\mathcal{M}$.

b) Es gilt $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_m$ in ${}_H\mathcal{M}$.

c) Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ ist $W_i \cong U_i^{a_i}$ in ${}_H\mathcal{M}$.

Beweis: Nach 5.3. ist V eine direkte Summe endlich vieler einfacher H-Linksmoduln, d. h. es gibt eine natürliche Zahl n sowie n einfache Untermoduln V_1, V_2, ..., V_n von V, welche $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$ erfüllen. Sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß unter den n Untermoduln V_1, V_2, ..., V_n von V genau m paarweise nicht-isomorphe vorkommen; wir bezeichnen diese m paarweise nicht-isomorphen Untermoduln mit U_1, U_2, ..., U_m. Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ sei a_i die Anzahl der $j \in \{1, 2, ..., n\}$, die $V_j \cong U_i$ erfüllen, und $W_i = \bigoplus\limits_{\substack{j \in \{1,2,...,n\};\\ V_j \cong U_i}} V_j$. Dann ist $W_i \cong U_i^{a_i}$ in ${}_H\mathcal{M}$, und aus $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$ wird offensichtlich $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_m$ in ${}_H\mathcal{M}$. Somit sind die Bedingungen **b)** und **c)** erfüllt. Die Bedingung **a)** ist trivialerweise erfüllt (nach Definition von U_1, U_2, ..., U_m). Damit ist Satz 5.6. bewiesen.

Folgender Satz behauptet im Wesentlichen, daß in Satz 5.6. (für feste H und V) die Zahl m, die Untermoduln W_1, W_2, ..., W_m (bis auf die Reihenfolge) und die Zahlen a_1, a_2, ..., a_m (ebenfalls bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt sind, und die einfachen H-Linksmoduln U_1, U_2, ..., U_m bis auf Isomorphie (und wieder bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt sind:

5.7. Satz: Sei H eine Algebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$ endlichdimensional.

Sei m eine nichtnegative ganze Zahl; seien W_1, W_2, ..., W_m Untermoduln von V; seien U_1, U_2, ..., U_m einfache H-Linksmoduln; seien a_1, a_2, ..., a_m positive ganze Zahlen. Angenommen, folgende Bedingungen sind erfüllt:

a) Für je zwei $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $i \neq j$ gilt $U_i \ncong U_j$ in ${}_H\mathcal{M}$.

b) Es gilt $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_m$ in ${}_H\mathcal{M}$.

c) Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ ist $W_i \cong U_i^{a_i}$ in ${}_H\mathcal{M}$.

Sei ferner m' eine nichtnegative ganze Zahl; seien W_1', W_2', ..., $W_{m'}'$ Untermoduln von V; seien U_1', U_2', ..., $U_{m'}'$ einfache H-Linksmoduln; seien a_1', a_2', ..., $a_{m'}'$ positive ganze Zahlen. Angenommen, folgende Bedingungen sind erfüllt:

a') Für je zwei $i, j \in \{1, 2, ..., m'\}$ mit $i \neq j$ gilt $U_i' \ncong U_j'$ in ${}_H\mathcal{M}$.

b') Es gilt $V = W_1' \oplus W_2' \oplus ... \oplus W_{m'}'$ in ${}_H\mathcal{M}$.

c') Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m'\}$ ist $W_i' \cong (U_i')^{a_i'}$ in ${}_H\mathcal{M}$.

Dann gilt $m = m'$, und es gibt eine Permutation $\pi \in S_m$, die $W_i = W'_{\pi(i)}$, $U_i \cong U'_{\pi(i)}$ und $a_i = a'_{\pi(i)}$ für alle $i \in \{1, 2, ..., m\}$ erfüllt.

Beweis: Lemma 1: Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ und jeden zu U_i isomorphen Untermodul E von V gibt es ein $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$ mit $U_i \cong E \cong U_{i'}'$ und $E \subseteq W_{i'}'$.

Beweis von Lemma 1: Wir halten i und E fest.

Die Zerlegung $V = W_1' \oplus W_2' \oplus ... \oplus W_{m'}'$ induziert eine H-linkslineare Projektion $\pi_{i'} : V \to W_{i'}'$ für jedes $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$ so, daß $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus ... \oplus \pi_{m'} : V \to W_1' \oplus W_2' \oplus ... \oplus W_{m'}'$ die Identität ist. Wir bemerken, daß folgende drei Aussagen gelten:

Hilfsaussage 1: Es gibt ein $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$, welches $\pi_{i'}(E) \neq 0$ erfüllt.

(Denn sonst wäre $E = 0$, weil $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus ... \oplus \pi_{m'}$ die Identität ist.)

Hilfsaussage 2: Ist $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$ ein Element, das $\pi_{i'}(E) \neq 0$ erfüllt, dann ist $E \cong U_{i'}'$.

(Denn aus $\pi_{i'}(E) \neq 0$ folgt, daß $\pi_{i'} \mid_E : E \to W_{i'}'$ ein von 0 verschiedener H-Linksmodulhomomorphismus ist; wegen $E = E^1$ und $W_{i'}' \cong (U_{i'}')^{a_{i'}'}$ gibt es somit einen von 0 verschiedenen H-Linksmodulhomomorphismus $E^1 \to (U_{i'}')^{a_{i'}'}$, und nach Satz 5.4. **4)** folgt hieraus $E \cong U_{i'}'$ in ${}_H\mathcal{M}$ (da E und $U_{i'}'$ einfache H-Linksmoduln sind[339]).)

Hilfsaussage 3: Sind i' und j' zwei Elemente von $\{1, 2, ..., m'\}$, die $\pi_{i'}(E) \neq 0$ und $\pi_{j'}(E) \neq 0$ erfüllen, dann ist $i' = j'$.

(Denn aus $\pi_{i'}(E) \neq 0$ folgt nach Hilfsaussage 2, daß $E \cong U_{i'}'$ in ${}_H\mathcal{M}$ gilt, und analog ergibt sich $E \cong U_{j'}'$ in ${}_H\mathcal{M}$, also $U_{i'}' \cong U_{j'}'$ in ${}_H\mathcal{M}$, was wegen der Bedingung **a')** sofort auf $i' = j'$ führt.)

Aus den Hilfsaussagen 1 und 3 folgt: Es gibt genau ein $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$, welches $\pi_{i'}(E) \neq 0$ erfüllt. Dieses i' muss folglich $E \subseteq W_{i'}'$ erfüllen. Gemäß Hilfsaussage 2 erfüllt dieses i' außerdem $E \cong U_{i'}'$. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2: Es gibt eine Abbildung $\pi : \{1, 2, ..., m\} \to \{1, 2, ..., m'\}$ so, daß gilt: Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ gilt $U_i \cong U'_{\pi(i)}$ und $W_i \subseteq W'_{\pi(i)}$.

Beweis von Lemma 2: Wir konstruieren die Abbildung $\pi : \{1, 2, ..., m\} \to \{1, 2, ..., m'\}$ wie folgt:

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ gibt es einen zu U_i isomorphen Untermodul E von V (denn W_i ist ein Untermodul von V, und wegen $W_i \cong U_i^{a_i}$ hat W_i einen zu U_i isomorphen Untermodul). Nach Lemma 1 gibt es zu diesem Untermodul ein $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$ mit $U_i \cong E \cong U_{i'}'$ und $E \subseteq W_{i'}'$. Dieses i' ist außerdem durch i eindeutig bestimmt (es hängt also nicht einmal von der konkreten Wahl von E bei festem i ab!), denn es muß ja $U_i \cong U_{i'}'$ erfüllen, doch nach Bedingung **a')** kann zu jedem i höchstens ein $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$ existieren, welches $U_i \cong U_{i'}'$ erfüllt. Setze jetzt $\pi(i) = i'$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Auf diese Weise ist eine Abbildung $\pi : \{1, 2, ..., m\} \to \{1, 2, ..., m'\}$ gegeben.

Wir müssen nun zeigen, daß $U_i \cong U'_{\pi(i)}$ und $W_i \subseteq W'_{\pi(i)}$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ gilt.

[339] Für $U_{i'}'$ ist das eine Annahme gewesen; für E folgt dies aus $E \cong U_i$.

In der Tat folgt aus der Definition von $\pi(i)$, daß $\pi(i) = i'$ für ein $i' \in \{1, 2, ..., m'\}$ mit $U_i \cong U'_{i'}$ gilt. Daraus folgt sofort $U_i \cong U'_{\pi(i)}$.

Jetzt wollen wir beweisen, daß $W_i \subseteq W'_{\pi(i)}$ ist. In der Tat ist W_i eine direkte Summe von a_i vielen zu U_i isomorphen Untermoduln von V (denn $W_i \cong U_i^{a_i}$). Zum Beweis von $W_i \subseteq W'_{\pi(i)}$ reicht es also aus zu zeigen, daß $E \subseteq W'_{\pi(i)}$ für jeden zu U_i isomorphen Untermodul E von V gilt. Doch dies ist klar, denn aus Lemma 1 folgt $E \subseteq W'_{i'}$, was wegen $i' = \pi(i)$ zu $E \subseteq W'_{\pi(i)}$ wird. Damit ist der Beweis von Lemma 2 vollständig.

Lemma 3: Es gibt eine Abbildung $\pi' : \{1, 2, ..., m'\} \to \{1, 2, ..., m\}$ so, daß gilt: Für jedes $j \in \{1, 2, ..., m'\}$ gilt $U'_j \cong U_{\pi'(j)}$ und $W'_j \subseteq W_{\pi'(j)}$.

Beweis von Lemma 3: Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von Lemma 2 (denn eigentlich ist Lemma 3 nichts anderes als Lemma 2 nach Vertauschung von m mit m', von i mit j, von π mit π', von W_i mit W'_i, von U_i mit U'_i, und von a_i mit a'_i).

Lemma 4: Es gilt $m = m'$, und die Abbildung π aus Lemma 2 ist eine Permutation von $\{1, 2, ..., m\}$.

Beweis von Lemma 4: Betrachten wir die Abbildung π aus Lemma 2 und die Abbildung π' aus Lemma 3. Für jedes i gilt $U_i \cong U'_{\pi(i)}$ (nach Lemma 2) und $U'_{\pi(i)} \cong U_{\pi'(\pi(i))}$ (nach Lemma 3, angewandt auf $j = \pi(i)$), also $U_i \cong U_{\pi'(\pi(i))}$. Daher ist $i = \pi'(\pi(i))$ (nach Bedingung **a)**). Da dies für jedes i gilt, ist also $\pi' \circ \pi = \mathrm{id}$. Analog ist $\pi \circ \pi' = \mathrm{id}$. Somit sind die Abbildungen $\pi : \{1, 2, ..., m\} \to \{1, 2, ..., m'\}$ und $\pi' : \{1, 2, ..., m'\} \to \{1, 2, ..., m\}$ zueinander invers. Hieraus folgt $m = m'$, und ferner folgt, daß die Abbildung π eine Permutation von $\{1, 2, ..., m\}$ ist. Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Lemma 5: Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ gilt $U_i \cong U'_{\pi(i)}$, $W_i = W'_{\pi(i)}$, und $a_i = a'_{\pi(i)}$.

Beweis von Lemma 5: Bereits aus Lemma 2 folgt $U_i \cong U'_{\pi(i)}$. Weiterhin ist $W_i \subseteq W'_{\pi(i)}$ (nach Lemma 2) und $W'_{\pi(i)} \subseteq W_{\pi'(\pi(i))}$ (nach Lemma 3, angewandt auf $j = \pi(i)$), also $W_i \subseteq W'_{\pi(i)} \subseteq W_{\pi'(\pi(i))} = W_i$ (da $\pi' \circ \pi = \mathrm{id}$ laut dem Beweis von Lemma 4). Hieraus folgt $W_i = W'_{\pi(i)}$. Schließlich ist $U_i^{a_i} \cong W_i = W'_{\pi(i)} \cong \left(U'_{\pi(i)}\right)^{a'_{\pi(i)}} \cong U_i^{a'_{\pi(i)}}$ (letzteres wegen $U_i \cong U'_{\pi(i)}$), also $a_i = a'_{\pi(i)}$ (denn da U_i endlichdimensional und $\neq 0$ ist, müssen je zwei natürliche Zahlen μ und ν, für die $U_i^{\mu} \cong U_i^{\nu}$ gilt, auch $\mu = \nu$ erfüllen). Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Aus den Lemmata 4 und 5 folgt Satz 5.7.

Definition: Sei H eine halbeinfache Algebra, und sei $V \in {}_H\mathcal{M}$ endlichdimensional. Sei $E \in {}_H\mathcal{M}$ ein einfacher H-Linksmodul.

Seien eine nichtnegative ganze Zahl m, Untermoduln W_1, W_2, ..., W_m von V, einfache H-Linksmoduln U_1, U_2, ..., U_m und positive ganze Zahlen a_1, a_2, ..., a_m so definiert wie in Satz 5.6.

1) Nach Satz 5.6. gilt $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_m$ sowie $W_i \cong U_i^{a_i}$ in ${}_H\mathcal{M}$ für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Somit ist $V \cong U_1^{a_1} \oplus U_2^{a_2} \oplus ... \oplus U_m^{a_m}$ in ${}_H\mathcal{M}$. Diese Zerlegung $V \cong U_1^{a_1} \oplus U_2^{a_2} \oplus ... \oplus U_m^{a_m}$ bezeichnet man als *die Zerlegung von V in einfache H-Linksmoduln.* Gemäß Satz 5.7. ist diese Zerlegung eindeutig bis auf Vertauschung der Summanden.

2) Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl.

Man sagt, der einfache H-Linksmodul E *kommt k-mal im Modul V* vor, wenn es ein $i \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $U_i \cong E$ gibt, und wenn $a_i = k$ für dieses i gilt.

Ferner sagt man, der einfache H-Linksmodul E *kommt 0-mal im Modul V* vor, wenn es kein $i \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $U_i \cong E$ gibt.

Man sagt, der einfache H-Linksmodul E *kommt im Modul* V vor, wenn er k-mal im Modul V vorkommt für irgendein $k \geq 1$ (also wenn es ein $i \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $U_i \cong E$ gibt).

Gemäß Satz 5.7. hängt diese Definition nur von H, V, E und k, nicht aber von m, W_1, W_2, ..., W_m, U_1, U_2, ..., U_m und a_1, a_2, ..., a_m ab.

5.8. Satz: Sei H eine halbeinfache Algebra mit $\dim H < \infty$. Sei $H \cong H_1^{a_1} \oplus H_2^{a_2} \oplus ... \oplus H_m^{a_m}$ die Zerlegung von H in einfache H-Linksmoduln (das heißt, H_1, H_2, ..., H_m sind einfache H-Linksmoduln mit $H_i \not\cong H_j$ in ${}_H\mathcal{M}$ für alle $i \neq j$). Sei E ein einfacher H-Linksmodul. Dann gibt es ein $i \in \{1, 2, ..., m\}$, das $H_i \cong E$ in ${}_H\mathcal{M}$ und $a_i = \dfrac{\dim\left(\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(E, H)\right)}{\dim\left(\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(E, E)\right)} = \dfrac{\dim\left(\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(H, E)\right)}{\dim\left(\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(E, E)\right)}$ erfüllt.

Bemerkung: Der H-Linksmodul H heißt die *reguläre Darstellung von* H. Dieser Satz 5.8. sagt also aus, daß (im Falle von $\dim H < \infty$) jede irreduzible Darstellung E von H in der regulären Darstellung von H vorkommt, und zwar $\dfrac{\dim\left(\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(E, H)\right)}{\dim\left(\operatorname{Hom}_{{}_H\mathcal{M}}(E, E)\right)}$-mal.

Beweis: Der Isomorphismus $H \cong H_1^{a_1} \oplus H_2^{a_2} \oplus ... \oplus H_m^{a_m}$ induziert Injektionen $\phi_i : H_i^{a_i} \to H$ für alle $i \in \{1, 2, ..., m\}$ so, daß $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus ... \oplus \phi_m$ ein Isomorphismus ist.

Der Isomorphismus $H \cong H_1^{a_1} \oplus H_2^{a_2} \oplus ... \oplus H_m^{a_m}$ induziert ferner Surjektionen $\pi_i : H \to H_i^{a_i}$ für alle $i \in \{1, 2, ..., m\}$ so, daß $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus ... \oplus \pi_m$ ein Isomorphismus ist.

a) Zuerst zeigen wir, daß es ein $i \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $H_i \cong E$ in ${}_H\mathcal{M}$ gibt.

Beweis: Sei $e \in E$ ein von 0 verschiedenes Element von E. Betrachte den H-Linksmodulhomomorphismus $R_e : H \to E$, der durch $R_e(h) = he$ für alle $h \in H$ gegeben ist. Dieser H-Linksmodulhomomorphismus ist von 0 verschieden (da $R_e(1) = 1e = e \neq 0$).

Sei $i \in \{1, 2, ..., m\}$ so gewählt, daß $R_e \circ \phi_i \neq 0$ ist (so ein i existiert, da $R_e \neq 0$ ist, und da $\phi_1 \oplus \phi_2 \oplus ... \oplus \phi_m$ ein Isomorphismus ist). Dann ist $R_e \circ \phi_i : H_i^{a_i} \to E$ ein von 0 verschiedener H-Linksmodulhomomorphismus. Da H_i und E einfache H-Linksmoduln sind, und $E = E^1$ ist, folgt jetzt aus Satz 5.4. **4)**, daß $H_i \cong E$ ist.

b) Wir werden jetzt zeigen, daß für jeden H-Linksmodulhomomorphismus $\rho : H \to E$ gilt: $\rho = \rho \circ \phi_i \circ \pi_i$ (wobei das i wie in **a)** definiert ist).

Beweis: Wir wollen zuerst beweisen, daß für jedes $j \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $j \neq i$ gilt: $\rho \circ \phi_j = 0$.

In der Tat nehmen wir an, es gäbe ein $j \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $j \neq i$ und $\rho \circ \phi_j \neq 0$. Dann ist $\rho \circ \phi_j : H_j^{a_j} \to E$ ein von 0 verschiedener H-Linksmodulhomomorphismus. Da H_j und E einfache H-Linksmoduln sind, und $E = E^1$ ist, folgt hieraus nach Satz 5.4. **4)**, daß $H_j \cong E$ ist. Damit ist $H_i \cong E \cong H_j$. Doch aus $j \neq i$ folgt $H_i \not\cong H_j$ (laut Bedingung des Satzes), was einen Widerspruch darstellt. Daher war unsere Annahme falsch, d. h. es gibt kein $j \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $j \neq i$ und $\rho \circ \phi_j \neq 0$. Somit ist gezeigt, daß jedes $j \in \{1, 2, ..., m\}$ mit $j \neq i$ die Gleichung $\rho \circ \phi_j = 0$ erfüllt. Nun ist $\operatorname{id}_H = \sum\limits_{j \in \{1,2,...,m\}} \phi_j \circ \pi_j$. Somit ist

$$\rho = \rho \circ \operatorname{id}_H = \rho \circ \sum_{j \in \{1,2,...,m\}} \phi_j \circ \pi_j = \sum_{j \in \{1,2,...,m\}} \underbrace{\rho \circ \phi_j}_{=0 \text{ für alle } j \neq i} \circ \pi_j = \rho \circ \phi_i \circ \pi_i,$$

was zu beweisen war.

c) Aus **b)** folgt, daß

$$\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H,E) \to \mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H_i^{a_i},E), \qquad \rho \mapsto \rho \circ \phi_i$$

und

$$\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H_i^{a_i},E) \to \mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H,E), \qquad \rho \mapsto \rho \circ \pi_i$$

zueinander inverse Vektorraumisomorphismen sind. Daher ist $\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H,E) \cong \mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H_i^{a_i},E)$, und folglich

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H,E)) &= \dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H_i^{a_i},E)) = \dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E^{a_i},E)) \qquad (\text{da } H_i \cong E) \\ &= \dim((\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E))^{a_i}) = a_i \cdot \dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E)),\end{aligned}$$

also $a_i = \dfrac{\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(H,E))}{\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E))}$. (Es sei angemerkt, daß $\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E)) > 0$ ist, da $\mathrm{id}_E \in \mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E)$.)

d) Wir werden jetzt zeigen, daß für jeden H-Linksmodulhomomorphismus $\tau : E \to H$ gilt: $\tau = \phi_i \circ \pi_i \circ \tau$ (wobei das i wie in **a)** definiert ist).

Beweis: Wir wollen zuerst beweisen, daß für jedes $j \in \{1,2,...,m\}$ mit $j \neq i$ gilt: $\pi_j \circ \tau = 0$.

In der Tat nehmen wir an, es gäbe ein $j \in \{1,2,...,m\}$ mit $j \neq i$ und $\pi_j \circ \tau \neq 0$. Dann ist $\pi_j \circ \tau : E \to H_j^{a_j}$ ein von 0 verschiedener H-Linksmodulhomomorphismus. Da H_j und E einfache H-Linksmoduln sind, und $E = E^1$ ist, folgt hieraus nach Satz 5.4. **4)**, daß $H_j \cong E$ ist. Damit ist $H_i \cong E \cong H_j$. Doch aus $j \neq i$ folgt $H_i \ncong H_j$ (laut Bedingung des Satzes), was einen Widerspruch darstellt. Daher war unsere Annahme falsch, d. h. es gibt kein $j \in \{1,2,...,m\}$ mit $j \neq i$ und $\pi_j \circ \tau \neq 0$. Somit ist gezeigt, daß jedes $j \in \{1,2,...,m\}$ mit $j \neq i$ die Gleichung $\pi_j \circ \tau = 0$ erfüllt. Nun ist $\mathrm{id}_H = \sum\limits_{j\in\{1,2,...,m\}} \phi_j \circ \pi_j$. Somit ist

$$\tau = \mathrm{id}_H \circ \tau = \sum_{j\in\{1,2,...,m\}} \phi_j \circ \pi_j \circ \tau = \sum_{j\in\{1,2,...,m\}} \phi_j \circ \underbrace{\pi_j \circ \tau}_{=0 \text{ für alle } j\neq i} = \phi_i \circ \pi_i \circ \tau,$$

was zu beweisen war.

e) Aus **d)** folgt, daß

$$\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H) \to \mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H_i^{a_i}), \qquad \tau \mapsto \pi_i \circ \tau$$

und

$$\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H_i^{a_i}) \to \mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H), \qquad \tau \mapsto \phi_i \circ \tau$$

zueinander inverse Vektorraumisomorphismen sind. Daher ist $\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H) \cong \mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H_i^{a_i})$, und folglich

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H)) &= \dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H_i^{a_i})) = \dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E^{a_i})) \qquad (\text{da } H_i \cong E) \\ &= \dim((\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E))^{a_i}) = a_i \cdot \dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E)),\end{aligned}$$

also $a_i = \dfrac{\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,H))}{\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E))}$. (Wir benutzen hier wieder $\dim(\mathrm{Hom}_{_H\mathcal{M}}(E,E)) > 0$.)

Damit ist Satz 5.8. bewiesen.

Der Hopfalgebrenfall

[formeln]

[klassenfunktionen]

IV. Kapitel: Drinfeld-Doppel und Bosonisierung

1. 2-Cozykeltwist

Definition: Sei H eine Bialgebra, und sei $\sigma : H \times H \to k$ eine k-bilineare Abbildung.

1) Dann heißt σ ein 2-*Cozyklus*, wenn für alle $x, y, z \in H$ gilt: $\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(2)} y_{(2)}, z\right) = \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) \sigma\left(x, y_{(2)} z_{(2)}\right)$.

2) Ferner heißt σ ein *normalisierter* 2-*Cozyklus*, wenn σ ein 2-Cozyklus ist und $\sigma(x, 1) = \varepsilon(x) \cdot 1 = \sigma(1, x)$ für alle $x \in H$ gilt.

Eine *Bemerkung zur Notation:* Wir haben gerade definiert, wann eine k-bilineare Abbildung $\sigma : H \times H \to k$ ein 2-Cozyklus heißt. Jeder k-bilinearen Abbildung $\sigma : H \times H \to k$ entspricht (aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes) eindeutig eine k-lineare Abbildung $\widetilde{\sigma} : H \otimes H \to k$ mit $\sigma = \widetilde{\sigma} \circ \kappa$, wobei $\kappa : H \times H \to H \otimes H$ die universelle k-tensorielle Abbildung ist, und umgekehrt ist für jede k-lineare Abbildung $\sigma_1 : H \otimes H \to k$ die Abbildung $\sigma_1 \circ \kappa : H \times H \to k$ eine k-bilineare Abbildung. Es gibt also eine kanonische Bijektion zwischen den k-bilinearen Abbildungen $H \times H \to k$ und den k-linearen Abbildungen $H \otimes H \to k$. Deshalb können wir den Begriff eines 2-Cozyklus auf k-lineare Abbildungen $H \otimes H \to k$ übertragen, indem wir eine k-lineare Abbildung $\sigma_1 : H \otimes H \to k$ genau dann als einen 2-*Cozyklus* bezeichnen, wenn die davon induzierte Abbildung $\sigma_1 \circ \kappa : H \times H \to k$ ein 2-Cozyklus ist. Wir werden lasch mit Notationen umgehen und sowohl die k-lineare Abbildung $\sigma_1 : H \otimes H \to k$ selber, als auch die Abbildung $\sigma_1 \circ \kappa : H \times H \to k$ beide mit σ_1 bezeichnen. Insofern ist $\sigma_1(x \otimes y)$ ein Synonym von $\sigma_1(x, y)$, wobei $x, y \in H$ sind.

Wir wollen erst einmal motivieren, woher der Begriff eines 2-Cozyklus herkommt, und was er eigentlich bedeutet. Dazu betrachten wir den Begriff eines 2-Cozyklus auf Gruppen statt auf Hopfalgebren:

Definition: Sei H eine Gruppe, und sei N ein Normalteiler von H, der in H zentral ist, und sei $\sigma : H \times H \to N$ eine beliebige Abbildung (nicht unbedingt ein Gruppenhomomorphismus).

1) Dann heißt σ ein 2-*Cozyklus*, wenn für alle $x, y, z \in H$ gilt: $\sigma(x, y) \sigma(xy, z) = \sigma(y, z) \sigma(x, yz)$.

2) Ferner heißt σ ein *normalisierter* 2-*Cozyklus*, wenn σ ein 2-Cozyklus ist und $\sigma(x, 1) = 1 = \sigma(1, x)$ für alle $x \in H$ gilt.

1.1. Bemerkung: 1) Seien G und H Gruppen, und sei $\pi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus[340]. Sei $N = \operatorname{Ker} \pi$. Angenommen, N sei zentral in G. Mit anderen Worten: Sei

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

[340] *Bemerkung am Rande:* Wir hätten hier auch "Epimorphismus von Gruppen" statt "surjektiver Gruppenhomomorphismus" schreiben können, denn ein Homomorphismus von Gruppen ist genau dann surjektiv, wenn er ein Epimorphismus von Gruppen ist. Dies zu beweisen ist jedoch nicht einfach!

eine exakte Folge von Gruppen mit N zentral in G.

Wähle eine Abbildung von Mengen[341] $j : H \to G$ mit $\mathrm{id}_H = \pi j$, also eine Abbildung $j : H \to G$, für welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, dotted, "j"'] \arrow[d, "="] \\ G \arrow[r, two heads, "\pi"'] & H \end{tikzcd}$$

kommutiert (das heißt, eine Wahl von Repräsentanten von H).

Definiere eine Abbildung $\sigma : H \times H \to N$ durch $\sigma(x, y) = j(x)\, j(y)\, j(xy)^{-1}$ für alle $x, y \in H$ (dabei ist tatsächlich $\sigma(x, y) = j(x)\, j(y)\, j(xy)^{-1} \in N$ für alle $x, y \in H$, denn

$$\pi(\sigma(x, y)) = \pi\left(j(x)\, j(y)\, j(xy)^{-1}\right) = \pi(j(x))\, \pi(j(y))\, (\pi(j(xy)))^{-1} = xy\,(xy)^{-1} = 1$$

).

a) Dann ist σ ein 2-Cozyklus, denn für beliebige $x, y, z \in H$ gilt

$$\sigma(x, y)\, \sigma(xy, z) = \sigma(y, z)\, \sigma(x, yz)\,.$$

Beweis: Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \sigma(x, y)\, \sigma(xy, z) &= j(x)\, j(y)\, j(xy)^{-1}\, j(xy)\, j(z)\, j(xyz)^{-1} \\ &= j(x)\, j(y)\, j(z)\, j(xyz)^{-1} \qquad \text{und} \\ \sigma(y, z)\, \sigma(x, yz) &= \sigma(y, z)\, j(x)\, j(yz)\, j(xyz)^{-1} \\ &= j(x)\, \sigma(y, z)\, j(yz)\, j(xyz)^{-1} \qquad (\text{da } \sigma(y, z) \in \operatorname{Ker} \pi = N, \text{ und } N \text{ zentral ist}) \\ &= j(x)\, j(y)\, j(z)\, j(yz)^{-1}\, j(yz)\, j(xyz)^{-1} = j(x)\, j(y)\, j(z)\, j(xyz)^{-1}\,. \end{aligned}$$

b) Ist $j(1) = 1$ [342], dann ist σ ein normalisierter 2-Cozyklus, denn für jedes $x \in H$ ist $\sigma(x, 1) = 1 = \sigma(1, x)$ (wie man leicht sieht).

2) Sei N eine abelsche Gruppe, sei H eine Gruppe, und sei $\sigma : H \times H \to N$ ein normalisierter 2-Cozyklus.

Wir definieren eine Gruppe $N \times_\sigma H$ als die Menge $N \times H$ mit folgender Gruppenverknüpfung:

$$(n, h)\,(n', h') = (nn'\sigma(h, h'),\, hh') \qquad \text{für alle } n, n' \in N \text{ und } h, h' \in H.$$

Dann ist $N \times_\sigma H$ eine Gruppe, und die Folge

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{n \mapsto (n,1)} N \times_\sigma H \xrightarrow{(n,h) \mapsto h} H \longrightarrow 1$$

ist exakt, und N ist zentral in $N \times_\sigma H$ (via der Einbettung $N \to N \times_\sigma H$, $n \mapsto (n, 1)$).

Beweis: Der Beweis ist reine Rechnung. Wir wollen hier exemplarisch nur nachprüfen, daß es ein Inverses in $N \times_\sigma H$ gibt. In der Tat sei $(n, h) \in N \times_\sigma H$. Dann ist

$$(n, h)\left(n^{-1}\sigma\left(h, h^{-1}\right)^{-1}, h^{-1}\right) = \left(nn^{-1}\sigma\left(h, h^{-1}\right)^{-1}\sigma\left(h, h^{-1}\right), hh^{-1}\right) = (1 \cdot 1, 1) = (1, 1)$$

[341] Es muß nicht notwendigerweise ein Gruppenhomomorphismus sein!

[342] Man kann natürlich stets j so wählen, daß $j(1) = 1$ ist.

die Einheit von $N\times_\sigma H$, und somit hat (n,h) ein Inverses. Alle anderen zu beweisenden Eigenschaften sind nicht viel schwieriger.

3) In der Situation von **1)** (so eine Situation heißt *zentrale Erweiterung*) gilt: Die Abbildung

$$N\times_\sigma H\to G, \qquad (n,h)\mapsto nj(h)$$

ist ein Gruppenisomorphismus, wobei j und σ wie in **1) b)** sind.

Beweis: Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für alle $(n,h)\in N\times_\sigma H$ und $(n',h')\in N\times_\sigma H$ bildet sie

$$(n,h)(n',h')=(nn'\sigma(h,h'),hh')$$

ab auf

$$nn'\sigma(h,h')j(hh')=nn'j(h)j(h')j(hh')^{-1}j(hh')=nn'j(h)j(h')=nj(h)n'j(h')$$

(denn $n'\in N$, und N ist zentral in G, also $n'j(h)=j(h)n'$). Ferner ist diese Abbildung surjektiv (denn für jedes $x\in G$ ist $x=\underbrace{x(j(\pi(x)))^{-1}}_{\in N}j\left(\underbrace{\pi(x)}_{\in H}\right)$) und injektiv (denn für je zwei $(n,h)\in N\times H$ und $(n',h')\in N\times H$ mit $nj(h)=n'j(h')$ gilt $(n,h)=(n',h')$ [343]). Diese Abbildung ist also ein Gruppenisomorphismus.

Kommen wir nun jedoch zurück zu Hopfalgebren:

4) Sei H eine Hopfalgebra. Sei A eine H-Rechtscomodulalgebra mit H-Rechtscomodulstruktur $\delta:A\to A\otimes H$. Angenommen, $A^{\mathrm{Co}\,H}=k\cdot 1$.

Wir nehmen ferner an, A sei H-*cleft*, d. h. es gebe eine $*$-invertierbare H-rechtscolineare Abbildung $j:H\to A$ mit $*$-Inversem j'.

Sei eine Abbildung $\sigma:H\times H\to k$ definiert durch

$$\sigma(x,y)=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}y_{(2)}\right) \qquad \text{für alle } x,y\in H.$$

(Strenggenommen ist σ eine Abbildung von $H\times H$ nach $A^{\mathrm{Co}\,H}$, aber wegen $A^{\mathrm{Co}\,H}=k\cdot 1$ wird dieses $A^{\mathrm{Co}\,H}$ mit k identifiziert, weshalb σ zu einer Abbildung von $H\times H$ nach k wird.)

Dann ist σ ein 2-Cozyklus.

Beweis: Wir wollen zuerst beweisen, daß für alle $x,y\in H$ gilt $\sigma(x,y)\in A^{\mathrm{Co}\,H}$.

Zuerst ein Hilfsresultat: Für alle $x\in H$ ist

$$\delta(j'(x))=j'\left(x_{(2)}\right)\otimes S\left(x_{(1)}\right).$$

[343] *Beweis:* Aus $nj(h)=n'j(h')$ folgt $\pi(nj(h))=\pi(n'j(h'))$. Doch wegen $\pi(nj(h))=\underbrace{\pi(n)}_{=1\ (\text{da } n\in N)}\underbrace{\pi(j(h))}_{=h}=h$ und $\pi(n'j(h'))=h'$ (analog) wird dies zu $h=h'$. Daher vereinfacht sich $nj(h)=n'j(h')$ zu $nj(h')=n'j(h')$, also zu $n=n'$. Somit gilt $(n,h)=(n',h')$, was zu beweisen war.

Beweis: Für jedes $x \in H$ ist

$$\underbrace{\delta\left(j\left(x_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=j\left(x_{(1)}\right)\otimes x_{(2)},\\ \text{denn } j \text{ ist } H\text{-rechtscolinear}}}\left(j'\left(x_{(3)}\right)\otimes S\left(x_{(2)}\right)\right)=\left(j\left(x_{(1)}\right)\otimes x_{(2)}\right)\left(j'\left(x_{(4)}\right)\otimes S\left(x_{(3)}\right)\right)$$
$$=j\left(x_{(1)}\right)j'\left(x_{(4)}\right)\otimes\underbrace{x_{(2)}S\left(x_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot 1}=j\left(x_{(1)}\right)j'\left(x_{(3)}\right)\otimes\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot 1$$
$$=j\left(x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\right)j'\left(x_{(3)}\right)\otimes 1=j\left(x_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}\right)\otimes 1=\varepsilon\left(x\right)1\otimes 1$$

und ebenso

$$\left(j'\left(x_{(2)}\right)\otimes S\left(x_{(1)}\right)\right)\delta\left(j\left(x_{(3)}\right)\right)=\varepsilon\left(x\right)1\otimes 1.$$

Die Abbildung $H\to A\otimes H$, $x\mapsto j'\left(x_{(2)}\right)\otimes S\left(x_{(1)}\right)$, ist somit $*$-invers zur Abbildung δj.

Andererseits ist $\delta\left(j\left(x_{(1)}\right)\right)\delta\left(j'\left(x_{(2)}\right)\right)=\delta\left(j\left(x_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}\right)\right)=\delta\left(\varepsilon\left(x\right)1\otimes 1\right)=\varepsilon\left(x\right)1\otimes 1$ und ebenso $\delta\left(j'\left(x_{(1)}\right)\right)\delta\left(j\left(x_{(2)}\right)\right)=\varepsilon\left(x\right)1\otimes 1$. Die Abbildung $\delta j'$ ist also $*$-invers zur Abbildung δj.

In $A\otimes H$ gilt also $\left(\delta j'\right)\left(x\right)=j'\left(x_{(2)}\right)\otimes S\left(x_{(1)}\right)$ für alle $x\in H$ (denn die Abbildungen $H\to A\otimes H$, $x\mapsto j'\left(x_{(2)}\right)\otimes S\left(x_{(1)}\right)$ und $\delta j'$ sind beide $*$-invers zu δj und somit identisch). Das heißt, $\delta\left(j'\left(x\right)\right)=j'\left(x_{(2)}\right)\otimes S\left(x_{(1)}\right)$ für alle $x\in H$.

Für alle $x,y\in H$ gilt nun

$$\begin{aligned}\delta\left(\sigma\left(x,y\right)\right)&=\delta\left(j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)\right)\\&=\underbrace{\delta\left(j\left(x_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=j\left(x_{(1)}\right)\otimes x_{(2)},\\ \text{denn } j \text{ ist } H\text{-rechtscolinear}}}\underbrace{\delta\left(j\left(y_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=j\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)},\\ \text{denn } j \text{ ist } H\text{-rechtscolinear}}}\delta\left(j'\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)\right)\\&=\left(j\left(x_{(1)}\right)\otimes x_{(2)}\right)\left(j\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)}\right)\underbrace{\delta\left(j'\left(x_{(3)}y_{(3)}\right)\right)}_{\substack{=j'\left(\left(x_{(3)}y_{(3)}\right)_{(2)}\right)\otimes S\left(\left(x_{(3)}y_{(3)}\right)_{(1)}\right)\\ \text{nach dem Hilfsresultat}}}\\&=\left(j\left(x_{(1)}\right)\otimes x_{(2)}\right)\left(j\left(y_{(1)}\right)\otimes y_{(2)}\right)\left(j'\left(x_{(4)}y_{(4)}\right)\otimes S\left(x_{(3)}y_{(3)}\right)\right)\\&=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j'\left(x_{(4)}y_{(4)}\right)\otimes x_{(2)}y_{(2)}\underbrace{S\left(x_{(3)}y_{(3)}\right)}_{=S\left(y_{(3)}\right)S\left(x_{(3)}\right)}\\&=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j'\left(x_{(4)}y_{(4)}\right)\otimes\underbrace{x_{(2)}y_{(2)}S\left(y_{(3)}\right)S\left(x_{(3)}\right)}_{\substack{=x_{(2)}\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\cdot 1S\left(x_{(3)}\right)=\varepsilon\left(y_{(2)}\right)x_{(2)}S\left(x_{(3)}\right)\cdot 1\\ =\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot 1\cdot 1=\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot 1}}\\&=j\left(x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\right)j\left(y_{(1)}\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\right)j'\left(x_{(3)}y_{(3)}\right)\otimes 1\\&=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)\otimes 1=\sigma\left(x,y\right)\otimes 1,\end{aligned}$$

also $\sigma\left(x,y\right)\in A^{\operatorname{Co}H}$.

Daß σ ein 2-Cozyklus ist, ist leicht nachzuprüfen: Für alle $x,y,z\in H$ ist

$$\sigma\left(x_{(1)},y_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(2)}y_{(2)},z\right)=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)\underbrace{j'\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)j\left(x_{(3)}y_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}y_{(2)}\right)}j\left(z_{(1)}\right)j'\left(x_{(4)}y_{(4)}z_{(2)}\right)$$
$$=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j\left(z_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}y_{(2)}z_{(2)}\right)$$

und

$$\sigma\left(y_{(1)},z_{(1)}\right)\sigma\left(x,y_{(2)}z_{(2)}\right)=\underbrace{j\left(y_{(1)}\right)j\left(z_{(1)}\right)j'\left(y_{(2)}z_{(2)}\right)}_{\substack{=\sigma\left(y_{(1)},z_{(1)}\right)\in A^{\operatorname{Co}H}=k\cdot 1,\\ \text{daher zentral und somit}\\ \text{mit } j\left(x_{(1)}\right)\text{ vertauschbar}}}j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(3)}z_{(3)}\right)j'\left(x_{(2)}y_{(4)}z_{(4)}\right)$$

$$=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j\left(z_{(1)}\right)\underbrace{j'\left(y_{(2)}z_{(2)}\right)j\left(y_{(3)}z_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(y_{(2)}z_{(2)}\right)}j'\left(x_{(2)}y_{(4)}z_{(4)}\right)$$

$$=j\left(x_{(1)}\right)j\left(y_{(1)}\right)j\left(z_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}y_{(2)}z_{(2)}\right),$$

also $\sigma\left(x_{(1)},y_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(2)}y_{(2)},z\right)=\sigma\left(y_{(1)},z_{(1)}\right)\sigma\left(x,y_{(2)}z_{(2)}\right)$, und somit ist σ ein 2-Cozyklus.

[344]**6)** Sei H eine Hopfalgebra, und sei $\sigma: H\times H\to k$ ein normalisierter 2-Cozyklus. Wir definieren eine H-Rechtscomodulalgebra $k\sharp_\sigma H$ wie folgt:

Als H-Rechtscomodul sei $k\sharp_\sigma H$ identisch mit $k\otimes H$ (das heißt, sowohl die Vektorraumstruktur, als auch die H-Rechtscomodulstruktur auf $k\sharp_\sigma H$ sollen einfach mit den entsprechenden Strukturen auf $k\otimes H$ identisch sein[345]).[346] Die k-Algebrastruktur auf $k\sharp_\sigma H$ sei durch

$$(\alpha\sharp x)(\beta\sharp y)=\alpha\beta\sigma\left(x_{(1)},y_{(1)}\right)\sharp x_{(2)}y_{(2)}\qquad\text{für alle }\alpha,\beta\in k\text{ und }x,y\in H$$

festgelegt, wobei die Notation $\lambda\sharp x$ (wobei $\lambda\in k$ und $x\in H$) einfach das Element $\lambda\otimes x$ von $k\sharp_\sigma H$ bezeichnet (wir schreiben nur deshalb $\lambda\sharp x$ statt $\lambda\otimes x$, weil wir unter $(\alpha\sharp x)(\beta\sharp y)$ das Produkt der Elemente $\alpha\sharp x$ und $\beta\sharp y$ in der k-Algebra $k\sharp_\sigma H$ verstehen wollen, während $(\alpha\otimes x)(\beta\otimes y)$ das Produkt dieser Elemente in der k-Algebra $k\otimes H$ bezeichnet, und diese beiden Produkte ja im Allgemeinen verschieden sind).[347]

Warnung: Auch wenn wir gerade das Zeichen $\sharp$ verwenden, sollte unsere H-Rechtscomodulalgebra $k\sharp_\sigma H$ nicht mit Smashprodukten (wie in Kapitel I.3 eingeführt) verwechselt werden.

[344]Ich habe die Reihenfolge der Beispiele **5)** und **6)** umgekehrt, weil sie so verständlicher sind.

[345]Mit anderen Worten: Als Vektorraum soll $k\sharp_\sigma H=k\otimes H$ sein, und die H-Rechtscomodulstruktur auf $k\sharp_\sigma H$ werde durch

$$k\sharp_\sigma H\to k\sharp_\sigma H\otimes H,\qquad \alpha\sharp x\mapsto\alpha\sharp x_{(1)}\otimes x_{(2)}\qquad\text{für alle }\alpha\in k\text{ und }x\in H$$

definiert.

Dabei verwenden wir die Notation $\lambda\sharp x$ (wobei $\lambda\in k$ und $x\in H$) einfach als Synonym für $\lambda\otimes x$.

[346]Eine *Anmerkung* am Rande: Als H-Rechtscomodul ist $k\otimes H\cong H$, also $k\sharp_\sigma H\cong H$ (als H-Rechtscomodul). Manchem Leser stellt sich deshalb die Frage, warum wir von $k\otimes H$ reden und nicht einfach von H. Dies liegt daran, daß man diese Konstruktion verallgemeinern kann, und bei der Verallgemeinerung k durch etwas größeres ersetzt wird. (Diese Verallgemeinerung ist der Begriff der "crossed product algebra".)

[347]*Bemerkung:* Da $k\sharp_\sigma H=k\otimes H\cong H$ als k-Vektorraum (und sogar als H-Rechtscomodul) ist, hat jedes Element von $k\sharp_\sigma H$ eine eindeutige Darstellung in der Form $1\sharp x$ mit $x\in H$. Deshalb hätten wir die k-Algebrastruktur auf $k\sharp_\sigma H$ genauso gut durch

$$(1\sharp x)(1\sharp y)=\sigma\left(x_{(1)},y_{(1)}\right)\sharp x_{(2)}y_{(2)}\qquad\text{für alle }x,y\in H$$

statt

$$(\alpha\sharp x)(\beta\sharp y)=\alpha\beta\sigma\left(x_{(1)},y_{(1)}\right)\sharp x_{(2)}y_{(2)}\qquad\text{für alle }\alpha,\beta\in k\text{ und }x,y\in H$$

definieren können.

Allerdings haben beide Begriffe eine gemeinsame Verallgemeinerung (nämlich den Begriff einer "crossed product algebra"), was auch erklärt, warum für beide das gleiche Zeichen $\sharp$ benutzt wird.

Wir müssen beweisen, daß das so definierte $k\sharp_\sigma H$ tatsächlich eine H-Rechtscomodulalgebra ist.

Beweis: Die Multiplikation ist assoziativ, denn für alle $x, y, z \in H$ ist

$$\begin{aligned}((1\sharp x)(1\sharp y))(1\sharp z) &= \left(\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right)\sharp x_{(2)}y_{(2)}\right)(1\sharp z) = \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(2)}y_{(2)}, z_{(1)}\right)\sharp x_{(3)}y_{(3)}z_{(2)} \\ &= \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(1)}, y_{(2)}z_{(2)}\right)\sharp x_{(2)}y_{(3)}z_{(3)}\end{aligned}$$

und

$$(1\sharp x)((1\sharp y)(1\sharp z)) = (1\sharp x)\left(\sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right)\sharp y_{(2)}z_{(2)}\right) = \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(1)}, y_{(2)}z_{(2)}\right)\sharp x_{(2)}y_{(3)}z_{(3)}.$$

Das Element $1\sharp 1$ ist 1-Element dieser Multiplikation, denn für jedes $y \in H$ ist

$$(1\sharp 1)(1\sharp y) = \underbrace{\sigma\left(1, y_{(1)}\right)}_{=\varepsilon\left(y_{(1)}\right)}\sharp y_{(2)} = 1\sharp\varepsilon\left(y_{(1)}\right)y_{(2)} = 1\sharp y$$

und analog $(1\sharp y)(1\sharp 1) = 1\sharp y$. Somit ist gezeigt, daß $k\sharp_\sigma H$ eine k-Algebra ist.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die H-Rechtscomodulstruktur auf $k\sharp_\sigma H$ ein Algebrahomomorphismus ist. Dies ist nicht schwer und wird dem Leser überlassen.

5) Wir betrachten die Situation von **4)** unter der Zusatzbedingung $j(1) = 1$. Dann ist $\sigma : H \times H \to k$ ein normalisierter 2-Cozyklus. Somit ist laut **6)** eine H-Rechtscomodulalgebra $k\sharp_\sigma H$ definiert.

a) Dann sind die k-linearen Abbildungen

$$k\sharp_\sigma H \to A, \qquad \alpha \otimes x \mapsto \alpha j(x)$$

und

$$A \to k\sharp_\sigma H, \qquad a \mapsto a_{(0)}j'\left(a_{(1)}\right) \otimes a_{(2)}$$

(wobei wir k wieder mit $A^{\operatorname{Co} H}$ identifizieren) zwei zueinander inverse Isomorphismen von H-Rechtscomodulalgebren.

b) Außerdem ist $k\sharp_\sigma H$ eine H-clefte H-Rechtscomodulalgebra; die H-rechtscolineare Abbildung

$$H \to k\sharp_\sigma H, \qquad x \mapsto 1\sharp x$$

ist $*$-invertierbar.

c) Die Abbildung $\sigma : H \otimes H \to k$ ist $*$-invertierbar.

Beweis (skizziert): Zuerst wollen wir zeigen, daß $\sigma : H \times H \to k$ ein normalisierter 2-Cozyklus ist (unter der Bedingung $j(1) = 1$).

Für jedes $x \in H$ ist

$$\begin{aligned}\sigma(x, 1) &= j\left(x_{(1)}\right)j\left(1_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}1_{(2)}\right) && \text{(nach der Definition von } \sigma\text{)} \\ &= j\left(x_{(1)}\right)\underbrace{j(1)}_{=1}j'\left(x_{(2)}1\right) && \left(\text{denn } 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} = 1 \otimes 1\right) \\ &= j\left(x_{(1)}\right)j'\left(x_{(2)}\right) = (j * j')(x) = \varepsilon(x) \cdot 1 && \text{(denn } j \text{ und } j' \text{ sind } *\text{-invers)}\end{aligned}$$

und analog $\sigma(1,x) = \varepsilon(x) \cdot 1$. Folglich ist σ ein normalisierter 2-Cozyklus.

a) Erstmal ist die Abbildung

$$A \to k\sharp_\sigma H, \qquad a \mapsto a_{(0)} j'\left(a_{(1)}\right) \otimes a_{(2)}$$

wohldefiniert, d. h. sie geht wirklich nach $k\sharp_\sigma H$ (denn für jedes $a \in A$ ist $a_{(0)} j'\left(a_{(1)}\right) \in A^{\operatorname{Co} H} = k \cdot 1 = k$ wegen

$$\begin{aligned}
\delta\left(a_{(0)} j'\left(a_{(1)}\right)\right) &= \underbrace{\delta\left(a_{(0)}\right)}_{=a_{(0)} \otimes a_{(1)}} \underbrace{\delta\left(j'\left(a_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=j'\left(a_{(2)}\right) \otimes S\left(a_{(1)}\right) \\ \text{nach dem Hilfsresultat} \\ \text{im Beweis von 1.2. } \mathbf{4)}}} = \left(a_{(0)} \otimes a_{(1)}\right)\left(j'\left(a_{(3)}\right) \otimes S\left(a_{(2)}\right)\right) \\
&= a_{(0)} j'\left(a_{(3)}\right) \otimes a_{(1)} S\left(a_{(2)}\right) = a_{(0)} j'\left(a_{(2)}\right) \otimes \underbrace{\left(a_{(1)}\right)_{(1)} S\left(\left(a_{(1)}\right)_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(a_{(1)}\right) 1} \\
&= a_{(0)} j'\left(a_{(1)}\right) \otimes 1
\end{aligned}$$

).

Die beiden k-linearen Abbildungen

$$k\sharp_\sigma H \to A, \qquad \alpha \otimes x \mapsto \alpha j(x)$$

und

$$A \to k\sharp_\sigma H, \qquad a \mapsto a_{(0)} j'\left(a_{(1)}\right) \otimes a_{(2)}$$

sind zueinander invers, denn

$$\begin{aligned}
\alpha \otimes x \mapsto \alpha j(x) &\mapsto \alpha\,(j(x))_{(0)}\, j'\left((j(x))_{(1)}\right) \otimes (j(x))_{(2)} \\
&= \alpha j\left(x_{(0)}\right) j'\left(x_{(1)}\right) \otimes x_{(2)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn da } j \text{ eine } H\text{-rechtscolineare Abbildung ist,} \\ \text{gilt } (j(x))_{(0)} \otimes (j(x))_{(1)} \otimes (j(x))_{(2)} = j\left(x_{(0)}\right) \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)} \end{array}\right) \\
&= \alpha \underbrace{j\left(x_{(1)}\right) j'\left(x_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(1)}\right) \text{ (denn } j * j' = \eta\varepsilon)} \otimes x_{(3)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn da die } H\text{-Comodulstruktur auf } H \text{ die Comultiplikation} \\ \text{ist, gilt } x_{(0)} \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)} \end{array}\right) \\
&= \alpha \otimes x
\end{aligned}$$

und

$$a \mapsto a_{(0)} j'\left(a_{(1)}\right) \otimes a_{(2)} \mapsto a_{(0)} \underbrace{j'\left(a_{(1)}\right) j\left(a_{(2)}\right)}_{=\varepsilon\left(a_{(1)}\right) \text{ (denn } j' * j = \eta\varepsilon)} = a.$$

Diese beiden Abbildungen sind also Isomorphismen von Vektorräumen. Der Vektorraumisomorphismus

$$k\sharp_\sigma H \to A, \qquad \alpha \otimes x \mapsto \alpha j(x)$$

ist offensichtlich auch ein H-Rechtscomodulhomomorphismus (denn j ist H-rechtscolinear) und ein Algebrahomomorphismus (denn für alle $x, y \in H$ ist

$$j(x)\, j(y) = j\left(x_{(1)}\right) j\left(y_{(1)}\right) j'\left(x_{(2)} y_{(2)}\right) j\left(x_{(3)} y_{(3)}\right) = \underbrace{\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right)}_{\in k} j\left(x_{(2)} y_{(2)}\right) = j(xy)$$

), und damit ein Isomorphismus von H-Rechtscomodulalgebren.

c) Die Abbildung σ ist $*$-invertierbar mit $\sigma^{-1}(x,y) = j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) j'\left(y_{(2)}\right) j'\left(x_{(2)}\right)$ für alle $x, y \in H$. Dabei ist $\sigma^{-1}(x,y) \in A^{\mathrm{Co}\,H}$, denn

$$\delta\left(\sigma^{-1}(x,y)\right) = \delta\left(j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) j'\left(y_{(2)}\right) j'\left(x_{(2)}\right)\right) = \underbrace{\delta\left(j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)\right)}_{\substack{=j\left(\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)_{(1)}\right)\otimes\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)_{(2)} \\ \text{(denn } j \text{ ist } H\text{-rechtscolinear)}}} \delta\left(j'\left(y_{(2)}\right)\right) \delta\left(j'\left(x_{(2)}\right)\right)$$

(denn δ ist ein Algebrahomomorphismus)

$$= \left(j\left(\left(x_{(1)}y_{(1)}\right)_{(1)}\right) \otimes \left(x_{(1)}y_{(1)}\right)_{(2)}\right) \delta\left(j'\left(y_{(2)}\right)\right) \delta\left(j'\left(x_{(2)}\right)\right)$$
$$= \left(j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}y_{(2)}\right) \delta\left(j'\left(y_{(3)}\right)\right) \delta\left(j'\left(x_{(3)}\right)\right)$$
$$= \left(j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) \otimes x_{(2)}y_{(2)}\right) \left(j'\left(y_{(4)}\right) \otimes S\left(y_{(3)}\right)\right) \left(j'\left(x_{(4)}\right) \otimes S\left(x_{(3)}\right)\right)$$

$\left(\text{gemäß dem Hilfsresultat } \delta\left(j'(x)\right) = j'\left(x_{(2)}\right) \otimes S\left(x_{(1)}\right) \text{ für alle } x \in H\right)$

$$= j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) j'\left(y_{(4)}\right) j'\left(x_{(4)}\right) \otimes x_{(2)} \underbrace{y_{(2)}S\left(y_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(y_{(2)}\right)} S\left(x_{(3)}\right)$$
$$= j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) j'\left(y_{(2)}\right) j'\left(x_{(4)}\right) \otimes \underbrace{x_{(2)}S\left(x_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)} = j\left(x_{(1)}y_{(1)}\right) j'\left(y_{(2)}\right) j'\left(x_{(2)}\right) \otimes 1$$
$$= \sigma^{-1}(x,y) \otimes 1.$$

b) Daß

$$H \to k\sharp_\sigma H, \qquad x \mapsto 1\sharp x$$

eine H-rechtscolineare Abbildung ist, ist recht klar (denn als H-Rechtscomodul ist $k\sharp_\sigma H = k \otimes H$). Wir wollen jetzt beweisen, daß sie $*$-invertierbar ist (und somit $k\sharp_\sigma H$ H-cleft ist).

In der Tat bezeichnen wir die Abbildung

$$H \to k\sharp_\sigma H, \qquad x \mapsto 1\sharp x$$

mit $\mathbf{P}_1$. Sei ferner $\mathbf{P}_2$ die Abbildung

$$H \to k\sharp_\sigma H, \qquad x \mapsto 1\sharp\sigma^{-1}\left(S\left(x_{(2)}\right), x_{(3)}\right) S\left(x_{(1)}\right).$$

Wir werden nun zeigen, daß $\mathbf{P}_1 * \mathbf{P}_2 = \eta\varepsilon$ und $\mathbf{P}_2 * \mathbf{P}_1 = \eta\varepsilon$ ist:

Für jedes $x \in H$ ist

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{P}_1 * \mathbf{P}_2\right)(x) \\
&= \underbrace{\mathbf{P}_1\left(x_{(1)}\right)}_{=1\sharp x_{(1)}} \underbrace{\mathbf{P}_2\left(x_{(2)}\right)}_{=1\sharp\sigma^{-1}\left(S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right),\left(x_{(2)}\right)_{(3)}\right)S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right)} \\
&= \left(1\sharp x_{(1)}\right)\left(1\sharp\sigma^{-1}\left(S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right),\left(x_{(2)}\right)_{(3)}\right)S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right)\right) \\
&= \left(1\sharp x_{(1)}\right)\left(1\sharp\sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)S\left(x_{(2)}\right)\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)\left(1\sharp x_{(1)}\right)\left(1\sharp S\left(x_{(2)}\right)\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right) \text{ ist ein Skalar,} \\ \text{da } \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right) \in A^{\operatorname{Co}H} = k\cdot 1\end{array}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)\sigma\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)},\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)}\right)\sharp\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn nach der Definition der Multiplikation in } k\sharp_\sigma H \text{ ist} \\ \left(1\sharp x_{(1)}\right)\left(1\sharp S\left(x_{(2)}\right)\right) = \sigma\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)},\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)}\right)\sharp\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)}\end{array}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)\sigma\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)},S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right)\right)\sharp\left(x_{(1)}\right)_{(2)}S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn da } S \text{ ein Anticoalgebrahomomorphismus ist, gilt} \\ \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)}\otimes\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)} = S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right)\otimes S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right)\end{array}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)\sigma\left(x_{(1)},S\left(x_{(4)}\right)\right)\sharp\underbrace{x_{(2)}S\left(x_{(3)}\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\cdot 1} \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)\sigma\left(x_{(1)},S\left(x_{(2)}\right)\right)\sharp 1 = \underbrace{\sigma\left(x_{(1)},S\left(x_{(2)}\right)\right)\sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)}_{\substack{=\varepsilon(x) \text{ (nach Lemma} \\ 1.2\ \mathbf{5)} \text{ weiter unten)}}}\sharp 1 \\
&= \varepsilon(x)\sharp 1 = (\eta\varepsilon)(x).
\end{aligned}
$$

Daher ist $\mathbf{P}_1 * \mathbf{P}_2 = \eta\varepsilon$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{P}_2 * \mathbf{P}_1\right)(x) \\
&= \underbrace{\mathbf{P}_2\left(x_{(1)}\right)}_{=1\sharp\sigma^{-1}\left(S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right),\left(x_{(1)}\right)_{(3)}\right)S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right)} \underbrace{\mathbf{P}_1\left(x_{(2)}\right)}_{=1\sharp x_{(2)}} \\
&= \left(1\sharp\sigma^{-1}\left(S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right),\left(x_{(1)}\right)_{(3)}\right)S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right)\right)\left(1\sharp x_{(2)}\right) \\
&= \left(1\sharp\sigma^{-1}\left(S\left(x_{(2)}\right),x_{(3)}\right)S\left(x_{(1)}\right)\right)\left(1\sharp x_{(4)}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(2)}\right),x_{(3)}\right)\left(1\sharp S\left(x_{(1)}\right)\right)\left(1\sharp x_{(4)}\right) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn } \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(2)}\right),x_{(3)}\right) \text{ ist ein Skalar,}\\ \text{da } \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(2)}\right),x_{(3)}\right)\in A^{\mathrm{Co}\,H}=k\cdot 1\end{array}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(2)}\right),x_{(3)}\right)\sigma\left(\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)_{(1)},\left(x_{(4)}\right)_{(1)}\right)\sharp\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)_{(2)}\left(x_{(4)}\right)_{(2)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn nach der Definition der Multiplikation in } k\sharp_\sigma H \text{ ist}\\ \left(1\sharp S\left(x_{(1)}\right)\right)\left(1\sharp x_{(4)}\right)=\sigma\left(\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)_{(1)},\left(x_{(4)}\right)_{(1)}\right)\sharp\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)_{(2)}\left(x_{(4)}\right)_{(2)}\end{array}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(2)}\right),x_{(3)}\right)\sigma\left(S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right),\left(x_{(4)}\right)_{(1)}\right)\sharp S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right)\left(x_{(4)}\right)_{(2)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn da } S \text{ ein Anticoalgebrahomomorphismus ist, gilt}\\ \left(S\left(x_{(1)}\right)\right)_{(1)}\otimes\left(S\left(x_{(1)}\right)\right)_{(2)}=S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)}\right)\otimes S\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}\right)\end{array}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right),x_{(4)}\right)\sigma\left(S\left(x_{(2)}\right),x_{(5)}\right)\sharp S\left(x_{(1)}\right)x_{(6)} \\
&= \sigma^{-1}\left(S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right),\left(x_{(3)}\right)_{(1)}\right)\sigma\left(S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right),\left(x_{(3)}\right)_{(1)}\right)\sharp S\left(x_{(1)}\right)x_{(4)} \\
&= \underbrace{\sigma^{-1}\left(\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)},\left(x_{(3)}\right)_{(1)}\right)\sigma\left(\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)},\left(x_{(3)}\right)_{(1)}\right)}_{\substack{=\left(\sigma^{-1}*\sigma\right)\left(S\left(x_{(2)}\right)\otimes x_{(3)}\right)=\varepsilon\left(S\left(x_{(2)}\right)\otimes x_{(3)}\right)\\ =\varepsilon\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)\varepsilon\left(x_{(3)}\right)}}\sharp S\left(x_{(1)}\right)x_{(4)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn da } S \text{ ein Anticoalgebrahomomorphismus ist, gilt}\\ S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right)\otimes S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right)=\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)}\otimes\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)}\end{array}\right) \\
&= \varepsilon\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)\varepsilon\left(x_{(3)}\right)\sharp S\left(x_{(1)}\right)x_{(4)} = 1\sharp S\left(x_{(1)}\right)\underbrace{\varepsilon\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}\varepsilon\left(x_{(3)}\right)x_{(4)} \\
&= 1\sharp S\left(\underbrace{x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x_{(1)}}\right)\underbrace{\varepsilon\left(x_{(3)}\right)x_{(4)}}_{=x_{(3)}} = 1\sharp\underbrace{S\left(x_{(1)}\right)x_{(2)}}_{=\varepsilon(x)} = \left(\eta\varepsilon\right)(x)
\end{aligned}$$

für jedes $x \in H$, und somit ist $\mathbf{P}_2 * \mathbf{P}_1 = \eta\varepsilon$.

Aus $\mathbf{P}_1 * \mathbf{P}_2 = \eta\varepsilon$ und $\mathbf{P}_2 * \mathbf{P}_1 = \eta\varepsilon$ folgt, daß $\mathbf{P}_1$ eine $*$-invertierbare Abbildung ist. Somit ist $k\sharp_\sigma H$ eine H-clefte H-Rechtscomodulalgebra. Qed.

1.2. Lemma: Sei H eine Bialgebra. Sei $\sigma : H \otimes H \to k$ ein $*$-invertierbarer 2-Cozyklus (dessen $*$-Inverses wir mit σ^{-1} bezeichnen).

1) Für alle $x \in H$ ist dann $\sigma(1,1)\,\sigma^{-1}(1,1) = 1$.

2) Für alle $x \in H$ ist $\sigma(x,1) = \varepsilon(x)\,\sigma(1,1) = \sigma(1,x)$.

3) Für alle $x, y, z \in H$ ist $\sigma^{-1}\left(x_{(1)}y_{(1)}, z\right)\sigma^{-1}\left(x_{(2)}, y_{(2)}\right) = \sigma^{-1}\left(x, y_{(1)}z_{(1)}\right)\sigma^{-1}\left(y_{(2)}, z_{(2)}\right)$.

4) Für alle $x \in H$ ist $\sigma^{-1}(x,1) = \varepsilon(x)\,\sigma^{-1}(1,1) = \sigma^{-1}(1,x)$.

5) Falls die Bialgebra H eine Antipode S hat, ist $\sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right)\sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) = \varepsilon(x)$.

Beweis: **1)** Klar.

2) Setzt man $y = z = 1$ in die Definition eines 2-Cozyklus ein, erhält man $\sigma\left(x_{(1)}, 1\right)\sigma\left(x_{(2)}, 1\right) = \sigma(1,1)\sigma(x,1)$.

Offensichtlich ist aber

$$\begin{aligned}\sigma(x,1) &= \sigma\left(x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right), 1\right) = \sigma\left(x_{(1)}, 1\right) \underbrace{\varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=\sigma\left(x_{(2)},1\right)\sigma^{-1}\left(x_{(3)},1\right)} = \underbrace{\sigma\left(x_{(1)}, 1\right)\sigma\left(x_{(2)}, 1\right)}_{=\sigma(1,1)\sigma\left(x_{(1)},1\right)}\sigma^{-1}\left(x_{(3)}, 1\right) \\ &= \sigma(1,1)\sigma\left(x_{(1)}, 1\right)\sigma^{-1}\left(x_{(2)}, 1\right) = \sigma(1,1)\varepsilon(x) = \varepsilon(x)\sigma(1,1)\end{aligned}$$

und ebenso $\sigma(1,x) = \varepsilon(x)\sigma(1,1)$.

3) *Erster Beweis:* Wir haben

$$\begin{aligned}&\sigma^{-1}\left(x_{(1)}y_{(1)}, z\right)\sigma^{-1}\left(x_{(2)}, y_{(2)}\right) \\ &= \sigma^{-1}\left(x_{(1)}, y_{(1)}z_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(2)}, y_{(2)}z_{(2)}\right)\sigma^{-1}\left(x_{(3)}y_{(3)}, z_{(3)}\right)\sigma^{-1}\left(x_{(4)}, y_{(4)}\right) \\ &= \sigma^{-1}\left(x_{(1)}, y_{(1)}z_{(1)}\right)\sigma^{-1}\left(y_{(2)}, z_{(2)}\right)\underbrace{\sigma\left(y_{(3)}, z_{(3)}\right)\sigma\left(x_{(2)}, y_{(4)}z_{(4)}\right)}_{\substack{=\sigma\left(x_{(2)},y_{(3)}\right)\sigma\left(x_{(3)}y_{(4)},z_{(3)}\right), \\ \text{da } \sigma \text{ ein 2-Cozyklus ist}}}\sigma^{-1}\left(x_{(3)}y_{(5)}, z_{(5)}\right)\sigma^{-1}\left(x_{(4)}, y_{(6)}\right) \\ &= \sigma^{-1}\left(x_{(1)}, y_{(1)}z_{(1)}\right)\sigma^{-1}\left(y_{(2)}, z_{(2)}\right)\sigma\left(x_{(2)}, y_{(3)}\right)\sigma\left(x_{(3)}y_{(4)}, z_{(3)}\right)\sigma^{-1}\left(x_{(4)}y_{(5)}, z_{(4)}\right)\sigma^{-1}\left(x_{(5)}, y_{(6)}\right) \\ &= \sigma^{-1}\left(x_{(1)}, y_{(1)}z_{(1)}\right)\sigma^{-1}\left(y_{(2)}, z_{(2)}\right)\sigma\left(x_{(2)}, y_{(3)}\right)\sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(4)}\right) = \sigma^{-1}\left(x, y_{(1)}z_{(1)}\right)\sigma^{-1}\left(y_{(2)}, z_{(2)}\right).\end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Die k-linearen Abbildungen

$$T_1 : H \otimes H \otimes H \to k, \qquad x \otimes y \otimes z \mapsto \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(2)}y_{(2)}, z\right)$$

und

$$T_1' : H \otimes H \otimes H \to k, \qquad x \otimes y \otimes z \mapsto \sigma^{-1}\left(x_{(1)}y_{(1)}, z\right)\sigma^{-1}\left(x_{(2)}, y_{(2)}\right)$$

sind zueinander $*$-invers, denn für alle $x, y, z \in H$ gilt

$$\begin{aligned}\left(T_1 * T_1'\right)(x \otimes y \otimes z) &= T_1\left((x \otimes y \otimes z)_{(1)}\right)\cdot T_1'\left((x \otimes y \otimes z)_{(2)}\right) \\ &= T_1\left(x_{(1)} \otimes y_{(1)} \otimes z_{(1)}\right)\cdot T_1'\left(x_{(2)} \otimes y_{(2)} \otimes z_{(2)}\right) \\ &= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right)\underbrace{\sigma\left(x_{(2)}y_{(2)}, z_{(1)}\right)\cdot\sigma^{-1}\left(x_{(3)}y_{(3)}, z_{(2)}\right)}_{\substack{=\left(\sigma*\sigma^{-1}\right)\left(x_{(2)}y_{(2)}\otimes z\right) \\ =\varepsilon\left(x_{(2)}y_{(2)}\otimes z\right) \\ =\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\varepsilon(z)}}\sigma^{-1}\left(x_{(4)}, y_{(4)}\right) \\ &= \sigma\left(x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right), y_{(1)}\varepsilon\left(y_{(2)}\right)\right)\sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right)\varepsilon(z) \\ &= \underbrace{\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right)\sigma^{-1}\left(x_{(2)}, y_{(2)}\right)}_{\substack{=\left(\sigma*\sigma^{-1}\right)(x\otimes y) \\ =\varepsilon(x\otimes y)=\varepsilon(x)\varepsilon(y)}}\varepsilon(z) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\varepsilon(z) = \varepsilon(x \otimes y \otimes z)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(T_1' * T_1)(x \otimes y \otimes z) &= T_1'\left((x \otimes y \otimes z)_{(1)}\right) \cdot T_1\left((x \otimes y \otimes z)_{(2)}\right) \\
&= T_1'\left(x_{(1)} \otimes y_{(1)} \otimes z_{(1)}\right) \cdot T_1\left(x_{(2)} \otimes y_{(2)} \otimes z_{(2)}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(x_{(1)}y_{(1)}, z_{(1)}\right) \underbrace{\sigma^{-1}\left(x_{(2)}, y_{(2)}\right) \cdot \sigma\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right)}_{\substack{=\left(\sigma^{-1}*\sigma\right)\left(x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right) \\ =\varepsilon\left(x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right)=\varepsilon\left(x_{(2)}\right)\varepsilon\left(y_{(2)}\right)}} \sigma\left(x_{(4)}y_{(4)}, z_{(2)}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(x_{(1)}\varepsilon\left(x_{(2)}\right) y_{(1)}\varepsilon\left(y_{(2)}\right), z_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(3)}y_{(3)}, z_{(2)}\right) \\
&= \sigma^{-1}\left(x_{(1)}y_{(1)}, z_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(2)}y_{(2)}, z_{(2)}\right) = \left(\sigma^{-1} * \sigma\right)(xy \otimes z) = \varepsilon(xy \otimes z) \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(y)\varepsilon(z) = \varepsilon(x \otimes y \otimes z),
\end{aligned}$$

und somit ist $T_1 * T_1' = T_1' * T_1 = \varepsilon$.

Analog zeigt man, daß die k-linearen Abbildungen

$$T_2 : H \otimes H \otimes H \to k, \qquad x \otimes y \otimes z \mapsto \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) \sigma\left(x, y_{(2)}z_{(2)}\right)$$

und

$$T_2' : H \otimes H \otimes H \to k, \qquad x \otimes y \otimes z \mapsto \sigma^{-1}\left(x, y_{(1)}z_{(1)}\right) \sigma^{-1}\left(y_{(2)}, z_{(2)}\right)$$

zueinander $*$-invers sind. Doch $T_1 = T_2$, da σ ein 2-Cozyklus ist. Da T_1' zu T_1 und T_2' zu T_2 $*$-invers sind, folgt also auch $T_1' = T_2'$, und hieraus folgt sofort die Behauptung **3)**.

4) folgt genauso aus **3)**, wie **2)** aus der Definition eines 2-Cozykels hergeleitet wurde.

5) Wir haben

$$
\begin{aligned}
&\sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \sigma(1,1)\, \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \qquad \text{(nach } \mathbf{1)}\text{)} \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \underbrace{\varepsilon\left(x_{(5)}\right) \sigma(1,1)}_{=\sigma\left(1, x_{(5)}\right) \text{ (nach } \mathbf{2)}\text{)}} \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \sigma\left(1, x_{(5)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(4)}\right)\right) \sigma\left(x_{(2)} S\left(x_{(3)}\right), x_{(7)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(5)}\right), x_{(6)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}, S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right)\right) \sigma\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)} S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right), x_{(5)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \underbrace{\sigma\left(\left(x_{(1)}\right)_{(1)}, \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)}\right) \sigma\left(\left(x_{(1)}\right)_{(2)} \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)}, x_{(5)}\right)}_{\substack{=\sigma\left(\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)}, \left(x_{(5)}\right)_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(1)}, \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)} \left(x_{(5)}\right)_{(2)}\right), \\ \text{da } \sigma \text{ ein 2-Cozykel ist}}} \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } S \text{ ist ein Anticoalgebrahomomorphismus, und somit ist} \\ S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) \otimes S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) = \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)} \otimes \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)} \end{array} \right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)}, \left(x_{(5)}\right)_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(1)}, \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)} \left(x_{(5)}\right)_{(2)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right), \left(x_{(5)}\right)_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(1)}, S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) \left(x_{(5)}\right)_{(2)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } S \text{ ist ein Anticoalgebrahomomorphismus, und somit ist} \\ \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(2)} \otimes \left(S\left(x_{(2)}\right)\right)_{(1)} = S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(1)}\right) \otimes S\left(\left(x_{(2)}\right)_{(2)}\right) \end{array} \right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(6)}\right) \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right) x_{(7)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(4)}\right), x_{(5)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right) x_{(7)}\right) \sigma\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(6)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(4)}\right), x_{(5)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right) x_{(5)}\right) \sigma\left(\left(S\left(\left(x_{(3)}\right)_{(1)}\right)\right), \left(x_{(4)}\right)_{(2)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(\left(x_{(3)}\right)_{(2)}\right), \left(x_{(4)}\right)_{(1)}\right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right) x_{(7)}\right) \sigma\left(\left(S\left(x_{(3)}\right)\right)_{(2)}, \left(x_{(4)}\right)_{(2)}\right) \sigma^{-1}\left(\left(S\left(x_{(3)}\right)\right)_{(1)}, \left(x_{(4)}\right)_{(1)}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn } S \text{ ist ein Anticoalgebrahomomorphismus, und somit ist} \\ S\left(\left(x_{(3)}\right)_{(1)}\right) \otimes S\left(\left(x_{(3)}\right)_{(2)}\right) = \left(S\left(x_{(3)}\right)\right)_{(2)} \otimes \left(S\left(x_{(3)}\right)\right)_{(1)} \end{array} \right) \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right) x_{(7)}\right) \underbrace{\sigma^{-1}\left(\left(S\left(x_{(3)}\right)\right)_{(1)}, \left(x_{(4)}\right)_{(1)}\right) \sigma\left(\left(S\left(x_{(3)}\right)\right)_{(2)}, \left(x_{(4)}\right)_{(2)}\right)}_{=\left(\sigma^{-1} * \sigma\right)\left(S\left(x_{(3)}\right) \otimes x_{(4)}\right) = \varepsilon\left(S\left(x_{(3)}\right) \otimes x_{(4)}\right) = \varepsilon\left(S\left(x_{(3)}\right)\right) \varepsilon\left(x_{(4)}\right) = \varepsilon\left(x_{(3)}\right)} \\
&= \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(x_{(1)}, \underbrace{S\left(x_{(2)}\right) x_{(3)}}_{=\varepsilon\left(x_{(2)}\right) 1}\right) = \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma\left(\underbrace{x_{(1)} \varepsilon\left(x_{(2)}\right)}_{=x}, 1\right) = \sigma^{-1}(1,1)\, \sigma(x, 1) = \varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

(nach **1)** und **2)**).

1.3. Satz: Sei H eine Bialgebra, und sei $\sigma : H \otimes H \to k$ ein $*$-invertierbarer 2-Cozyklus. Dann können wir eine Bialgebra H_σ wie folgt definieren:

Als Coalgebra sei $H_\sigma = H$. Die Algebrastruktur auf H_σ werde festgelegt durch die

Multiplikationsabbildung $\cdot_\sigma : H_\sigma \times H_\sigma \to H_\sigma$ mit

$$x \cdot_\sigma y = \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) x_{(2)} y_{(2)} \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right) \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$

1) Die so definierte Bialgebra H_σ ist tatsächlich eine Bialgebra.

2) Falls H eine Hopfalgebra mit Antipode S ist, dann ist H_σ eine Hopfalgebra mit Antipode S_σ, wobei die Abbildung $S_\sigma : H_\sigma \to H_\sigma$ durch

$$S_\sigma(x) = \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) S\left(x_{(3)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(4)}\right), x_{(5)}\right) \qquad \text{für alle } x \in H$$

definiert ist.

Beweis: **1)** Die Multiplikation ist assoziativ, denn für alle $x, y, z \in H$ ist

$$\begin{aligned}
(x \cdot_\sigma y) \cdot_\sigma z &= \left(\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) x_{(2)} y_{(2)} \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right)\right) \cdot_\sigma z \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \left(\left(x_{(2)} y_{(2)}\right) \cdot_\sigma z\right) \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right) \\
&= \underbrace{\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(2)} y_{(2)}, z_{(1)}\right)}_{\substack{=\sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(1)}, y_{(2)} z_{(2)}\right), \\ \text{da } \sigma \text{ ein 2-Cozyklus ist}}} x_{(3)} y_{(3)} z_{(2)} \underbrace{\sigma^{-1}\left(x_{(4)} y_{(4)}, z_{(3)}\right) \sigma^{-1}\left(x_{(5)}, y_{(5)}\right)}_{\substack{=\sigma^{-1}\left(x_{(4)}, y_{(4)} z_{(3)}\right)\sigma^{-1}\left(y_{(5)}, z_{(4)}\right) \\ \text{nach 1.2. } \mathbf{3)}}} \\
&= \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(1)}, y_{(2)} z_{(2)}\right) x_{(2)} y_{(3)} z_{(3)} \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(4)} z_{(4)}\right) \sigma^{-1}\left(y_{(5)}, z_{(5)}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x \cdot_\sigma (y \cdot_\sigma z) &= x \cdot_\sigma \left(\sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) y_{(2)} z_{(2)} \sigma^{-1}\left(y_{(3)}, z_{(3)}\right)\right) \\
&= \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) \left(x \cdot_\sigma \left(y_{(2)} z_{(2)}\right)\right) \sigma^{-1}\left(y_{(3)}, z_{(3)}\right) \\
&= \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(1)}, y_{(2)} z_{(2)}\right) x_{(2)} y_{(3)} z_{(3)} \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(4)} z_{(4)}\right) \sigma^{-1}\left(y_{(5)}, z_{(5)}\right),
\end{aligned}$$

also $(x \cdot_\sigma y) \cdot_\sigma z = x \cdot_\sigma (y \cdot_\sigma z)$. Ferner ist 1 das 1-Element von H_σ (nach Lemma 1.2. **1)**, **2)** und **4)**).

Ferner ist $\varepsilon : H_\sigma \to k$ ein Algebrahomomorphismus, denn für alle $x, y \in H$ ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x \cdot_\sigma y) &= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \varepsilon\left(x_{(2)} y_{(2)}\right) \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)} \varepsilon\left(x_{(2)}\right), y_{(1)} \varepsilon\left(y_{(2)}\right)\right) \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right) = \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \sigma^{-1}\left(x_{(2)}, y_{(2)}\right) = \varepsilon(x) \varepsilon(y).
\end{aligned}$$

Schließlich ist auch $\Delta : H_\sigma \to H_\sigma \otimes H_\sigma$ ein Algebrahomomorphismus, denn für alle $x, y \in H$ ist

$$\begin{aligned}
\Delta(x \cdot_\sigma y) &= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \Delta\left(x_{(2)} y_{(2)}\right) \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) x_{(2)} y_{(2)} \otimes x_{(3)} y_{(3)} \sigma^{-1}\left(x_{(4)}, y_{(4)}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta(x) \cdot_\sigma \Delta(y) &= \left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) \cdot_\sigma \left(y_{(1)} \otimes y_{(2)}\right) = \left(x_{(1)} \cdot_\sigma y_{(1)}\right) \otimes \left(x_{(2)} \cdot_\sigma y_{(2)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) x_{(2)} y_{(2)} \sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right) \otimes \sigma\left(x_{(4)}, y_{(4)}\right) x_{(5)} y_{(5)} \sigma^{-1}\left(x_{(6)}, y_{(6)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) x_{(2)} y_{(2)} \underbrace{\sigma^{-1}\left(x_{(3)}, y_{(3)}\right) \sigma\left(x_{(4)}, y_{(4)}\right)}_{=\varepsilon\left(x_{(3)}\right)\varepsilon\left(y_{(3)}\right)} \otimes x_{(5)} y_{(5)} \sigma^{-1}\left(x_{(6)}, y_{(6)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) x_{(2)} y_{(2)} \otimes x_{(3)} y_{(3)} \sigma^{-1}\left(x_{(4)}, y_{(4)}\right).
\end{aligned}$$

2) Für alle $x \in H$ ist

$$\begin{aligned}
&S_\sigma\left(x_{(1)}\right) \cdot_\sigma x_{(2)} \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) S\left(x_{(3)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(4)}\right), x_{(5)}\right) \cdot_\sigma x_{(6)} \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) S\left(x_{(3)}\right) \cdot_\sigma x_{(6)} \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(4)}\right), x_{(5)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \sigma\left(S\left(x_{(5)}\right), x_{(8)}\right) S\left(x_{(4)}\right) x_{(9)} \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(10)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(6)}\right), x_{(7)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \underbrace{\sigma\left(S\left(x_{(5)}\right), x_{(8)}\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(6)}\right), x_{(7)}\right)}_{\text{kürzen sich gegenseitig}} S\left(x_{(4)}\right) x_{(9)} \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(10)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \underbrace{S\left(x_{(4)}\right) x_{(5)}}_{\substack{\text{kürzen sich} \\ \text{gegenseitig}}} \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(6)}\right) \\
&= \sigma\left(x_{(1)}, S\left(x_{(2)}\right)\right) \sigma^{-1}\left(S\left(x_{(3)}\right), x_{(4)}\right) = \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

(nach Lemma 1.2. **5)**) und ebenso $x_{(1)} \cdot_\sigma S_\sigma\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x)$. Somit ist S_σ das $*$-Inverse der Abbildung id bezüglich der Hopfalgebrastruktur von H_σ. Mit anderen Worten: S_σ ist die Antipode der Hopfalgebra H_σ. Damit ist Satz 1.3. bewiesen.

2. Das Drinfeld-Doppel

Definition: Seien U und A zwei Bialgebren, und sei $\tau : U \times A \to k$ eine k-bilineare Abbildung. Wir identifizieren diese Abbildung τ mit der entsprechenden k-linearen Abbildung $\widetilde{\tau} : U \otimes A \to k$, die $\tau = \widetilde{\tau} \circ \kappa$ erfüllt, wobei $\kappa : U \times A \to U \otimes A$ die universelle k-tensorielle Abbildung ist.

Die Abbildung τ heißt *schiefe Paarung von Bialgebren*, wenn für alle $u, v \in U$ und $a, b \in A$ die Relationen

$$\begin{aligned}
\tau(uv, a) &= \tau\left(u, a_{(1)}\right) \tau\left(v, a_{(2)}\right), && \text{(SP.1)} \\
\tau(u, ab) &= \tau\left(u_{(1)}, b\right) \tau\left(u_{(2)}, a\right), && \text{(SP.2)} \\
\tau(1, a) &= \varepsilon(a), && \text{(SP.3)} \\
\tau(u, 1) &= \varepsilon(u) && \text{(SP.4)}
\end{aligned}$$

gelten.

2.1. Bemerkung: 1) Angenommen, U ist eine Hopfalgebra, oder A ist eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode. Ist τ eine schiefe Paarung (wie oben definiert), dann ist $\tau : U \otimes A \to k$ eine $*$-invertierbare Abbildung aus der Coalgebra $U \otimes A$ in die Algebra k (wobei die Coalgebrastruktur auf $U \otimes A$ komponentenweise definiert ist). Das Inverse τ^{-1} von τ erfüllt

$$\tau^{-1}(u, a) = \tau(S(u), a) \text{ für alle } u \in U \text{ und } a \in A, \qquad \text{falls } U \text{ eine Hopfalgebra ist,}$$

und

$$\tau^{-1}(u, a) = \tau\left(u, S^{-1}(a)\right) \text{ für alle } u \in U \text{ und } a \in A,$$
falls A eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode ist.

Beweis: Zuerst betrachten wir den Fall, daß U eine Hopfalgebra ist. Für alle $u \in U$ und $a \in A$ ist dann

$$\begin{aligned}\tau\left(u_{(1)}, a_{(1)}\right) \tau\left(S\left(u_{(2)}\right), a_{(2)}\right) &= \tau\left(\underbrace{u_{(1)} S\left(u_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(u)\cdot 1}, a\right) && \text{(nach (SP.1))} \\ &= \varepsilon(u)\, \tau(1, a) = \varepsilon(u)\, \varepsilon(a) && \text{(nach (SP.3))}\end{aligned}$$

und ebenso
$$\tau\left(S\left(u_{(1)}\right), a_{(1)}\right) \tau\left(u_{(2)}, a_{(2)}\right) = \varepsilon(u)\, \varepsilon(a),$$
und damit ist $u \otimes a \mapsto \tau(S(u), a)$ das $*$-Inverse der Abbildung τ.

Nun betrachten wir den Fall, wenn A eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode ist. Für alle $u \in U$ und $a \in A$ gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned}\tau\left(u_{(1)}, a_{(1)}\right) \tau\left(u_{(2)}, S^{-1}\left(a_{(2)}\right)\right) &= \tau\left(u, \underbrace{S^{-1}\left(a_{(2)}\right) a_{(1)}}_{=\varepsilon(a)\cdot 1}\right) && \text{(nach (SP.2))} \\ &= \varepsilon(a)\, \tau(u, 1) = \varepsilon(a)\, \varepsilon(u) && \text{(nach (SP.4))}\end{aligned}$$

und analog $\tau\left(u_{(1)}, S^{-1}\left(a_{(1)}\right)\right) \tau\left(u_{(2)}, a_{(2)}\right) = \varepsilon(a)\, \varepsilon(u)$, und daher ist $u \otimes a \mapsto \tau\left(u, S^{-1}(a)\right)$ das $*$-Inverse der Abbildung τ.

2) Sei $\tau : U \otimes A \to k$ eine $*$-invertierbare k-lineare Abbildung, die für alle $u, v \in U$ und $a, b \in A$ die Relationen (SP.1) und (SP.2) erfüllt. Dann erfüllt sie auch für alle $u \in U$ und $a \in A$ die Relationen (SP.3) und (SP.4).

Beweis: Für alle $a \in A$ ist $\tau\left(1, a_{(1)}\right) \tau\left(1, a_{(2)}\right) = \tau(1, a)$ (nach (SP.1)), also

$$\underbrace{\tau\left(1, a_{(1)}\right) \tau\left(1, a_{(2)}\right) \tau^{-1}\left(1, a_{(3)}\right)}_{=\tau(1,a)} = \underbrace{\tau\left(1, a_{(1)}\right) \tau^{-1}\left(1, a_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(a)},$$

womit (SP.3) gezeigt ist. Analog beweist man (SP.4).

3) Seien U und A zwei endlichdimensionale Bialgebren.

a) Dann ist

$$\begin{aligned}\{\tau : U \times A \to k \mid \tau \text{ ist eine schiefe Paarung von Bialgebren}\} &\to \operatorname{Bialg}\left(U, A^{*\,\mathrm{cop}}\right), \\ \tau &\mapsto \tau_L\end{aligned}$$

eine Bijektion, wobei für jede schiefe Paarung τ die Abbildung $\tau_L : U \to A^{*\,\mathrm{cop}}$ durch

$$\tau_L(u)(a) = \tau(u, a) \qquad \text{für alle } u \in U \text{ und } a \in A$$

definiert ist.

b) Ferner ist

$$\begin{aligned}\{\tau : U \times A \to k \mid \tau \text{ ist eine schiefe Paarung von Bialgebren}\} &\to \operatorname{Bialg}\left(A, U^{*\,\mathrm{op}}\right), \\ \tau &\mapsto \tau_R\end{aligned}$$

eine Bijektion, wobei für jede schiefe Paarung τ die Abbildung $\tau_R : A \to U^{*\,\mathrm{op}}$ durch

$$\tau_R(a)(u) = \tau(u, a) \qquad \text{für alle } u \in U \text{ und } a \in A$$

definiert ist.

Beweis: **a)** Sei $\tau : U \times A \to k$ eine k-bilineare Abbildung.

Die Bedingung (SP.1) für τ ist äquivalent dazu, daß für alle $u, v \in U$ gilt: $\tau_L(uv) = \tau_L(u)\tau_L(v)$.

Die Bedingung (SP.3) für τ ist äquivalent zu $\tau_L(1) = \varepsilon$.

Somit sind die Bedingungen (SP.1) und (SP.3) für τ zusammen äquivalent dazu, daß $\tau_L : U \to A^{*\,\mathrm{cop}}$ ein Algebrahomomorphismus ist.

Die Bedingung (SP.2) für τ ist äquivalent dazu, daß für alle $u \in U$ und alle $a, b \in A$ gilt: $\Delta_{A^{*\,\mathrm{cop}}}(\tau_L(u))(b \otimes a) = \tau_L\left(u_{(1)}\right)(b)\,\tau_L\left(u_{(2)}\right)(a)$, also daß für alle $u \in U$ gilt: $\Delta_{A^{*\,\mathrm{cop}}}(\tau_L(u)) = \tau_L\left(u_{(1)}\right) \otimes \tau_L\left(u_{(2)}\right)$.

Die Bedingung (SP.4) für τ ist äquivalent dazu, daß für alle $u \in U$ gilt: $\varepsilon_{A^*}(\tau_L(u)) = \varepsilon(u)$ (denn $\varepsilon_{A^*}(\tau_L(u)) = \tau_L(u)(1)$).

Somit sind die Bedingungen (SP.2) und (SP.4) für τ zusammen äquivalent dazu, daß $\tau_L : U \to A^{*\,\mathrm{cop}}$ ein Coalgebrahomomorphismus ist.

b) ebenso (oder durch Dualität aus **a)**).

2.2. Lemma: Seien U und A zwei Bialgebren. Sei $\tau : U \times A \to k$ eine schiefe Paarung von Bialgebren.

1) Die durch

$$\sigma(u \otimes a, u' \otimes a') = \varepsilon(u)\,\tau(u', a)\,\varepsilon(a') \qquad \text{für alle } u, u' \in U \text{ und } a, a' \in A$$

definierte k-bilineare Abbildung $\sigma : (U \otimes A) \times (U \otimes A) \to k$ ist ein 2-Cozyklus auf der Bialgebra $U \otimes A$ (wobei die Bialgebrastruktur auf $U \otimes A$ die kanonische Tensorprodukt-Bialgebrastruktur sein soll - also die komponentenweise definierte Bialgebrastruktur).

2) Ist $\tau : U \otimes A \to k$ eine $*$-invertierbare Abbildung, dann ist auch $\sigma : (U \otimes A) \otimes (U \otimes A) \to k$ eine $*$-invertierbare Abbildung, und das $*$-Inverse $\sigma^{-1} : (U \otimes A) \otimes (U \otimes A) \to k$ von σ ist gegeben durch

$$\sigma^{-1}(u \otimes a, u' \otimes a') = \varepsilon(u)\,\tau^{-1}(u', a)\,\varepsilon(a') \qquad \text{für alle } u, u' \in U \text{ und } a, a' \in A.$$

(Dies gilt also insbesondere automatisch, falls U eine Hopfalgebra oder A eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode ist.)

Beweis: **1)** Seien $x, y, z \in U \otimes A$. Wir müssen nachweisen, daß $\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right)\sigma\left(x_{(2)}y_{(2)}, z\right) = \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right)\sigma\left(x, y_{(2)}z_{(2)}\right)$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß es $u, v, w \in U$ und $a, b, c \in A$ gibt mit $x = u \otimes a$, $y = v \otimes b$ und $z = w \otimes c$ (denn jeder Tensor ist eine Summe reiner Tensoren). Dann ist

$$\begin{aligned}
\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \cdot \sigma\left(x_{(2)}y_{(2)}, z\right) &= \sigma\left(u_{(1)} \otimes a_{(1)}, v_{(1)} \otimes b_{(1)}\right) \cdot \sigma\left(u_{(2)}v_{(2)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}, w \otimes c\right) \\
&= \varepsilon\left(u_{(1)}\right)\tau\left(v_{(1)}, a_{(1)}\right)\varepsilon\left(b_{(1)}\right) \cdot \varepsilon\left(u_{(2)}v_{(2)}\right)\tau\left(w, a_{(2)}b_{(2)}\right)\varepsilon(c) \\
&= \varepsilon(u)\,\tau\left(v_{(1)}\varepsilon\left(v_{(2)}\right), a_{(1)}\right)\tau\left(w, a_{(2)}\varepsilon\left(b_{(1)}\right)b_{(2)}\right)\varepsilon(c) \\
&\qquad \text{(da } \varepsilon \text{ ein Bialgebrahomomorphismus und } \tau \text{ linear ist)} \\
&= \varepsilon(u)\,\tau\left(v, a_{(1)}\right)\tau\left(w, a_{(2)}b\right)\varepsilon(c) \\
&= \varepsilon(u)\,\tau\left(v, a_{(1)}\right)\tau\left(w_{(1)}, b\right)\tau\left(w_{(2)}, a_{(2)}\right)\varepsilon(c) \qquad \text{(nach (SP.2))}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) \cdot \sigma\left(x, y_{(2)} z_{(2)}\right) &= \sigma\left(v_{(1)} \otimes b_{(1)}, w_{(1)} \otimes c_{(1)}\right) \cdot \sigma\left(u \otimes a, v_{(2)} w_{(2)} \otimes b_{(2)} c_{(2)}\right) \\
&= \varepsilon\left(v_{(1)}\right) \tau\left(w_{(1)}, b_{(1)}\right) \varepsilon\left(c_{(1)}\right) \cdot \varepsilon(u) \tau\left(v_{(2)} w_{(2)}, a\right) \varepsilon\left(b_{(2)} c_{(2)}\right) \\
&= \varepsilon(u) \tau\left(w_{(1)}, b_{(1)} \varepsilon\left(b_{(2)}\right)\right) \tau\left(\varepsilon\left(v_{(1)}\right) v_{(2)} w_{(2)}, a\right) \varepsilon(c) \\
&\qquad \text{(da } \varepsilon \text{ ein Bialgebrahomomorphismus und } \tau \text{ linear ist)} \\
&= \varepsilon(u) \tau\left(w_{(1)}, b\right) \tau\left(v w_{(2)}, a\right) \varepsilon(c) \\
&= \varepsilon(u) \tau\left(w_{(1)}, b\right) \tau\left(v, a_{(1)}\right) \tau\left(w_{(2)}, a_{(2)}\right) \varepsilon(c) \qquad \text{(nach (SP.1))} \\
&= \varepsilon(u) \tau\left(v, a_{(1)}\right) \tau\left(w_{(1)}, b\right) \tau\left(w_{(2)}, a_{(2)}\right) \varepsilon(c),
\end{aligned}$$

also $\sigma\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) \sigma\left(x_{(2)} y_{(2)}, z\right) = \sigma\left(y_{(1)}, z_{(1)}\right) \sigma\left(x, y_{(2)} z_{(2)}\right)$, was zu beweisen war.

2) Für alle $u, u' \in U$ und $a, a' \in A$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(u_{(1)} \otimes a_{(1)}, u'_{(1)} \otimes a'_{(1)}\right) \varepsilon\left(u_{(2)}\right) \tau^{-1}\left(u'_{(2)}, a_{(2)}\right) \varepsilon\left(a'_{(2)}\right) \\
&= \varepsilon\left(u_{(1)}\right) \tau\left(u'_{(1)}, a_{(1)}\right) \varepsilon\left(a'_{(1)}\right) \varepsilon\left(u_{(2)}\right) \tau^{-1}\left(u'_{(2)}, a_{(2)}\right) \varepsilon\left(a'_{(2)}\right) \\
&= \varepsilon\left(\underbrace{u_{(1)} \varepsilon\left(u_{(2)}\right)}_{=u}\right) \underbrace{\tau\left(u'_{(1)}, a_{(1)}\right) \tau^{-1}\left(u'_{(2)}, a_{(2)}\right)}_{=\varepsilon(u')\varepsilon(a)} \varepsilon\left(\underbrace{a'_{(1)} \varepsilon\left(a'_{(2)}\right)}_{=a'}\right) \\
&= \varepsilon(u) \varepsilon(u') \varepsilon(a) \varepsilon(a')
\end{aligned}$$

und analog

$$\varepsilon\left(u_{(1)}\right) \tau^{-1}\left(u'_{(1)}, a_{(1)}\right) \varepsilon\left(a'_{(1)}\right) \sigma\left(u_{(2)} \otimes a_{(2)}, u'_{(2)} \otimes a'_{(2)}\right) = \varepsilon(u) \varepsilon(u') \varepsilon(a) \varepsilon(a').$$

Somit ist die k-lineare Abbildung

$$(U \otimes A) \otimes (U \otimes A) \to k, \qquad (u \otimes a) \otimes (u' \otimes a') \mapsto \varepsilon(u) \tau^{-1}(u', a) \varepsilon(a')$$

ein $*$-Inverses zu σ, was zu beweisen war.

Definition: Seien U und A zwei Bialgebren, und sei $\tau : U \times A \to k$ eine schiefe Paarung von Bialgebren. Sei $\sigma : (U \otimes A) \times (U \otimes A) \to k$ der zu τ gehörige 2-Cozyklus (also der nach 2.2. **1)** ausgehend von τ definierte 2-Cozyklus σ).

Angenommen, dieser 2-Cozyklus σ ist invertierbar.

Wir definieren dann eine Bialgebra $D(U, A, \tau)$ durch $D(U, A, \tau) = (U \otimes A)_\sigma$ (wobei die Bialgebra $(U \otimes A)_\sigma$ gemäß 1.3. definiert ist). Diese Bialgebra $D(U, A, \tau)$ heißt das *Drinfeld-Doppel* von U, A, τ und wird manchmal auch $U \bowtie_\tau A$ bezeichnet.

2.3. Folgerung: Seien U und A zwei Bialgebren. Sei $\tau : U \times A \to k$ eine schiefe Paarung von Bialgebren. Angenommen, $\tau : U \otimes A \to k$ ist eine $*$-invertierbare Abbildung (dies ist immer erfüllt, wenn U eine Hopfalgebra ist oder A eine Hopfalgebra mit invertierbarer Antipode, und manchmal auch in anderen Fällen). Dann ist $D := D(U, A, \tau)$ eine wohldefinierte Bialgebra.

Für jedes $u \in U$ und jedes $a \in A$ führen wir die Schreibweise ua für das Element $u \otimes a$ von D ein. Für jedes $u \in U$ schreiben wir kurz u für $u1 = u \otimes 1 \in D$, und für jedes $a \in A$ schreiben wir kurz a für $1a = 1 \otimes a \in D$. Diese Schreibweise ist legitim, da $U \otimes 1$ und $1 \otimes A$ Unterbialgebren von D sind, und da $u \otimes a = (u \otimes 1)(1 \otimes a)$ für alle $u \in U$ und $a \in A$ gilt.

Mit dieser Schreibweise sind $U \subseteq D$ und $A \subseteq D$ Unterbialgebren von D.

Für alle $a \in A$ und $u \in U$ ist $au = \tau\left(u_{(1)}, a_{(1)}\right) u_{(2)} a_{(2)} \tau^{-1}\left(u_{(3)}, a_{(3)}\right)$.

Sind U und A Hopfalgebren, dann ist auch D eine Hopfalgebra.

Beweis: Nach 2.2. **2)** und 2.1. **1)** ist σ ein $*$-invertierbarer 2-Cozyklus. Nach 1.3. **2)** ist also D eine wohldefinierte Bialgebra.

Für alle $u, u' \in U$ und $a, a' \in A$ gelten in D folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&(u \otimes 1)(u' \otimes a) = uu' \otimes a \qquad \text{und} \\
&(u \otimes a)(1 \otimes a') = u \otimes aa',
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
(u \otimes 1)(u' \otimes a) &= \sigma\left(u_{(1)} \otimes 1, u'_{(1)} \otimes a_{(1)}\right) u_{(2)} u'_{(2)} \otimes a_{(2)} \sigma^{-1}\left(u_{(3)} \otimes 1, u'_{(3)} \otimes a_{(3)}\right) \\
&= \varepsilon\left(u_{(1)}\right) \tau\left(u'_{(1)}, 1\right) \varepsilon\left(a_{(1)}\right) u_{(2)} u'_{(2)} \otimes a_{(2)} \varepsilon\left(u_{(3)}\right) \tau^{-1}\left(u'_{(3)}, 1\right) \varepsilon\left(a_{(3)}\right) \\
&= \varepsilon\left(u_{(1)}\right) \varepsilon\left(u'_{(1)}\right) \varepsilon\left(a_{(1)}\right) u_{(2)} u'_{(2)} \otimes a_{(2)} \varepsilon\left(u_{(3)}\right) \varepsilon\left(u'_{(3)}\right) \varepsilon\left(a_{(3)}\right) \\
&\qquad \left(\text{hier verwendeten wir } \tau\left(u'_{(1)}, 1\right) = \varepsilon\left(u'_{(1)}\right) \text{ und } \tau^{-1}\left(u'_{(3)}, 1\right) = \varepsilon\left(u'_{(3)}\right)\right) \\
&= uu' \otimes a
\end{aligned}
$$

und ebenso $(u \otimes a)(1 \otimes a') = u \otimes aa'$.

Daraus folgt, daß $U \otimes 1$ und $1 \otimes A$ Unteralgebren von D sind. Natürlich sind sie auch Untercoalgebren von D (denn die Coalgebrastruktur auf D ist einfach die kanonische Coalgebrastruktur auf $U \otimes A$). Also sind sie Unterbialgebren von D.

Für alle $a \in A$ und $u \in U$ ist

$$
\begin{aligned}
au &= (1 \otimes a)(u \otimes 1) = \sigma\left(1 \otimes a_{(1)}, u_{(1)} \otimes 1\right) u_{(2)} \otimes a_{(2)} \sigma^{-1}\left(1 \otimes a_{(3)}, u_{(3)} \otimes 1\right) \\
&= \tau\left(u_{(1)}, a_{(1)}\right) u_{(2)} a_{(2)} \tau^{-1}\left(u_{(3)}, a_{(3)}\right).
\end{aligned}
$$

Sind U und A Hopfalgebren, dann folgt aus 1.3. **2)**, daß auch D eine solche ist.

Definition: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Sei eine k-bilineare Abbildung $\tau : H^{*\,\mathrm{cop}} \times H \to k$ definiert durch $\tau(f, h) = f(h)$ für alle $f \in H^*$ und $h \in H$. Die Bialgebra $D(H)$ werde durch $D(H) = D\left(H^{*\,\mathrm{cop}}, H, \tau\right)$ definiert und als das *Drinfeld-Doppel* der Hopfalgebra H bezeichnet.

2.4. Folgerung: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Dann ist diese Bialgebra $D(H)$ eine endlichdimensionale Hopfalgebra, und $H \subseteq D(H)$ und $H^{*\,\mathrm{cop}} \subseteq D(H)$ sind Unterhopfalgebren.

In $D(H)$ gilt folgende Vertauschungsregel:

$$
hf = f\left(S^{-1}\left(h_{(3)}\right) \underline{?} h_{(1)}\right) h_{(2)} \qquad \text{für alle } h \in H \text{ und } f \in H^*,
$$

wobei $f \otimes h$ mit fh identifiziert wird.

Anmerkung: Hier verwenden wir folgende Notation: Ist $f \in H^*$ und sind $a, b \in H$, dann bedeutet $f(a \underline{?} b)$ die Abbildung von H nach k, die durch

$$
f(a \underline{?} b)(x) = f(axb) \qquad \text{für alle } x \in H
$$

definiert ist. Also ist $f(a \underline{?} b) \in H^*$. (Man schreibt oft auch $f(a - b)$ oder $f(a ? b)$ statt $f(a \underline{?} b)$.)

Beweis: Erstmal ist $\tau : H^{*\,\mathrm{cop}} \times H \to k$, $\tau(f,h) = f(h)$ eine schiefe Paarung von Bialgebren (gemäß 2.1. **3) a)**), denn wegen $\tau_L = \mathrm{id}$ (denn für alle $f \in H^*$ und $h \in H$ ist $\tau_L(f)(h) = f(h)$) ist $\tau_L = \mathrm{id} \in \mathrm{Bialg}(H^{*\,\mathrm{cop}}, H^{*\,\mathrm{cop}})$.

Da die Hopfalgebra H endlichdimensional ist, hat H eine bijektive Antipode. Nach 2.3. ist also $D(H)$ eine Hopfalgebra, und für alle $h \in H$ und $f \in H^{*\,\mathrm{cop}}$ gilt

$$hf = \tau\left(f_{(1)}, h_{(1)}\right) f_{(2)} h_{(2)} \tau^{-1}\left(f_{(3)}, h_{(3)}\right),$$

wobei $f_{(1)} \otimes f_{(2)} \otimes f_{(3)}$ das Bild von f unter $(\Delta_{H^{*\,\mathrm{cop}}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{H^{*\,\mathrm{cop}}}$ bezeichnet. Wenn wir stattdessen das Bild von f unter $(\Delta_{H^*} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{H^*}$ mit $f_{(1)} \otimes f_{(2)} \otimes f_{(3)}$ bezeichnen, wird dies zu

$$\begin{aligned} hf &= \underbrace{\tau\left(f_{(3)}, h_{(1)}\right)}_{=f_{(3)}\left(h_{(1)}\right)} f_{(2)} h_{(2)} \underbrace{\tau^{-1}\left(f_{(1)}, h_{(3)}\right)}_{\substack{=\tau\left(f_{(1)}, S^{-1}\left(h_{(3)}\right)\right) \\ (\text{gemäß 2.1. } \mathbf{1)})}} = f_{(3)}\left(h_{(1)}\right) f_{(2)} h_{(2)} \underbrace{\tau\left(f_{(1)}, S^{-1}\left(h_{(3)}\right)\right)}_{=f_{(1)}\left(S^{-1}\left(h_{(3)}\right)\right)} \\ &= \underbrace{f_{(1)}\left(S^{-1}\left(h_{(3)}\right)\right) f_{(2)} f_{(3)}\left(h_{(1)}\right)}_{=f\left(S^{-1}\left(h_{(3)}\right) \underline{?} h_{(1)}\right)} h_{(2)} = f\left(S^{-1}\left(h_{(3)}\right) \underline{?} h_{(1)}\right) h_{(2)}. \end{aligned}$$

2.5. Folgerung: Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist $D(k[G])$ eine Hopfalgebra mit Basis $(e_g h)_{g,h \in G}$, wobei $e_g h$ jeweils das Produkt von e_g und h in $D(k[G])$ bezeichnet. Für diese Hopfalgebra gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} e_a e_b &= \delta_{a,b} e_a \qquad && \text{für alle } a, b \in G; \\ ab &= \text{Produkt von } a \text{ mit } b \text{ in } G && \text{für alle } a, b \in G; \\ \Delta(e_g h) &= \sum_{\substack{a,b \in G, \\ ab = g}} e_b h \otimes e_a h && \text{für alle } g, h \in G \end{aligned}$$

und die Vertauschungsregel

$$h e_g = e_{hgh^{-1}} h \qquad \text{für alle } g, h \in G.$$

Außerdem ist $u := \sum\limits_{g \in G} e_{g^{-1}} g$ ein zentrales Element von $D(k[G])$, und die Antipode S von $D(k[G])$ erfüllt $S^2 = \mathrm{id}$ und $S(u) = u$.

Beweis: Die ersten drei Rechenregeln folgen aus 2.4.. Für alle $g, h \in G$ gilt

$$\begin{aligned} h e_g &= e_g \left(\underbrace{S^{-1}}_{=S}(h) \underline{?} h \right) h \qquad \left(\text{nach 2.4., da } h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)} = h \otimes h \otimes h\right) \\ &= \underbrace{e_g\left(h^{-1} \underline{?} h\right)}_{\substack{=e_{hgh^{-1}}, \text{ denn} \\ \text{für alle } a \in G \text{ ist} \\ e_g\left(h^{-1} a h\right) \\ =e_{hgh^{-1}}(a)}} h = e_{hgh^{-1}} h, \end{aligned}$$

womit die Vertauschungsregel gezeigt ist.

Für alle $h \in G$ gilt

$$hu = h\sum_{g\in G} e_{g^{-1}}g = \sum_{g\in G} \underbrace{he_{g^{-1}}}_{=e_{hg^{-1}h^{-1}}h} g = \sum_{g\in G} \underbrace{e_{hg^{-1}h^{-1}}}_{=e_{\left(hgh^{-1}\right)^{-1}}} \underbrace{hg}_{=\left(hgh^{-1}\right)h} = \sum_{g\in G} e_{\left(hgh^{-1}\right)^{-1}} \left(hgh^{-1}\right) h$$

$$= \sum_{g\in G} e_{g^{-1}}gh \qquad \left(\text{hier haben wir } g \text{ durch } hgh^{-1} \text{ substituiert}\right)$$

$$= uh$$

und $e_h u = u e_h$ (da

$$e_h u = \sum_{g\in G} e_h e_{g^{-1}} g = e_h h^{-1} \qquad \text{und} \qquad u e_h = \sum_{g\in G} e_{g^{-1}} \underbrace{g e_h}_{=e_{ghg^{-1}}g} = \sum_{g\in G} e_{g^{-1}} e_{ghg^{-1}} g = e_h h^{-1}$$

), und somit ist u zentral in $D\left(k\left[G\right]\right)$.

Für alle $g, h \in G$ ist

$$S\left(e_g h\right) = S\left(h\right) S\left(e_g\right) = h^{-1} e_{g^{-1}} = e_{h^{-1}g^{-1}h} h^{-1},$$

also

$$S\left(u\right) = S\left(\sum_{g\in G} e_{g^{-1}} g\right) = \sum_{g\in G} S\left(e_{g^{-1}} g\right) = \sum_{g\in G} e_{g^{-1}\left(g^{-1}\right)^{-1}g} g^{-1} = \sum_{g\in G} e_g g^{-1} = \sum_{g\in G} e_{g^{-1}} g$$

$$\left(\text{hier haben wir } g \text{ durch } g^{-1} \text{ substituiert}\right)$$

$$= u$$

und $S^2 = \operatorname{id}$ wegen

$$S^2\left(e_g h\right) = S\left(\underbrace{S\left(e_g h\right)}_{=e_{h^{-1}g^{-1}h}h^{-1}}\right) = S\left(e_{h^{-1}g^{-1}h} h^{-1}\right) = e_{\left(h^{-1}\right)^{-1}\left(h^{-1}g^{-1}h\right)^{-1}h^{-1}} \left(h^{-1}\right)^{-1} = e_g h.$$

2.6. Beispiel: Sei Γ eine endliche abelsche Gruppe. (Wir schreiben die Gruppe Γ im folgenden multiplikativ.) Dann gibt es natürliche Zahlen $M_1, M_2, ..., M_s$ mit $\Gamma \cong \mathbb{Z}\diagup\left(M_1\right) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\diagup\left(M_s\right)$ und $M_\ell > 1$ für alle $\ell \in \{1, 2, ..., s\}$. Fixiere einen Gruppenisomorphismus $\Gamma \to \mathbb{Z}\diagup\left(M_1\right) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\diagup\left(M_s\right)$, und bezeichne mit b_ℓ das Urbild von $\left(0, 0, ..., 0, \underbrace{\overline{1}}_{\ell\text{-te Koordinate}}, 0, ..., 0\right) \in \mathbb{Z}\diagup\left(M_1\right) \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\diagup\left(M_s\right)$ unter diesem Isomorphismus für jedes $\ell \in \{1, 2, ..., s\}$.

Seien $g_1, g_2 \in \Gamma$. Seien $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\Gamma}$, wobei die abelsche Gruppe $\widehat{\Gamma}$ definiert ist als $\widehat{\Gamma} = \operatorname{Gr}\left(\Gamma, k^\times\right)$, wobei $k^\times$ die multiplikative Gruppe $k \setminus \{0\}$ bezeichnet.

Sei $N_i = \operatorname{ord}\left(\chi_i\left(g_i\right)\right)$ für alle $i \in \{1, 2\}$. Angenommen, $N_1 > 1$ und $N_2 > 1$. Sei $n = \operatorname{kgV}\left(\operatorname{ord} g_1, \operatorname{ord} \chi_1\right)$.

Dann ist

$$U := k\left\langle z, u \;\mid\; z^n = 1,\; zuz^{-1} = \chi_1\left(g_1\right) u,\; u^{N_1} = 0\right\rangle$$

eine Hopfalgebra mit

$$\Delta(z) = z \otimes z, \qquad \Delta(u) = z \otimes u + u \otimes 1,$$
$$\varepsilon(z) = 1, \qquad \varepsilon(u) = 0,$$
$$S(z) = z^{n-1} = z^{-1}, \qquad S(u) = -z^{-1}u.$$

Sei

$$A := k\left\langle y_1, y_2, ..., y_s, a \;\mid\; y_\ell^{M_\ell} = 1,\; y_\ell y_m = y_m y_\ell \text{ für alle } 1 \leq \ell, m \leq s, \right.$$
$$\left. y_\ell a = \chi_2(b_\ell)\, a y_\ell \text{ für alle } 1 \leq \ell \leq s, \qquad a^{N_2} = 0 \right\rangle$$

eine Hopfalgebra mit

$$\Delta(y_\ell) = y_\ell \otimes y_\ell \text{ für alle } 1 \leq \ell \leq s, \qquad \Delta(a) = g_2 \otimes a + a \otimes 1,$$
$$\varepsilon(y_\ell) = 1, \qquad \varepsilon(a) = 0, \qquad S(y_\ell) = y_\ell^{M_\ell - 1} = y_\ell^{-1}, \qquad S(a) = -g_2^{-1}a,$$

wobei mit g_2 nicht das Element g_2 von Γ, sondern das Bild von g_2 unter dem Monoidhomomorphismus

$$\Gamma \to A, \qquad b_1^{t_1} b_2^{t_2} ... b_s^{t_s} \mapsto y_1^{t_1} y_2^{t_2} ... y_s^{t_s}$$

(wobei A als multiplikatives Monoid angesehen wird) gemeint ist.

(Daß U und A Hopfalgebren sind, zeigt man wie im Beweis der Taft-Hopfalgebra.)
Es gilt

$$k[u] \otimes k[z] \xrightarrow[\text{mult}]{\cong} U, \qquad k[z] \cong k[\mathbb{Z} \diagup (n)], \qquad k[u] \cong \underbrace{k[T]}_{\substack{\text{Polynomalgebra}\\ \text{in der}\\ \text{Unbestimmten } T}} \diagup \left(T^{N_1}\right),$$

$$k[a] \otimes k[y_1, y_2, ..., y_s] \xrightarrow[\text{mult}]{\cong} A, \qquad k[y_1, y_2, ..., y_s] \cong k[\Gamma], \qquad k[a] \cong k[T] \diagup \left(T^{N_2}\right),$$

wobei die beiden $\xrightarrow[\text{mult}]{\cong}$-Pfeile Vektorraumisomorphismen (und nicht Hopfalgebraisomorphismen!) bedeuten.

Sei nun $\widetilde{\lambda} \in k$, und angenommen, es gelte $\chi_1 \chi_2 = \varepsilon$ und $\chi_1(g_2)\,\chi_2(g_1) = 1$.

1) Sei $\sigma : A \to k$ der Algebrahomomorphismus, der $\sigma(y_\ell) = \chi_1(b_\ell)$ für alle $1 \leq \ell \leq s$ und $\sigma(a) = 0$ erfüllt. (So ein Algebrahomomorphismus σ existiert und ist eindeutig.)

Sei $\delta : A \to k$ die (ε, σ)-Derivation, die $\delta(y_\ell) = 0$ für alle $1 \leq \ell \leq s$ und $\delta(a) = \widetilde{\lambda}$ erfüllt.

Es gibt einen Hopfalgebrahomomorphismus $\varphi : U \to A^{*\,\mathrm{cop}}$ mit $\varphi(z) = \sigma$ und $\varphi(u) = \delta$.

2) Das Element $z g_1^{-1}$ (das heißt, das Element $z \otimes g_1^{-1}$) ist zentral in $D(U, A, \tau)$, wobei $\tau : U \otimes A \to k$ durch $\tau(u, a) = \varphi(u)(a)$ für alle $u \in U$ und $a \in A$ definiert ist.

[...]

[HIER FEHLEN MEHRERE VORLESUNGEN. Werden vermutlich nicht mehr aufgeschrieben.]

[...]

Zeige allgemein: Ist D eine endlichdimensionale Hopfalgebra, ist $g \in G(D)$, ist g zentral in D, und ist $n = \operatorname{ord} g$, dann ist $\dim(D \diagup (g-1)) = \dfrac{\dim D}{n}$.

Beweis: Die Abbildung

$$\begin{aligned} D \diagup (g-1) &\to D \otimes_{k[g]} k, \\ \overline{d} &\mapsto d \otimes 1, \end{aligned}$$

wobei k ein $k[g]$-Modul vermöge ε ist, ist ein Isomorphismus von D-Linksmoduln, und seine Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} D \otimes_{k[g]} k &\to D \diagup (g-1), \\ d \otimes 1 &\mapsto \overline{d} \end{aligned}$$

(denn beide Abbildungen sind wohldefiniert[348] und zueinander invers). Nach Nichols-Zoeller oder Skryabin gibt es ein $t \geq 1$ mit $D \cong (k[g])^t$ als $k[g]$-Rechtsmoduln. Daraus folgt $D \otimes_{k[g]} k \cong (k[g])^t \otimes_{k[g]} k \cong k^t$. Also ist $\dim (D \diagup (g-1)) = t = \dfrac{\dim D}{\dim (k[g])} = \dfrac{\dim D}{n}$.

[...]

[HIER FEHLEN MEHRERE VORLESUNGEN. Werden vermutlich nicht mehr aufgeschrieben.]

[...]

3. Einschub: Duale Coalgebren

Die duale Coalgebra A^0

Wir wissen, daß der Dualraum C^* einer Coalgebra C kanonisch zu einer Algebra wird. Wir können auch umgekehrt auf dem Dualraum A^* einer Algebra A eine Coalgebrastruktur finden, aber nur falls $\dim A < \infty$ ist. Wir wollen aber eine "duale Coalgebra" zu einer Algebra A auch für $\dim A = \infty$ definieren. Dazu müssen wir uns von der Vorstellung verabschieden, daß diese "duale Coalgebra" als Vektorraum gleich A^* sein muß; stattdessen betrachten wir eine Teilmenge von A^*.

Definition: Sei A eine Algebra. Sei A^0 der Untervektorraum

$$A^0 = \{ f \in A^* \mid \text{ es gibt ein } I \lhd A \text{ mit } \dim (A \diagup I) < \infty \text{ und } f(I) = 0 \}$$

des Dualraumes A^*.

3.1. Lemma: Sei A eine Algebra, und sei $f \in A^*$. Dann sind folgende acht Aussagen zueinander äquivalent:

---

[348] Denn für alle $d \in D$ ist $d(g-1) \otimes 1 = d \otimes (g-1) \cdot 1 = d \otimes \underbrace{\varepsilon(g-1)}_{=0} \cdot 1 = 0$ und die Abbildung

$$D \times k \to D \diagup (g-1), \qquad (d, \lambda) \mapsto d\lambda$$

ist $k[g]$-tensoriell, da für jedes $d \in D$ gilt:

$$(dg, 1) \mapsto \overline{dg} = \overline{d} \qquad \text{und}$$
$$\left(d, \underbrace{g \cdot 1}_{=1} \right) \mapsto \overline{d}.$$

1) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $f_{1i}, f_{2i} \in A^*$ für alle $1 \leq i \leq n$ so, daß für alle $x, y \in A$ gilt: $f(xy) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i}(x) f_{2i}(y)$.

2) Es gibt ein $I \lhd A$ mit $\dim(A/I) < \infty$ und $f(I) = 0$.

3) Es gibt ein Linksideal I von A mit $\dim(A/I) < \infty$ und $f(I) = 0$.

4) Es gibt ein Rechtsideal I von A mit $\dim(A/I) < \infty$ und $f(I) = 0$.

5) Es gilt $\dim(Af) < \infty$.

6) Es gilt $\dim(fA) < \infty$.

7) Es gilt $f \in A^0$.

8) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $f_{1i}, f_{2i} \in A^0$ für alle $1 \leq i \leq n$ so, daß für alle $x, y \in A$ gilt: $f(xy) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i}(x) f_{2i}(y)$.

Bemerkung: Hier verwenden wir, wie schon früher (z. B. in Kapitel III.1), die (A, A)-Bimodulstruktur auf A^*, die durch

$$\begin{aligned}
(af)(x) &= f(xa) \qquad &&\text{für alle } a \in A,\ f \in A^* \text{ und } x \in A, \text{ und} \\
(fa)(x) &= f(ax) \qquad &&\text{für alle } a \in A,\ f \in A^* \text{ und } x \in A
\end{aligned}$$

definiert ist. Im Sinne dieser (A, A)-Bimodulstruktur sind Af und fA zu verstehen.

*Beweis: Beweis von **1)** $\Longrightarrow$ **5)**:* Angenommen, Aussage **1)** gilt. Das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $f_{1i}, f_{2i} \in A^*$ für alle $1 \leq i \leq n$ so, daß für alle $x, y \in A$ gilt: $f(xy) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i}(x) f_{2i}(y)$. Betrachte dieses n und diese Elemente $f_{1i}, f_{2i} \in A^*$.

Für jedes $y \in A$ ist

$$\begin{aligned}
yf &= \sum_{i=1}^{n} f_{1i} f_{2i}(y) \\
&\qquad \left(\text{denn für jedes } x \in A \text{ ist } (yf)(x) = f(xy) = \sum_{i=1}^{n} f_{1i}(x) f_{2i}(y) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_{1i} f_{2i}(y)\right)(x)\right) \\
&\in \langle f_{1i} \mid i \in \{1, 2, ..., n\} \rangle,
\end{aligned}$$

und somit ist Af endlich erzeugt, also $\dim(Af) < \infty$.

*Beweis von **5)** $\Longrightarrow$ **4)**:* Angenommen, Aussage **5)** gilt. Das heißt, $\dim(Af) < \infty$. Also ist auch $\dim((Af)^*) < \infty$.

Betrachte die kanonische Abbildung

$$\operatorname{kan} : A \to A^{**}, \qquad a \mapsto (g \mapsto g(a)).$$

Sei

$$\begin{aligned}
I &= \operatorname{Ker}\left(A \xrightarrow{\text{kan}} A^{**} \xrightarrow{\text{Restriktion}} (Af)^*\right) = \{x \in A \mid g(x) = 0 \text{ für alle } g \in Af\} \\
&= \{x \in A \mid (af)(x) = 0 \text{ für alle } a \in A\} = \{x \in A \mid f(xa) = 0 \text{ für alle } a \in A\}.
\end{aligned}$$

Dieses I ist offensichtlich ein Rechtsideal von A. Da $\dim((Af)^*) < \infty$ ist, ist also $\dim(A/I) < \infty$ (denn

$$A/I = A/\operatorname{Ker}\left(A \xrightarrow{\text{kan}} A^{**} \xrightarrow{\text{Restriktion}} (Af)^*\right) \cong \operatorname{Im}\left(A \xrightarrow{\text{kan}} A^{**} \xrightarrow{\text{Restriktion}} (Af)^*\right)$$

nach dem Homomorphiesatz, und somit ist $\dim(A\diagup I) = \dim\left(\operatorname{Im}\left(A \overset{\text{kan}}{\longrightarrow} A^{**} \overset{\text{Restriktion}}{\longrightarrow} (Af)^*\right)\right) \leq \dim((Af)^*)$, und natürlich ist $f(I) = 0$. Damit ist Aussage **4)** erfüllt.

Beweis von 4) $\Longrightarrow$ 2): Angenommen, Aussage **4)** gilt. Es gibt also ein Rechtsideal I von A mit $\dim(A\diagup I) < \infty$ und $f(I) = 0$. Betrachte dieses I.

Nach **4)** ist $A\diagup I$ ein endlichdimensionaler A-Rechtsmodul. Somit ist auch $\dim(\operatorname{End}(A\diagup I)) < \infty$.

Sei

$$J = \operatorname{Ker}(A \to \operatorname{End}(A\diagup I), \qquad a \mapsto (\overline{x} \mapsto \overline{x}a)).$$

Dann ist $J \lhd A$, und $A\diagup J$ ist endlichdimensional (denn

$$\begin{aligned} A\diagup J &= A\diagup \operatorname{Ker}(A \to \operatorname{End}(A\diagup I), \qquad a \mapsto (\overline{x} \mapsto \overline{x}a)) \\ &\cong \operatorname{Im}(A \to \operatorname{End}(A\diagup I), \qquad a \mapsto (\overline{x} \mapsto \overline{x}a)) \end{aligned}$$

nach dem Homomorphiesatz, und somit ist

$$\dim(A\diagup J) = \dim(\operatorname{Im}(A \to \operatorname{End}(A\diagup I), \qquad a \mapsto (\overline{x} \mapsto \overline{x}a))) \leq \dim(\operatorname{End}(A\diagup I)) < \infty$$

), und es gilt $f(J) = 0$ (da $J \subseteq I$, denn für alle $a \in J$ gilt: $\overline{1} \mapsto \overline{1}a = \overline{a}$ und damit $\overline{a} = 0$ (denn wegen $a \in J$ ist $\overline{x} \mapsto \overline{x}a$ der Nullhomomorphismus), also $a \in I$), und **2)** ist gezeigt.

Beweis von 2) $\Longrightarrow$ 8): Angenommen, Aussage **2)** gilt. Es gibt also ein $I \lhd A$ mit $\dim(A\diagup I) < \infty$ und $f(I) = 0$. Betrachte dieses I.

Für jedes $t \in A$ bezeichnen wir mit $\overline{t}$ die Restklasse von A modulo dem Ideal I. Wir identifizieren $(A\diagup I)^*$ mit der Teilmenge $\{g \in A^* \mid g(I) = 0\}$ von A^*. Dann ist natürlich $(A\diagup I)^*$ eine Teilmenge von A^0 (denn für jedes $g \in A^*$ mit $g(I) = 0$ gilt $g \in A^0$ gemäß der Definition von A^0).

Da wir $(A\diagup I)^*$ mit der Teilmenge $\{g \in A^* \mid g(I) = 0\}$ von A^* identifiziert haben, gilt $g(t) = g\left(\overline{t}\right)$ für jedes $g \in (A\diagup I)^*$ und jedes $t \in A$.

Da $A\diagup I$ eine endlichdimensionale Algebra ist, ist $(A\diagup I)^*$ eine endlichdimensionale Coalgebra.

Nun ist f ein Element von $(A\diagup I)^*$ (denn $f(I) = 0$ und $(A\diagup I)^* = \{g \in A^* \mid g(I) = 0\}$). Da $(A\diagup I)^*$ eine Coalgebra ist, gibt es somit ein $n \in \mathbb{N}$ und $f_{1i}, f_{2i} \in (A\diagup I)^*$ für alle $1 \leq i \leq n$ mit $\Delta_{(A\diagup I)^*}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}$, wobei $\Delta_{(A\diagup I)^*} : (A\diagup I)^* \to (A\diagup I)^* \otimes (A\diagup I)^*$ die Comultiplikation von $(A\diagup I)^*$ ist. Aus $f_{1i}, f_{2i} \in (A\diagup I)^*$ folgt $f_{1i}, f_{2i} \in A^0$ (denn $(A\diagup I)^* \subseteq A^0$). Für beliebige $x, y \in A$ ist nun

$$\begin{aligned} f(xy) = f(\overline{xy}) = f(\overline{x} \cdot \overline{y}) &= \mu\left(\underbrace{\left(\Delta_{(A\diagup I)^*}(f)\right)}_{=\sum_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}}(\overline{x} \otimes \overline{y})\right) = \mu\left(\left(\sum_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}\right)(\overline{x} \otimes \overline{y})\right) \\ &= \mu\left(\sum_{i=1}^{n} f_{1i}(\overline{x}) \otimes f_{2i}(\overline{y})\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_{1i}(\overline{x})}_{=f_{1i}(x)} \underbrace{f_{2i}(\overline{y})}_{=f_{2i}(y)} = \sum_{i=1}^{n} f_{1i}(x) f_{2i}(y). \end{aligned}$$

Damit ist Aussage **8)** bewiesen.

Beweis von **8)** $\Longrightarrow$ **1)***:* Daß Aussage **1)** aus Aussage **8)** folgt, ist trivial (denn $A^0 \subseteq A^*$).

Damit haben wir insgesamt die Äquivalenz **8)** $\Longleftrightarrow$ **1)** $\Longleftrightarrow$ **2)** $\Longleftrightarrow$ **4)** $\Longleftrightarrow$ **5)** gezeigt. Analog beweist man die Äquivalenz **8)** $\Longleftrightarrow$ **1)** $\Longleftrightarrow$ **2)** $\Longleftrightarrow$ **3)** $\Longleftrightarrow$ **6)**. Schließlich gilt **2)** $\Longleftrightarrow$ **7)** nach Definition. Somit ist die gesamte Aussage von Lemma 3.1. bewiesen.

3.2. Folgerung: Sei A eine Algebra. Dann wird der Vektorraum A^0 zu einer Coalgebra, wenn man folgendermaßen Abbildungen $\Delta_{A^0} : A^0 \to A^0 \otimes A^0$ und $\varepsilon_{A^0} : A^0 \to k$ einführt:

Die Abbildung $\Delta_{A^0} : A^0 \to A^0 \otimes A^0$ sei definiert durch $\Delta_{A^0}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $f_{1i}, f_{2i} \in A^0$ für alle $1 \leq i \leq n$ wie in Lemma 3.1. **8)** definiert sind[349].

Die Abbildung $\varepsilon_{A^0} : A^0 \to k$ sei definiert durch $f \mapsto f(1)$.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß

$$\begin{aligned} (\Delta_{A^0} \otimes \mathrm{id})(\Delta_{A^0}(f)) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta_{A^0})(\Delta_{A^0}(f)), \\ (\varepsilon_{A^0} \otimes \mathrm{id})(\Delta_{A^0}(f)) &= \mathrm{kan}_1 f \qquad\qquad \text{und} \\ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_{A^0})(\Delta_{A^0}(f)) &= \mathrm{kan}_2 f \end{aligned}$$

für jedes $f \in A^0$ gilt (wobei $\mathrm{kan}_1 : A^0 \to k \otimes A^0$ und $\mathrm{kan}_2 : A^0 \to A^0 \otimes k$ die kanonischen Isomorphismen sind).

Sei $f \in A^0$. Dann gibt es ein $I \lhd A$ mit $\dim(A \diagup I) < \infty$ und $f(I) = 0$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "\mu^*"] & (A \otimes A)^* & A^* \otimes A^* \arrow[l, hook'] \\ (A/I)^* \arrow[u, hook] \arrow[r, "(\mu_{A/I})^*"] & (A/I \otimes A/I)^* \arrow[u, hook] & (A/I)^* \otimes (A/I)^* \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

kommutiert, und daraus ergeben sich schnell alle zu beweisenden Aussagen.

3.3. Bemerkung: 1) Sei A eine Algebra.

a) Dann ist $\mathrm{Alg}(A, k) = G(A^0)$.

b) Für beliebige $\sigma, \tau \in G(A^0)$ gilt

$$\{\delta \in A^* \mid \delta : A \to k \text{ ist eine } (\sigma, \tau)\text{-Derivation}\} = \left\{x \in A^0 \mid \Delta(x) = \sigma \otimes x + x \otimes \tau\right\}.$$

Insbesondere gilt also

$$\{\delta \in A^* \mid \delta : A \to k \text{ ist eine } \varepsilon\text{-Derivation}\} = P\left(A^0\right).$$

Beweis: Folgt aus Definitionen.

[349] Diese Werte n und f_{1i}, f_{2i} sind natürlich nicht eindeutig bestimmt, aber der Wert von $\Delta_{A^0}(f)$ ist eindeutig bestimmt (denn aus $\Delta_{A^0}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}$ folgt

$$(\Delta_{A^0}(f))(v \otimes w) = f(vw) \qquad \text{für alle } v \in A \text{ und } w \in A,$$

und dadurch ist die Abbildung $\Delta_{A^0}(f) : A \otimes A \to k$ eindeutig bestimmt).

2) Sei $A = k[t]$ der Polynomring über k in der Unbestimmten t. Bekanntlich ist

$$\begin{aligned} A^* &\to \left\{ (a_i)_{i \geq 0} \mid a_i \in k \text{ für alle } i \geq 0 \right\}, \\ f &\mapsto \left(f\left(t^i\right) \right)_{i \geq 0} \end{aligned}$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Sei $f \in A^*$, und sei $a_i = f\left(t^i\right)$ für alle $i \geq 0$. Genau dann ist $f \in A^0$, wenn es ein natürliches $n \geq 0$ und Elemente $b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in k$ gibt so, daß $b_0 a_m + b_1 a_{m+1} + ... + b_{n-1} a_{m+n-1} + a_{m+n} = 0$ für alle $m \geq 0$ ist (d. h. wenn $(a_i)_{i \geq 0}$ eine linear rekursiv definierte Folge ist).

Beweis: Es gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
&\left(f \in A^0\right) \iff \left(\text{es gibt ein } I \lhd k[t] \text{ mit } \dim\left(k[t] \diagup I\right) < \infty \text{ und } f(I) = 0\right) \\
&\iff \left(\text{es gibt ein Polynom } F = b_0 + b_1 t + ... + b_{n-1} t^{n-1} + t^n \in k[t] \text{ mit } f(k[t] F) = 0\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn die Ideale } I \lhd k[t] \text{ mit } \dim\left(k[t] \diagup I\right) < \infty \text{ sind genau die Ideale} \\ \text{der Form } k[t] F \text{ mit monischen Polynomen } F \end{array}\right) \\
&\iff \left(\begin{array}{c} \text{es gibt ein Polynom } F = b_0 + b_1 t + ... + b_{n-1} t^{n-1} + t^n \in k[t], \\ \text{das } f(t^m F) = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ erfüllt} \end{array}\right) \\
&\qquad \left(\text{denn } k[t] \text{ ist als } k\text{-Vektorraum erzeugt von } (t^m)_{m \in \mathbb{N}}\right) \\
&\iff \left(\begin{array}{c} \text{es gibt ein Polynom } F = b_0 + b_1 t + ... + b_{n-1} t^{n-1} + t^n \in k[t], \\ \text{das } b_0 a_m + b_1 a_{m+1} + ... + b_{n-1} a_{m+n-1} + a_{m+n} = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ erfüllt} \end{array}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{da } f(t^m F) = f\left(t^m \left(b_0 + b_1 t + ... + b_{n-1} t^{n-1} + t^n\right)\right) \\ = f\left(b_0 t^m + b_1 t^{m+1} + ... + b_{n-1} t^{m+n-1} + t^{m+n}\right) \\ = b_0 a_m + b_1 a_{m+1} + ... + b_{n-1} a_{m+n-1} + a_{m+n} \end{array}\right) \\
&\iff \left(\begin{array}{c} \text{es gibt ein natürliches } n \geq 0 \text{ und Elemente } b_0, b_1, ..., b_{n-1} \in k \text{ so,} \\ \text{daß } b_0 a_m + b_1 a_{m+1} + ... + b_{n-1} a_{m+n-1} + a_{m+n} = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ gilt} \end{array}\right),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Eine Verallgemeinerung

Die duale Coalgebra A^0 läßt sich auch von einer anderen Perspektive her beleuchten:

Definition: Sei A eine Algebra. Sei V ein endlichdimensionaler A-Linksmodul.

1) Für jedes $v \in V$ und $f \in V^*$ definiere ein $c_{f,v} \in A^*$ durch $c_{f,v}(a) = f(av)$ für alle $a \in A$. Dieses $c_{f,v}$ heißt ein *Matrixkoeffizient* von V. Statt $c_{f,v}$ schreiben wir auch $c_{f,v}^V$, um den Vektorraum V zu betonen.

2) Sei $C(V) = \sum\limits_{\substack{v \in V, \\ f \in V^*}} k c_{f,v} \subseteq A^*$. Dieses $C(V)$ ist ein Untervektorraum von A^*. [350]

3.4. Bemerkung: Sei A eine Algebra.

1) Sei V ein endlichdimensionaler A-Linksmodul. Sei $\rho : A \to \operatorname{End} V$ die zugehörige Darstellung (das heißt, $\rho(a)(v) = av$ für alle $a \in A$ und $v \in V$). Sei $I = \operatorname{Ker} \rho$. Dann ist $I \lhd A$ mit $\dim\left(A \diagup I\right) < \infty$, und $\operatorname{Im}(\rho^*) = C(V) \subseteq A^0$. Identifizieren wir kanonisch $\left(A \diagup I\right)^*$ mit der Teilmenge $\{f \in A^* \mid f(I) = 0\}$ von A^*, dann ist $\operatorname{Im}(\rho^*) = \left(A \diagup I\right)^*$.

[350] Vorsicht: Ich habe bereits ein Buch gesehen, in dem dieses $C(V)$ als C_V bezeichnet wird, und $C(V)$ wiederum etwas anderes bedeutet (nämlich die von C_V erzeugte Unteralgebra von A^0, wenn A eine Bialgebra ist). Man sollte sich darüber im Klaren sein, daß Bezeichnungen über verschiedene Quellen sehr variieren können, besonders in einem jungen Gebiet wie der Theorie der Hopfalgebren.

Beweis: Aus $I = \operatorname{Ker} \rho$ folgt $I \lhd A$. Wegen $A \diagup I = A \diagup \operatorname{Ker} \rho \cong \rho(A) \subseteq \operatorname{End} V$ und $\dim(\operatorname{End} V) < \infty$ ist ferner $\dim(A \diagup I) < \infty$.

Sei $f \in A^*$. Dann gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} (f \in \operatorname{Im}(\rho^*)) &\iff \left(\text{es gibt ein } s \in (\operatorname{End} V)^* \text{ mit } f = s \circ \rho\right) \\ &\iff (f(\operatorname{Ker} \rho) = 0) \iff (f(I) = 0) \iff (f \in (A \diagup I)^*), \end{aligned}$$

und somit ist $\operatorname{Im}(\rho^*) = (A \diagup I)^*$. Hieraus folgt natürlich $\operatorname{Im}(\rho^*) \subseteq A^0$.

Wir müssen also nur noch zeigen, daß $\operatorname{Im}(\rho^*) = C(V)$ ist. In der Tat ist die lineare Abbildung

$$\Psi : V \otimes V^* \to (\operatorname{End} V)^*, \qquad v \otimes f \mapsto (F \mapsto f(F(v)))$$

ein Vektorraumisomorphismus. Nun ist $c_{f,v} = (\rho^* \circ \Psi)(v \otimes f)$ für alle $v \in V$ und $f \in V^*$, denn für alle $a \in A$ gilt

$$c_{f,v}(a) = f(av) = f(\rho(a)v) = (\Psi(v \otimes f))(\rho(a)) = ((\rho^* \circ \Psi)(v \otimes f))(a).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} C(V) &= \sum_{\substack{v \in V, \\ f \in V^*}} k c_{f,v} = \sum_{\substack{v \in V, \\ f \in V^*}} k(\rho^* \circ \Psi)(v \otimes f) = \operatorname{Im}(\rho^* \circ \Psi) \\ &\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn der Vektorraum } V \otimes V^* \text{ wird erzeugt von den} \\ \text{reinen Tensoren } v \otimes f \text{ mit } v \in V \text{ und } f \in V^* \end{array}\right) \\ &= \operatorname{Im}(\rho^*) \qquad (\text{denn } \Psi \text{ ist ein Vektorraumisomorphismus}), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Bemerkung: Aus **1)** folgt $C(V) = (A \diagup I)^*$, und somit erhält $C(V)$ eine kanonische Coalgebrastruktur.

2) Sei V ein endlichdimensionaler A-Linksmodul. Sei $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von V, und sei $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ die dazu duale Basis von V^*.

Dann überführt der Vektorraumhomomorphismus

$$\operatorname{End} V \to \mathrm{M}_n(k), \qquad F \mapsto \text{die darstellende Matrix von } F \text{ bezüglich } (v_i)_{1 \leq i \leq n}$$

das Element $\rho(a) \in \operatorname{End} V$ in die Matrix $\left(c_{f_i, v_j}(a)\right)_{i,j}$ für alle $a \in A$.

Beweis: Sei $a \in A$ beliebig. Für alle j gilt

$$\begin{aligned} \rho(a)(v_j) = av_j &= \sum_{i=1}^n \underbrace{f_i(av_j)}_{= c_{f_i, v_j}(a)} v_i \qquad \left(\text{denn } (v_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ und } (f_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ sind duale Basen}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_{f_i, v_j}(a) v_i. \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix der Abbildung $\rho(a) \in \operatorname{End} V$ bezüglich $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ ist also $\left(c_{f_i, v_j}(a)\right)_{i,j}$, was zu beweisen war.

3) In **2)** gilt: Für alle $v \in V$ und $f \in V^*$ ist $\Delta_{C(V)}(c_{f,v}) = \sum\limits_{i=1}^n c_{f,v_i} \otimes c_{f_i,v}$.

Beweis: Für alle $a, b \in A$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_{f,v_i}(a)\, c_{f_i,v}(b) = \sum_{i=1}^{n} f(av_i)\, f_i(bv) = f\left(a \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i(bv)\, v_i}_{\substack{=bv, \text{ da } (v_i)_{1\leq i\leq n} \\ \text{und } (f_i)_{1\leq i\leq n} \text{ duale} \\ \text{Basen sind}}} \right) = f(abv) = c_{f,v}(ab).$$

4) Seien V und W zwei endlichdimensionale A-Linksmoduln. Für alle $v \in V$, $w \in W$, $f \in V^*$ und $g \in W^*$ ist

$$c_{f,v}^{V} + c_{g,w}^{W} = c_{f\oplus g,v+w}^{V\oplus W}; \qquad C(V) + C(W) = C(V \oplus W).$$

Beweis: Für alle $a \in A$ gilt

$$c_{f\oplus g,v+w}^{V\oplus W}(a) = (f \oplus g)(a(v+w)) = f(av) + g(aw) = c_{f,v}^{V}(a) + c_{g,w}^{W}(a).$$

Daher ist $c_{f,v}^{V} + c_{g,w}^{W} = c_{f\oplus g,v+w}^{V\oplus W}$. Nach den Definitionen von $C(V)$, $C(W)$ und $C(V \oplus W)$ folgt hieraus schnell $C(V) + C(W) = C(V \oplus W)$.

5) Es gilt

$$A^0 = \sum_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V) = \bigcup_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V).$$

Beweis: Nach **4)** ist die Menge $\bigcup\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V)$ abgeschlossen unter Addition. Da sie auch abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen von k ist, gilt also $\sum\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V) = \bigcup\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V)$. Klar ist auch, daß $\sum\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V) \subseteq A^0$ ist (denn $C(V) \subseteq A^0$ für jedes endlichdimensionale $V \in {}_A\mathcal{M}$). Zu zeigen bleibt, daß $A^0 \subseteq \sum\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V)$ ist. Dies läßt sich folgendermaßen zeigen: Es gilt

$$I = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} A \xrightarrow{\rho} \operatorname{End}(A/I), \\ a \mapsto (\overline{x} \mapsto a\overline{x}) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } I \triangleleft A \text{ mit } \dim(A/I) < \infty.$$

Sei nun $g \in A^0$. Laut Definition von A^0 gibt es dann ein $I \triangleleft A$ mit $\dim(A/I) < \infty$ und $g(I) = 0$. Betrachte dieses I. Offensichtlich ist A/I ein endlichdimensionaler A-Linksmodul. Sei π die kanonische Projektion $A \to A/I$. Dann existiert ein $f \in \operatorname{Hom}(A/I, k) = (A/I)^*$, welches $g = f \circ \pi$ erfüllt (denn $g(I) = 0$). Für dieses f ist

$$c_{f,\pi(1)}(a) = f\left(\underbrace{a\pi(1)}_{=\pi(1)} \right) = f(\pi(1)) = \underbrace{(f \circ \pi)}_{=g}(1) = g(1)$$

für jedes $a \in A$. Somit ist $c_{f,\pi(1)} = g$, also $g = c_{f,\pi(1)} \in C(A/I) \subseteq \bigcup\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V)$ (da A/I ein endlichdimensionaler A-Linksmodul ist). Wir haben damit für jedes

$g \in A^0$ gezeigt, daß $g \in \bigcup\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V)$ ist. Das heißt, $A^0 \subseteq \bigcup\limits_{\substack{V \in {}_A\mathcal{M};\ V \text{ ist} \\ \text{endlichdimensional}}} C(V)$, was zu beweisen war.

6) Sei H eine Bialgebra, und seien V und W zwei endlichdimensionale H-Linksmoduln. Für alle $v \in V$, $w \in W$, $f \in V^*$ und $g \in W^*$ ist

$$c_{f,v}^V \cdot c_{g,w}^W = c_{f \otimes g, v \otimes w}^{V \otimes W}; \qquad C(V) \cdot C(W) = C(V \otimes W).$$

Beweis: Für alle $a \in H$ gilt

$$\begin{aligned} c_{f \otimes g, v \otimes w}^{V \otimes W}(a) &= (f \otimes g)(a(v \otimes w)) = (f \otimes g)\left(a_{(1)}v \otimes a_{(2)}w\right) = f\left(a_{(1)}v\right) \cdot g\left(a_{(2)}w\right) \\ &= c_{f,v}^V\left(a_{(1)}\right) \cdot c_{g,w}^W\left(a_{(2)}\right) = \left(c_{f,v}^V \cdot c_{g,w}^W\right)(a). \end{aligned}$$

Daher ist $c_{f,v}^V \cdot c_{g,w}^W = c_{f \otimes g, v \otimes w}^{V \otimes W}$. Nach den Definitionen von $C(V)$, $C(W)$ und $C(V \otimes W)$ folgt hieraus schnell $C(V) \cdot C(W) = C(V \otimes W)$, denn nach der Definition von $C(V \otimes W)$ ist

$$\begin{aligned} C(V \otimes W) &= \sum_{\substack{s \in V \otimes W, \\ t \in (V \otimes W)^*}} k c_{t,s}^{V \otimes W} = \sum_{\substack{v \in V,\ w \in W, \\ f \in V^*,\ g \in W^*}} k c_{f \otimes g, v \otimes w}^{V \otimes W} \\ &\quad \left(\begin{array}{c} \text{denn die } k\text{-Vektorräume } V \otimes W \text{ und } (V \otimes W)^* = V^* \otimes W^* \\ \text{sind jeweils erzeugt von reinen Tensoren, und } c_{t,s}^{V \otimes W} \text{ ist linear in } t \text{ und } s \end{array}\right) \\ &= \sum_{\substack{v \in V \\ f \in V^*}} \sum_{\substack{w \in W, \\ g \in W^*}} k \underbrace{c_{f \otimes g, v \otimes w}^{V \otimes W}}_{= c_{f,v}^V \cdot c_{g,w}^W} = \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ f \in V^*}} k c_{f,v}^V}_{= C(V)} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{w \in W, \\ g \in W^*}} k c_{g,w}^W}_{= C(W)} = C(V) \cdot C(W). \end{aligned}$$

7) Sei H eine Hopfalgebra. Sei V ein endlichdimensionaler H-Linksmodul. Sei $v \in V$ und $f \in V^*$. Sei $\varphi_v \in V^{**}$ definiert durch $\varphi_v(g) = g(v)$ für alle $g \in V^*$ (mit anderen Worten, φ_v ist das Bild von v beim kanonischen Isomorphismus $V \to V^{**}$). Dann ist

$$c_{\varphi_v, f} = c_{f,v} \circ S; \qquad C(V^*) = C(V) \circ S.$$

Hierbei ist die H-Linksmodulstruktur auf V^* definiert durch $(a \cdot f)(v) = f(S(a)v)$ für alle $a \in H$, $f \in V^*$ und $v \in V$.

Beweis: Für alle $a \in H$ ist

$$c_{\varphi_v, f}(a) = \varphi_v(a \cdot f) = (a \cdot f)(v) = f(S(a)v) = c_{f,v}(S(a)) = (c_{f,v} \circ S)(a).$$

3.5. Satz: 1) Sei A eine Algebra. Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie von ${}_A\mathcal{M}$, die $0 \in \mathcal{C}$ und $V \oplus W \in \mathcal{C}$ für alle $V, W \in \mathcal{C}$ erfüllt. Dann ist

$$\bigcup_{V \in \mathcal{C}} C(V) = \sum_{V \in \mathcal{C}} C(V)$$

eine Untercoalgebra von A^0. Wir bezeichnen diese Untercoalgebra mit $A_{\mathcal{C}}^0$.

2) Sei H eine Bialgebra. Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie von ${}_H\mathcal{M}$, die $0 \in \mathcal{C}$ und $V \oplus W \in \mathcal{C}$ für alle $V, W \in \mathcal{C}$ erfüllt. Angenommen, ${}_\varepsilon k \in \mathcal{C}$ und $V \otimes W \in \mathcal{C}$ für alle $V, W \in \mathcal{C}$ (wobei die H-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$ die Diagonalstruktur sein soll). Dann ist $H_{\mathcal{C}}^0$ eine Bialgebra mit 1-Element ε. Die Algebrastruktur auf $H_{\mathcal{C}}^0$ ist dabei vererbt von der Algebrastruktur auf H^*, und die Coalgebrastruktur auf $H^0_{\mathcal{C}}$ ist vererbt von der Coalgebrastruktur auf H^0.

3) Sei H eine Hopfalgebra. Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie, die die Annahmen von **2)** erfüllt. Angenommen, $V^* \in \mathcal{C}$ für alle $V \in \mathcal{C}$. Dann ist $H^0_{\mathcal{C}}$ eine Hopfalgebra mit Antipode induziert durch $S^* \mid_{H^0_{\mathcal{C}}}$ (das heißt, für alle $f \in H^0_{\mathcal{C}}$ und $h \in H$ ist $S_{H^0_{\mathcal{C}}}(f)(h) = f(S_H(h))$). Die Algebrastruktur auf $H^0_{\mathcal{C}}$ ist dabei vererbt von der Algebrastruktur auf H^*, und die Coalgebrastruktur auf $H^0_{\mathcal{C}}$ ist vererbt von der Coalgebrastruktur auf H^0.

Beweis: Folgt aus 3.4.

$3.5\frac{1}{2}$. Bemerkung: 1) Sei A eine Algebra. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie aller endlichdimensionalen A-Linksmoduln. Gemäß Satz 3.5 **1)** ist dann eine Untercoalgebra $A^0_{\mathcal{C}}$ von A^0 definiert. Dann ist $A^0_{\mathcal{C}} = A^0$.

2) Sei H eine Bialgebra. Dann ist H^0 eine Unteralgebra von H^*. Dies ergibt eine Algebrastruktur auf H^0, die (zusammen mit der bereits bekannten Coalgebrastruktur) H^0 zu einer Bialgebra macht.

3) Sei H eine Hopfalgebra. Dann ist diese Bialgebra H^0 auch eine Hopfalgebra.

Beweis: **1)** Sei $f \in A^0$ beliebig. Laut der Definition von A^0 gibt es dann ein $I \triangleleft A$ mit $\dim(A/I) < \infty$ und $f(I) = 0$. Wir betrachten ein solches I.

Wegen $\dim(A/I) < \infty$ ist A/I ein endlichdimensionaler A-Linksmodul. Daher ist $A/I \in \mathcal{C}$.

Wegen $f(I) = 0$ gibt es (laut dem Homomorphiesatz) eine lineare Abbildung $\widetilde{f} : A/I \to k$ mit $f = \widetilde{f} \circ \pi$, wobei π die kanonische Projektion $A \to A/I$ bezeichnet.

Sei $v = \overline{1}$ die Projektion der Eins $1 \in A$ auf den Faktorvektorraum A/I. Dann ist $c_{\widetilde{f},v} = f$, denn für jedes $a \in A$ ist

$$c_{\widetilde{f},v}(a) = \widetilde{f}\left(a \underbrace{v}_{=\overline{1}}\right) = \widetilde{f}\left(\underbrace{a\overline{1}}_{=\pi(a)}\right) = \widetilde{f}(\pi(a)) = \underbrace{\left(\widetilde{f} \circ \pi\right)}_{=f}(a) = f(a).$$

Also ist $f = c_{\widetilde{f},v} \in C(A/I)$ (nach der Definition von $C(A/I)$). Wegen $C(A/I) \subseteq \bigcup\limits_{V \in \mathcal{C}} C(V) = A^0_{\mathcal{C}}$ ist also $f \in A^0_{\mathcal{C}}$.

Wir haben also gezeigt, daß $f \in A^0_{\mathcal{C}}$ für jedes $f \in A^0$ gilt. Das heißt, $A^0 \subseteq A^0_{\mathcal{C}}$. Zusammen mit $A^0_{\mathcal{C}} \subseteq A^0$ ergibt dies $A^0 = A^0_{\mathcal{C}}$, was zu beweisen war.

2) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie aller endlichdimensionalen H-Linksmoduln. Laut **1)** ist dann $H^0_{\mathcal{C}} = H^0$. Laut Satz 3.5 **2)** ist aber $H^0_{\mathcal{C}}$ eine Bialgebra, wobei die Algebrastruktur auf $H^0_{\mathcal{C}}$ vererbt ist von der Algebrastruktur auf H^*, und die Coalgebrastruktur auf $H^0_{\mathcal{C}}$ vererbt ist von der Coalgebrastruktur auf H^0. Wegen $H^0_{\mathcal{C}} = H^0$ bedeutet dies, daß H^0 eine Bialgebra ist, wobei die Algebrastruktur auf H^0 vererbt ist von der Algebrastruktur auf H^*, und die Coalgebrastruktur auf H^0 die bereits bekannte Coalgebrastruktur ist. Damit ist $3.5\frac{1}{2}$ **2)** bewiesen.

3) analog zu **2)**.

Bemerkung: Natürlich lassen sich die Punkte **2)** und **3)** von $3.5\frac{1}{2}$ auch ohne Rückgriff auf 3.4. beweisen (Übungsaufgabe!).

Jetzt sind wir in der Lage, unser Resultat aus 2.1. **3)** zu verallgemeinern (indem wir nicht mehr fordern, daß U und A endlichdimensional sind):

3.6. Folgerung: Seien U und A zwei Bialgebren. Sei $\tau : U \times A \to k$ eine k-bilineare Abbildung. Definiere eine Abbildung

$$\tau_L : U \to A^* \qquad \text{durch} \qquad \tau_L(u)(a) = \tau(u,a) \text{ für alle } u \in U \text{ und } a \in A,$$

und eine Abbildung

$$\tau_R : A \to U^* \qquad \text{durch} \qquad \tau_R(a)(u) = \tau(u,a) \text{ für alle } u \in U \text{ und } a \in A.$$

Dann gilt:

1) Genau dann ist τ eine schiefe Paarung von Bialgebren, wenn $\tau_L(U) \subseteq A^0$ ist und $\tau_L : U \to A^{0\,\mathrm{cop}}$ ein Bialgebrahomomorphismus ist.

2) Genau dann ist τ eine schiefe Paarung von Bialgebren, wenn $\tau_R(A) \subseteq U^0$ ist und $\tau_R : A \to U^{0\,\mathrm{op}}$ ein Bialgebrahomomorphismus ist.

Beweis: Wir können hier einfach den Beweis von 2.1. **3)** wiederholen; das einzige, was wir noch dazubeweisen müssen, ist folgende Aussage: Wenn τ eine schiefe Paarung ist, dann ist $\tau_L(U) \subseteq A^0$ und $\tau_R(A) \subseteq U^0$. Dies ist jedoch sehr einfach: Nach (SP.2) (einem der Axiome einer schiefen Paarung) ist $\tau(u, ab) = \tau\left(u_{(1)}, b\right)\tau\left(u_{(2)}, a\right)$, also $\tau_L(u)(ab) = \tau\left(u_{(1)}, b\right)\tau\left(u_{(2)}, a\right)$ für alle $u \in U$ und $a, b \in A$, und damit $\tau_L(u) \in A^0$ (nach Lemma 3.1. **1)** $\Longrightarrow$ **7)**). Somit ist $\tau_L(U) \subseteq A^0$. Analog folgt $\tau_R(A) \subseteq U^0$ aus (SP.1).

4. Drinfeld-Doppel und quasitrianguläre Hopfalgebren

Quasitrianguläre Hopfalgebren

Definition (Drinfeld 1989): Sei H eine Bialgebra, und sei $R \in U(H \otimes H)$.

Wir verwenden im Folgenden die Schreibweise $R = R^1 \otimes R^2 \in H \otimes H$, wobei wir natürlich damit nicht sagen wollen, daß R unbedingt ein reiner Tensor sein muß.

Wir definieren drei Tensoren $R_{12}, R_{13}, R_{23} \in H \otimes H \otimes H$ durch $R_{12} = R^1 \otimes R^2 \otimes 1$, $R_{13} = R^1 \otimes 1 \otimes R^2$ und $R_{23} = 1 \otimes R^1 \otimes R^2$. (Formal ausgedrückt bedeutet dies $R_{12} = \sum\limits_i R_{1,i} \otimes R_{2,i} \otimes 1$, $R_{13} = \sum\limits_i R_{1,i} \otimes 1 \otimes R_{2,i}$ und $R_{23} = \sum\limits_i 1 \otimes R_{1,i} \otimes R_{2,i}$, wobei $R = \sum\limits_i R_{1,i} \otimes R_{2,i}$ ist.)

Das Paar (H, R) heißt *quasitriangulär*, wenn folgende drei Axiome gelten:

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(x) = R\Delta(x)R^{-1} \qquad \text{für alle } x \in H; \tag{Q1}$$
$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}; \tag{Q2}$$
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}. \tag{Q3}$$

Ein solches R heißt eine *universelle R-Matrix* für H.

4.1. Bemerkung: 1) Sei H eine Bialgebra, und sei $R \in U(H \otimes H)$. Wir schreiben im Folgenden nicht nur $R^1 \otimes R^2$, sondern auch $r^1 \otimes r^2$ für R, weil sonst Terme wie R^1 und R^2 mehrfach in einem Ausdruck vorkommen würden und man nicht mehr zuordnen könnte, welches R^1 zu welchem R^2 gehört.

Genau dann ist (H, R) ein quasitriangulär es Paar, wenn gilt:

$$x_{(2)}R^1 \otimes x_{(1)}R^2 = R^1 x_{(1)} \otimes R^2 x_{(2)} \qquad \text{für alle } x \in H; \tag{Q1}$$
$$\Delta\left(R^1\right) \otimes R^2 = R^1 \otimes r^1 \otimes R^2 r^2; \tag{Q2}$$
$$R^1 \otimes \Delta\left(R^2\right) = R^1 r^1 \otimes r^2 \otimes R^2. \tag{Q3}$$

Dies war nur eine Umschreibung der Axiome (Q1), (Q2) und (Q3).

2) Sei (H, R) ein quasitrianguläres Paar. Dann gilt:

a) Es ist $\varepsilon(R^1) R^2 = 1 = R^1 \varepsilon(R^2)$.

b) Ist H eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode, dann ist $S(R^1) \otimes R^2 = R^{-1} = R^1 \otimes S^{-1}(R^2)$ und $S(R^1) \otimes S(R^2) = R$.

c) Die Gleichungen $S(R^1) \otimes R^2 = R^{-1}$ und $S(R^1) \otimes S(R^2) = R$ gelten sogar unabhängig davon, ob die Antipode von H bijektiv ist.[351]

Beweis: **a)** Wende $\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ auf die Gleichung (Q2) an, und erhalte $R^1 \otimes R^2 = r^1 \otimes \varepsilon(R^1) R^2 r^2$. Wegen $R^1 \otimes R^2 = R$ und

$$r^1 \otimes \varepsilon\left(R^1\right) R^2 r^2 = \left(1 \otimes \varepsilon\left(R^1\right) R^2\right) \underbrace{\left(r^1 \otimes r^2\right)}_{=R} = \left(1 \otimes \varepsilon\left(R^1\right) R^2\right) R$$

wird dies zu $R = (1 \otimes \varepsilon(R^1) R^2) R$. Hieraus folgt $1 \otimes \varepsilon(R^1) R^2 = 1 \otimes 1$ (da R invertierbar ist), und damit $\varepsilon(R^1) R^2 = 1$. Analog folgert man $R^1 \varepsilon(R^2) = 1$ aus (Q3).

b) Wende $(\mu \otimes \mathrm{id})(S \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})$ auf (Q2) an, und erhalte $\mu((S \otimes \mathrm{id})(R^1)) \otimes R^2 = S(R^1) r^1 \otimes R^2 r^2$. Wegen

$$\underbrace{\mu\left((S \otimes \mathrm{id})\left(R^1\right)\right)}_{=\varepsilon(R^1)1} \otimes R^2 = \varepsilon\left(R^1\right) 1 \otimes R^2 = 1 \otimes \varepsilon\left(R^1\right) R^2 = 1 \otimes 1$$

und

$$S\left(R^1\right) r^1 \otimes R^2 r^2 = \left(S\left(R^1\right) \otimes R^2\right) \underbrace{\left(r^1 \otimes r^2\right)}_{=R} = \left(S\left(R^1\right) \otimes R^2\right) R$$

wird dies zu $1 \otimes 1 = (S(R^1) \otimes R^2) R$, also $R^{-1} = S(R^1) \otimes R^2$ (da R invertierbar ist).

Wende $(\mathrm{id} \otimes (\mu \circ \tau))(\mathrm{id} \otimes S^{-1} \otimes \mathrm{id})$ auf (Q3) an[352], und erhalte $R^1 \otimes (R^2)_{(2)} S^{-1}\left((R^2)_{(1)}\right) = R^1 r^1 \otimes R^2 S^{-1}(r^2)$. Wegen

$$R^1 \otimes \underbrace{\left(R^2\right)_{(2)} S^{-1}\left(\left(R^2\right)_{(1)}\right)}_{=\varepsilon(R^2)} = R^1 \varepsilon\left(R^2\right) \otimes 1 = 1 \otimes 1$$

und

$$R^1 r^1 \otimes R^2 S^{-1}\left(r^2\right) = \underbrace{\left(R^1 \otimes R^2\right)}_{=R} \left(r^1 \otimes S^{-1}\left(r^2\right)\right) = R\left(r^1 \otimes S^{-1}\left(r^2\right)\right)$$

wird dies zu $1 \otimes 1 = R(r^1 \otimes S^{-1}(r^2))$. Da R invertierbar ist, folgt hieraus $R^{-1} = r^1 \otimes S^{-1}(r^2) = R^{-1} \otimes S^{-1}(R^2)$.

Zusammen mit $R^{-1} = S(R^1) \otimes R^2$ ergibt dies $S(R^1) \otimes R^2 = R^1 \otimes S^{-1}(R^2)$.

Wende $\mathrm{id} \otimes S$ auf $S(R^1) \otimes R^2 = R^1 \otimes S^{-1}(R^2)$ an, und erhalte

$$S\left(R^1\right) \otimes S\left(R^2\right) = R^1 \otimes S\left(S^{-1}\left(R^2\right)\right) = R^1 \otimes R^2 = R.$$

Damit ist alles bewiesen.

---

[351] Diese Aussage habe ich (Darij) eingefügt und bewiesen.

[352] wobei $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ die k-lineare Abbildung ist, die $v \otimes w$ auf $w \otimes v$ abbildet für alle $v, w \in H$.

c) Im Beweis von **b)** haben wir bereits gezeigt, daß $R^{-1} = S\left(R^1\right) \otimes R^2$ gilt (ohne zu benutzen, daß S invertierbar ist). Das heißt, $R^{-1} = S\left(r^1\right) \otimes r^2$. Also ist

$$\begin{aligned}
R^{-1}\left(S\left(R^1\right) \otimes S\left(R^2\right)\right) &= \left(S\left(r^1\right) \otimes r^2\right)\left(S\left(R^1\right) \otimes S\left(R^2\right)\right) \\
&= \underbrace{S\left(r^1\right) S\left(R^1\right)}_{=S(R^1 r^1)} \otimes r^2 S\left(R^2\right) = S\left(R^1 r^1\right) \otimes r^2 S\left(R^2\right) \\
&= \left((\operatorname{id} \otimes \mu) \circ (S \otimes \operatorname{id} \otimes S)\right)\left(\underbrace{R^1 r^1 \otimes r^2 \otimes R^2}_{=R^1 \otimes \Delta(R^2) \text{ (nach (Q3))}}\right) \\
&= \left((\operatorname{id} \otimes \mu) \circ (S \otimes \operatorname{id} \otimes S)\right)\left(R^1 \otimes \Delta\left(R^2\right)\right) \\
&= S\left(R^1\right) \otimes \underbrace{\left(\mu \circ (\operatorname{id} \otimes S)\right)\left(\Delta\left(R^2\right)\right)}_{=(R^2)_{(1)} S\left((R^2)_{(2)}\right) = \varepsilon(R^2) 1} \\
&= S\left(R^1\right) \otimes \varepsilon\left(R^2\right) 1 = S\left(\underbrace{R^1 \varepsilon\left(R^2\right)}_{=1}\right) \otimes 1 = \underbrace{S\left(1\right)}_{=1} \otimes 1 = 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

Da R^{-1} invertierbar ist, folgt hieraus $S\left(R^1\right) \otimes S\left(R^2\right) = \left(R^{-1}\right)^{-1} = R$, was zu beweisen war.

4.2. Satz: Ist (H, R) ein quasitrianguläres Paar, dann ist ${}_H\mathcal{M}$ eine verzopfte monoidale Kategorie[353] mit Verzopfung

$$\begin{aligned}
c_{V,W} :\ & V \otimes W \to W \otimes V, \\
& v \otimes w \mapsto R^2 w \otimes R^1 v
\end{aligned}$$

für alle $V, W \in {}_H\mathcal{M}$.

Hierbei wollen wir nicht genau darauf eingehen, was der Begriff "verzopfte monoidale Kategorie" bedeutet, aber für uns bedeutet diese Aussage folgendes:

- Für alle $V, W \in {}_H\mathcal{M}$ ist die k-lineare Abbildung

  $$\begin{aligned}
  c_{V,W} :\ & V \otimes W \to W \otimes V, \\
  & v \otimes w \mapsto R^2 w \otimes R^1 v
  \end{aligned}$$

  ein Isomorphismus in ${}_H\mathcal{M}$.

- Diese Abbildung $c_{V,W} : \ V \otimes W \to W \otimes V$ ist funktoriell in beiden Variablen V und W. Dies bedeutet folgendes: Für alle $V, V', W, W' \in {}_H\mathcal{M}$ und für alle H-linkslinearen Abbildungen $f : V \to V'$ und $g : W \to W'$ ist das Diagramm

  $$\begin{tikzcd}
  V \otimes W \arrow[r, "c_{V,W}"'] \arrow[d, "f \otimes g"'] & W \otimes V \arrow[d, "g \otimes f"] \\
  V' \otimes W' \arrow[r, "c_{V',W'}"'] & W' \otimes V'
  \end{tikzcd}$$

  kommutativ.

[353]englisch: braided monoidal category

- Für alle $U, V, W \in {}_H\mathcal{M}$ sind die Diagramme

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[rr, "c_{U\otimes V,W}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes c_{V,W}"'] & & W \otimes U \otimes V \\ & U \otimes W \otimes V \arrow[ur, "c_{U,W}\otimes \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \text{(C1)}$$

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[rr, "c_{U,V\otimes W}"] \arrow[dr, "c_{U,V}\otimes \mathrm{id}"'] & & V \otimes W \otimes U \\ & V \otimes U \otimes W \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes c_{U,W}"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(C2)}$$

kommutativ.

Beweis: **1)** Wir zeigen zuerst: Die Abbildung $c_{V,W}: \ V \otimes W \to W \otimes V$ ist ein Isomorphismus in ${}_H\mathcal{M}$ und funktoriell in beiden Variablen V und W.

Beweis: Die k-linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} c_{V,W}: \ & V \otimes W \to W \otimes V, \\ & v \otimes w \mapsto R^2 w \otimes R^1 v \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & W \otimes V \to V \otimes W, \\ & w \otimes v \mapsto \overline{R}^1 v \otimes \overline{R}^2 w, \end{aligned}$$

wobei $\overline{R} = R^{-1}$, sind zueinander invers, und damit ist die Abbildung $c_{V,W}$ ein Vektorraumisomorphismus.

Ferner ist $c_{V,W}$ eine H-lineare Abbildung, denn für alle $v \in V$, $w \in W$ und $h \in H$ gilt

$$c_{V,W}\left(\underbrace{h\,(v \otimes w)}_{=h_{(1)}v\otimes h_{(2)}w}\right) = R^2 h_{(2)} w \otimes R^1 h_{(1)} v$$

und

$$\begin{aligned} h\,\underbrace{c_{V,W}\,(v \otimes w)}_{=R^2 w \otimes R^1 v} &= h_{(1)} R^2 w \otimes h_{(2)} R^1 v = R^2 h_{(2)} w \otimes R^1 h_{(1)} v \\ & \qquad \qquad \left(\text{denn (Q1) ergibt } R^1 h_{(1)} \otimes R^2 h_{(2)} = h_{(2)} R^1 \otimes h_{(1)} R^2\right) \\ &= c_{V,W}\,(h\,(v \otimes w)). \end{aligned}$$

Somit ist $c_{V,W}$ ein Isomorphismus in ${}_H\mathcal{M}$.

Daß $c_{V,W}$ in beiden Variablen V und W funktoriell ist, ergibt sich aus $(g \otimes f)\, c_{V,W} = c_{V',W'}\,(f \otimes g)$ für alle $V, V', W, W' \in {}_H\mathcal{M}$ und für alle H-linkslinearen Abbildungen $f : V \to V'$ und $g : W \to W'$, was wiederum aus

$$(g \otimes f)\, c_{V,W}\,(v \otimes w) = g\left(R^2 w\right) \otimes f\left(R^1 v\right)$$

und

$$c_{V',W'}\,(f\,(v) \otimes g\,(w)) = R^2 g\,(w) \otimes R^1 f\,(v)$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$ folgt.

2) Jetzt werden wir (C1) beweisen. Für alle $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ ist

$$\begin{aligned} c_{U\otimes V,W}\left(u\otimes v\otimes w\right) &= R^2 w\otimes R^1\left(u\otimes v\right) = R^2 w\otimes\left(R^1\right)_{(1)}u\otimes\left(R^1\right)_{(2)}v \\ &= r^2 R^2 w\otimes r^1 u\otimes R^1 v \qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn (Q2) ergibt } R^2\otimes\left(R^1\right)_{(1)}\otimes\left(R^1\right)_{(2)} \\ = R^2\otimes\Delta\left(R^1\right) = R^2 r^2\otimes R^1\otimes r^1 \\ = r^2 R^2\otimes r^1\otimes R^1 \end{array}\right), \end{aligned}$$

aber auch

$$\left(\mathrm{id}\otimes c_{V,W}\right)\left(u\otimes v\otimes w\right) = u\otimes R^2 w\otimes R^1 v$$

und damit

$$\begin{aligned} \left(c_{U,V}\otimes\mathrm{id}\right)\left(\mathrm{id}\otimes c_{V,W}\right)\left(u\otimes v\otimes w\right) &= \left(c_{U,V}\otimes\mathrm{id}\right)\left(u\otimes R^2 w\otimes R^1 v\right) \\ &= r^2 R^2 w\otimes r^1 u\otimes R^1 v = c_{U\otimes V,W}\left(u\otimes v\otimes w\right), \end{aligned}$$

und daher ist $\left(c_{U,V}\otimes\mathrm{id}\right)\left(\mathrm{id}\otimes c_{V,W}\right) = c_{U\otimes V,W}$. Somit ist (C1) bewiesen.

3) Jetzt wollen wir (C2) nachpüfen. Für alle $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ ist

$$\begin{aligned} c_{U,V\otimes W}\left(u\otimes v\otimes w\right) &= R^2\left(v\otimes w\right)\otimes R^1 u = \left(R^2\right)_{(1)}v\otimes\left(R^2\right)_{(2)}w\otimes R^1 u \\ &= R^2 v\otimes r^2 w\otimes r^1 R^1 u \qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn (Q3) ergibt } \left(R^2\right)_{(1)}\otimes\left(R^2\right)_{(2)}\otimes R^1 \\ = \Delta\left(R^2\right)\otimes R^1 = r^2\otimes R^2\otimes R^1 r^1 \\ = R^2\otimes r^2\otimes r^1 R^1 \end{array}\right), \end{aligned}$$

aber auch

$$\left(c_{U,V}\otimes\mathrm{id}\right)\left(u\otimes v\otimes w\right) = R^2 v\otimes R^1 u\otimes w$$

und damit

$$\left(\mathrm{id}\otimes c_{U,W}\right)\left(c_{U,V}\otimes\mathrm{id}\right)\left(u\otimes v\otimes w\right) = \left(\mathrm{id}\otimes c_{U,W}\right)\left(R^2 v\otimes R^1 u\otimes w\right) = R^2 v\otimes r^2 w\otimes r^1 R^1 u,$$

also $\left(\mathrm{id}\otimes c_{U,W}\right)\left(c_{U,V}\otimes\mathrm{id}\right) = c_{U,V\otimes W}$. Damit ist (C2) gezeigt.

Bemerkung: Satz 4.2. hat auch eine Art Umkehrung: Sei H eine Bialgebra so, daß die Kategorie ${}_H\mathcal{M}$ verzopft ist mit $\left(c_{V,W}\right)_{V,W\in{}_H\mathcal{M}}$. Dann ist (H,R) ein quasitrianguläres Paar mit Verzopfung wie in Satz 4.2. mit $R = \tau\left(c_{H,H}\left(1\otimes 1\right)\right)$, wobei die k-lineare Abbildung $\tau : H\otimes H\to H\otimes H$ durch $\tau\left(v\otimes w\right) = w\otimes v$ für alle $v,w\in H$ definiert ist.

4.3. Folgerung: Sei (H,R) ein quasitrianguläres Paar. Für alle $U,V,W\in{}_H\mathcal{M}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & U\otimes V\otimes W \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes c_{V,W}"'] \arrow[dr, "c_{U,V}\otimes\mathrm{id}"] & \\ U\otimes W\otimes V \arrow[d, "c_{U,W}\otimes\mathrm{id}"'] & & V\otimes U\otimes W \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes c_{U,W}"] \\ W\otimes U\otimes V \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes c_{U,V}"'] & & V\otimes W\otimes U \arrow[dl, "c_{V,W}\otimes\mathrm{id}"] \\ & W\otimes V\otimes U & \end{tikzcd}$$

kommutativ. (Dies ist das sogenannte *Hexagon-Diagramm.*)

Für jedes $V \in {}_H\mathcal{M}$ gilt insbesondere

$$(\mathrm{id} \otimes c)\,(c \otimes \mathrm{id})\,(\mathrm{id} \otimes c) = (c \otimes \mathrm{id})\,(\mathrm{id} \otimes c)\,(c \otimes \mathrm{id})$$

in $\mathrm{End}\,(V \otimes V \otimes V)$, wobei $c = c_{V,V}$. (Dies ist die sogenannte *Yang-Baxter-Gleichung.*)

Beweis: Seien $U, V, W \in {}_H\mathcal{M}$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \otimes W \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes c_{V,W}"'] \arrow[ddl, "c_{U \otimes V, W}"] \arrow[dr, "c_{U,V} \otimes \mathrm{id}"] & \\
U \otimes W \otimes V \arrow[d, "c_{U,W} \otimes \mathrm{id}"'] & & V \otimes U \otimes W \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes c_{U,W}"] \arrow[ddl, "c_{V \otimes U, W}"'] \\
W \otimes U \otimes V \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes c_{U,V}"'] & & V \otimes W \otimes U \arrow[dl, "c_{V,W} \otimes \mathrm{id}"] \\
 & W \otimes V \otimes U &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ (denn das linke Dreieck ist wegen (C1) kommutativ, das rechte Dreieck ist ebenfalls wegen (C1) kommutativ, und das mittlere Parallelogramm

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "c_{U \otimes V, W}"] \arrow[d, "c_{U,V} \otimes \mathrm{id}"'] & W \otimes (U \otimes V) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes c_{U,V}"] \\
(V \otimes U) \otimes W \arrow[r, "c_{V \otimes U, W}"] & W \otimes (V \otimes U)
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, da $c_{\cdot,\cdot}$ eine natürliche Transformation ist). Somit ist 4.3. bewiesen.

Der folgende Satz liefert uns unendlich viele quasitrianguläre Paare (H, R):

4.4. Satz: Sei H eine endlichdimensionale Hopfalgebra. Wir arbeiten jetzt in der Hopfalgebra $D(H)$. Als Vektorraum und sogar als Coalgebra ist natürlich $D(H) = H^{*\,\mathrm{cop}} \otimes H$.

Wir schreiben im Folgenden fx statt $f \otimes x$ für alle $f \in H^*$ und $x \in H$.

Sei $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von H, und sei $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ die zu ihr duale Basis von H^*.

Sei $R = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes f_i \in D(H) \otimes D(H)$, wobei wir jetzt v_i mit dem Element $\varepsilon_H v_i = \varepsilon_H \otimes v_i$ von $D(H)$ identifizieren und f_i mit dem Element $f_i 1 = f_i \otimes 1$ von $D(H)$ identifizieren.

Dann ist $(D(H), R)$ ein quasitrianguläres Paar.

Beweis: **1)** Zuerst werden wir zeigen, daß R in $D(H) \otimes D(H)$ invertierbar ist.

Beweis: Setze $\overline{R} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes S_{H^*}(f_i)$. (Man bedenke, daß $S_{H^*} = S_{H^{*\,\mathrm{cop}}}^{-1} = S_{D(H)}^{-1}\mid_{H^*}$ und nicht etwa $S_{H^*} = S_{D(H)}\mid_{H^*}$ gilt!) Dann ist

$$R\overline{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes f_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \otimes S_{H^*}(f_j)\right) = \sum_{i,j} v_i v_j \otimes f_i S_{H^*}(f_j) = 1 \otimes 1$$

in $D(H) \otimes D(H)$, denn für alle $x \in H$ ist

$$\sum_{i,j} v_i v_j \left(f_i S_{H^*}(f_j)\right)(x) = \sum_{i,j} v_i v_j \underbrace{\left(f_i S_{H^*}(f_j)\right)(x)}_{=f_i\left(x_{(1)}\right)\cdot \underbrace{\left(S_{H^*}(f_j)\right)\left(x_{(2)}\right)}_{=f_j\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)}}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i f_i\left(x_{(1)}\right)}_{=x_{(1)},\text{ da } (v_i)_{1\leq i\leq n} \text{ und } (f_i)_{1\leq i\leq n} \text{ duale Basen sind}} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} v_j f_j\left(S\left(x_{(2)}\right)\right)}_{=S\left(x_{(2)}\right),\text{ da } (v_i)_{1\leq i\leq n} \text{ und } (f_i)_{1\leq i\leq n} \text{ duale Basen sind}} = x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x)\cdot 1.$$

2) Jetzt wollen wir zeigen: $(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{12}R_{23}$.

Beweis: Wir haben

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(v_i) \otimes f_i$$

und

$$R_{12}R_{23} = \sum_{i,j} v_i \otimes v_j \otimes f_i f_j,$$

und somit folgt $(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{12}R_{23}$ aus

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(v_i) \otimes f_i = \sum_{i,j} v_i \otimes v_j \otimes f_i f_j,$$

was wahr ist, da

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(v_i) f_i(x) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} v_i f_i(x)\right) = \Delta(x)$$

und

$$\sum_{i,j} v_i \otimes v_j \underbrace{(f_i f_j)(x)}_{=f_i\left(x_{(1)}\right) f_j\left(x_{(2)}\right)} = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i\left(x_{(1)}\right) \otimes \sum_{j=1}^{n} v_j f_j\left(x_{(2)}\right) = x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \Delta(x)$$

für alle $x \in H$ gilt.

3) Analog gilt $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$.

4) Jetzt werden wir zeigen: Für alle $x \in H$ ist $\Delta^{\mathrm{cop}}(x) R = R\Delta(x)$.

Beweis: Wir haben

$$\Delta^{\mathrm{cop}}(x) R = \left(x_{(2)} \otimes x_{(1)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_{(2)} v_i \otimes \underbrace{x_{(1)} f_i}_{=f_i\left(S^{-1}\left(x_{(3)}\right) \underline{?} x_{(1)}\right) x_{(2)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{(4)} v_i \otimes f_i\left(S^{-1}\left(x_{(3)}\right) \underline{?} x_{(1)}\right) x_{(2)}$$

und

$$R\Delta(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes f_i\right)\left(x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_{(1)} \otimes f_i x_{(2)},$$

aber wir haben

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(4)} v_i \otimes f_i \left(S^{-1}\left(x_{(3)}\right) \underline{?} x_{(1)} \right) x_{(2)} = \sum_{i=1}^{n} v_i x_{(1)} \otimes f_i x_{(2)},$$

denn für alle $h \in H$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(4)} v_i \otimes f_i \left(S^{-1}\left(x_{(3)}\right) h x_{(1)} \right) x_{(2)} = x_{(4)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i f_i \left(S^{-1}\left(x_{(3)}\right) h x_{(1)} \right)}_{\substack{= S^{-1}\left(x_{(3)}\right) h x_{(1)}, \text{ da } (v_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ und } (f_i)_{1 \leq i \leq n} \\ \text{duale Basen sind}}} \otimes x_{(2)}$$

$$= \underbrace{x_{(4)} S^{-1}\left(x_{(3)}\right)}_{= \varepsilon\left(x_{(3)}\right)} h x_{(1)} \otimes x_{(2)} = h x_{(1)} \otimes x_{(2)}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_{(1)} \otimes f_i (h) x_{(2)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i f_i (h)}_{\substack{= h, \text{ da } (v_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ und } (f_i)_{1 \leq i \leq n} \\ \text{duale Basen sind}}} x_{(1)} \otimes x_{(2)} = h x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

5. Yetter-Drinfeld-Moduln

[*Kurzzusammenfassung:*]

Definition: Sei H eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode S. Ein *Yetter-Drinfeld-Modul* über der Hopfalgebra H ist ein Vektorraum V mit einer H-Linksmodulstruktur

$$H \otimes V \to V, \qquad h \otimes v \mapsto h \cdot v = hv$$

und einer H-Linkscomodulstruktur

$$V \to H \otimes V, \qquad v \mapsto v_{(-1)} \otimes v_{(0)},$$

die die Beziehung

$$\delta (h \cdot v) = h_{(1)} v_{(-1)} S\left(h_{(3)}\right) \otimes h_{(2)} v_{(0)} \qquad \text{für alle } h \in H \text{ und } v \in V$$

erfüllen.

Sind V und W zwei Yetter-Drinfeld-Moduln über der Hopfalgebra H, und ist f eine k-lineare Abbildung von V nach W, so heißt f ein *Yetter-Drinfeld-Modulhomomorphismus* genau dann, wenn f ein H-Linksmodulhomomorphismus und ein H-Linkscomodulhomomorphismus ist.

Sei ${}_H^H\mathcal{YD}$ die Kategorie, deren Objekte die Yetter-Drinfeld-Moduln über der Hopfalgebra H sind, und deren Morphismen die Yetter-Drinfeld-Modulhomomorphismen sind.

Diese Kategorie ${}_H^H\mathcal{YD}$ ist eine (strikte) monoidale Kategorie, d. h. für alle $V, W \in {}_H^H\mathcal{YD}$ ist $V \otimes W \in {}_H^H\mathcal{YD}$ (wobei sowohl die H-Linksmodulstruktur, als auch die

H-Linkscomodulstruktur auf $V \otimes W$ die Diagonalstrukturen sind, d. h. die H-Linksmodulstruktur auf $V \otimes W$ ist gegeben durch

$$h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)} v \otimes h_{(2)} w \qquad \text{für alle } h \in H,\ v \in V \text{ und } w \in W,$$

und die H-Linkscomodulstruktur auf $V \otimes W$ ist gegeben durch

$$\delta (v \otimes w) = v_{(-1)} w_{(-1)} \otimes v_{(0)} \otimes w_{(0)} \qquad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W$$

).

Ferner ist auf der Kategorie ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ eine Verzopfung

$$c_{V,W} : V \otimes W \overset{\cong}{\to} W \otimes V, \qquad v \otimes w \mapsto v_{(-1)} w \otimes v_{(0)}$$

definiert. Die Umkehrabbildung dieser Verzopfung hat die Form

$$c_{V,W}^{-1} : W \otimes V \overset{\cong}{\to} V \otimes W, \qquad w \otimes v \mapsto v_{(0)} \otimes S^{-1} \left(v_{(-1)}\right) w.$$

[...]
[HIER FEHLEN MEHRERE VORLESUNGEN.]
[...]

6. Bosonisierung

[Ab hier wird nur noch vage mitgeschrieben und nicht wirklich mitgedacht - Fehler und unvollständige Beweise sind garantiert.]

6.1. Satz (Radford-Majid): Sei H eine Hopfalgebra mit bijektiver Antipode S. Sei A eine weitere Hopfalgebra, und seien $\iota : H \to A$ und $\pi : A \to H$ zwei Hopfalgebrahomomorphismen, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \\ A \arrow[r, two heads, "\pi"'] & H \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Wir betrachten H als Unterhopfalgebra von A (vermöge der Inklusion ι). Sei $R = A^{\mathrm{Co}\, H}$, wobei $A^{\mathrm{Co}\, H}$ als die Teilmenge $\left\{a \in A \mid a_{(1)} \otimes \pi\left(a_{(2)}\right) = a \otimes 1 \text{ in } A \otimes H\right\}$ von A definiert ist. Dann ist R eine Hopfalgebra in der Kategorie ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$, wobei die Hopfalgebrastruktur und die Yetter-Drinfeld-Modulstruktur wie folgt definiert sind:

- Die H-Linksmodulstruktur auf R sei definiert durch $h \cdot r = h_{(1)} r S\left(h_{(2)}\right)$.
- Die H-Linkscomodulstruktur auf R sei die Abbildung $\delta_R : R \to H \otimes R$, die durch $\delta_R (r) = \pi\left(r_{(1)}\right) \otimes r_{(2)}$ definiert ist. (Wie immer schreiben wir im Folgenden $r_{(-1)} \otimes r_{(0)}$ für $\delta_R (r)$. Also wird $\delta_R (r) = \pi\left(r_{(1)}\right) \otimes r_{(2)}$ zu $r_{(-1)} \otimes r_{(0)} = \pi\left(r_{(1)}\right) \otimes r_{(2)}$.)
- Die k-Algebrastruktur auf R ergibt sich durch Restriktion aus der von A (denn R ist eine Unteralgebra von A).

- Die k-Coalgebrastruktur auf R sei definiert durch $\varepsilon_R = \varepsilon_A\mid_R$ und durch

  $\Delta_R(r) = \vartheta\left(r_{(1)}\right) \otimes r_{(2)} = r^{(1)} \otimes r^{(2)}$, wobei

  wobei $\vartheta : A \to R$ definiert ist durch $\vartheta(a) = a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(2)}\right)$ für alle $a \in A$.

- Die Antipode auf R sei definiert durch $S_R(r) = r_{(-1)} S\left(r_{(0)}\right) = \pi\left(r_{(1)}\right) S\left(r_{(2)}\right)$.

Diese Hopfalgebra hat ferner die Eigenschaft, daß

$$R \otimes H \to A, \qquad r \otimes h \mapsto rh$$

und

$$A \to R \otimes H, \qquad a \mapsto a_{(1)}(S \circ \pi)\left(a_{(2)}\right) \otimes \pi\left(a_{(3)}\right) = \vartheta\left(a_{(1)}\right) \otimes \pi\left(a_{(2)}\right)$$

zueinander inverse Bijektionen sind.

Beweis: **1)** Die Abbildung ϑ ist wohldefiniert, d. h. für jedes $a \in A$ ist $a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(2)}\right) \in R$.

Beweis: Für jedes $a \in A$ ist $\vartheta(a) = a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(2)}\right)$ und damit

$$\begin{aligned}
\Delta(\vartheta(a)) &= \Delta\left(a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(2)}\right)\right) = \Delta\left(a_{(1)}\right) \cdot \underbrace{\Delta\left((\pi \circ S)\left(a_{(2)}\right)\right)}_{\substack{=(\pi\otimes\pi)\left(\Delta\left(S\left(a_{(2)}\right)\right)\right) \\ \text{(denn } \pi \text{ ist ein Coalgebrahomomorphismus)}}} \\
&= \Delta\left(a_{(1)}\right) \cdot (\pi \otimes \pi)\left(\Delta\left(S\left(a_{(2)}\right)\right)\right) \\
&= \left(\left(a_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(a_{(1)}\right)_{(2)}\right)\left(\pi\left(\left(S\left(a_{(2)}\right)\right)_{(1)}\right) \otimes \pi\left(\left(S\left(a_{(2)}\right)\right)_{(2)}\right)\right) \\
&= \left(a_{(1)} \otimes a_{(2)}\right)\left((\pi \circ S)\left(a_{(4)}\right) \otimes (\pi \circ S)\left(a_{(3)}\right)\right) \\
&\qquad \text{(da } S \text{ ein Anticoalgebrahomomorphismus ist)} \\
&= a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(4)}\right) \otimes a_{(2)}(\pi \circ S)\left(a_{(3)}\right),
\end{aligned}$$

und nun

$$\begin{aligned}
(\vartheta(a))_{(1)} \otimes \pi\left((\vartheta(a))_{(2)}\right) &= (\mathrm{id} \otimes \pi)\left(\underbrace{\Delta(\vartheta(a))}_{=a_{(1)}(\pi\circ S)\left(a_{(4)}\right)\otimes a_{(2)}(\pi\circ S)\left(a_{(3)}\right)}\right) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \pi)\left(a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(4)}\right) \otimes a_{(2)}(\pi \circ S)\left(a_{(3)}\right)\right) \\
&= a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(4)}\right) \otimes \underbrace{\pi\left(a_{(2)}(\pi \circ S)\left(a_{(3)}\right)\right)}_{\substack{=\pi\left(a_{(2)}\right)\pi\left((\pi\circ S)\left(a_{(3)}\right)\right) \\ =\pi\left(a_{(2)}\right)\pi^2\left(S\left(a_{(3)}\right)\right) \\ =\pi\left(a_{(2)}\right)\pi\left(S\left(a_{(3)}\right)\right) \\ \text{(denn } \pi \text{ ist eine Projektion, also } \pi^2=\pi\text{)}}} \\
&= a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(4)}\right) \otimes \underbrace{\pi\left(a_{(2)}\right)\pi\left(S\left(a_{(3)}\right)\right)}_{=\pi\left(a_{(2)}S\left(a_{(3)}\right)\right)=\pi\left(\varepsilon\left(a_{(2)}\right)\right)} \\
&= a_{(1)}(\pi \circ S)\left(a_{(2)}\right) \otimes 1 = \vartheta(a) \otimes 1,
\end{aligned}$$

also $\vartheta(a) \in A^{\mathrm{Co}\,H} = R$, was zu beweisen war.

2) Die Abbildungen

$$R \otimes H \to A, \qquad r \otimes h \mapsto rh$$

und

$$A \to R \otimes H, \qquad a \mapsto a_{(1)} (S \circ \pi) \big(a_{(2)}\big) \otimes \pi \big(a_{(3)}\big) = \vartheta \big(a_{(1)}\big) \otimes \pi \big(a_{(2)}\big)$$

sind zueinander inverse Bijektionen.

Beweis: [...]

3)

$$R \overset{\cong}{\to} A \big/ AH^{+}, \qquad r \mapsto \overline{r}$$

als Coalgebren.