Alternierende Summen: Aufgaben und Lösungen

Darij Grinberg

28. Juni 2022 *

(Aufgabenblatt für IMO-Training 2020 Deutschland)

Inhaltsverzeichnis

*Eine aktuelle Version dieses Aufgabenblattes kann auf `https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/algebra/aimo2020-altsum-lsg.pdf` heruntergeladen werden.

***

Dieses Aufgabenblatt handelt von alternierenden (und generell vorzeichenbehafteten) Summen in der Kombinatorik, und allgemeiner von Differenzen, Kürzungen und "destruktiver Interferenz". Die Prototyp-Aufgaben zeigen einige Strategien auf, die es ermöglichen, solche Summen zu berechnen oder anzuwenden; in den späteren Aufgaben kommen diese Strategien dann zum Zug (wobei oft auch andere Lösungen existieren).

1. Basics über Binomialkoeffizienten

Im Folgenden sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Der Allgemeinheit halber werden wir öfters mit komplexen Zahlen arbeiten. Wirklich nötig sind sie uns aber nicht; wer mit ihnen unerfahren ist, kann sie daher durch reelle Zahlen (oder gar durch rationale Zahlen) ersetzt denken, und dementsprechend immer $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Q}$) statt $\mathbb{C}$ lesen.

Wir erinnern uns an die Definition der Binomialkoeffizienten: Für alle $n, k \in \mathbb{C}$ setzt man

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, & \text{wenn } k \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{wenn } k \notin \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Beispielsweise gilt

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \text{und}$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{-1} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{C}$. (Man beachte: $\binom{1/2}{2} = \frac{(1/2)(1/2-1)}{2} = -\frac{1}{8}$ aber $\binom{2}{1/2} = 0$ wegen $1/2 \notin \mathbb{N}$.)

Bekannte Eigenschaften von Binomialkoeffizienten sind[1]:

- **(Nullen rechts vom Pascalschen Dreieck)**

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{C} \text{ mit } k > n. \tag{2}$$

(Achtung: Dies gilt nicht für negative oder nicht-ganze n.)

[1] Beweise, falls unbekannt, sind Übungsaufgaben!

- **(Rekursion)**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \text{für alle } n, k \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

- **(Minus-eins-Potenzen)**

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

- **(Upper Negation)**

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{C} \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

- **(Fakultätenformel)**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq k.$$

  (Achtung: Die Voraussetzungen $n, k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$ sind wirklich nötig; sonst ist die Formel nicht einmal sinnvoll. Daher ist die Formel kein Ersatz für (1).)

- **(Symmetrie)**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

  (Achtung: Dies gilt nur für $n \in \mathbb{N}$. Die Missanwendung auf negative n ist eine häufige Fehlerquelle.)

- **(Rechter Rand des Pascalschen Dreiecks)**

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

  (Achtung: Im Gegensatz zu $\binom{n}{0} = 1$ gilt dies nur für $n \in \mathbb{N}$.)

- **(Kombinatorische Interpretation)** Ist S eine n-elementige Menge (mit $n \in \mathbb{N}$), und ist $k \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\binom{n}{k} = (\text{Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } S)\,.$$

  (Achtung: Dies sagt nichts über $\binom{n}{k}$ für negatives n aus, und schon gar nichts über $\binom{-1/2}{k}$.)

- **(Polynomialität)** Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\dbinom{n}{k}$ (als Funktion von n) eine Polynomfunktion vom Grad k. (Aber für festes n ist $\dbinom{n}{k}$ im Allgemeinen keine Polynomfunktion in k.)

- **(Ganzzahligkeit)**

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{Z} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und } k \in \mathbb{C}.$$

- **(Primzahlteilbarkeit, einfachste Form)** Ist p eine Primzahl, dann ist $p \mid \dbinom{p}{k}$ für alle $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

- **(Binomischer Satz)** Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

  (Dies gilt noch allgemeiner, wenn x und y zwei kommutierende Elemente eines Ringes sind – z.B. zwei kommutierende $m \times m$-Matrizen.)

- **(Hockeystick-Identität)**

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}.$$

  (Die ersten k Summanden auf der linken Seite sind 0 und können daher weggelassen werden.)

- **(Fibonacci via Binomialkoeffizienten)**

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \qquad \text{für alle ganzen Zahlen } n \geq -1,$$

  wobei $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ die Fibonaccifolge ist (mit $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$). (Auch hier kann man viele Summanden weglassen, denn $\dbinom{n-k}{k} = 0$ für alle k mit $n/2 < k \leq n$. Aber man darf die Summe nicht über $k = n$ hinaus erweitern, weil dann wieder von 0 verschiedene Summanden hineinkommen!)

Die Beweise all dieser Aufgaben können auch an vielen Orten – wie [GrKnPa94, Chapter 5], [Grinbe15, Chapter 3] oder [19fco, Chapters 1 and 2] – nachgeschlagen werden.

2. Aufgaben

2.1. Prototyp-Aufgaben

Aufgabe 1. Die *Chu-Vandermonde-Identität* (aka *Vandermondesche Faltung*) besagt, daß

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} \tag{7}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt.

(a) Beweise die Chu-Vandermonde-Identität für alle $n, x, y \in \mathbb{N}$.

(b) Folgere, dass sie auch für alle $n, x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{C}$ gilt.

[**Hinweis:** Zwei Polynomfunktionen p und q auf $\mathbb{C}$ sind gleich, wenn $p(m) = q(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.]

(c) Folgere, dass die Chu-Vandermonde-Identität auch allgemein gilt.

(d) Zeige, dass die "umgedrehte Chu-Vandermonde-Identität"

$$\binom{n+1}{x+y+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{x} \binom{n-k}{y} \tag{8}$$

für alle $n, x, y \in \mathbb{N}$ gilt.

[**Hinweis:** Wende die Chu-Vandermonde-Identität auf $n-x-y$, $-x-1$ und $-y-1$ statt n, x und y an, und vereinfache mit Upper Negation.]

(e) Gilt die "umgedrehte Chu-Vandermonde-Identität" auch allgemeiner für $x, y \in \mathbb{C}$?

(f) Die Hockeystick-Identität ist ein Sonderfall der "umgedrehten Chu-Vandermonde-Identität"; warum?

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $[n]$ die n-elementige Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2. Unter der *negativen Hockeystick-Identität* verstehen wir die Identität

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m} \tag{9}$$

für alle $n \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$.

(a) Beweise (9) allgemein und kurz.

(b) Gebe einen künstlerischeren Beweis von (9) im Falle, wenn n eine positive ganze Zahl ist: Und zwar betrachte man alle Teilmengen I von $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ mit höchstens m Elementen. Das *Vorzeichen* einer solchen Teilmenge I definieren wir als $(-1)^{|I|}$. Auf der linken Seite von (9) steht also die Summe der Vorzeichen aller dieser Teilmengen. Man paare nun fast alle Summanden dieser Summe miteinander so auf, dass sie sich paarweise wegkürzen; bestimmte $\binom{n-1}{m}$ Summanden (welche?) sollen ungepaart bleiben.

[**Hinweis:** Ist I eine Teilmenge von $[n]$, so ist auch $I \cup \{1\}$ eine solche, und $I \setminus \{1\}$ ebenso.]

(c) Erkläre, wieso man aus diesem Beweis für positives ganzes n auch die allgemeine Gültigkeit von (9) für alle $n \in \mathbb{C}$ erhalten kann.

[**Hinweis:** Polynomfunktionen.]

(d) Beweise (9) ein drittes Mal, diesmal als Sonderfall der Chu-Vandermonde-Identität.

Wir werden die *Iversonklammer* verwenden: Für jede Aussage $\mathcal{A}$ setzen wir $[\mathcal{A}] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{A} \text{ gilt;} \\ 0, & \text{wenn nicht.} \end{cases}$

(So ist $[2+2=4] = 1$ und $[2+2=5] = 0$.)

Wir erinnern uns an den Begriff einer *Permutation*: Eine *Permutation* einer Menge X ist eine bijektive Abbildung von X nach X.

Aufgabe 3.

(a) Für jede endliche Menge S zeige man

$$\sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} = [S = \varnothing] . \tag{10}$$

(b) Zeige die *Sylvestersche Siebformel* (auch *Prinzip von Inklusion und Exklusion* genannt): Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei U eine endliche Menge. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von U. Dann gilt

$$|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| . \tag{11}$$

Hierbei ist der "leere" Durchschnitt $\bigcap_{i \in \varnothing} A_i$ als die gesamte Menge U zu verstehen.

(*Deutung:* Wir wollen Objekte $u \in U$ zählen, die eine Reihe von "Regeln" $R_1, R_2, \ldots, R_n$ erfüllen (z. B., Zahlen, die durch keine von n gegebenen Zahlen teilbar sind). Angenommen, für jede Auswahl von diesen Regeln kennen wir die Anzahl aller Objekte $u \in U$, die all diese Regeln verletzen (was nicht bedeutet, daß sie alle anderen Regeln achten); beispielsweise wissen wir, wie viele $u \in U$ die Regeln R_2, R_3 und R_5 (gleichzeitig) verletzen. Dann können wir mit der Formel (11) die Anzahl aller "gesetzestreuen" $u \in U$ berechnen.)

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein *Derangement* von $[n]$ bedeute eine Permutation σ von $[n]$, die keine Fixpunkte hat (d.h., die $\sigma(i) \neq i$ für alle $i \in [n]$ erfüllt). Zeige, dass die Anzahl aller Derangements von $[n]$ gleich $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$ ist.

(d) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Anzahl aller surjektiven Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$ gleich $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m$ ist.

(e) Folgere, dass $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m$ durch $n!$ teilbar ist (für alle $n, m \in \mathbb{N}$).

(f) Folgere, dass $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(g) Was folgt aus Teil **(d)**, wenn $m < n$ gilt?

Aufgabe 4. Seien $n, d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$.

Ein n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ nennen wir 1-*gerade*, wenn es die Zahl 1 gerade oft enthält (d.h., wenn die Anzahl aller $i \in [n]$ mit $a_i = 1$ gerade ist). So sind beispielsweise die 3-Tupel $(1, 5, 1)$ und $(3, 2, 6)$ beide 1-gerade, aber $(2, 1, 4)$ ist es nicht.

Zeige, dass die Anzahl aller 1-geraden n-Tupel in $[d]^n$ gleich $\frac{1}{2}\left(d^n + (d-2)^n\right)$ ist.

[**Hinweis:** Setze $e = d - 1$; dann gilt $(d-2)^n = (e-1)^n$ und $d^n = (e+1)^n$. Was sagt der binomische Satz über $(e-1)^n + (e+1)^n$ aus?]

Wir halten uns im Weiteren an die Konvention, dass die Nullfunktion ($x \mapsto 0$) eine Polynomfunktion von Grad $-\infty$ ist. (Hierbei hält sich das Symbol $-\infty$ an die Regeln $-\infty < n$ und $-\infty + n = -\infty - n = -\infty$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.) Der Grad $\deg P$ eines Polynoms in mehreren Variablen ist so definiert, dass in jedem Monom alle Exponenten addiert werden; so hat beispielsweise $x_1 + x_2 + x_1 x_2$ Grad 2.

Aufgabe 5.

(a) Sei P ein Polynom in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über einem kommutativen Ring (z. B. über $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$). Für jede Teilmenge T von $[n]$ sei $x\mid_T$ das n-Tupel, das man erhält, wenn man im n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alle Variablen x_i mit $i \notin T$ durch 0 ersetzt (während alle Variablen x_i mit $i \in T$ unverändert bleiben). Für $n = 5$ und $T = \{2, 3\}$ ist beispielsweise $x\mid_{\{2,3\}} = (0, x_2, x_3, 0, 0)$.

Man zeige, dass es ein Polynom Q in den n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt, für das $\deg Q \leq \deg P - n$ und

$$\sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{|T|} P(x\mid_T) = x_1 x_2 \cdots x_n \cdot Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

gilt.

(b) Was folgt hieraus, wenn $\deg P < n$ ist?

(c) (St. Petersburg 2003) Sei p eine Primzahl, und sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq p$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen. Zeige: Die Summe

$$\sum_{\substack{T \subseteq [n]; \\ p \mid \sum_{t \in T} a_t}} (-1)^{|T|}$$

ist durch p teilbar.

[**Hinweis:** Betrachte das Polynom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{p-1}$ über $\mathbb{Z}$, und arbeite modulo p.]

Aufgabe 6. Sei $\mathbb{A}$ eine der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Für jede Funktion $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ definieren wir die Funktion $\Delta f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ (genannt *erste Differenz* von f), indem wir

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{A}$$

setzen. (Ist beispielsweise f die Funktion, die jedes $x \in \mathbb{A}$ in x^2 überführt, so sendet Δf jedes $x \in \mathbb{A}$ nach $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$.)

Für jede Funktion $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $\Delta^n f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ (genannt *n-te Differenz* von f) durch

$$\Delta^n f = \Delta(\Delta(\Delta(\cdots(\Delta f)\cdots))) \qquad (\text{mit } n\text{-maligem } \Delta)$$

(also rekursiv durch $\Delta^0 f = f$ und $\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f) = \Delta^{n-1}(\Delta f)$ für alle $n \geq 1$).

(a) Zeige: Ist $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad k (für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$), und ist $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\Delta^n f$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq k - n$.

(b) Zeige: Ist $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion, so gilt

$$(\Delta^n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{A} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Zeige, dass alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $c < n$ die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{c} = 0 \qquad \text{erfüllen.}$$

(d) Wenn $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad k mit Leitkoeffizient c ist, und wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, was ist dann der Leitkoeffizient der Polynomfunktion $\Delta^n f$?

(e) Bestimme $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{n}$ (für $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$).

(f) Sei $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ die Fibonaccifolge (mit $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$). Zeige: Für alle $n, p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq n$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{k+p} = (-1)^n f_{p-n}.$$

2.2. Weitere Aufgaben

Aufgabe 7. Seien S und T zwei endliche Mengen mit $T \subseteq S$. Zeige:

$$\sum_{\substack{I \subseteq S; \\ T \subseteq I}} (-1)^{|I|} = (-1)^{|T|} [S = T].$$

Aufgabe 8. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) (*Möbius-Inversion im Booleschen Verband*) Für jede Teilmenge I von $[n]$ seien a_I und b_I zwei komplexe Zahlen. Angenommen, es gilt

$$b_I = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} a_J \qquad \text{für alle } I \subseteq [n].$$

Zeige: Es gilt umgekehrt

$$a_I = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} b_J \qquad \text{für alle } I \subseteq [n] .$$

(b) (*Binomialinversion*) Seien $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ zwei $(n+1)$-Tupel komplexer Zahlen. Angenommen, es gilt

$$b_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} a_i \qquad \text{für alle } m \in \{0, 1, \ldots, n\} .$$

Zeige: Es gilt umgekehrt

$$a_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} b_i \qquad \text{für alle } m \in \{0, 1, \ldots, n\} .$$

(In diesem Fall nennt man die Folge $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ die *Binomialtransformierte* von $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.)

Aufgabe 9. Sei n eine positive ganze Zahl.

(a) Man zeige, daß die Anzahl aller Permutationen σ von $[n]$, die $\sigma(i) \neq i + 1$ für alle $i \in [n-1]$ erfüllen, gleich $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$ ist.

(b) Man zeige, daß die Anzahl aller Permutationen σ von $[n]$, die $\sigma(i) + 1 \neq \sigma(i+1)$ für alle $i \in [n-1]$ erfüllen, ebenfalls gleich $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$ ist.

(c) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei D_m die Anzahl aller Derangements von $[m]$. (Laut Aufgabe 3 **(c)** ist also $D_m = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{k!}$.) Man zeige:

$$D_{n+1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!.$$

Aufgabe 10. Es ist Abend in Palermo, und die n noch lebenden Bürger stimmen über einen Todeskandidaten ab (wobei $n > 1$ eine feste ganze Zahl ist). Mangels brauchbarer Information geschieht dies dadurch, dass jeder Bürger zufällig (gleichverteilt und unabhängig von den anderen Bürgern) einen der $n-1$ anderen Bürger beschuldigt. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass keine zwei Bürger sich gegenseitig beschuldigen, ist

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{(n-1)^{2k} \cdot 2^k \cdot k!}.$$

Aufgabe 11. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei U eine endliche Menge. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von U. Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei S_k die Menge aller Elemente von U, die in genau k der n Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ enthalten sind. (Mit anderen Worten: Sei $S_k = \{s \in U \mid \text{die Anzahl aller } i \in [n] \text{ mit } s \in A_i \text{ ist } k\}$.) Zeige:

$$|S_k| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-k} \binom{|I|}{k} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Hierbei ist wieder der "leere" Durchschnitt $\bigcap\limits_{i \in \varnothing} A_i$ als die gesamte Menge U zu verstehen.

Aufgabe 12. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei U eine endliche Menge. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von U. Sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) Für jedes $s \in U$ sei $c(s)$ die Anzahl aller $i \in [n]$ mit $s \in A_i$. Zeige:

$$\sum_{\substack{I \subseteq [n];\\ |I| \leq m}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (-1)^m \sum_{s \in U} \binom{c(s)-1}{m}.$$

Hierbei ist der "leere" Durchschnitt $\bigcap\limits_{i \in \varnothing} A_i$ als die gesamte Menge U zu verstehen.

(b) (*Bonferroni-Ungleichungen*) Folgere, dass $\sum\limits_{\substack{I \subseteq [n];\\ |I| \leq m}} (-1)^{m-|I|} \left| \bigcap\limits_{i \in I} A_i \right| \geq 0$ ist, falls $U = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ gilt.

Aufgabe 13. Verallgemeinere Aufgabe 12 **(a)** und Aufgabe 11 gleichzeitig zu einer Formel der Art

$$\sum_{\substack{I \subseteq [n];\\ |I| \leq m}} (-1)^{|I|} \binom{|I|}{k} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{s \in U} \underbrace{\cdots}_{\text{ein Ausdruck mit } c(s)}.$$

Aufgabe 14. Sei n eine positive ganze Zahl. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige n ganze Zahlen.

(a) Zeige, dass

$$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \min\left\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\right\}$$

gilt.

(b) Allgemeiner: Sei $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Zeige, dass

$$F(\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} F\left(\min\left\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\right\}\right)$$

gilt.

Aufgabe 15. Seien $n, d \in \mathbb{N}$.

(a) Ein n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ nennen wir *all-gerade*, wenn es jede Zahl in $[d]$ gerade oft enthält (d.h., wenn für jedes $k \in [d]$ die Anzahl aller $i \in [n]$ mit $a_i = k$ gerade ist).

Zeige, dass die Anzahl aller all-geraden n-Tupel in $[d]^n$ gleich $\dfrac{1}{2^d} \sum\limits_{k=0}^{d} \dbinom{d}{k} (d-2k)^n$ ist.

[**Hinweis:** Berechne die Summe $\sum\limits_{(e_1, e_2, \ldots, e_d) \in \{-1,1\}^d} (e_1 + e_2 + \cdots + e_d)^n$ auf zwei Weisen.]

(b) Sei G der d-dimensionale Hyperwürfelgraph; dies ist der (ungerichtete) Graph, dessen Ecken alle d-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_d) \in \{-1,1\}^d$ sind, und der genau dann eine Kante zwischen zwei Ecken $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ und $(f_1, f_2, \ldots, f_d)$ hat, wenn unter den d Zahlen $e_1 - f_1$, $e_2 - f_2$, …, $e_d - f_d$ genau eine von 0 verschieden ist.

Sei v eine beliebige Ecke von G. Bestimme die Anzahl aller Kantenzüge der Länge n von v nach v in G.

Aufgabe 16. Sei p eine Primzahl, und sei $m \in \mathbb{N}$. Sei $n > (p-1)\,m$ eine ganze Zahl. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ irgendwelche n Vektoren im $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $\mathbb{F}_p^m$. Man zeige, dass es eine nichtleere Teilmenge T von $[n]$ gibt mit $\sum\limits_{t \in T} a_t = 0$ (Nullvektor).

[Hinweis: Schreibe jeden Vektor a_t als $a_t = (a_{t,1}, a_{t,2}, \ldots, a_{t,m})^T$, und betrachte das Polynom

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \left(\sum_{t=1}^{n} a_{t,j} x_t \right)^{p-1} \right)$$

über $\mathbb{F}_p$.]

Aufgabe 17. (*Polarisationsformeln*) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}$ sowie $w \in \mathbb{C}$. Zeige:

(a) Für jedes $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} \left(w + \sum_{i \in I} v_i \right)^m = 0.$$

(b) Es gilt

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} \left(w + \sum_{i \in I} v_i \right)^n = n! v_1 v_2 \cdots v_n.$$

(c) Es gilt

$$\sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} \left(\sum_{i \in I} v_i - \sum_{i \in [n] \setminus I} v_i \right)^n = 2^n n! v_1 v_2 \cdots v_n.$$

Aufgabe 18. Sei $m \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\operatorname{sur}(m, n)$ die Anzahl aller surjektiven Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$. (Siehe Aufgabe 3 **(d)** für eine Formel für $\operatorname{sur}(m, n)$. Man bemerke, dass $\operatorname{sur}(m, n) / n!$ auch als die zweite Stirlingzahl $\left\{ {m \atop n} \right\}$ bekannt ist.)

(a) Zeige, dass

$$k^m = \sum_{i=0}^{m} \operatorname{sur}(m, i) \cdot \binom{k}{i} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

(b) Zeige, dass

$$0^m + 1^m + \cdots + n^m = \sum_{i=0}^{m} \operatorname{sur}(m, i) \cdot \binom{n+1}{i+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

(Wenn m fest gewählt ist, ist dies eine explizite Formel für $0^m + 1^m + \cdots + n^m$, da rechts nur $m+1$ Summanden stehen.)

(c) Zeige, dass

$$(-1)^m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{sur}(m, i) \qquad \text{gilt.}$$

Aufgabe 19. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ definieren wir ein Polynom $Z_{m,n}(x)$ durch

$$Z_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(x^{n-k} - 1\right)^m .$$

Man zeige: $Z_{m,n}(x) = Z_{n,m}(x)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 20. Sei n eine positive ganze Zahl. Sei P ein Polynom in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $\deg P < n$. Sei $h \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl. Zeige, dass

$$\sum_{(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \{0,1,\ldots,h-1\}^n} (-1)^{d_1 + d_2 + \cdots + d_n} P(d_1, d_2, \ldots, d_n) = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Aufgabe 21. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $p(x)$ ein Polynom von Grad $\leq n$, das $p(k) = 2^k$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ erfüllt. Finde $p(n+1)$.

Aufgabe 22. (IMO Shortlist 1981, Titu Andreescu)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $p(x)$ ein Polynom von Grad $\leq n$, das $p(k) = \dfrac{1}{\binom{n+1}{k}}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ erfüllt. Finde $p(n+1)$.

Aufgabe 23. (Putnam 2019, Aufgabe B5)

Sei $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ die Fibonaccifolge (mit $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$). Sei $p(x)$ ein Polynom von Grad 1008, das $p(2n+1) = f_{2n+1}$ für alle $n \in \{0, 1, \ldots, 1008\}$ erfüllt. Finde $j, k \in \mathbb{N}$ mit $p(2019) = f_j - f_k$.

Aufgabe 24. (BWM 2000, 2. Runde, Aufgabe 4)

Man betrachte Summen der Form $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k k^3$ mit $e_k \in \{-1, 1\}$.

Gibt es eine solche Summe mit dem Wert 0,

(a) wenn $n = 2000$ ist?

(b) wenn $n = 2001$ ist?

Aufgabe 25. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die *Inversionen* einer Permutation σ von $[n]$ sind die Paare $(i, j) \in [n]^2$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.

(So hat die Permutation von [3], die 1, 2, 3 auf 2, 3, 1 abbildet, genau 2 Inversionen, nämlich $(1, 3)$ und $(2, 3)$.)

Eine Permutation von $[n]$ heißt *gerade*, wenn sie gerade viele Inversionen hat, und *ungerade*, wenn sie ungerade viele Inversionen hat.

Zeige: Für $n > 1$ gilt

$$\begin{aligned}&(\text{die Anzahl aller geraden Permutationen von } [n]) \\ &= (\text{die Anzahl aller ungeraden Permutationen von } [n]) = n!/2.\end{aligned}$$

Aufgabe 26. (China Girls Math Olympiad 2020)

Sei n eine positive ganze Zahl. Eine *Komposition* von n ist ein Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ von positiven ganzen Zahlen mit $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$.

Die *Inversionen* einer Komposition $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ von n sind die Paare $(i, j) \in [m]^2$ mit $i < j$ und $a_i > a_j$.

Man berechne die Anzahl aller Kompositionen von n, die gerade viele Inversionen haben.

Aufgabe 27. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph, und seien A und B die zwei Komponenten der Knotenmenge von G. (Das heißt, $V = A \cup B$ und $A \cap B = \varnothing$; und jede Kante von G verbindet einen Knoten in A mit einem Knoten in B.) Für jede Teilmenge S von V sei $N(S)$ die Menge aller Knoten von G, die mit mindestens einem Knoten in S verbunden sind. Man zeige:

$$\sum_{X \subseteq A} (-1)^{|X|} [N(X) = B] = \sum_{Y \subseteq B} (-1)^{|Y|} [N(Y) = A].$$

Aufgabe 28. (Heinrich, Tittmann, 2017)

Sei G ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit Eckenmenge V. Sei $n = |V|$; wir nehmen an, dass $n > 0$ ist.

Eine *dominierende Menge* bedeute eine Teilmenge W von V so, daß jede Ecke von G entweder in W liegt oder (mindestens) einen Nachbarn in W hat.

Ein *Fernpaar* bedeute ein (geordnetes) Paar (A, B) zweier disjunkter Teilmengen A und B von V so, daß es keine Kante mit einem Endpunkt in A und dem anderen Endpunkt in B gibt.

Sei α die Anzahl aller Fernpaare (A, B), für die $|A|$ und $|B|$ gerade positive Zahlen sind.

Sei β die Anzahl aller Fernpaare (A, B), für die $|A|$ und $|B|$ ungerade Zahlen sind.

(a) Zeige: Die Anzahl aller dominierenden Mengen ist $2^n - 1 + \alpha - \beta$.

(b) Folgere, dass die Anzahl aller dominierenden Mengen ungerade ist.

Aufgabe 29. (Elser, 1984)
Sei G ein (ungerichteter) Graph mit Eckenmenge V und Kantenmenge E. Sei $v \in V$.

Ist F eine Teilmenge von E, dann verstehen wir unter einem *F-Pfad* einen Pfad von G, dessen Kanten allesamt zu F gehören.

Ist $e \in E$ eine Kante und F eine Teilmenge von E, dann sagen wir, dass *e durch F mit v verbunden* ist, wenn es einen F-Pfad gibt, der von einem Endpunkt von e nach v führt. (Dies gilt u.a. immer dann, wenn v ein Endpunkt von e ist, weil der leere Pfad ein F-Pfad ist.)

Eine Teilmenge F von E heiße *nett*, wenn jede Kante von G durch F mit v verbunden ist.

Man zeige:

$$\sum_{F \subseteq E \text{ ist nett}} (-1)^{|F|} = [E = \varnothing] .$$

3. Lösungen und Lösungshinweise

Die nachfolgenden Lösungen sind größtenteils skizziert (vor allem die Lösungen zu den "weiteren Aufgaben") und unter Müdigkeit und Metal-Dauerbeschallung entstanden. Es würde mich verwundern, wenn sie nicht mindestens von Typos wimmeln. Man wird vermutlich dem Folgenden auch ansehen können, wie lange ich nicht mehr Deutsch geschrieben habe. Bitte Fehler an `darijgrinberg@gmail.com` melden! Kommentare und alternative Lösungen sind ebenfalls willkommen.

3.1. zu Aufgabe 1

Die Lösung von Aufgabe 1 stützt sich auf den "Polynomidentitäts-Trick", der in seiner einfachsten Form in der Anwendung des folgenden Lemmas besteht:

Lemma 3.1. Seien $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei Polynomfunktionen. Angenommen, es gilt $p(z) = q(z)$ für unendlich viele $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt $p = q$.

Beweisskizze. Seien $f \in \mathbb{C}[x]$ und $g \in \mathbb{C}[x]$ die Polynome, deren Polynomfunktionen p und q sind. (Das heißt, $p(z) = f(z)$ und $q(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.) Wir haben angenommen, dass $p(z) = q(z)$ für unendlich viele Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt. Für all diese Zahlen z gilt dann

$$(f - g)(z) = \underbrace{f(z)}_{=p(z)} - \underbrace{g(z)}_{=q(z)} = \underbrace{p(z)}_{\substack{=q(z) \\ \text{(laut Annahme)}}} - q(z) = q(z) - q(z) = 0.$$

Das heißt, all diese Zahlen z sind Nullstellen des Polynoms $f - g \in \mathbb{C}[x]$. Somit hat das Polynom $f - g$ unendlich viele Nullstellen. Aber das einzige Polynom in $\mathbb{C}[x]$, das unendlich viele Nullstellen hat, ist das Nullpolynom 0. Folglich ist $f - g = 0$. Das heißt, $f = g$. Für **jedes** $z \in \mathbb{C}$ gilt also $f(z) = g(z)$, und daher $p(z) = q(z)$ (denn $p(z) = f(z)$ und $q(z) = g(z)$). Mit anderen Worten: $p = q$. Damit ist Lemma 3.1 gezeigt. □

(Wir haben uns in diesem Beweis Mühe gegeben, akribisch zwischen Polynomfunktionen und Polynomen zu unterscheiden. Im Kontext von komplexen Zahlen besteht darin keine echte Notwendigkeit; ein wenig Notationsmißbrauch darf man sich gönnen, denn hier entspricht jeder Polynomfunktion genau ein Polynom. Allerdings ist dies nicht mehr der Fall, wenn man mit endlichen Körpern oder wilderen Ringen statt $\mathbb{C}$ arbeit; beim Lösen von Aufgabe 5 werden wir dies sogar tun.)

Aufgabe 1 ist wohl das "kanonische" Beispiel für die Anwendung des Polynomtricks beim Beweis von Identitäten für Binomialkoeffizienten:

Lösungsskizze zu Aufgabe 1. **(a)** (Für Details siehe [19fco, §2.6.1, Second proof of Theorem 2.6.1 for $x, y \in \mathbb{N}$] oder ähnlich in [Grinbe15, proof of Lemma 3.31]. Diesen Beweis findet man wohl in jeder guten Einführung in die abzählende Kombinatorik.) Seien $n, x, y \in \mathbb{N}$. Wir müssen die Gleichheit (7) beweisen. Da $n, x, y \in \mathbb{N}$ sind, können wir alle Binomialkoeffizienten in dieser Gleichheit kombinatorisch interpretieren (siehe "Kombinatorische Interpretation" in Abschnitt 1). Dies führt auf den Gedanken, dass man einen kombinatorischen Beweis versuchen könnte. Und hier findet man ihn sogar recht schnell: Gezählt sollen alle n-elementigen Teilmengen T der $(x + y)$-elementigen Menge $S := \{1, 2, \ldots, x\} \cup \{-1, -2, \ldots, -y\}$. Einerseits gibt es davon $\dbinom{x+y}{n}$ viele (laut der bereits genannten "Kombinatorischen Interpretation" der Binomialkoeffizienten). Andererseits können wir eine solche Teilmenge T aber auch dadurch bilden, dass wir

- zunächst die Anzahl aller positiven Elemente in T bestimmen – dies ist eine Zahl zwischen 0 und n (inklusive)[2], die wir fortan k nennen;
- dann diese k positiven Elemente von T auswählen – dafür haben wir $\dbinom{x}{k}$ Möglichkeiten, da wir k aus den insgesamt x positiven Elementen von S auswählen wollen;

[2]Dieses "zwischen 0 und n (inklusive)" heißt nur, daß die Zahl immer ≥ 0 und $\leq n$ liegen muss. (Denn insgesamt wird die Teilmenge T ja n Elemente haben; somit kann sie nicht mehr als n positive Elemente haben.) Ich sage **nicht**, dass jede Zahl zwischen 0 und n auch tatsächlich möglich ist. (Ist sie auch nicht immer.)

- schließlich die $n-k$ negativen Elemente von T auswählen – dafür haben wir $\binom{y}{n-k}$ Möglichkeiten, da wir $n-k$ aus den insgesamt y positiven Elementen von S auswählen wollen.

Für diese Bildungsmethode gibt es also insgesamt $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ Möglichkeiten. Folglich gibt es $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ viele n-elementige Teilmengen von S. Aber wir haben vorhin gesehen, daß es $\binom{x+y}{n}$ viele solche Teilmengen gibt. Beide Seiten der Gleichheit (7) zählen also das gleiche: nämlich die n-elementigen Teilmengen von S. Also müssen die beiden Seiten gleich sein. Damit ist (7) bewiesen. Dies löst Aufgabe 1 **(a)**.

(b) Hier gehen wir mit dem Polynomidentitätstrick heran. Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{N}$. Definiere zwei Polynomfunktionen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$p(y) = \binom{x+y}{n} \qquad \text{und} \qquad q(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{C}.$$

[3] Aufgabe 1 **(a)** sagt uns dann, dass $p(y) = q(y)$ für alle $y \in \mathbb{N}$ gilt. Mit anderen Worten: Es gilt $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt also $p(z) = q(z)$ für unendlich viele $z \in \mathbb{C}$ (denn es gibt unendlich viele $z \in \mathbb{N}$). Laut Lemma 3.1 gilt also $p = q$. Das heißt, $p(y) = q(y)$ für alle $y \in \mathbb{C}$. Mit anderen Worten:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 1 **(b)** ist damit gelöst.

(c) Hier kommt der Polynomidentitätstrick noch einmal zum Zug – diesmal ist aber x die "wandernde" Variable. Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{C}$. Definiere zwei Polynomfunktionen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$p(x) = \binom{x+y}{n} \qquad \text{und} \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C}.$$

(Dies sind nicht die Funktionen p und q aus der Lösung von Teil **(b)**!) Aufgabe 1 **(b)** sagt uns dann, dass $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt. Mit anderen Worten: Es gilt $p(z) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt also $p(z) = q(z)$ für unendlich viele $z \in \mathbb{C}$ (denn es gibt unendlich viele $z \in \mathbb{N}$). Laut Lemma 3.1 gilt also $p = q$. Das heißt, $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Mit anderen Worten:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C}.$$

[3] Daß dies tatsächlich Polynomfunktionen sind, folgt aus der "Polynomialität" in Abschnitt 1.

Aufgabe 1 **(c)** ist damit gelöst.

(d) (Details in [19fco, §2.6.5, First proof of Proposition 2.6.13].) Seien $n, x, y \in \mathbb{N}$. Wir müssen die Gleichheit (8) zeigen.

Wir wollen die Chu-Vandermonde-Identität (die wir in Aufgabe 1 **(c)** endgültig bewiesen haben) auf $n-x-y$, $-x-1$ und $-y-1$ statt n, x und y anwenden. Dies wird dadurch erschwert, dass wir dafür $n-x-y \in \mathbb{N}$ benötigen, was nicht automatisch erfüllt ist. Wir wollen also zunächst den Fall loswerden, in dem dies nicht gilt.

Nehmen wir also an, dass $n-x-y \notin \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $n-x-y<0$. Also ist $n<x+y$. Folglich erfüllt jede ganze Zahl k entweder $k<x$ oder $n-k<y$ (oder beides)[4]. Daher sind in der Summe $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{x}\binom{n-k}{y}$ sämtliche Summanden gleich 0, denn

- im Fall von $k<x$ ist $\binom{k}{x}=0$ (wegen (2)),
- und im Fall von $n-k<y$ ist $\binom{n-k}{y}=0$ (ebenfalls wegen (2)).

Folglich ist diese Summe $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{x}\binom{n-k}{y}$ gleich 0. Doch wegen (2) ist auch $\binom{n+1}{x+y+1}$ gleich 0, denn aus $n<x+y$ folgt $n+1<x+y+1$. Beide Seiten der Gleichheit (8) sind also 0, woraus diese Gleichheit sofort folgt.

Im Fall von $n-x-y \notin \mathbb{N}$ haben wir (8) also bewiesen. Daher können wir jetzt o. B. d. A. annehmen, dass $n-x-y \in \mathbb{N}$ gilt. Nehmen wir dies an. Somit können wir die Chu-Vandermonde-Identität auf $n-x-y$, $-x-1$ und $-y-1$ statt n, x und y anwenden. Wir erhalten hieraus

$$\binom{(-x-1)+(-y-1)}{n-x-y} = \sum_{k=0}^{n-x-y} \binom{-x-1}{k}\binom{-y-1}{(n-x-y)-k}. \qquad (12)$$

Wir halten uns die Nase zu und formen um. Und zwar wollen wir die "Upper Negation"-Formel aus Abschnitt 1 auf jeden der drei Binomialkoeffizienten in (12) anwenden[5]:

[4]Denn sonst würde sie $k \geq x$ und $n-k \geq y$ erfüllen, was zu $n = \underbrace{k}_{\geq x} + \underbrace{n-k}_{\geq y} \geq x+y$ und damit zu einem Widerspruch mit $n<x+y$ führen würde.

[5]Binomialkoeffizienten mit Minuszeichen im "Zähler" sind immer ein Anlass, "Upper Negation" anzuwenden. (Wobei man dies durchaus auch ohne Anlass tun kann.)

- Es ist
$$\begin{aligned}\binom{(-x-1)+(-y-1)}{n-x-y} &= \binom{-(x+y+2)}{n-x-y}\\ &= (-1)^{n-x-y}\binom{(x+y+2)+(n-x-y)-1}{n-x-y}\\ &\qquad \text{(laut “Upper Negation”)}\\ &= (-1)^{n-x-y}\binom{n+1}{n-x-y}.\end{aligned}$$

- Für jedes $k \in \{0,1,\ldots,n-x-y\}$ ist
$$\begin{aligned}\binom{-x-1}{k} &= \binom{-(x+1)}{k}\\ &= (-1)^k\binom{(x+1)+k-1}{k} \qquad \text{(laut “Upper Negation”)}\\ &= (-1)^k\binom{x+k}{k}.\end{aligned}$$

- Für jedes $k \in \{0,1,\ldots,n-x-y\}$ ist
$$\begin{aligned}\binom{-y-1}{(n-x-y)-k} &= \binom{-(y+1)}{(n-x-y)-k}\\ &= (-1)^{(n-x-y)-k}\binom{(y+1)+((n-x-y)-k)-1}{(n-x-y)-k}\\ &\qquad \text{(laut “Upper Negation”)}\\ &= (-1)^{(n-x-y)-k}\binom{n-k-x}{n-x-y-k}.\end{aligned}$$

Mithilfe dieser drei Gleichungen können wir (12) in der Form

$$(-1)^{n-x-y}\binom{n+1}{n-x-y} = \sum_{k=0}^{n-x-y}(-1)^k\binom{x+k}{k}(-1)^{(n-x-y)-k}\binom{n-k-x}{n-x-y-k}$$

umschreiben. Diese Gleichheit vereinfacht sich (durch Kürzen von $(-1)^k$ auf der rechten Seite und durch $(-1)^{n-x-y}$ auf beiden Seiten) zu

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{n-x-y} &= \sum_{k=0}^{n-x-y}\binom{x+k}{k}\binom{n-k-x}{n-x-y-k} = \sum_{k=0}^{n-x-y}\binom{x+k}{k}\binom{n-(x+k)}{n-(x+k)-y}\\ &= \sum_{k=x}^{n-y}\binom{k}{k-x}\binom{n-k}{n-k-y} \qquad (13)\\ &\qquad \text{(hier haben wir in der Summe } x+k \text{ durch } k \text{ substitutiert)}.\end{aligned}$$

Dies ist unserer zu beweisenden Identität (8) bereits ziemlich ähnlich. Unterscheiden tun sich die beiden Gleichungen aber noch in den "Nennern" der Binomialkoeffizienten sowie den Grenzen der Summe. Gehen wir diese Unterschiede der Reihe an:

- Aus der Symmetrie der Binomialkoeffizienten (siehe "Symmetrie" in Abschnitt 1) folgt
$$\binom{n+1}{n-x-y} = \binom{n+1}{(n+1)-(n-x-y)} = \binom{n+1}{x+y+1}.$$

- Für jedes $k \in \{x, x+1, \ldots, n-y\}$ folgt aus der Symmetrie der Binomialkoeffizienten, dass
$$\binom{k}{k-x} = \binom{k}{k-(k-x)} = \binom{k}{x}$$
gilt.

- Für jedes $k \in \{x, x+1, \ldots, n-y\}$ folgt aus der Symmetrie der Binomialkoeffizienten, dass
$$\binom{n-k}{n-k-y} = \binom{n-k}{n-k-(n-k-y)} = \binom{n-k}{y}$$
gilt.

Hiermit vereinfachen wir (13) zu
$$\binom{n+1}{x+y+1} = \sum_{k=x}^{n-y} \binom{k}{x}\binom{n-k}{y}. \tag{14}$$

Dies ist fast die Identität (8), die wir beweisen wollen. Das einzige Problem: Die Summe in (8) geht von 0 bis n, während die Summe in (14) nur von x bis $n-y$ geht. Somit hat die Summe in (8) einige Summanden mehr als die in (14) – nämlich die Summanden mit $k < x$ und die Summanden mit $k > n-y$. Es wäre also gut, wenn diese zusätzlichen Summanden sich zu 0 aufsummieren und damit die Summe nicht verändern. Dies gilt aber tatsächlich, und zwar aus dem einfachst möglichen Grund: Diese zusätzlichen Summanden sind alle 0. (Und dies folgt aus dem gleichen Argument, den wir bereits im Fall von $n-x-y \notin \mathbb{N}$ angewendet haben, mit einem kleinen Unterschied: Auch hier gilt für diese Summanden wieder entweder $k < x$ oder $n-k < y$; aber diesmal folgt es nicht aus $n-x-y \notin \mathbb{N}$, sondern aus der Tatsache, daß entweder $k < x$ oder $k > n-y$ gilt.)

Die Summe in (8) und die Summe in (14) sind also gleich. Somit folgt (8) aus (14). Aufgabe 1 **(d)** ist also gelöst.

(e) Nein. Ein einfaches Gegenbeispiel ist $n = 1$, $x = 1/2$ und $y = 1/2$, denn hier ist die linke Seite von (8) gleich $\dbinom{1+1}{1/2+1/2+1} = 1$, während die rechte Seite gleich 0 ist.

Und dies sollte nicht verwundern. Der Binomialkoeffizient $\dbinom{n}{k}$ ist eine Polynomfunktion in n, aber keine in k. Der Polynomidentitätstrick, mit dem wir in Aufgabe 1 **(b)** die Gültigkeit der Chu-Vandermonde-Identität erweitert haben, läßt sich also nicht auf die "umgedrehte Chu-Vandermonde-Identität" anwenden.

(f) (Details in [19fco, solution to Exercise 2.6.4].) Die Hockeystick-Identität besagt, dass

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}$$

gilt. Wir schreiben diese Identität erst einmal um, indem wir die Variable k in x umbenennen. Sie besagt jetzt also, dass

$$\binom{0}{x} + \binom{1}{x} + \binom{2}{x} + \cdots + \binom{n}{x} = \binom{n+1}{x+1} \qquad \text{für alle } n, x \in \mathbb{N}$$

gilt. Dies folgt aber durch Anwendung der "umgedrehten Chu-Vandermonde-Identität" (8) auf $y = 0$; denn letzteres ergibt

$$\binom{n+1}{x+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{x} \underbrace{\binom{n-k}{0}}_{=1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{x} = \binom{0}{x} + \binom{1}{x} + \binom{2}{x} + \cdots + \binom{n}{x}.$$

Aufgabe 1 **(f)** ist somit gelöst.

[*Bemerkung:* Alternative Lösungen gibt es hier wie Sand am Meer:

- Man kann Aufgabe 1 **(a)** – und sogar gleich Aufgabe 1 **(b)** – auch durch Induktion nach x beweisen. (Dies wird in [19fco, §2.6.1, First proof of Theorem 1.3.37 for $x \in \mathbb{N}$] getan.)

- Man kann die Chu-Vandermonde-Identität auch ganz allgemein (also gleich für $x, y \in \mathbb{C}$) durch Induktion nach n beweisen. (Siehe [Grinbe15, §3.3.2, First proof of Theorem 3.29] für diesen Beweis.) So spart man sich die Anwendung des Polynomidentitätstricks ganz.

- Man kann Aufgabe 1 **(a)** auch beweisen, indem man die Polynomidentität

$$(1+t)^{x+y} = (1+t)^x (1+t)^y$$

im Polynomring $\mathbb{Z}[t]$ ausmultipliziert und die Koeffizienten von t^n auf beiden Seiten vergleicht. (Dies ist ein einfaches Beispiel der Verwendung von *erzeugenden Funktionen*.) Mit viel Mühe kann man auch dieses Argument auf allgemeine $x, y \in \mathbb{C}$ ausdehnen; hierzu muss man allerdings von Polynomen zu Potenzreihen übergehen, außerdem die z-te Potenz einer Potenzreihe f (für $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$) definieren und schließlich zeigen, dass diese Potenzen auch noch das Potenzgesetz $f^{z+w} = f^z f^w$ erfüllen. Dies ist nicht so einfach[6]; manche Autoren verwenden dabei sogar eine Variante der Chu-Vandermonde-Identität als Hilfsmittel (z. B. Loehr in [Loehr11, proof of Theorem 7.71]), wodurch das Argument etwas zyklisch wird...

- Die "umgedrehte Chu-Vandermonde-Identität" (8) läßt sich kombinatorisch beweisen ([19fco, §2.6.5, Second proof of Proposition 2.6.13]).]

□

3.2. zu Aufgabe 2

Lösungsskizze zu Aufgabe 2. **(a)** (Siehe [18f-hw2s, Exercise 4, second solution] für Details.) Seien $n \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
(-1)^k \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} \\ \text{(laut (3))}}} &= (-1)^k \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) \\
&= \underbrace{(-1)^k}_{=-(-1)^{k-1}} \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= (-1)^k \binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

Summieren wir diese Gleichheit für alle $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ auf, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m} \left((-1)^k \binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \right).$$

Doch die rechte Seite hier ist eine Teleskopsumme, die sich zu

$$(-1)^m \binom{n-1}{m} - (-1)^{-1} \underbrace{\binom{n-1}{-1}}_{\substack{=0 \\ \text{(nach (1),} \\ \text{denn } -1 \notin \mathbb{N})}} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

[6]Siehe `https://math.stackexchange.com/a/2918387/` für eine Diskussion der Möglichkeiten, dies zu tun.

vereinfacht. Somit ist $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \dbinom{n}{k} = (-1)^m \dbinom{n-1}{m}$. Dadurch ist (9) bewiesen.

(b) (Siehe [18f-hw2s, Exercise 4, third solution] für Details.) Sei n eine positive ganze Zahl, und sei $m \in \mathbb{N}$. Sei $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Definiere eine *akzeptable Menge* als eine Teilmenge von $[n]$ mit höchstens m Elementen. Das *Vorzeichen* einer endlichen Menge I definieren wir als $(-1)^{|I|}$.

Die akzeptablen Mengen sind genau die k-elementigen Teilmengen von $[n]$ mit $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Daher ist

$$(\text{die Anzahl aller akzeptablen Mengen}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}$$

(denn laut der kombinatorischen Interpretation der Binomialkoeffizienten ist die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen von $[n]$ gleich $\dbinom{n}{k}$). Aus dem gleichen Grund gilt

$$\begin{aligned} &(\text{die Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned} \tag{15}$$

(denn eine k-elementige akzeptable Menge hat Vorzeichen $(-1)^k$).

Die Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen ist eine Summe von 1en und -1en. Wenn wir es schaffen, die "meisten" dieser 1en und -1en gegeneinander zu kürzen, dann können wir hoffen, dass sich der Wert der Summe offenbart. (Wir werden dies nachher formalisieren.) Zum Kürzen müssen wir akzeptable Mengen gegensätzlicher Vorzeichen gegeneinander aufstellen.

Wie ordnen wir einer endlichen Menge I eine andere endliche Menge mit gegensätzlichem Vorzeichen zu? Wir können versuchen, das Element 1 aus der Menge I zu entfernen oder in sie einzufügen, je nachdem ob es in ihr enthalten ist oder nicht. Dadurch verändert sich die Mächtigkeit der Menge um genau 1 (in die eine oder andere Richtung), und somit wechselt das Vorzeichen zum gegensätzlichen. Das Resultat der Prozedur nennen wir den *Partner* von I und bezeichnen wir mit $\mathbf{p}(I)$. Was auch gut ist: Wenn I eine Teilmenge von $[n]$ ist, dann ist auch ihr Partner $\mathbf{p}(I)$ eine solche. Und wenn I eine akzeptable Menge ist, dann ist **meistens** auch $\mathbf{p}(I)$ eine solche (wir werden bald sehen, wann genau dies passiert). Man kann also die zu I und zu $\mathbf{p}(I)$ gehörigen Summanden in der Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen kürzen (diese zwei Summanden sind tatsächlich verschieden, da sie ja unterschiedliche Vorzeichen haben). Diese Prozedur wiederholt man dann immer weiter, bis keine Summanden mehr da sind, die Partner in der Summe haben. Das Endresultat hängt davon ab, welche akzeptablen Mengen keine akzeptablen Partner haben.

Welche akzeptablen Mengen haben keine Partner in der Summe? Wenn eine akzeptable Menge I in unserer Summe keinen Partner findet, dann liegt dies entweder daran, dass ihr Partner bereits gekürzt wurde, oder daran, dass ihr Partner keine akzeptable Menge ist. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, denn der Partner des Partners einer Menge I ist immer I selber (wie man sich leicht überlegt) – d.h., wenn der Partner einer Menge gekürzt wurde, dann wurde auch die Menge selber mit ihm gekürzt. Wir wollen also sehen, wann der zweite Fall eintritt. Laut Definition von "akzeptablen Mengen" ist der Partner $\mathbf{p}(I)$ einer akzeptablen Menge I nur dann nicht akzeptabel, wenn er $m+1$ Elemente hat – was wiederum genau dann der Fall ist, wenn I selber m Elemente hat und 1 nicht in I enthalten ist (denn nur dann wird $|\mathbf{p}(I)|$ größer als $|I|$ und überschreitet den kritischen Wert m). Solche akzeptablen Mengen I lassen sich leicht charakterisieren: Sie sind einfach die m-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\ldots,n\}$, die 1 nicht enthalten; mit anderen Worten: Sie sind die m-elementigen Teilmengen der $(n-1)$-elementigen Menge $\{2,3,\ldots,n\}$. Es gibt also genau $\binom{n-1}{m}$ viele von ihnen (laut der kombinatorischen Interpretation der Binomialkoeffizienten), und sie haben also alle das Vorzeichen $(-1)^m$ (da sie m-elementig sind). Ihr Gesamtbeitrag zur Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen ist also $\binom{n-1}{m}\cdot(-1)^m = (-1)^m\binom{n-1}{m}$. Da sich (wie schon gesagt) die Beiträge aller anderen akzeptablen Mengen in der Summe wegkürzen, ist die Summe insgesamt also auch gleich $(-1)^m\binom{n-1}{m}$. Mit anderen Worten:

$$(\text{die Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen}) = (-1)^m\binom{n-1}{m}.$$

Gleichen wir dies mit (15) ab, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}.$$

Damit ist (9) wieder bewiesen im Falle, wenn n eine positive ganze Zahl ist.

Noch ein paar Worte dazu, wie man obigen Beweis formalisiert. So ein "Kürzungsprozess" ist kein besonders wohldefinierter Begriff, aber was er im Wesentlichen konstruiert, ist eine **Bijektion** $\mathbf{p}:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ auf der Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &:= \{\text{akzeptable Mengen, deren Partner ebenfalls akzeptable Mengen sind}\}\\ &= \{I\subseteq[n] \mid |I|\leq m \text{ aber nicht } (|I|=m \text{ und } 1\notin I)\}.\end{aligned}$$

Diese Bijektion $\mathbf{p}$ ist formal definiert durch

$$\mathbf{p}(I) = (\text{Partner von } I) = \begin{cases} I\setminus\{1\}, & \text{wenn } 1\in I;\\ I\cup\{1\}, & \text{wenn } 1\notin I\end{cases} \qquad \text{für alle } I\in\mathcal{X}.$$

Diese Bijektion $\mathbf{p}$ hat die Eigenschaft, **vorzeichenumkehrend** zu sein (d.h., es gilt $(-1)^{|\mathbf{p}(I)|} = -(-1)^{|I|}$ für alle $I \in \mathcal{X}$). Die Behauptung ist nun, dass die Existenz einer solchen Bijektion automatisch dazu führt, dass

(die Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen)
= (die Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen, die **nicht** in $\mathcal{X}$ liegen)

gilt – d.h., daß die Beiträge der akzeptablen Mengen in $\mathcal{X}$ zur Summe der Vorzeichen aller akzeptablen Mengen insgesamt verschwinden. Das zugrundeliegende Prinzip wollen wir allgemein formulieren:[7]

Lemma 3.2. Sei S eine endliche Menge. Sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von S (also eine Menge, deren Elemente wiederum Teilmengen von S sind). Sei $\mathcal{X}$ eine Teilmenge von $\mathcal{A}$. Sei $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ eine Bijektion, die die Eigenschaft hat, dass

$$(-1)^{|f(I)|} = -(-1)^{|I|} \qquad \text{für alle } I \in \mathcal{X} \tag{16}$$

gilt. (Eine solche Bijektion heißt *vorzeichenumkehrend*.) Dann ist

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} (-1)^{|I|} = \sum_{I \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{X}} (-1)^{|I|}.$$

(Das heißt, die Beiträge aller $I \in \mathcal{X}$ zur Summe $\sum\limits_{I \in \mathcal{A}} (-1)^{|I|}$ verschwinden insgesamt.)

Beweisskizze zu Lemma 3.2. Die Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ist eine Bijektion; somit hat sie eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Diese Umkehrabbildung ist ebenfalls vorzeichenumkehrend – d.h., sie erfüllt

$$(-1)^{\left|f^{-1}(I)\right|} = -(-1)^{|I|} \qquad \text{für alle } I \in \mathcal{X}. \tag{17}$$

(Dies folgt einfach, indem man (16) auf $f^{-1}(I)$ statt I anwendet.)

Nun definieren wir zwei Abbildungen

$$f_+ : \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = 1 \right\} \to \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = -1 \right\},$$
$$I \mapsto f(I)$$

[7]Unsere Behauptung erhalten wir aus diesem Lemma, indem wir es auf

$$S = [n],$$
$$\mathcal{A} = \{\text{akzeptable Mengen}\},$$
$$\mathcal{X} = \{\text{akzeptable Mengen, deren Partner ebenfalls akzeptable Mengen sind}\},$$
$$f = \mathbf{p}$$

anwenden.

und

$$f_{-} : \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = -1 \right\} \to \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = 1 \right\},$$
$$I \mapsto f^{-1}(I).$$

(Dass diese Abbildungen wohldefiniert sind, verdanken wir (16) und (17).) Es ist klar, dass diese Abbildungen f_+ und f_- zueinander invers sind. Also sind sie Bijektionen. Damit haben wir eine Bijektion zwischen den Mengen $\left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = 1 \right\}$ und $\left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = -1 \right\}$ gefunden (nämlich f_+). Daher sind diese Mengen gleichmächtig. Mit anderen Worten:

$$\left| \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = 1 \right\} \right| = \left| \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = -1 \right\} \right|. \tag{18}$$

Nun ist aber $(-1)^{|I|}$ für jede Menge $I \in \mathcal{X}$ entweder gleich 1 oder gleich -1. Somit können wir die Summe $\sum_{I \in \mathcal{X}} (-1)^{|I|}$ folgendermaßen aufspalten:

$$\begin{aligned}
\sum_{I \in \mathcal{X}} (-1)^{|I|} &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{X};\\ (-1)^{|I|}=1}} \underbrace{(-1)^{|I|}}_{=1} + \sum_{\substack{I \in \mathcal{X};\\ (-1)^{|I|}=-1}} \underbrace{(-1)^{|I|}}_{=-1} \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{I \in \mathcal{X};\\ (-1)^{|I|}=1}} 1}_{=\left|\left\{I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|}=1\right\}\right| \cdot 1} + \underbrace{\sum_{\substack{I \in \mathcal{X};\\ (-1)^{|I|}=-1}} (-1)}_{=\left|\left\{I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|}=-1\right\}\right| \cdot (-1)} \\
&= \left| \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = 1 \right\} \right| \cdot 1 + \left| \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = -1 \right\} \right| \cdot (-1) \\
&= \left| \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = 1 \right\} \right| - \left| \left\{ I \in \mathcal{X} \mid (-1)^{|I|} = -1 \right\} \right| \\
&= 0 \qquad (\text{nach } (18)).
\end{aligned}$$

Aber $\mathcal{X}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{A}$; somit können wir die Summe $\sum_{I \in \mathcal{A}} (-1)^{|I|}$ folgendermaßen aufspalten:

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} (-1)^{|I|} = \underbrace{\sum_{I \in \mathcal{X}} (-1)^{|I|}}_{=0} + \sum_{I \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{X}} (-1)^{|I|} = \sum_{I \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{X}} (-1)^{|I|}.$$

Damit ist Lemma 3.2 gezeigt. □

Lemma 3.2 ist eine Abstraktion unserer Strategie, Summen durch Kürzung gegensätzlicher Summanden zu vereinfachen. Wie so oft haben wir dabei durch das Abstrahieren ein kleines Geschenk erhalten: In Lemma 3.2 wird nicht vorausgesetzt, daß $f \circ f = \mathrm{id}$ ist, sondern nur, dass f eine Bijektion ist. Das heißt, beim Anwenden von Lemma 3.2 ist es nicht notwendig, dass der Partner des Partners einer Menge $I \in \mathcal{X}$ wieder I selber ist; es reicht aus, dass jede Menge $I \in \mathcal{X}$ genau einen Partner hat (d.h., die Funktion f ist wohldefiniert) und dass jede Menge $I \in \mathcal{X}$ genau einen "Ur-Partner" (also genau ein $J \in \mathcal{X}$ mit $f(J) = I$) hat (d.h., die Funktion f ist bijektiv). Aus der Sicht des schrittweisen Kürzungsparadigmas ist dies etwas überraschend, da dies dazu führen kann, dass eine noch ungekürzte Menge einen bereits gekürzten Partner hat; aber unser obiger Beweis von Lemma 3.2 argumentiert nicht durch schrittweises Wegkürzen, sondern durch simultanes systematisches Kürzen aller 1en gegen alle -1en, und dabei entsteht das Problem nicht. Wir haben also ein wenig Allgemeinheit gewonnen. In der Praxis wird diese Allgemeinheit selten benutzt (die meisten vorzeichenumkehrenden Bijektionen f in der Kombinatorik haben die Eigenschaft $f \circ f = \mathrm{id}$ – sie sind, wie man es nennt, *Involutionen*).

(c) Dies folgt aus dem Polynomidentitätstrick (Lemma 3.1). Und zwar: Fixiere $m \in \mathbb{N}$. Definiere zwei Polynomfunktionen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$p(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} \qquad \text{und} \qquad q(n) = (-1)^m \binom{n-1}{m} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{C}.$$

Aus Aufgabe 2 **(b)** folgt dann, dass $p(n) = q(n)$ für alle positiven ganzen n gilt. Mit anderen Worten: Es gilt $p(z) = q(z)$ für alle positiven ganzen z. Insbesondere gilt also $p(z) = q(z)$ für unendlich viele $z \in \mathbb{C}$ (denn es gibt unendlich viele positive ganze Zahlen). Laut Lemma 3.1 ist also $p = q$. Mit anderen Worten: $p(n) = q(n)$ für alle $n \in \mathbb{C}$. Aber dies bedeutet genau, dass (9) für alle $n \in \mathbb{C}$ gilt. Damit ist (9) wieder allgemein bewiesen.

(d) Seien $n \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$. Anwendung der Chu-Vandermonde-Identität (7) auf n, -1 und m statt x, y und n ergibt

$$\binom{n-1}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \underbrace{\binom{-1}{m-k}}_{\substack{=(-1)^{m-k} \\ \text{(nach (4))}}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \underbrace{(-1)^{m-k}}_{=(-1)^m (-1)^k} = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $(-1)^m$, dann erhalten wir schnell (9). Damit ist (9) zum dritten Mal bewiesen. □

3.3. zu Aufgabe 3

Für Aufgabe 3 benötigen wir die *Iversonklammer-Notation*:

Definition 3.3. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige logische Aussage. Dann definieren wir eine ganze Zahl $[\mathcal{A}] \in \{0, 1\}$ durch

$$[\mathcal{A}] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathcal{A} \text{ wahr ist;} \\ 0, & \text{wenn } \mathcal{A} \text{ falsch ist.} \end{cases}$$

Beispielsweise ist $[2+2=4]=1$ und $[2+2=5]=0$. Die Zahl $[\mathcal{A}]$ heißt *Wahrheitswert* von $\mathcal{A}$.

Die folgende Tatsache ist fast trivial ([19fco, Proposition 1.6.3]); sie hat aber eine große Bedeutung, weil sie Zählprobleme auf Summenumformungen zurückführen kann:

Proposition 3.4 ("Hände zählen")**.** Sei S eine endliche Menge.

(a) Ist T eine Teilmenge von S, so ist

$$|T| = \sum_{s \in S} [s \in T] .$$

(b) Für jedes $s \in S$ sei $\mathcal{A}(s)$ eine logische Aussage (die, je nach s, entweder wahr oder falsch ist; beispielsweise kann $\mathcal{A}(s)$ die Aussage "s ist gerade", wenn S eine Menge ganzer Zahlen sein, oder die Aussage "s ist leer", wenn S eine Menge von Mengen ist). Dann gilt

$$(\text{Anzahl aller } s \in S \text{, die } \mathcal{A}(s) \text{ erfüllen}) = \sum_{s \in S} [\mathcal{A}(s)] .$$

Beweisskizze. **(a)** In der Summe $\sum\limits_{s \in S} [s \in T]$ sind genau $|T|$ viele Summanden gleich 1 (nämlich die Summanden mit $s \in T$); alle übrigen $|S \setminus T|$ Summanden sind 0. Somit ist diese Summe gleich $|T| \cdot 1 + |S \setminus T| \cdot 0 = |T|$.

(b) Wende Proposition 3.4 **(a)** auf die Teilmenge $T := \{s \in S \mid \mathcal{A}(s) \text{ ist wahr}\}$ an. Für diese Teilmenge gilt nämlich, dass $[s \in T] = [\mathcal{A}(s)]$ für jedes $s \in S$ gilt. □

Wir erinnern uns ferner an folgenden fundamentalen Satz (eine der Formen des Schubfachprinzips):

Proposition 3.5. Seien X und Y zwei endliche Mengen mit $|X| \leq |Y|$. Dann ist jede surjektive Abbildung von X nach Y automatisch bijektiv.

Beweisskizze zu Proposition 3.5. Sei $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Wir müssen zeigen, dass f bijektiv ist. Dazu reicht es aus, zu beweisen, dass f injektiv ist (denn surjektiv ist f bereits).

Nehmen wir das Gegenteil an. Dann ist f nicht injektiv; d.h., es gibt zwei verschiedene Elemente $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$.

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ alle Elemente von X (aufgelistet ohne Wiederholungen); dann ist $k = |X|$ und $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Da f surjektiv ist, gilt

$$\begin{aligned} Y = f(X) &= f(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) && (\text{denn } X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \\ &= \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\} . && (19) \end{aligned}$$

Doch, wie wir wissen, gibt es zwei verschiedene Elemente $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Diese zwei Elemente x, x' müssen unter den Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sein (denn $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sind alle Elemente von X). Das heißt, es gibt zwei verschiedene Elemente $x_i, x_j \in X$ mit $f(x_i) = f(x_j)$. Mit anderen Worten: unter den k Elementen $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)$ sind mindestens zwei gleiche. Daher ist die Mächtigkeit der Menge $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\}$ höchstens $k-1$. Mit anderen Worten: $|\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\}| \leq k-1$. Wegen (19) vereinfacht sich dies zu $|Y| \leq k-1$. Also haben wir $k = |X| \leq |Y| \leq k-1$, was absurd ist. Dieser Widerspruch vollendet den Beweis von Proposition 3.5. □

Folgerung 3.6. Seien X und Y zwei endliche Mengen mit $|X| < |Y|$. Dann gibt es keine surjektiven Abbildungen von X nach Y.

Beweisskizze. Gäbe es eine surjektive Abbildung von X nach Y, dann wäre diese Abbildung (laut Proposition 3.5) bijektiv, was zu $|X| = |Y|$ führen würde. Aber dies würde $|X| < |Y|$ widersprechen. □

Lösungsskizze zu Aufgabe 3. **(a)** Sei S eine endliche Menge. Wir müssen die Gleichheit (10) beweisen. Im Falle von $S = \varnothing$ ist dies trivial (auf der linken Seite steht eine Summe mit dem einzigen Summanden $(-1)^{|\varnothing|} = (-1)^0 = 1$; auf der rechten steht $[S = \varnothing] = 1$). Also nehmen wir o. B. d. A. an, dass $S \neq \varnothing$ ist. Dann hat die Menge S mindestens ein Element. Es gibt also ein $s \in S$. Fixiere ein solches s.

Da $S \neq \varnothing$ ist, haben wir $[S = \varnothing] = 0$. Die zu beweisende Gleichheit (10) vereinfacht sich also zu $\sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} = 0$.

Wir wollen jetzt Lemma 3.2 anwenden – etwa so wie in unserer Lösung von Aufgabe 2 **(b)**, aber einfacher, weil diesmal jede Teilmenge von S einen Partner finden soll (denn die Summe soll sich zu 0 vereinfachen).

Dazu setzen wir $\mathcal{A} = \{\text{alle Teilmengen von } S\}$ und $\mathcal{X} = \mathcal{A}$. Wir definieren jetzt eine Bijektion $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ folgendermaßen: Für jedes $I \in \mathcal{X}$ setzen wir

$$f(I) = \begin{cases} I \setminus \{s\}, & \text{wenn } s \in I; \\ I \cup \{s\}, & \text{wenn } s \notin I. \end{cases}$$

Dass dieses f tatsächlich wohldefiniert und eine Bijektion ist, ist ziemlich klar (wieder einmal ist f nicht nur eine Bijektion, sondern erfüllt $f \circ f = \mathrm{id}$). Außerdem gilt

$$(-1)^{|f(I)|} = -(-1)^{|I|} \qquad \text{für alle } I \in \mathcal{X},$$

denn $|f(I)|$ unterscheidet sich von $|I|$ immer um ± 1. Lemma 3.2 liefert also

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{A}} (-1)^{|I|} &= \sum_{I \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{X}} (-1)^{|I|} = (\text{leere Summe}) \\ &\qquad (\text{denn wegen } \mathcal{X} = \mathcal{A} \text{ ist } \mathcal{A} \setminus \mathcal{X} \text{ eine leere Menge}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Doch das Summenzeichen $\sum_{I\in\mathcal{A}}$ auf der linken Seite ist äquivalent zu $\sum_{I\subseteq S}$ (da $\mathcal{A} = \{\text{alle Teilmengen von } S\}$ ist). Damit haben wir gezeigt, dass $\sum_{I\subseteq S} (-1)^{|I|} = 0$ gilt. Damit ist (10) bewiesen. Aufgabe 3 **(a)** ist also gelöst.

(Ein ähnlicher Beweis von (10) findet sich ausgeführt in [19fco, §2.9.2, Second proof of Proposition 2.9.10]. Man kann (10) auch auf die Binomialkoeffizienten-Identität $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ reduzieren.)

(b) (Details in [19fco, §2.9.3, proof of Theorem 2.9.9].) Der Ansatz ist folgender: Wir halten ein Element $s \in U$ fest und schauen uns an, wie oft in der Summe

$$\sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \tag{20}$$

dieses Element s "gezählt" wird. Das heißt, statt (20) direkt auszurechnen, berechnen wir die Summe $\sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \left[s \in \bigcap_{i\in I} A_i\right]$ für ein einzelnes $s \in U$. Dann summieren wir die Ergebnisse über alle $s \in U$, und erhalten (wegen Proposition 3.4 **(a)**) genau die Summe (20).

Hier sind die Details: Fixiere $s \in U$. Definiere eine Teilmenge S von $[n]$ durch

$$S = \{i \in [n] \mid s \in A_i\}.$$

Nun sind die zwei Aussagen "$S = \varnothing$" und "$s \in U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$" äquivalent (dies folgt leicht aus der Definition von S). Da äquivalente Aussagen gleiche Wahrheitswerte haben, gilt also

$$[S = \varnothing] = [s \in U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)]. \tag{21}$$

Andererseits sei I eine beliebige Teilmenge von $[n]$. Dann sind die zwei Aussagen "$s \in \bigcap_{i\in I} A_i$" und "$I \subseteq S$" äquivalent (warum?[8]). Folglich sind ihre Wahrheitswerte gleich, d.h., wir haben

$$\left[s \in \bigcap_{i\in I} A_i\right] = [I \subseteq S]. \tag{22}$$

Vergessen wir wieder, dass wir I fixiert haben. Wir haben also (22) für jede Teilmenge I von $[n]$ bewiesen.

[8] Man erkennt hier, warum wir den "leeren" Durchschnitt $\bigcap_{i\in\varnothing} A_i$ als U definiert haben: Dies hat nämlich zur Folge, dass $\bigcap_{i\in I} A_i$ immer (also auch für $I = \varnothing$) gleich der Menge aller $t \in U$ ist, die $t \in A_i$ für alle $i \in I$ erfüllen. (Im Fall von $I = \varnothing$ ist "$t \in A_i$ für alle $i \in I$" eine leere Aussage, und gilt also für alle $t \in U$.) Dies wird hier ausgenutzt.

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\underbrace{\left[s\in\bigcap_{i\in I}A_i\right]}_{\substack{=[I\subseteq S]\\ \text{(nach (22))}}}\\
&=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\left[I\subseteq S\right]\\
&=\underbrace{\sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ I\subseteq S}}}_{\substack{=\sum_{I\subseteq S}\\ \text{(denn jede Teilmenge } I \text{ von } S\\ \text{ist eine Teilmenge von } [n])}}(-1)^{|I|}\underbrace{[I\subseteq S]}_{\substack{=1\\ \text{(denn } I\subseteq S)}}+\sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ I\not\subseteq S}}(-1)^{|I|}\underbrace{[I\subseteq S]}_{\substack{=0\\ \text{(denn } I\not\subseteq S)}}\\
&=\sum_{I\subseteq S}(-1)^{|I|}+\underbrace{\sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ I\not\subseteq S}}(-1)^{|I|}0}_{=0}=\sum_{I\subseteq S}(-1)^{|I|}=[S=\varnothing] \qquad \text{(nach (10))}\\
&=\left[s\in U\setminus(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\right] \qquad (23)
\end{aligned}$$

(nach (21)).

Vergessen wir nun, dass wir s fixiert haben. Wir haben also (23) für jedes $s\in U$ bewiesen. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\underbrace{\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|}_{\substack{=\sum_{s\in U}\left[s\in\bigcap_{i\in I}A_i\right]\\ \text{(laut Proposition 3.4 \textbf{(a)},}\\ \text{angewandt auf } S=U \text{ und } T=\bigcap_{i\in I}A_i)}}\\
&=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\sum_{s\in U}\left[s\in\bigcap_{i\in I}A_i\right]=\underbrace{\sum_{I\subseteq[n]}\sum_{s\in U}}_{\substack{=\sum_{s\in U}\sum_{I\subseteq[n]}\\ \text{(da zwei voneinander unabhängige}\\ \text{Summenzeichen immer vertauscht}\\ \text{werden können)}}}(-1)^{|I|}\left[s\in\bigcap_{i\in I}A_i\right]\\
&=\sum_{s\in U}\underbrace{\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\left[s\in\bigcap_{i\in I}A_i\right]}_{\substack{=[s\in U\setminus(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)]\\ \text{(nach (23))}}}=\sum_{s\in U}\left[s\in U\setminus(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\right].
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \sum_{s \in U} [s \in U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)]$$

(laut Proposition 3.4 **(a)**, angewandt auf $S = U$ und $T = U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$). Abgleich dieser zwei Gleichheiten ergibt

$$|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| .$$

Somit ist Aufgabe 3 **(b)** gelöst.

[*Bemerkung:* Die Sylvestersche Siebformel (11) ist wohl eine der bekanntesten Aussagen auf diesem Aufgabenblatt, und kommt in der Literatur in vielen Formen vor. So kann man z. B. die Menge $U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ umschreiben als $A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$, wobei $A_i^c := U \setminus A_i$ für jedes $i \in [n]$ gesetzt wird. So umgeschrieben kommt (11) in [White10, Theorem 1] vor, wo eine kombinatorische Version von unserer obigen Lösung gegeben wird. In [Smid09] wird (11) in der äquivalenten Form

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\substack{I \subseteq [n]; \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

formuliert (und durch Induktion nach n bewiesen); die Äquivalenz zwischen dieser Gleichung und (11) sieht man ein, indem man eine dieser Gleichungen von $|U| = |U|$ subtrahiert.]

(c) (Siehe [19fco, §2.9.5] für Details.) Sei U die Menge aller Permutationen von $[n]$. Für jedes $i \in [n]$ setzen wir

$$A_i = \{\sigma \in U \mid \sigma(i) = i\} . \tag{24}$$

Somit haben wir n Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ von U definiert. Die Definition von Derangements läßt sich nun folgendermaßen umschreiben:

$$\{\text{Derangements von } [n]\} = U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) .$$

Also ist

$$\begin{aligned} &(\text{Anzahl aller Derangements von } [n]) \\ &= |U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \end{aligned} \tag{25}$$

laut Aufgabe 3 **(b)**.

Wir wollen nun die Mächtigkeiten $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ auf der rechten Seite von (25) bestimmen. Dazu fixieren wir eine Teilmenge I von $[n]$. Dann ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ die Menge aller Permutationen σ von $[n]$, die $\sigma(i) = i$ für alle $i \in I$ erfüllen[9]. Wir behaupten, es gibt genau $(n - |I|)!$ solche Permutationen. In der Tat können wir so eine Permutation σ ja dadurch aufbauen, dass wir zunächst ihre Werte auf allen Elementen von I festlegen (hier haben wir keine Wahl, denn die Bedingung "$\sigma(i) = i$ für alle $i \in I$" legt diese Werte eindeutig fest), und dann die restlichen $n - |I|$ Elemente von $[n]$ unter den restlichen $n - |I|$ Werten von σ verteilen (hier haben wir $(n - |I|)!$ viele Möglichkeiten, denn wir legen hier im Wesentlichen eine Permutation der $(n - |I|)$-elementigen Menge $[n] \setminus I$ fest). Es gibt also genau $(n - |I|)!$ Permutationen σ von $[n]$, die $\sigma(i) = i$ für alle $i \in I$ erfüllen. Da $\bigcap_{i\in I} A_i$ die Menge all dieser Permutationen ist, haben wir also gezeigt, dass

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = (n - |I|)! \tag{26}$$

ist.

Vergessen wir nun, dass wir I fixiert haben. Für jede Teilmenge I von $[n]$

[9]Prüfe nach, dass dies auch für $I = \varnothing$ gilt! (Wir haben ja $\bigcap_{i\in I} A_i$ für $I = \varnothing$ separat definiert.)

haben wir also (26) bewiesen. Damit wird (25) zu

$$\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller Derangements von } [n]) \\
&= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}_{\substack{=(n-|I|)! \\ \text{(laut (26))}}} = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} (n-|I|)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I\subseteq[n]; \\ |I|=k}} \underbrace{(-1)^{|I|} (n-|I|)!}_{\substack{=(-1)^k(n-k)! \\ \text{(denn } |I|=k)}} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir die Summe nach dem Wert von } |I| \text{ aufgespalten,} \\ \text{denn für jede Teilmenge } I \text{ von } [n] \text{ ist } |I| \in \{0,1,\ldots,n\}\end{array}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sum_{\substack{I\subseteq[n]; \\ |I|=k}} (-1)^k (n-k)!}_{=(-1)^k(n-k)!\cdot(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n] \text{ mit } |I|=k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! \cdot \underbrace{(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n] \text{ mit } |I|=k)}_{\substack{=(\text{Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } [n]) \\ =\binom{n}{k} \\ \text{(laut der kombinatorischen Interpretation der Binomialkoeffizienten)}}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! \cdot \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\ \text{(laut der Fakultätenformel für} \\ \text{Binomialkoeffizienten)}}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! \cdot \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.
\end{aligned}$$

Damit ist Aufgabe 3 **(c)** gelöst.

(d) (Details finden sich in [19fco, §2.9.4].) Sei U die Menge aller Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$. (Kurzgefasst: Sei $U = [n]^{[m]}$.)

Für jedes $i \in [n]$ sei

$$\begin{aligned}
A_i &= \{f : [m] \to [n] \mid i \text{ ist kein Wert von } f\} \\
&= \{f : [m] \to [n] \mid f(x) \neq i \text{ für alle } x \in [m]\}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir n Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ von U definiert. Es ist leicht einzusehen, dass

$$\{\text{surjektive Abbildungen } [m] \to [n]\} = U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

ist (denn eine Abbildung von $[m]$ nach $[n]$ ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element von $[n]$ zu ihren Werten gehört, also genau dann, wenn sie in keiner der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ enthalten ist). Also ist

$$\begin{aligned} &(\text{Anzahl aller surjektiven Abbildungen von } [m] \text{ nach } [n]) \\ &= |U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \end{aligned} \tag{27}$$

laut Aufgabe 3 **(b)**.

Wir wollen wieder die Mächtigkeiten auf der rechten Seite bestimmen. Dazu fixieren wir eine Teilmenge I von $[n]$. Dann ist $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ die Menge aller Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$, die keins der Elemente von I als Wert annehmen (d.h., deren Wertemenge zu I disjunkt ist). Diese Abbildungen können wir gleichsetzen mit den Abbildungen von $[m]$ nach $[n] \setminus I$ (pedantisch gesehen unterscheiden sie sich in der Zielmenge, aber dies ist auch der einzige Unterschied). Somit ist ihre Anzahl gleich $|[n] \setminus I|^{|[m]|}$. Da $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ die Menge all dieser Abbildungen ist, haben wir hiermit gezeigt, dass

$$\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = |[n] \setminus I|^{|[m]|} \tag{28}$$

gilt.

Vergessen wir, dass wir I fixiert haben. Wir haben also (28) für jede Teilmenge

I von $[n]$ bewiesen. Damit wird (27) zu

$$\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller surjektiven Abbildungen von } [m] \text{ nach } [n]) \\
&= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}_{\substack{=|[n]\setminus I|^{|[m]|} \\ \text{(laut (28))}}} = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \underbrace{|[n]\setminus I|^{|[m]|}}_{\substack{=(n-|I|)^m \\ \text{(denn } |[n]\setminus I|=n-|I| \\ \text{und } |[m]|=m)}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ |I|=k}} \underbrace{(-1)^{|I|}(n-|I|)^m}_{\substack{=(-1)^k(n-k)^m \\ \text{(denn } |I|=k)}} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir, wie schon in der Lösung von Teil } \textbf{(c)}\text{, die} \\ \text{Summe nach dem Wert von } |I| \text{ aufgespalten}\end{array}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ |I|=k}} (-1)^k (n-k)^m}_{=(-1)^k(n-k)^m\cdot(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n] \text{ mit } |I|=k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m \cdot \underbrace{(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n] \text{ mit } |I|=k)}_{\substack{=(\text{Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } [n]) \\ =\binom{n}{k} \\ \text{(laut der kombinatorischen Interpretation der Binomialkoeffizienten)}}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^k}_{=(-1)^{n-(n-k)}} (n-k)^m \cdot \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{=\binom{n}{n-k} \\ \text{(laut (5))}}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-(n-k)} (n-k)^m \cdot \binom{n}{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} i^m \cdot \binom{n}{i} \qquad \text{(hier haben wir } i \text{ für } n-k \text{ substituiert)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m.
\end{aligned}$$

Damit ist Aufgabe 3 **(d)** gelöst.

(e) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sei S die Menge aller surjektiven Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$. Laut Aufgabe 3 **(d)** ist dann

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m. \tag{29}$$

Wir müssen aber zeigen, dass $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m$ durch $n!$ teilbar ist. Wegen (29) reicht es hierfür aus, zu zeigen, dass $|S|$ durch $n!$ teilbar ist.

Wie zeigen wir dies? Die Idee ist, dass wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge S einführen, von der jede Äquivalenzklasse genau $n!$ viele Elemente hat. Daraus wird dann folgen, dass $|S|$ gleich $n!$ mal der Anzahl dieser Äquivalenzklassen ist, und somit wird $|S|$ durch $n!$ teilbar sein.

Die richtige Äquivalenzrelation läßt sich folgendermaßen definieren:

Sei P die Menge aller Permutationen von $[n]$. Da die Permutationen von $[n]$ nichts anderes sind als die bijektiven Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$, sehen wir, dass

- die Verkettung $\sigma \circ \tau$ von zwei Permutationen $\sigma, \tau \in P$ wieder eine Permutation in P ist;
- die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : [n] \to [n]$ eine Permutation in P ist;
- die Umkehrung σ^{-1} einer jeden Permutation $\sigma \in P$ wieder eine Permutation in P ist (und insbesondere wohldefiniert ist, da bijektive Abbildungen immer Umkehrungen haben).

(Algebraiker fassen diese Fakten gerne in einem Satz zusammen: "Die Menge P ist eine Gruppe bezüglich Verkettung, mit neutralem Element id.")

Außerdem wissen wir, daß die Menge $[n]$ genau $n!$ Permutationen hat; das heißt, $|P| = n!$.

Für alle $f \in S$ und $\sigma \in P$ ist ferner $\sigma \circ f \in S$. (Denn wenn f surjektiv und σ bijektiv ist, dann ist auch $\sigma \circ f$ surjektiv.)

Jetzt definieren wir eine binäre Relation $\sim$ auf der Menge S, indem wir

$$(f \sim g) \iff (\text{es gibt ein } \sigma \in P \text{ mit } g = \sigma \circ f)$$

für je zwei surjektive Abbildungen $f, g \in S$ setzen. Mit anderen Worten: Zwei Abbildungen f und g in S sind genau dann äquivalent (bezüglich $\sim$), wenn eine aus der anderen durch Verkettung mit einer Permutation von $[n]$ hervorgeht.[10]

Diese Relation $\sim$ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation, wie man unschwer mithilfe der obengenannten Fakten über P beweist. (So folgt z. B. die Transitivität von $\sim$ daraus, dass die die Verkettung $\sigma \circ \tau$ von zwei Permutationen $\sigma, \tau \in P$ wieder eine Permutation in P ist.)

Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, unterteilt sie die Menge S in (disjunkte und nichtleere) Äquivalenzklassen. Wir müssen nur noch zeigen, dass jede dieser Äquivalenzklassen genau $n!$ viele Elemente hat.

[10] *Beispiel:* Seien $m = 5$ und $n = 3$. Sei $f : [m] \to [n]$ die Abbildung, die $1, 2, 3, 4, 5$ auf $2, 1, 3, 2, 1$ (in dieser Reihenfolge) abbildet. Sei $g : [m] \to [n]$ die Abbildung, die $1, 2, 3, 4, 5$ auf $3, 2, 1, 3, 2$ (in dieser Reihenfolge) abbildet. Beide diese Abbildungen f und g sind surjektiv und liegen daher in S. Ferner gibt es ein $\sigma \in P$ (also eine Permutation σ von $[n] = [3]$) mit $g = \sigma \circ f$; und zwar ist dieses σ diejenige Permutation von $[3]$, die $1, 2, 3$ auf $2, 3, 1$ (in diesr Reihenfolge) abbildet. Daher ist $f \sim g$.

Sei also K eine Äquivalenzklasse von $\sim$. Wir müssen zeigen, dass $|K| = n!$ ist. Wir wählen ein beliebiges Element f von K. Dann ist K die Äquivalenzklasse von f (bezüglich der Relation $\sim$). Wegen der Definition von $\sim$ bedeutet dies folgendes:

$$K = \{\sigma \circ f \mid \sigma \in P\} . \tag{30}$$

Hieraus würde schnell $|K| = n!$ folgen, wenn wir wüssten, dass die Abbildungen $\sigma \circ f$ für alle $\sigma \in P$ verschieden sind (denn $|P| = n!$). Sind sie es denn?

Ja, sind sie. Denn sind σ und τ zwei verschiedene Permutationen in P, dann gibt es ein $i \in [n]$ mit $\sigma(i) \neq \tau(i)$; und da f surjektiv ist (denn $f \in K \subseteq S$), gibt es zu diesem $i \in [n]$ auch ein $j \in [m]$ mit $i = f(j)$. Für dieses j gilt dann

$$(\sigma \circ f)(j) = \sigma\left(\underbrace{f(j)}_{=i}\right) = \sigma(i) \neq \tau\left(\underbrace{i}_{=f(j)}\right) = \tau(f(j)) = (\tau \circ f)(j),$$

woraus natürlich $\sigma \circ f \neq \tau \circ f$ folgt. Wir haben also gezeigt, dass $\sigma \circ f \neq \tau \circ f$ für je zwei verschiedene Permutationen σ und τ in P gilt. Das heißt, die Abbildungen $\sigma \circ f$ für $\sigma \in P$ sind alle verschieden. Folglich ist $|\{\sigma \circ f \mid \sigma \in P\}| = |P| = n!$. Wegen (30) läßt sich dies umschreiben als $|K| = n!$, was uns gerade zum Beweis gefehlt hat. Die Lösung von Aufgabe 3 **(e)** ist damit fertig.

(f) Sei $n \in \mathbb{N}$. Laut Proposition 3.5 (angewandt auf $X = [n]$ und $Y = [n]$) ist jede surjektive Abbildung von $[n]$ nach $[n]$ automatisch bijektiv. Da die Umkehrung selbstverständlich gilt, sind also die surjektiven Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$ dasselbe wie die bijektiven Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$. Wir haben daher

$$\begin{aligned}
&\{\text{surjektive Abbildungen von } [n] \text{ nach } [n]\} \\
&= \{\text{bijektive Abbildungen von } [n] \text{ nach } [n]\} \\
&= \{\text{Permutationen von } [n]\}
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller surjektiven Abbildungen von } [n] \text{ nach } [n]) \\
&= (\text{Anzahl aller Permutationen von } [n]) = n!.
\end{aligned}$$

Doch laut Aufgabe 3 **(d)** (angewendet auf $m = n$) gilt

$$\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller surjektiven Abbildungen von } [n] \text{ nach } [n]) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n.
\end{aligned}$$

Abgleich der letzten zwei Gleichungen ergibt $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!$. Damit ist Aufgabe 3 **(f)** gelöst.

(g) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Dann ist $|[m]| = m < n = |[n]|$. Laut Folgerung 3.6 gibt es also keine surjektiven Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$. Die Anzahl aller surjektiven Abbildungen von $[m]$ nach $[n]$ ist also 0. Doch laut Aufgabe 3 **(d)** ist diese Anzahl gleich $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m$. Abgleich dieser beiden Fakten ergibt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m = 0.$$

Aufgabe 3 **(g)** ist damit gelöst. □

3.4. zu Aufgabe 7

Wir stellen die Lösung von Aufgabe 7 als nächstes, weil sie direkt an Aufgabe 3 **(a)** anschließt (und weil wir sie bald wieder brauchen).

Lösungsskizze zu Aufgabe 7. Aufgabe 7 ist zwar eine Verallgemeinerung der Identität (10); sie läßt sich aber leicht auf letztere zurückführen:

Wenn wir eine Teilmenge I von S wählen wollen, die $T \subseteq I$ erfüllt, dann müssen wir nur entscheiden, welche Elemente von $S \setminus T$ in diese Menge kommen; sämtliche Elemente von T müssen es ja ohnehin tun. Das heißt, wir müssen nur eine Teilmenge von $S \setminus T$ wählen. Formaliseren wir das als Bijektion, dann erhalten wir folgendes: Es gibt eine Bijektion

$$\{\text{Teilmengen von } S \setminus T\} \to \{\text{Teilmengen } I \text{ von } S, \text{ die } T \subseteq I \text{ erfüllen}\},$$
$$J \mapsto J \cup T.$$

(Die Umkehrabbildung dieser Bijektion sendet jedes I auf $I \setminus T$.) Diese Bijektion erlaubt es uns, in der Summe $\sum_{\substack{I \subseteq S; \\ T \subseteq I}} (-1)^{|I|}$ den Summationsindex I durch $J \cup T$ zu substituieren; wir erhalten also

$$\sum_{\substack{I \subseteq S; \\ T \subseteq I}} (-1)^{|I|} = \sum_{J \subseteq S \setminus T} (-1)^{|J \cup T|}.$$

Doch

$$\sum_{J \subseteq S \setminus T} (-1)^{|J \cup T|} = \sum_{I \subseteq S \setminus T} \underbrace{(-1)^{|I \cup T|}}_{\substack{=(-1)^{|I|+|T|} \\ \text{(denn aus } I \subseteq S \setminus T \\ \text{folgt } |I \cup T| = |I| + |T|)}} = \sum_{I \subseteq S \setminus T} \underbrace{(-1)^{|I|+|T|}}_{=(-1)^{|I|}(-1)^{|T|}}$$
$$= (-1)^{|T|} \underbrace{\sum_{I \subseteq S \setminus T} (-1)^{|I|}}_{\substack{=[S \setminus T = \varnothing] \\ \text{(nach (10),} \\ \text{angewandt auf } S \setminus T \text{ statt } S)}} = (-1)^{|T|} [S \setminus T = \varnothing].$$

Doch da $T \subseteq S$ gilt, ist die Aussage "$S \setminus T = \varnothing$" äquivalent zu "$S = T$". Somit ist $[S \setminus T = \varnothing] = [S = T]$. Insgesamt erhalten wir also

$$\sum_{\substack{I \subseteq S;\\ T \subseteq I}} (-1)^{|I|} = \sum_{J \subseteq S \setminus T} (-1)^{|J \cup T|} = (-1)^{|T|} \underbrace{[S \setminus T = \varnothing]}_{=[S=T]} = (-1)^{|T|} [S = T] .$$

Damit ist Aufgabe 7 gelöst.

[Eine andere Lösung von Aufgabe 7 ist in [18f-hw3s, proof of Proposition 6.4] zu finden; statt (10) zu verwenden, imitiert diese den Beweis von (10).] □

3.5. zu Aufgabe 4

Lösungsskizze zu Aufgabe 4. Sei g die Anzahl aller 1-geraden n-Tupel in $[d]^n$. Sei u die Anzahl aller 1-ungeraden n-Tupel in $[d]^n$, wobei wir das Wort "1-ungerade" als Abkürzung für "nicht 1-gerade" definieren. Dann ist $g + u$ die Anzahl aller n-Tupel in $[d]^n$ (denn jedes n-Tupel in $[d]^n$ ist entweder 1-gerade oder 1-ungerade aber nicht beides gleichzeitig). Wir haben also

$$g + u = \left(\text{Anzahl aller } n\text{-Tupel in } [d]^n\right) = d^n. \tag{31}$$

Wenn wir jetzt noch eine ähnliche Gleichheit finden, auf deren linken Seite $g - u$ statt $g + u$ steht, dann können wir diese Gleichheit zu (31) addieren, und erhalten $2g$ auf der linken Seite. Daraus können wir dann g (unsere gesuchte Anzahl) bestimmen.

Wir stellen zunächst folgendes fest: Sind $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{C}$ beliebige Zahlen, so gilt

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^n = \sum_{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in [d]^n} x_{a_1} x_{a_2} \cdots x_{a_n}. \tag{32}$$

(Dies sieht man am einfachsten folgendermaßen ein: Wenn man

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^n \\ &= \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_d)(x_1 + x_2 + \cdots + x_d) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_d)}_{n \text{ Faktoren}} \end{aligned}$$

ausmultipliziert, erhält man d^n Produkte, die jeweils aus jedem der n Faktoren genau einen Summanden auswählen. Dies ist aber genau die rechte Seite von (32). Formal beweisen kann man (32) durch Induktion nach n.)

Was für Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_d$ können wir in (32) einsetzen, damit auf der rechten Seite $g - u$ entsteht? Die Summe auf der rechten Seite von (32) hat einen Summanden $x_{a_1} x_{a_2} \cdots x_{a_n}$ für jedes n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$. Wenn wir $x_1, x_2, \ldots, x_d$ so wählen können, dass dieser Summand gleich 1 für jedes 1-gerade n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ ist und gleich -1 für jedes 1-ungerade n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ ist, dann vereinfacht sich diese Summe zu $g \cdot 1 + u \cdot (-1) = g - u$, und wir haben unser Zwischenziel erreicht.

Können wir $x_1, x_2, \ldots, x_d$ auch tatsächlich so wählen? Ja, wie man leicht sieht: Und zwar setze man $x_1 = -1$ und $x_2 = x_3 = \cdots = x_d = 1$. Für jedes n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ ist dann

$$\begin{aligned}
x_{a_1} x_{a_2} \cdots x_{a_n} &= (-1)^{(\text{Anzahl aller } i \in [n] \text{ mit } a_i = 1)} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{denn jedes } i \in [n] \text{ mit } a_i = 1 \text{ trägt einen } (-1)\text{-Faktor} \\ \text{zum Produkt } x_{a_1} x_{a_2} \cdots x_{a_n} \text{ bei, während jedes andere } i \\ \text{nur einen 1-Faktor beiträgt}\end{array}\right) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{wenn die Anzahl aller } i \in [n] \text{ mit } a_i = 1 \text{ gerade ist;} \\ -1, & \text{wenn die Anzahl aller } i \in [n] \text{ mit } a_i = 1 \text{ ungerade ist} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{wenn } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ ein 1-gerades } n\text{-Tupel ist;} \\ -1, & \text{wenn } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ ein 1-ungerades } n\text{-Tupel ist.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Summe $\sum\limits_{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n} x_{a_1} x_{a_2} \cdots x_{a_n}$ hat also für jedes 1-gerade n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ einen Summanden, der gleich 1 ist, und für jedes 1-ungerade n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ einen Summanden, der gleich -1 ist. Da es g viele 1-gerade n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ und u viele 1-ungerade n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [d]^n$ gibt, vereinfacht sich diese Summe also zu $g \cdot 1 + u \cdot (-1) = g - u$. Die Gleichheit (32) vereinfacht sich damit zu

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^n = g - u.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
g - u = (x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^n &= \left(\underbrace{-1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{d-1 \text{ Summanden}}}_{=d-2} \right)^n \\
&\qquad (\text{denn } x_1 = -1 \text{ und } x_2 = x_3 = \cdots = x_d = 1) \\
&= (d-2)^n .
\end{aligned}$$

Addieren wir diese Gleichung zu (31), so erhalten wir $2g = d^n + (d-2)^n$. Daher ist $g = \dfrac{1}{2}\left(d^n + (d-2)^n\right)$. Dies löst Aufgabe 4.

(Eine andere Lösung, die aber ebenfalls auf Kürzungen in vorzeichenbehafteten Summen beruht, findet sich in [18s-hw3s, solution to Exercise 5].) □

3.6. zu Aufgabe 5

Lösungsskizze zu Aufgabe 5. **(a)** Schreibe das Polynom P as

$$P = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \tag{33}$$

wobei $\lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ die Koeffizienten von P sind. (Die unendliche Summe auf der rechten Seite von (33) ist unproblematisch, da nur endlich viele der Koeffizienten $\lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ und damit auch nur endlich viele der Summanden von 0 verschieden sind.)

Sei nun T eine Teilmenge von $[n]$. Unter den *Nicht-T-Variablen* verstehen wir im Folgenden die Variablen x_i mit $i \notin T$. Dann ist $P\left(x\mid_T\right)$ also das Resultat, das man erhält, wenn man im Polynom P alle Nicht-T-Variablen durch 0 ersetzt.

Wir wollen erst einmal sehen, was mit einem **Monom** $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ passiert, wenn man im n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alle Nicht-T-Variablen durch 0 ersetzt. Und zwar passiert folgendes:

- Wenn in dem Monom $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ keine Nicht-T-Variable vorkommt, dann bleibt dieses Monom bei der Einsetzung unverändert (denn die Variablen, die im Monom vorkommen, bleiben alle bei der Einsetzung unverändert).

- Wenn in dem Monom $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ eine Nicht-T-Variable vorkommt[11], dann wird dieses Monom bei der Einsetzung zu 0 (weil im resultienden Produkt mindestens ein Faktor gleich 0 ist).

Insgesamt können wir also sagen, dass das Monom $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ bei der Ersetzung zu

$$\begin{cases} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}, & \text{wenn im Monom } x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \text{ keine Nicht-}T\text{-Variable vorkommt;} \\ 0, & \text{wenn im Monom } x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \text{ eine Nicht-}T\text{-Variable vorkommt} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}, & \text{wenn } i_k = 0 \text{ für alle } k \in [n] \setminus T \text{ gilt;} \\ 0, & \text{wenn nicht} \end{cases}$$
$$\left(\begin{array}{c}\text{denn genau dann kommt im Monom } x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \text{ keine} \\ \text{Nicht-}T\text{-Variable vor, wenn } i_k = 0 \text{ für alle } k \in [n] \setminus T \text{ gilt}\end{array}\right)$$

wird. Somit wird das Polynom P bei dieser Ersetzung zu

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \begin{cases} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}, & \text{wenn } i_k = 0 \text{ für alle } k \in [n] \setminus T \text{ gilt;} \\ 0, & \text{wenn nicht} \end{cases}$$
$$(\text{wegen } (33))$$
$$= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n; \\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

[11]Das wort “eine” bedeutet hier “mindestens eine”, und das Wort “vorkommt” bedeutet hier “mit positivem Exponenten vorkommt”. So kommen im Monom $x_1^0x_2^1x_3^4$ die Variablen x_2 und x_3 vor, nicht aber die Variable x_1.

(hier haben wir alle Summanden, die **nicht** "$i_k = 0$ für alle $k \in [n] \setminus T$" erfüllen, aus der Summe geworfen, da sie alle gleich 0 sind). Mit anderen Worten: Wir haben

$$P\left(x\mid_T\right) = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \tag{34}$$

(denn $P\left(x\mid_T\right)$ ist ja genau das Resultat, das man erhält, wenn man im Polynom P alle Nicht-T-Variablen durch 0 ersetzt).

Vergessen wir nun, dass wir T fixiert haben. Für jede Teilmenge T von $[n]$ haben wir also (34) bewiesen.

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} \underbrace{P\left(x\mid_T\right)}_{\substack{= \sum\limits_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\ \text{(nach (34))}}} \\
&= \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \underbrace{\sum_{T\subseteq[n]} \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}}}_{\substack{= \sum\limits_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} \sum\limits_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} \\ \text{(hier haben wir die zwei Summenzeichen} \\ \text{vertauscht; dabei springt die Bedingung} \\ \text{natürlich unter das innere Summenzeichen)}}} (-1)^{|T|} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} \sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} (-1)^{|T|} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} (-1)^{|T|} \right) \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Jetzt ist es an der Zeit, die innere Summe in (35) zu vereinfachen. Dazu fixieren wir ein n-Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. Sei S die Menge aller $k \in [n]$, die $i_k \neq 0$ erfüllen. Eine Teilmenge T von $[n]$ erfüllt genau dann "$i_k = 0$ für alle $k \in [n] \setminus T$", wenn sie $S \subseteq T$ erfüllt. Somit läßt sich das Summenzeichen $\sum\limits_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}}$ auch als $\sum\limits_{\substack{T\subseteq[n];\\ S\subseteq T}}$ umschreiben. Das heißt, wir haben

$$\sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} = \sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ S\subseteq T}}$$

(dies ist eine Gleichheit von Summenzeichen[12]). Also ist

$$\sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} (-1)^{|T|} = \sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ S\subseteq T}} (-1)^{|T|} = \sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ S\subseteq I}} (-1)^{|I|} = (-1)^{|S|} [[n] = S]$$

wegen Aufgabe 7 (angewendet auf $[n]$ und S statt S und T). Doch wir haben

$$(-1)^{|S|} [[n] = S] = (-1)^n [[n] = S]$$

(denn im Falle von $[n] = S$ gilt $|S| = |[n]| = n$, während im anderen Fall der verschwindende Faktor $[[n] = S] = 0$ den Vorfaktor sowieso irrelevant macht); wir erhalten also

$$\sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} (-1)^{|T|} = (-1)^{|S|} [[n] = S] = (-1)^n [[n] = S].$$

Doch $[n] = S$ gilt genau dann, wenn $i_k \neq 0$ für alle $k \in [n]$ gilt (laut Definition von S), und dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $i_k \geq 1$ für alle $k \in [n]$ gilt (denn jede Zahl i_k ist eine nichtnegative ganze Zahl, und ist daher genau dann $\neq 0$, wenn sie ≥ 1 ist). Die Aussagen "$[n] = S$" und "$i_k \geq 1$ für alle $k \in [n]$" sind also äquivalent. Somit ist $[[n] = S] = [i_k \geq 1 \text{ für alle } k \in [n]]$ (denn äquivalente Aussagen haben den gleichen Wahrheitswert). Wir rechnen also weiter:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in[n]\setminus T}} (-1)^{|T|} &= (-1)^n \underbrace{[[n] = S]}_{=[i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]]} \\ &= (-1)^n [i_k \geq 1 \text{ für alle } k \in [n]]. \qquad (36)\end{aligned}$$

Vergessen wir wieder, dass wir $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ fixiert haben. Wir haben also

[12]Gleichheiten von Summenzeichen sind wie folgt zu verstehen: Zwei Summenzeichen sind genau dann gleich, wenn sie die gleiche Wirkung haben – d.h., wenn man das eine durch das andere in einem Term ersetzt, dann verändert sich der Wert des Termes nicht. Zum Beispiel gilt $\sum\limits_{\substack{i\in\mathbb{N};\\ 0\leq i\leq 3}} = \sum\limits_{i=0}^{3}$, denn für jedes 4-Tupel (a_0, a_1, a_2, a_3) von Zahlen gilt $\sum\limits_{\substack{i\in\mathbb{N};\\ 0\leq i\leq 3}} a_i = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i$.

(36) für jedes n-Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ gezeigt. Somit wird (35) zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{|T|} P\left(x\mid_T\right) \\
&= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} \underbrace{\left(\sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ i_k=0 \text{ für alle } k\in T}} (-1)^{|T|}\right)}_{\substack{=(-1)^n[i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]]\\ \text{(laut (36))}}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} (-1)^n \left[i_k \geq 1 \text{ für alle } k \in [n]\right] \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]}} (-1)^n \underbrace{\left[i_k \geq 1 \text{ für alle } k \in [n]\right]}_{\substack{=1\\ \text{(denn } i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n])}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&\qquad + \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ \text{es gilt nicht}\\ (i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n])}} (-1)^n \underbrace{\left[i_k \geq 1 \text{ für alle } k \in [n]\right]}_{\substack{=0\\ \text{(denn es gilt nicht } (i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]))}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]}} (-1)^n \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ \text{es gilt nicht}\\ (i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n])}} (-1)^n\, 0 \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}}_{=0} \\
&= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]}} (-1)^n \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \underbrace{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}}_{\substack{=(x_1x_2\cdots x_n)\left(x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}\cdots x_n^{i_n-1}\right)\\ \text{(denn } i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n])}} \\
&= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]}} (-1)^n \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \left(x_1x_2\cdots x_n\right)\left(x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}\cdots x_n^{i_n-1}\right) \\
&= x_1x_2\cdots x_n \cdot (-1)^n \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}\cdots x_n^{i_n-1}. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir das Polynom

$$(-1)^n \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}\cdots x_n^{i_n-1}$$

mit Q; dann vereinfacht sich (37) zu

$$\sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} P\left(x\mid_T\right) = x_1x_2\cdots x_n \cdot Q = x_1x_2\cdots x_n \cdot Q\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Ferner ist laut Definition

$$Q = (-1)^n \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n;\\ i_k\geq 1 \text{ für alle } k\in[n]}} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}\cdots x_n^{i_n-1}.$$

Vergleichen wir dies mit (33), so erkennen wir, dass jeder Koeffizient von Q (bis auf Vorzeichen) ein Koeffizient von P ist, aber in P zu einem um n höhergradigeren Monom gehört als in Q (genauer gesagt: der Koeffizient von $x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}\cdots x_n^{i_n-1}$ in Q ist $(-1)^n$ mal der Koeffizient von $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ in P). Hieraus folgt, dass der Grad von P mindestens um n höher ist als der von Q. Das heißt, $\deg P \geq \deg Q + n$. Mit anderen Worten: $\deg Q \leq \deg P - n$.

Wir haben also ein Polynom Q in den n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gefunden, für das $\deg Q \leq \deg P - n$ und

$$\sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} P\left(x\mid_T\right) = x_1x_2\cdots x_n \cdot Q\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

gilt. Damit ist Aufgabe 5 **(a)** gelöst.

(Ein alternativer Beweis durch Induktion nach n findet sich in [Grinbe08, Lemma 2].)

(b) (Siehe [Grinbe08, Lemma 3] für Details.) Nehmen wir an, dass $\deg P < n$ ist (wobei P wie in Aufgabe 5 **(a)** ist). Laut Aufgabe 5 **(a)** gibt es dann ein Polynom Q in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, für das $\deg Q \leq \deg P - n$ und

$$\sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} P\left(x\mid_T\right) = x_1x_2\cdots x_n \cdot Q\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

gilt. Betrachten wir dieses Q. Aus $\deg Q \leq \underbrace{\deg P}_{<n} - n < n - n = 0$ folgt $Q = 0$.

Also ist

$$\sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} P\left(x\mid_T\right) = x_1x_2\cdots x_n \cdot \underbrace{Q\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}_{=Q=0} = 0. \tag{38}$$

(c) (Siehe [Grinbe08, Problem 1] für Details.) Definiere ein Polynom $P = P\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ über dem Ring $\mathbb{Z}$ (also mit ganzzahligen Koeffizienten) folgendermaßen:

$$P = 1 - \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)^{p-1}. \tag{39}$$

Dann ist $\deg P \leq p-1 < p \leq n$ (denn $n \geq p$). Laut (38) gilt daher

$$\sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} P\left(x\mid_T\right) = 0. \tag{40}$$

Doch für jede Teilmenge T von $[n]$ gilt

$$P\left(x\mid_T\right) = 1 - \left(\sum_{i\in T} x_i\right)^{p-1}. \tag{41}$$

(Dies folgt aus (39), wenn wir alle Variablen x_i mit $i \notin T$ durch 0 ersetzen. Denn durch diese Ersetzung wird P zu $P\left(x\mid_T\right)$, während die Summe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ zu ihrer Teilsumme $\sum\limits_{i\in T} x_i$ wird.)

Aus (40) folgt nun

$$0 = \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} \underbrace{P\left(x\mid_T\right)}_{\substack{=1-\left(\sum\limits_{i\in T} x_i\right)^{p-1} \\ \text{(laut (41))}}} = \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} \left(1 - \left(\sum_{i\in T} x_i\right)^{p-1}\right).$$

Setzen wir $a_1, a_2, \ldots, a_n$ für die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in dieser Polynom-Identität ein, so erhalten wir

$$0 = \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} \left(1 - \left(\sum_{i\in T} a_i\right)^{p-1}\right). \tag{42}$$

Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt aber

$$a^{p-1} \equiv \begin{cases} 1, & \text{wenn } p \nmid a; \\ 0, & \text{wenn } p \mid a \end{cases} \mod p \tag{43}$$

(laut dem Kleinen Satz von Fermat) und folglich

$$\begin{aligned} 1 - a^{p-1} &\equiv 1 - \begin{cases} 1, & \text{wenn } p \nmid a; \\ 0, & \text{wenn } p \mid a \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } p \nmid a; \\ 1, & \text{wenn } p \mid a \end{cases} \mod p. \end{aligned} \tag{44}$$

Damit können wir in (42) modulo p weiterrechnen:

$$0 = \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} \underbrace{\left(1-\left(\sum_{i\in T} a_i\right)^{p-1}\right)}_{\substack{\equiv\begin{cases}0, & \text{wenn } p\nmid \sum\limits_{i\in T} a_i;\\ 1, & \text{wenn } p\mid \sum\limits_{i\in T} a_i\end{cases} \operatorname{mod} p \\ \text{(laut (44), angewandt auf } a=\sum\limits_{i\in T} a_i\text{)}}}$$

$$\equiv \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|T|} \begin{cases}0, & \text{wenn } p\nmid \sum\limits_{i\in T} a_i;\\ 1, & \text{wenn } p\mid \sum\limits_{i\in T} a_i\end{cases} = \sum_{\substack{T\subseteq[n];\\ p\mid \sum\limits_{i\in T} a_i}} (-1)^{|T|} \operatorname{mod} p$$

(hier haben wir die Summanden, die 0 sind, aus der Summe geworfen). Das heißt, die Zahl $\sum\limits_{\substack{T\subseteq[n];\\ p\mid \sum_{i\in T} a_i}} (-1)^{|T|}$ ist durch p teilbar. Benennen wir jetzt noch den Index i als t um, so sehen wir: Die Zahl $\sum\limits_{\substack{T\subseteq[n];\\ p\mid \sum_{t\in T} a_t}} (-1)^{|T|}$ ist durch p teilbar. Damit ist Aufgabe 5 **(c)** gelöst.

[*Bemerkung:* In der obigen Lösung von Aufgabe 5 **(c)** hätten wir das Polynom P auch über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ statt über $\mathbb{Z}$ definieren können. (So habe ich es in [Grinbe08] auch gemacht.) Dann hätten wir es mit Gleichheiten statt Kongruenzen zu tun, hätten aber wiederum mit den Restklassen von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ modulo p statt mit diesen Zahlen selber rechnen müssen. Viel Arbeit hätten wir uns nicht gespart.] □

3.7. zu Aufgabe 6

Lösungsskizze zu Aufgabe 6. Eine generelle Bemerkung vorneweg: Man sollte sich Δf als ein diskretes Analogon der Ableitung $f' = \dfrac{d}{dx} f$ vorstellen; die Teile **(a)** und **(d)** dieser Aufgabe sind so gesehen analog zu wohlbekannten Eigenschaften von Ableitungen. Mehr über diese Analogie (und über erste und n-te Differenzen) findet man in Ciglers Skript [Cigler06] und [GrKnPa94, §2.6 sowie §5.3, Trick 2].

(a) Wir zeigen zunächst einmal den Sonderfall $n = 1$ als separate Aussage:

Aussage 1: Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Ist $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq k$, dann ist Δf eine Polynomfunktion von Grad $\leq k - 1$.

[*Beweis von Aussage 1:* Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq k$. Es gibt also Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß jedes $x \in \mathbb{A}$ die Gleichheit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i \tag{45}$$

erfüllt. Betrachte diese Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Laut Definition von Δf ist nun

$$\begin{aligned}
(\Delta f)(x) &= \underbrace{f(x+1)}_{\substack{=\sum_{i=0}^{k} a_i (x+1)^i \\ \text{(laut (45), angewandt} \\ \text{auf } x+1 \text{ statt } x)}} - \underbrace{f(x)}_{\substack{=\sum_{i=0}^{k} a_i x^i \\ \text{(laut (45))}}} \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i (x+1)^i - \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = \sum_{i=0}^{k} a_i \underbrace{\left((x+1)^i - x^i\right)}_{\substack{=\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} x^j \\ \text{(denn laut dem Binomischen Satz} \\ \text{gilt } (x+1)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} x^j + x^i)}} \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} x^j = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} a_i \binom{i}{j} x^j.
\end{aligned} \tag{46}$$

Doch das Summenzeichenpaar "$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i-1}$" auf der rechten Seite dieser Gleichung läßt sich durch das Summenzeichenpaar "$\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=j+1}^{k}$" ersetzen, denn beide diese Summenzeichenpaare läuten eine Summation über alle Paare $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ mit $0 \leq j < i \leq k$ ein (man prüfe dies nach!) und sind somit zueinander äquivalent. Somit kann man (46) umschreiben als

$$(\Delta f)(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=j+1}^{k} a_i \binom{i}{j} x^j.$$

Wir haben also

$$(\Delta f)(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=j+1}^{k} a_i \binom{i}{j} x^j = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=j+1}^{k} a_i \binom{i}{j} \right) x^j \tag{47}$$

für alle $x \in \mathbb{A}$. An dieser Formel erkennt man, dass Δf eine Polynomfunktion von Grad $\leq k - 1$ ist. Damit ist Aussage 1 bewiesen.

(Wenn $k > 0$ ist, und wenn die Polynomfunktion f den Grad k hat, dann kann man sogar sehen, dass Δf eine Polynomfunktion von Grad exakt $k - 1$

ist. Dies werden wir in Aussage 4 weiter unten beweisen. Wenn $k = 0$ ist, dann ist $\Delta f = 0$, weil auf der rechten Seite von (47) eine leere Summe steht. Das Nullpolynom 0 hat Grad $-\infty$, nicht $0 - 1$.)]

Wir können das Zeichen Δ als einen *Operator* auffassen – d. h., als eine Abbildung $\mathbb{C}^{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ von der Menge $\mathbb{C}^{\mathbb{A}} = \{\text{alle Funktionen von } \mathbb{A} \text{ nach } \mathbb{C}\}$ in sich selbst. Dieser Operator sendet jede Funktion $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ auf die Funktion $\Delta f \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$. Da Δ eine Abbildung von der Menge $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ in sich selbst ist, kann man Δ beliebig oft hintereinander ausführen – d.h. die Verkettungspotenzen $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{n \text{ mal } \Delta}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sind alle wohldefiniert (mit $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{A}}}$). Die n-te Verkettungspotenz Δ^n überführt natürlich jede Funktion $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ in die in der Aufgabe definierte n-te Differenz $\Delta^n f$, denn genau so wurde letztere ja definiert.

Nun haben wir aber vorhin Aussage 1 bewiesen. Kurzgefasst besagt diese Aussage, dass der Operator Δ jede Polynomfunktion in eine Polynomfunktion mit mindestens um 1 kleinerem Grad überführt. Hieraus folgt, dass die n-fache Hintereinanderausführung Δ^n dieses Operators Δ (für jedes $n \in \mathbb{N}$) jede Polynomfunktion in eine Polynomfunktion mit mindestens um n kleinerem Grad überführt. Mit anderen Worten:

> *Aussage 2:* Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Ist $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq k$, dann ist $\Delta^n f$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq k - n$.

(Strenggenommen muss man dies durch Induktion nach n zeigen. Aber dies ist völlig straightforward.)

Aufgabe 6 **(a)** folgt sofort aus Aussage 2.

(b) Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Wir behaupten nun:

> *Aussage 3:* Es gilt
>
> $$(\Delta^n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{A} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

[*Beweis von Aussage 3:* Wir zeigen Aussage 3 durch Induktion nach n:

Induktionsanfang: Für $n = 0$ behauptet Aussage 3, dass

$$\left(\Delta^0 f\right)(x) = \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} \binom{0}{k} f(x+k) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{A}$$

gilt. Dies läuft aber auf $f(x) = f(x)$ hinaus (denn $\Delta^0 f = f$ und $\binom{0}{0} = 1$). Somit ist Aussage 3 für $n = 0$ bewiesen.

Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}$. Angenommen, dass Aussage 3 für $n = m$ gilt. Wir müssen zeigen, dass Aussage 3 auch für $n = m + 1$ gilt.

Wir haben angenommen, dass Aussage 3 für $n = m$ gilt. Mit anderen Worten: Es gilt

$$(\Delta^m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+k) \tag{48}$$

für alle $x \in \mathbb{A}$.

Sei nun $x \in \mathbb{A}$. Dann ist $\Delta^{m+1} f = \Delta(\Delta^m f)$ (laut der rekursiven Definition von $\Delta^n f$), also[13]

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta^{m+1} f\right)(x) \\
&= (\Delta(\Delta^m f))(x) \\
&= \underbrace{(\Delta^m f)(x+1)}_{\substack{= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+1+k) \\ \text{(nach (48),} \\ \text{angewandt auf } x+1 \text{ statt } x)}} - \underbrace{(\Delta^m f)(x)}_{\substack{= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+k) \\ \text{(nach (48))}}} \\
&\qquad \left(\text{laut der Definition von } \Delta(\Delta^m f)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+1+k) - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+k) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \underbrace{(-1)^{m-(k-1)}}_{=(-1)^{(m+1)-k}} \binom{m}{k-1} f\left(\underbrace{x+1+(k-1)}_{=x+k}\right) - \sum_{k=0}^{m} \underbrace{(-1)^{m-k}}_{=-(-1)^{(m+1)-k}} \binom{m}{k} f(x+k) \\
&\qquad \left(\text{hier haben wir das } k \text{ in der ersten Summe durch } k-1 \text{ substituiert}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k) - \sum_{k=0}^{m} \left(-(-1)^{(m+1)-k}\right) \binom{m}{k} f(x+k) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{m} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k).
\end{aligned}$$

Die zwei Summen auf der rechten Seite sehen so aus, als sollten wir sie zusammenfassen. Dies wird aber erst einmal durch die verschiedenen Summationsintervalle behindert: Die erste Summe geht von 1 bis $m+1$, während die zweite von 0 bis m geht. Doch dies ist kein echtes Hindernis, lassen sich doch beide Summen auf einfachste Weise zu Summen von 0 bis $m+1$ ausdehnen. Für die

[13]Wer den Induktionsbeweis des Binomischen Satzes noch im Gedächtnis hat, wird ihn im Folgenden in abgewandelter Form wiedererkennen. Dies ist kein großes Wunder, denn Aussage 2 läßt sich auch als Sonderfall des Binomischen Satzes im Operatorenring sehen – und der Beweis, den wir hier führen, folgt einfach dem Beweis des Binomischen Satzes in diesem Sonderfall. Diesen Blickwinkel will ich hier aber nicht genauer darstellen.

erste Summe geschieht dies, indem wir ihre Untergrenze von 1 auf 0 reduzieren und den neu dazugekommenen $k = 0$-Summanden wieder subtrahieren:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k) - (-1)^{(m+1)-0} \underbrace{\binom{m}{0-1}}_{\substack{=0 \\ \text{(laut (1),} \\ \text{denn } 0-1 \notin \mathbb{N})}} f(x+0) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k) - \underbrace{(-1)^{(m+1)-0}\, 0 f(x+0)}_{=0} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k).
\end{aligned}$$

Für die zweite Summe erhöhen wir die Obergrenze von m auf $m + 1$ und subtrahieren den neuen Term wieder:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k) \\
&\qquad - (-1)^{(m+1)-(m+1)} \underbrace{\binom{m}{m+1}}_{\substack{=0 \\ \text{(nach (2),} \\ \text{angewandt auf } n=m \text{ und } k=m+1)}} f(x+m+1) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k) - \underbrace{(-1)^{(m+1)-(m+1)}\, 0 f(x+m+1)}_{=0} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k).
\end{aligned}$$

Unsere obige Formel für $\left(\Delta^{m+1} f\right)(x)$ wird nun zu

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta^{m+1} f\right)(x)\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k)}_{=\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k)}_{=\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k)}\\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m}{k} f(x+k)\\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\right) f(x+k)\\
&\qquad \text{(hier haben wir die zwei Summen endlich zusammengefasst)}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \underbrace{\binom{m+1}{k}}_{\substack{=\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k} \\ \text{(nach (3),} \\ \text{angewandt auf } n=m+1)}} f(x+k)\\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\right) f(x+k),
\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\left(\Delta^{m+1} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m+1}{k} f(x+k).$$

Wir haben also gezeigt, dass $\left(\Delta^{m+1} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{(m+1)-k} \binom{m+1}{k} f(x+k)$ für alle $x \in \mathbb{A}$ gilt. Mit anderen Worten: Aussage 3 gilt für $n = m+1$. Damit ist der Induktionsschritt fertig, und Aussage 3 ist bewiesen.]

Mit dem Beweis von Aussage 3 ist Aufgabe 6 **(b)** gelöst.

(c) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $c < n$. Wir wollen zeigen, dass die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{c} = 0$$

gilt. Wenn $c \notin \mathbb{N}$ ist, dann ist dies klar, da alle Binomialkoeffizienten $\binom{ak+b}{c}$ (und damit auch alle Summanden in der Summe) in diesem Fall 0 sind. Wir nehmen also o. B. d. A. an, dass $c \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ die Funktion, die jedes $k \in \mathbb{A}$ in $\dbinom{ak+b}{c} \in \mathbb{C}$ überführt. Dies ist eine Polynomfunktion von Grad $\leq c$, denn für jedes $k \in \mathbb{A}$ ist

$$\begin{aligned} f(k) = \binom{ak+b}{c} &= \frac{(ak+b)(ak+b-1)(ak+b-2)\cdots(ak+b-c+1)}{c!} \\ &\qquad \text{(nach (1))} \\ &= \frac{a^c}{c!}k^c + (\text{niedrigere Potenzen von } k). \end{aligned}$$

Laut der Aussage 2 (in der obigen Lösung von Aufgabe 6 **(a)**) (angewandt auf $k = c$) ist somit $\Delta^n f$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq c - n$. Da $\underbrace{c}_{<n} - n < 0$ gilt, folgt hieraus, dass $\Delta^n f$ eine Polynomfunktion von Grad < 0 ist. Das heißt, $\Delta^n f$ ist die Nullfunktion. Somit gilt $(\Delta^n f)(0) = 0$.

Doch laut Aufgabe 6 **(b)** (angewandt auf $x = 0$) ist

$$(\Delta^n f)(0) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k}}_{=(-1)^n(-1)^k} \binom{n}{k} \underbrace{f(0+k)}_{=f(k)=\binom{ak+b}{c}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{c}.$$

Somit gilt

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{c} = (\Delta^n f)(0) = 0.$$

Division beider Seiten durch $(-1)^n$ ergibt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{c} = 0.$$

Aufgabe 6 **(c)** ist somit gelöst.

(d) Wir behaupten erst einmal:

> *Aussage 4:* Sei k eine positive ganze Zahl. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad k mit Leitkoeffizienten c. Dann ist Δf eine Polynomfunktion von Grad $k-1$ mit Leitkoeffizienten kc.

[*Beweis von Aussage 4:* Wir wissen, dass f eine Polynomfunktion von Grad k ist. Es gibt also Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass jedes $x \in \mathbb{A}$ die Gleichheit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$$

erfüllt. Betrachte diese Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Da die Polynomfunktion f genau den Grad k hat, ist der Leitkoeffizient von f also a_k. Aber wir wissen, dass c der Leitkoeffizient von f ist. Also muss $a_k = c$ sein. Ferner ist $c \neq 0$ (denn ein Leitkoeffizient ist nach Definition von 0 verschieden). Somit ist auch $kc \neq 0$ (denn $k \neq 0$).

Nun betrachten wir die Gleichheit (47) (die wir im obigen Beweis von Aussage 1 bereits gezeigt haben). Auf der rechten Seite steht eine Polynomfunktion von Grad $\leq k-1$ (in x). Der Koeffizient vor dem x^{k-1}-Term in dieser Polynomfunktion ist

$$\sum_{i=(k-1)+1}^{k} a_i \binom{i}{k-1} = \sum_{i=k}^{k} a_i \binom{i}{k-1} = \underbrace{a_k}_{=c} \underbrace{\binom{k}{k-1}}_{\substack{=\binom{k}{k-(k-1)} \\ \text{(nach (5))}}}$$
$$= c \underbrace{\binom{k}{k-(k-1)}}_{=\binom{k}{1}=k} = ck = kc.$$

Dieser Koeffizient ist von 0 verschieden (da $kc \neq 0$). Da in der Polynomfunktion auf der rechten Seite von (47) keine höheren Terme als x^{k-1} vorkommen, ist somit dieser Koeffizient kc der Leitkoeffizient, und der Grad der Polynomfunktion ist $k-1$. Wir haben also gezeigt, dass die Polynomfunktion auf der rechten Seite von (47) eine Polynomfunktion von Grad $k-1$ mit Leitkoeffizienten kc ist. Doch wegen (47) ist diese Polynomfunktion genau die Funktion Δf. Also ist Δf eine Polynomfunktion von Grad $k-1$ mit Leitkoeffizienten kc. Aussage 4 ist damit bewiesen.]

Durch iterative Anwendung von Aussage 4 folgt ziemlich schnell folgendes:

> *Aussage 5:* Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $k \geq n$ eine ganze Zahl. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad k mit Leitkoeffizienten c. Dann ist $\Delta^n f$ eine Polynomfunktion von Grad $k-n$ mit Leitkoeffizienten $k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\cdot c$.

[*Beweis von Aussage 5:* Induktion nach n. Im Induktionsschritt verwendet man Aussage 4.]

Aussage 5 beantwortet die in Aufgabe 6 **(d)** gestellte Frage im Fall von $k \geq n$. Im Fall von $k < n$ stellt sich diese Frage gar nicht, denn laut Aufgabe 6 **(a)** ist $\Delta^n f$ in diesem Fall eine Polynomfunktion von Grad $\leq \underbrace{k}_{<n} - n < 0$ und damit die Nullfunktion.

(e) Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir behaupten, dass

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{n} = (-a)^n \tag{49}$$

ist.

Zum Beweis nehmen wir o. B. d. A. an, dass $a \neq 0$ ist (der Fall $a = 0$ ist viel einfacher und sei dem Leser überlassen).

Sei $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ die Funktion, die jedes $k \in \mathbb{A}$ in $\binom{ak+b}{n} \in \mathbb{C}$ überführt. Dies ist eine Polynomfunktion von Grad n mit Leitkoeffizienten $\frac{a^n}{n!}$, denn für jedes $k \in \mathbb{A}$ ist

$$\begin{aligned} f(k) = \binom{ak+b}{n} &= \frac{(ak+b)(ak+b-1)(ak+b-2)\cdots(ak+b-n+1)}{n!} \\ &\qquad (\text{nach } (1)) \\ &= \frac{a^n}{n!} k^n + (\text{niedrigere Potenzen von } k) . \end{aligned}$$

Laut der Aussage 5 (in der obigen Lösung von Aufgabe 6 **(d)**) (angewandt auf n und $\frac{a^n}{n!}$ statt k und c) ist somit $\Delta^n f$ eine Polynomfunktion von Grad $n - n$ mit Leitkoeffizienten $n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1) \cdot \frac{a^n}{n!}$. Aufgrund von

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}_{=n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!} \cdot \frac{a^n}{n!} = n! \cdot \frac{a^n}{n!} = a^n$$

und $n - n = 0$ läßt sich dies folgendermaßen umschreiben: $\Delta^n f$ ist eine Polynomfunktion von Grad 0 mit Leitkoeffizienten a^n. Das heißt, $\Delta^n f$ ist konstant a^n. Somit gilt $(\Delta^n f)(0) = a^n$.

Doch laut Aufgabe 6 **(b)** (angewandt auf $x = 0$) ist

$$(\Delta^n f)(0) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k}}_{=(-1)^n(-1)^k} \binom{n}{k} \underbrace{f(0+k)}_{=f(k)=\binom{ak+b}{n}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{n}.$$

Somit gilt

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{n} = (\Delta^n f)(0) = a^n.$$

Division beider Seiten durch $(-1)^n$ ergibt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{ak+b}{n} = \frac{a^n}{(-1)^n} = \left(\frac{a}{-1}\right)^n = (-a)^n .$$

Damit ist (49) bewiesen. Aufgabe 6 **(e)** ist somit gelöst.

[*Bemerkung:* Zwei andere Beweise von (49) finden sich in [18f-hw3s, Exercise 5] (man setze darin $r = b$ und $s = -a$ ein, um (49) zu erhalten). Beide Beweise lassen sich mit ein wenig Arbeit auch zu Lösungen für Aufgabe 6 **(c)** umfunktionieren.]

(f) Es gibt sehr einfache Methoden, Aufgabe 6 **(f)** zu lösen: Beispielsweise kann man die Binet-Formel[14] einsetzen (und dann den Binomischen Satz anwenden). Alternativ kann man Aufgabe 6 **(f)** auch direkt durch vollständige Induktion nach n lösen.

Wir gehen aber anders vor. Die Summe in Aufgabe 6 **(f)** sieht ja wie ein Sonderfall der Summe in Aufgabe 6 **(b)** aus; dies ist ein guter Anlass, nach einer Anwendungsmöglichkeit für Aufgabe 6 **(b)** zu suchen. Und diese findet sich unschwer:

Wir setzen $\mathbb{A} = \mathbb{N}$. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ die Funktion, die jedes $k \in \mathbb{N}$ auf f_k abbildet. Wir betrachten die in Aufgabe 6 definierten n-ten Differenzen $\Delta^n f$ dieser Funktion f. Wir behaupten nun, dass

$$(\Delta^n f)(p) = f(p-n) \tag{50}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle ganzen Zahlen $p \geq n$ gilt.

[*Beweis von (50):* Wir beweisen (50) durch Induktion nach n:

Induktionsbasis: Für $n = 0$ gilt (50), weil $\Delta^0 f = f$ gilt.

Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, dass (50) für $n = m$ gilt. Wir müssen zeigen, dass (50) auch für $n = m+1$ gilt.

Wir haben angenommen, dass (50) für $n = m$ gilt. Das heißt, für alle ganzen Zahlen $p \geq m$ gilt

$$(\Delta^m f)(p) = f(p-m). \tag{51}$$

[14] Dies ist die Formel

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$ und $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618\ldots$ die beiden Nullstellen des Polynoms $x^2 - x - 1$ sind. Mithilfe dieser Formel (die sich leicht durch starke Induktion nach n beweisen läßt) lassen sich viele Rechnungen mit Fibonaccizahlen auf simple Rechnungen mit Potenzen zurückführen. (In dieser Hinsicht ist die Binet-Formel den berühmten Formeln $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ und $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ nicht unähnlich, die dieselbe Rolle in der Trigonometrie spielen.)

Nun ist aber $\Delta^{m+1}f = \Delta(\Delta^m f)$. Für jede ganze Zahl $p \geq m+1$ gilt also

$$\left(\Delta^{m+1}f\right)(p) = (\Delta(\Delta^m f))(p) = \underbrace{(\Delta^m f)(p+1)}_{\substack{=f(p+1-m) \\ \text{(nach (51),} \\ \text{angewandt auf } p+1 \text{ statt } p)}} - \underbrace{(\Delta^m f)(p)}_{\substack{=f(p-m) \\ \text{(nach (51))}}}$$

$$\text{(nach der Definition von } \Delta(\Delta^m f))$$

$$= \underbrace{f(p+1-m)}_{\substack{=f_{p+1-m} \\ \text{(nach Definition von } f)}} - \underbrace{f(p-m)}_{\substack{=f_{p-m} \\ \text{(nach Definition von } f)}}$$

$$= \underbrace{f_{p+1-m}}_{\substack{=f_{(p+1-m)-1}+f_{(p+1-m)-2} \\ \text{(nach der rekursiven} \\ \text{Definition der Fibonaccifolge)}}} - f_{p-m} = \underbrace{f_{(p+1-m)-1}}_{=f_{p-m}} + \underbrace{f_{(p+1-m)-2}}_{\substack{=f_{p-m-1} \\ =f_{p-(m+1)}}} - f_{p-m}$$

$$= f_{p-m} + f_{p-(m+1)} - f_{p-m} = f_{p-(m+1)}.$$

Mit anderen Worten: (50) gilt für $n = m+1$. Damit ist der Induktionsschritt vollendet, und (50) ist bewiesen.]

Seien nun $n, p \in \mathbb{N}$. Wenden wir Aufgabe 6 **(b)** auf $x = p$ an, so erhalten wir

$$(\Delta^n f)(p) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k}}_{=(-1)^n(-1)^k} \binom{n}{k} \underbrace{f(p+k)}_{\substack{=f_{p+k} \\ \text{(nach Definition von } f)}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n (-1)^k \binom{n}{k} \underbrace{f_{p+k}}_{=f_{k+p}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^n (-1)^k \binom{n}{k} f_{k+p} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{k+p}.$$

Gleichen wir dies mit

$$\begin{aligned} (\Delta^n f)(p) &= f(p-n) && \text{(wegen (50))} \\ &= f_{p-n} && \text{(nach der Definition von } f) \end{aligned}$$

ab, so erhalten wir

$$f_{p-n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{k+p}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $(-1)^n$, so erhalten wir

$$(-1)^n f_{p-n} = \underbrace{(-1)^n (-1)^n}_{=(-1)^{2n}=1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{k+p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{k+p}.$$

Damit ist Aufgabe 6 **(f)** gelöst. □

3.8. zu Aufgabe 8

Lösungsskizze zu Aufgabe 8. **(a)** Dies ist eine Übung im Vertauschen von Summationszeichen; an der entscheidenden Stelle muss man dann Aufgabe 7 anwenden.

Laut Annahme gilt

$$b_I = \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|} a_J = \sum_{K\subseteq I} (-1)^{|K|} a_K \tag{52}$$

für alle $I \subseteq [n]$. Sei nun $I \subseteq [n]$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|} \underbrace{b_J}_{\substack{=\sum\limits_{K\subseteq J}(-1)^{|K|}a_K \\ \text{(nach (52), angewandt} \\ \text{auf } J \text{ statt } I)}} &= \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|} \sum_{K\subseteq J} (-1)^{|K|} a_K \\ &= \sum_{J\subseteq I} \sum_{K\subseteq J} (-1)^{|J|} (-1)^{|K|} a_K. \end{aligned} \tag{53}$$

Jetzt wollen wir die beiden Summationszeichen "$\sum\limits_{J\subseteq I}$" und "$\sum\limits_{K\subseteq J}$" miteinander vertauschen. Ganz maschinell geht dies nicht, da das innere Summenzeichen von dem Index J des äußeren abhängt. Doch wir können uns überlegen, worüber wir hier eigentlich summieren: Das Summenzeichenpaar $\sum\limits_{J\subseteq I} \sum\limits_{K\subseteq J}$ summiert über alle Paare (J, K) mit $J \subseteq I$ und $K \subseteq J$, also über alle Paare (J, K) mit $K \subseteq J \subseteq I$. Daher können wir dieses Summenzeichenpaar durch das Summenzeichenpaar $\sum\limits_{K\subseteq I} \sum\limits_{\substack{J\subseteq I;\\ K\subseteq J}}$ ersetzen, denn letzteres summiert ebenfalls über die gleichen Paare (J, K). Dadurch läßt sich die Gleichheit (53) umschreiben als

$$\begin{aligned}\sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|} b_J &= \sum_{K\subseteq I} \sum_{\substack{J\subseteq I;\\ K\subseteq J}} (-1)^{|J|} (-1)^{|K|} a_K \\ &= \sum_{K\subseteq I} (-1)^{|K|} \left(\sum_{\substack{J\subseteq I;\\ K\subseteq J}} (-1)^{|J|} \right) a_K. \end{aligned} \tag{54}$$

Die innere Summe $\sum\limits_{\substack{J\subseteq I;\\ K\subseteq J}} (-1)^{|J|}$ auf der rechten Seite sollte uns aber bekannt vorkommen. Für jede Teilmenge K von I ist

$$\sum_{\substack{J\subseteq I;\\ K\subseteq J}} (-1)^{|J|} = (-1)^{|K|} [I = K]$$

laut Aufgabe 7 (wobei wir die Variablen S, T und I in Aufgabe 7 in I, K bzw. J umbenannt haben). Hierdurch vereinfacht sich (54) zu

$$\sum_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}b_J=\sum_{K\subseteq I}(-1)^{|K|}\underbrace{\left(\sum_{\substack{J\subseteq I;\\ K\subseteq J}}(-1)^{|J|}\right)}_{=(-1)^{|K|}[I=K]}a_K=\sum_{K\subseteq I}\underbrace{(-1)^{|K|}(-1)^{|K|}}_{=(-1)^{2|K|}=1}[I=K]\,a_K$$
$$=\sum_{K\subseteq I}[I=K]\,a_K. \tag{55}$$

In der Summe auf der rechten Seite verschwinden sämtliche Summanden bis auf den für $K=I$ (denn der Faktor $[I=K]$ verschwindet, wenn $K\neq I$ ist). Daher vereinfacht sich die Summe zu $\underbrace{[I=I]}_{=1}a_I=a_I$. Somit läßt sich (55) umschreiben als

$$\sum_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}b_J=a_I.$$

Das heißt, $a_I=\sum\limits_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}b_J$.

Wir haben also gezeigt, dass $a_I=\sum\limits_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}b_J$ für alle $I\subseteq[n]$ gilt. Somit ist Aufgabe 8 **(a)** gelöst.

(b) Ähnlich wie Aufgabe 8 **(a)** könnten wir dies durch eine Vertauschung von Summenzeichen und nachfolgende Anwendung von Aufgabe 6 (Teile **(c)** und **(e)**) beweisen. Diese Lösung wurde (in einer etwas vereinfachten Form) in [Grinbe15, Proposition 7.26] und in [17f-hw4s, Exercise 5] gegeben. Wir gehen aber einfacher vor und führen Aufgabe 8 **(b)** auf die bereits gelöste Aufgabe 8 **(a)** zurück:

Für jede Teilmenge I von $[n]$ setzen wir $a_I=a_{|I|}$ und $b_I=b_{|I|}$. (Dies ist wohldefiniert, denn wegen $|I|\in\{0,1,\ldots,n\}$ sind $a_{|I|}$ und $b_{|I|}$ wohldefiniert.)

Für jedes $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und jede m-elementige Teilmenge I von $[n]$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\sum_{J \subseteq I}}_{\substack{= \sum_{k=0}^{m} \sum_{J \subseteq I;\ |J|=k} \\ \text{(hier spalten wir die Summe} \\ \text{nach dem Wert von } |J| \text{ auf,} \\ \text{denn } |J| \in \{0,1,\ldots,m\} \text{ für alle } J \subseteq I)}} (-1)^{|J|} \underbrace{a_J}_{\substack{= a_{|J|} \\ \text{(laut Definition} \\ \text{von } a_J)}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{J \subseteq I; \\ |J|=k}} \underbrace{(-1)^{|J|} a_{|J|}}_{\substack{=(-1)^k a_k \\ \text{(denn } |J|=k)}} = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\sum_{\substack{J \subseteq I; \\ |J|=k}} (-1)^k a_k}_{=(-1)^k a_k \cdot (\text{Anzahl aller Teilmengen } J \text{ von } I \text{ mit } |J|=k)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k \cdot \underbrace{(\text{Anzahl aller Teilmengen } J \text{ von } I \text{ mit } |J| = k)}_{\substack{= \binom{m}{k} \\ \text{(nach der Kombinatorischen Interpretation der Binomialkoeffizienten,} \\ \text{denn } I \text{ ist eine } m\text{-elementige Menge)}}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k \cdot \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} a_k \\
&= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} a_i \qquad (56)
\end{aligned}$$

und analog

$$\sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} b_J = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} b_i. \qquad (57)$$

Nun haben wir aber angenommen, dass

$$b_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} a_i \qquad (58)$$

für alle $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt. Ist nun I eine Teilmenge von $[n]$, dann ist $|I| \in \{0, 1, \ldots, n\}$; wenn man also $m = |I|$ setzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
b_I = b_{|I|} = b_m & \qquad (\text{denn } |I| = m) \\
= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} a_i & \qquad (\text{nach (58)}) \\
= \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} a_J &
\end{aligned}$$

(laut (56), denn I ist eine m-elementige Teilmenge von $[n]$). Wir haben also gezeigt, dass $b_I = \sum\limits_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} a_J$ für alle $I \subseteq [n]$ gilt. Laut Aufgabe 8 **(a)** folgt hieraus, dass

$$a_I = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} b_J \tag{59}$$

für alle $I \subseteq [n]$ gilt.

Sei nun $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dann gibt es eine m-elementige Teilmenge I von $[n]$ (beispielsweise $I = [m]$). Wählen wir eine solche Teilmenge I, dann ist $|I| = m$ und somit $a_I = a_{|I|} = a_m$. Abgleich dieser Gleichung mit (59) ergibt

$$a_m = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|} b_J = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} b_i \qquad \text{(laut (57))} .$$

Wir haben damit gezeigt, dass $a_m = \sum\limits_{i=0}^{m} (-1)^i \dbinom{m}{i} b_i$ für alle $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt. Damit ist Aufgabe 8 **(b)** gelöst.

[*Bemerkung:* Das $(n+1)$-Tupel $(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ in Aufgabe 8 **(b)** wird die *Binomialtransformierte* des $(n+1)$-Tupels $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ genannt. Laut Aufgabe 8 **(b)** ist also jedes $(n+1)$-Tupel die Binomialtransformierte seiner Binomialtransformierten. Weitere Eigenschaften von Binomialtransformierten finden sich in [Grinbe15, Exercise 3.18]. Anwendungen von Aufgabe 8 **(b)** finden sich z. B. in [Spivey19, §2.4]; Anwendungen von (äquivalenten Varianten von) Aufgabe 8 **(a)** finden sich in [Stanle11, Kapitel 2].] □

3.9. zu Aufgabe 9

Zunächst lösen wir die einfachen zwei Teile von Aufgabe 9: die Teile **(a)** und **(c)**.

*Lösungsskizze zu Aufgabe 9 **(a)**.* **(a)** (Siehe [18s-hw2s, Exercise 6] für Details.) Wir verfahren ähnlich zu der Lösung von Aufgabe 3 **(c)**.

Sei U die Menge aller Permutationen von $[n]$. Für jedes $i \in [n-1]$ setzen wir

$$A_i = \{\sigma \in U \mid \sigma(i) = i + 1\} .$$

Somit haben wir $n-1$ Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ von U definiert. Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} &\{\text{Permutationen } \sigma \text{ von } [n] \text{, die } \sigma(i) \neq i+1 \text{ für alle } i \in [n-1] \text{ erfüllen}\} \\ &= U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \end{aligned}$$

gilt. Also ist

$$\begin{aligned} &(\text{Anzahl aller Permutationen } \sigma \text{ von } [n] \text{, die } \sigma(i) \neq i+1 \text{ für alle } i \in [n-1] \text{ erfüllen}) \\ &= |U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})| = \sum_{I \subseteq [n-1]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \end{aligned} \tag{60}$$

laut Aufgabe 3 **(b)** (angewandt auf $n-1$ statt n).

Wir wollen nun die Mächtigkeiten $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ auf der rechten Seite von (60) bestimmen. Dazu fixieren wir eine Teilmenge I von $[n-1]$. Dann ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ die Menge aller Permutationen σ von $[n]$, die $\sigma(i) = i+1$ für alle $i \in I$ erfüllen. Wie schon in der Lösung von Aufgabe 3 **(c)** sehen wir unschwer, dass es genau $(n-|I|)!$ solche Permutationen σ von $[n]$ gibt. Da $\bigcap_{i\in I} A_i$ die Menge all dieser Permutationen ist, haben wir also gezeigt, dass

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = (n-|I|)! \tag{61}$$

ist.

Vergessen wir nun, dass wir I fixiert haben. Für jede Teilmenge I von $[n-1]$ haben wir also (61) bewiesen. Damit wird (60) zu

$$\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller Permutationen } \sigma \text{ von } [n]\text{, die } \sigma(i) \neq i+1 \text{ für alle } i \in [n-1] \text{ erfüllen})\\
&= \sum_{I\subseteq[n-1]} (-1)^{|I|} \underbrace{\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}_{\substack{=(n-|I|)! \\ (\text{laut } (61))}} = \sum_{I\subseteq[n-1]} (-1)^{|I|} (n-|I|)!\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{I\subseteq[n-1];\\ |I|=k}} \underbrace{(-1)^{|I|}(n-|I|)!}_{\substack{=(-1)^k(n-k)! \\ (\text{denn } |I|=k)}}\\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir die Summe nach dem Wert von } |I| \text{ aufgespalten,}\\ \text{denn für jede Teilmenge } I \text{ von } [n-1] \text{ ist } |I| \in \{0,1,\ldots,n-1\}\end{array}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{\substack{I\subseteq[n-1];\\ |I|=k}} (-1)^k (n-k)!}_{=(-1)^k(n-k)!\cdot(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n-1] \text{ mit } |I|=k)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \cdot \underbrace{(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n-1] \text{ mit } |I|=k)}_{\substack{=(\text{Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } [n-1]) \\ =\binom{n-1}{k} \\ (\text{laut der kombinatorischen Interpretation der Binomialkoeffizienten})}}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \cdot \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!.
\end{aligned}$$

Damit ist Aufgabe 9 **(a)** gelöst.

[*Bemerkung:* Eine Verallgemeinerung von Aufgabe 9 **(a)** ist in [18f-mt1s, Exercise 5] zu finden.] □

*Lösungsskizze zu Aufgabe 9 **(c)**.* **(c)** Der Beweis ist größtenteils Rechnerei.

Laut Aufgabe 3 **(c)** ist $D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$ (denn D_n ist genau die Anzahl aller Derangements von $[n]$). Diese Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$; also können wir sie auf $n+1$ statt n anwenden, und erhalten

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{(n+1)!}{k!}. \tag{62}$$

Laut der "Fakultätenformel" (siehe Abschnitt 1) (angewendet auf $n-1$ statt n) gilt

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!}$$

für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Somit gilt

$$n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{=\frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!}} (n-k)!$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n \cdot (n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{k!\,((n-1)-k)!} (n-k) \cdot \left(\underbrace{n-k-1}_{=(n-1)-k} \right)!$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{denn nach der Rekursion für Fakultäten gilt } n \cdot (n-1)! = n! \\ \text{und } (n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1)! \text{ für jedes } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \underbrace{\frac{n!}{k!\,((n-1)-k)!} (n-k) \cdot ((n-1)-k)!}_{=\frac{n! \cdot (n-k)}{k!}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n! \cdot (n-k)}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n! \cdot (n-k)}{k!} - \underbrace{(-1)^n \frac{n! \cdot (n-n)}{n!}}_{\substack{=0 \\ (\text{da } n-n=0)}}$$

$$\left(\text{denn } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n! \cdot (n-k)}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n! \cdot (n-k)}{k!} + (-1)^n \frac{n! \cdot (n-n)}{n!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\frac{n! \cdot (n-k)}{k!}}_{=n \cdot \frac{n!}{k!} - k \cdot \frac{n!}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(n \cdot \frac{n!}{k!} - k \cdot \frac{n!}{k!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n \cdot \frac{n!}{k!} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \cdot \frac{n!}{k!}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\cdot\frac{n!}{k!} &= \underbrace{(-1)^0\,0\cdot\frac{n!}{0!}}_{=0}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\cdot\frac{n!}{k!}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\cdot \underbrace{\frac{n!}{k!}}_{\substack{=\frac{n!}{k\cdot(k-1)!}\\ \text{(denn nach der Rekursion für}\\ \text{Fakultäten ist } k!=k\cdot(k-1)!)}} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\cdot\frac{n!}{k\cdot(k-1)!}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!}\\
&\qquad\text{(hier haben wir in der Summe } k+1 \text{ für } k \text{ substituiert)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{(-1)^{k+1}}_{=-(-1)^k}\frac{n!}{k!}-(-1)^{n+1}\underbrace{\frac{n!}{n!}}_{=1} = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}-(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

"vereinfacht" sich dies zu

$$\begin{aligned}
n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n\cdot\frac{n!}{k!}}_{=n\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\cdot\frac{n!}{k!}}_{=-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}-(-1)^{n+1}}\\
&= n\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}-\left(-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}-(-1)^{n+1}\right)\\
&= (n+1)\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}+(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{(n+1)!}{k!} \qquad \text{(nach (62))}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underbrace{\frac{(n+1)!}{k!}}_{\substack{=\frac{(n+1)\cdot n!}{k!}\\ \text{(denn die Rekursion für}\\ \text{Fakultäten ergibt } (n+1)!=(n+1)\cdot n!)}} + (-1)^{n+1}\underbrace{\frac{(n+1)!}{(n+1)!}}_{=1}\\
&= (n+1)\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}+(-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$D_{n+1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!.$$

Aufgabe 9 **(c)** ist damit gelöst. □

Es bleibt noch, Teil **(b)** von Aufgabe 9 zu lösen. Man ist vielleicht geneigt, dabei die gleiche Strategie wie in Teil **(a)** zu verwenden. Dies ist tatsächlich möglich, denn das Analogon von (61) gilt hier genauso; allerdings ist dieses Analogon deutlich schwieriger zu beweisen (und der Beweis noch schwieriger aufzuschreiben). Auch bleibt nach dieser Lösung die Frage offen, warum genau die beiden Aufgabenteile die gleiche Antwort haben und ob es eine Bijektion zwischen den Permutationen in Teil **(a)** und den Permutationen in Teil **(b)** gibt, die die gleichen Antworten erklärt.

Eine bessere Lösung von Aufgabe 9 **(b)** kann mithilfe der sogenannten *fundamentalen Bijektion* von Foata ([Stanle11, §1.3]) gegeben werden. Genauer gesagt werden wir eine Variante dieser Bijektion einführen, bei der Maxima durch Minima ersetzt wurden. Wir werden diese Variante Φ nennen (siehe Satz 3.22 weiter unten).

Zunächst nehmen wir Permutationen allgemein ein wenig unter die Lupe. Wer die Zykelzerlegung (englisch "cycle decomposition") von Permutationen bereits gesehen hat (beispielsweise in einer guten Vorlesung über Algebra, wie [Loeh18, §1.3.2] oder [Soerge20, §6.1.5.11] oder [Stoll18, Satz 1.4], oder sehr detailliert in [Stix16, §4.2], oder auch separat wie in [Sete10] oder [Huette17, §1]), wird sie in den nachfolgenden Betrachtungen wiedererkennen (auch wenn wir hier aus einem kombinatorischeren Blickwinkel heraus und eher "zu Fuß" arbeiten).

Proposition 3.7. Sei X eine endliche Menge. Sei σ eine Permutation von X. Sei $x \in X$. Dann ist die Folge $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \sigma^3(x), \ldots$ (also die Folge der Elemente, die man aus x durch wiederholte Anwendung von σ erhält) periodisch. Genauer: Es gibt genau eine positive ganze Zahl p mit der Eigenschaft, dass die ersten p Folgenglieder $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)$ paarweise verschieden sind, während alle späteren Folgenglieder Wiederholungen von diesen p Folgengliedern sind, und insbesondere $\sigma^p(x) = x$ gilt.

Beispiel 3.8. Sei $X = [7]$, und sei σ die Permutation von X, die $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ auf $2, 6, 3, 7, 5, 4, 1$ (in dieser Reihenfolge) abbildet. Sei $x = 2$. Die Folge $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \sigma^3(x), \ldots$ ist dann die Folge $2, 6, 4, 7, 1, 2, 6, 4, 7, 1, 2, 6, 4, 7, 1, \ldots$; diese wiederholt sich nach 5 Gliedern. Die Zahl p in Proposition 3.7 ist in diesem Fall also 5.

Beweisskizze zu Proposition 3.7. Nach dem Schubfachprinzip müssen unter den $|X| + 1$ Elementen $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{|X|}(x)$ mindestens zwei gleiche sein.

Das heißt, es gibt $i, j \in \{0, 1, \ldots, |X|\}$ mit $i < j$ und $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$. Man wähle solche i und j, für die j minimal ist. Aus $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$ folgt dann (durch Anwendung von σ^{-i}), dass $x = \sigma^{j-i}(x)$ ist. Damit ist recht klar, dass alle Folgenglieder der Folge $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \sigma^3(x), \ldots$ Wiederholungen der ersten $j - i$ Folgenglieder sind. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass diese ersten $j - i$ Folgenglieder paarweise verschieden sind. Dazu argumentiert man, dass die Minimalität von j sonst verletzt wäre (warum?). □

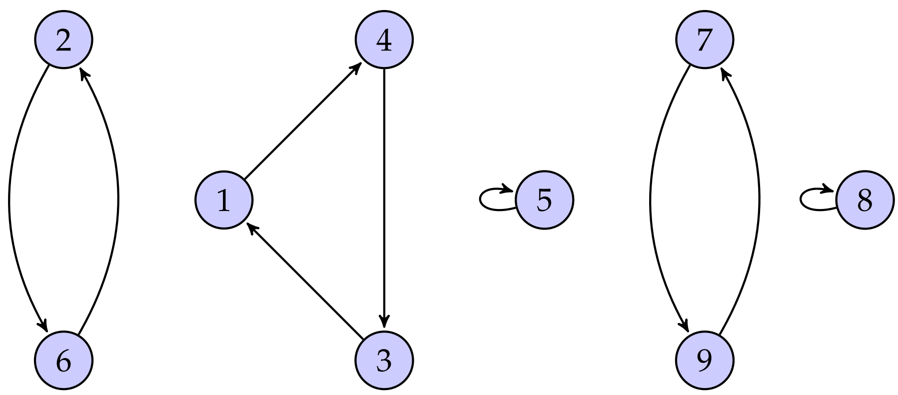
Definition 3.9. Sei X eine endliche Menge. Sei σ eine Permutation von X. Sei $x \in X$. Sei p die positive ganze Zahl, deren Existenz in Proposition 3.7 gezeigt wurde. Dann nennen wir p die *σ-Ordnung* von x, und wir nennen das p-Tupel $(x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x))$ die *σ-Spur* von x.

Beispiel 3.10. In Beispiel 3.8 ist also $(2, 6, 4, 7, 1)$ die σ-Spur von x.

Proposition 3.11. Sei X eine endliche Menge. Sei σ eine Permutation von X. Seien $x, y \in X$. Dann gilt folgendes:

- **Entweder** bestehen die σ-Spur von x und die σ-Spur von y aus den gleichen Elementen (möglicherweise in anderer Reihenfolge),
- **oder** die σ-Spur von x und die σ-Spur von y haben kein einziges Element gemeinsam.

Beispiel 3.12. Sei $X = [9]$, und sei σ die Permutation von X, die $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ auf $4, 6, 1, 3, 5, 2, 9, 8, 7$ (in dieser Reihenfolge) abbildet. Der schnellste Weg, alle σ-Spuren zu finden, ist wohl folgender: Wir zeichnen einen gerichteten Graphen, dessen Knoten die Elemente $1, 2, \ldots, 9$ von X sind, und der eine Kante von i nach $\sigma(i)$ für jedes $i \in X$ hat. (Es hat also n Kanten; darunter können Schleifen vorkommen.) Für unsere Permutation σ sieht dieser Graph folgendermassen aus:



.

Jeder Knoten i dieses Graphen hat genau eine ausgehende Kante (nämlich die Kante $i \to \sigma(i)$) und genau eine einkommende Kante (nämlich die Kante

$\sigma^{-1}(i) \to i$). Hieraus folgt unschwer, dass jeder Knoten dieses Graphen auf genau einem Zyklus liegt (nämlich dem, den man erhält, wenn man von diesem Knoten aus losgeht und immer den Pfeilen folgt), und dass diese Zyklen keinen Knoten und keine Kante gemeinsam haben. Grob gesprochen sieht der Graph also immer aus wie im obigen Beispiel (bis auf Anzahl der Zyklen, ihre Längen, und welcher Knoten auf welchem Zyklus liegt).

Wie findet man nun die σ-Spur eines Elementes $i \in X$ anhand von diesem Graphen? Man geht im Knoten i los und folgt den Pfeilen, bis man zum Knoten i zurückgekommen ist. Die bei diesem Rundgang verlassenen Knoten (angefangen mit i selber) schreibt man nun in eine Liste (in der Reihenfolge, in der sie verlassen wurden); diese Liste ist die σ-Spur von i. Im obigen Beispiel sind die σ-Spuren die folgenden:

$$\begin{aligned}
(\sigma\text{-Spur von } 1) &= (1,4,3)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 2) &= (2,6)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 3) &= (3,1,4)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 4) &= (4,3,1)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 5) &= (5)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 6) &= (6,2)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 7) &= (7,9)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 8) &= (8)\,;\\
(\sigma\text{-Spur von } 9) &= (9,7)\,.
\end{aligned}$$

Beweisskizze zu Proposition 3.11. Dem Leser überlassen (falls nötig, nehme man Beispiel 3.12 zur Inspiration). □

Nun beschränken wir uns auf Permutationen der Mengen $[n]$ für $n \in \mathbb{N}$ (statt von allgemeinen endlichen Mengen).

Definition 3.13. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die *Werteliste* einer Permutation σ von $[n]$ ist definiert als das n-Tupel mit Einträgen $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ (in dieser Reihenfolge). Wir werden (einer traditionellen Konvention folgend) dieses n-Tupel durch eckige statt runde Klammern abschließen – d.h. wir bezeichnen es mit $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]$ statt mit $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$.

(In der englischsprachigen Literatur wird für die Werteliste einer Permutation der Begriff "one-line notation" verwendet.)

Es ist klar, dass die Werteliste einer Permutation von $[n]$ immer ein n-Tupel ist, das jede der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ genau einmal enthält. Umgekehrt gibt es für jedes solche n-Tupel genau eine Permutation von $[n]$, deren Werteliste dieses n-Tupel ist.

Eine andere Methode, eine Permutation von $[n]$ als eine Art Zahlenliste zu kodieren, ist die *Zykelliste*, die wir bald einführen werden. Zunächst definieren wir den Datentyp, den diese Zykelliste haben wird:

Definition 3.14. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Eine *n-Blockliste* ist definiert als ein n-Tupel von ganzen Zahlen, in dem je zwei aufeinanderfolgende Einträge entweder durch ein Komma oder durch einen vertikalen Balken ($\mid$) voneinander getrennt sind. Beispielsweise sind $(3, 1 \mid 4 \mid 1, 2, 1)$ und $(5 \mid 1 \mid 2, 3, 4, 1)$ zwei 6-Blocklisten. (Diesmal benutzen wir runde Klammern.)

(b) Die Balken zerteilen eine n-Blockliste in Segmente, die wir *Blöcke* nennen; zum Beispiel hat die 6-Blockliste $(3, 1 \mid 4 \mid 1, 2, 1)$ genau drei Blöcke, nämlich $(3, 1)$, (4) und $(1, 2, 1)$.

(c) Eine n-Blockliste heißt *normal*, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. Ihre n Einträge sind genau die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ (in irgendeiner Reihenfolge).
2. Jeder Block beginnt mit seinem kleinsten Element.
3. Das kleinste (und damit erste) Element eines jeden Blocks ist größer als das kleinste Element des nächsten Blocks.

Beispielsweise sind $(2, 4, 5 \mid 1, 6, 3)$ und $(2, 6, 3, 5 \mid 1, 4)$ und $(1, 4, 2, 6, 5, 3)$ und $(6 \mid 5 \mid 4 \mid 3 \mid 2 \mid 1)$ vier normale 6-Blocklisten. Die 6-Blockliste $(6, 2 \mid 4 \mid 3, 5 \mid 1)$ ist nicht normal (da Eigenschaft 2 verletzt ist), und die 6-Blockliste $(1, 5, 4, 2 \mid 3, 6)$ auch nicht (da Eigenschaft 3 verletzt ist).

Nun definieren wir die *Zykelliste* einer Permutation σ von $[n]$:

Definition 3.15. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei σ eine Permutation von $[n]$. Die *Zykelliste* von σ ist die normale n-Blockliste $C(\sigma)$, die durch folgenden Algorithmus konstruiert wird:

1. Wir setzen $S = [n]$.
2. Wir wählen das kleinste Element x von S (also 1).
3. Der letzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x.
4. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. (Damit wird S kleiner.)

2′. Wenn S nichtleer ist, wählen wir wieder das kleinste Element x von S (dies ist nicht mehr 1).

3′. Der vorletzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x.

4′. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. (Damit wird S noch kleiner.)

2″. Wenn S nichtleer ist, wählen wir wieder das kleinste Element x von S.

3″. Der vorvorletzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x.

4″. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. (Damit wird S noch kleiner.)

5. Man fährt (wie in Schritten 2″, 3″ und 4″) so lange fort, bis S leer ist.

Wir schöpfen also die Menge $[n]$ aus durch σ-Spuren, und schreiben diese Spuren jeweils als Blöcke in unsere Blockliste $C(\sigma)$.

Beispiel 3.16.

(a) Sei $n = 9$, und sei σ die Permutation von $[n]$, die in Beispiel 3.12 definiert wurde. Die Werteliste von σ ist $[4, 6, 1, 3, 5, 2, 9, 8, 7]$. Wir wollen $C(\sigma)$ berechnen. Dafür folgen wir dem Algorithmus in Definition 3.15:

1. Zunächst setzen wir $S = [n]$. Also ist jetzt $S = [n] = [9] = \{1, 2, \ldots, 9\}$.
2. Wir wählen das kleinste Element x von S. Also ist jetzt $x = 1$.
3. Der letzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x, also das Tupel $(1, 4, 3)$.
4. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. Jetzt ist also $S = \{2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2′. Da S nichtleer ist, wählen wir wieder das kleinste Element x von S. Also ist jetzt $x = 2$.

3′. Der vorletzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x, also das Tupel $(2, 6)$.

4′. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. Jetzt ist also $S = \{5, 7, 8, 9\}$.

2″. Da S nichtleer ist, wählen wir wieder das kleinste Element x von S. Also ist jetzt $x = 5$.

3″. Der vorvorletzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x, also das Tupel (5).

4''. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. Jetzt ist also $S = \{7, 8, 9\}$.

2'''. Da S nichtleer ist, wählen wir wieder das kleinste Element x von S. Also ist jetzt $x = 7$.

3'''. Der vorvorvorletzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x, also das Tupel $(7, 9)$.

4'''. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. Jetzt ist also $S = \{8\}$.

2''''. Da S nichtleer ist, wählen wir wieder das kleinste Element x von S. Also ist jetzt $x = 8$.

3''''. Der vorvorvorvorletzte Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur von x, also das Tupel (8).

4''''. Jetzt entfernen wir die Elemente dieses Blocks aus S. Jetzt ist also $S = \varnothing$.

5. Jetzt ist S leer, und wir sind damit fertig.

Somit ist

$$C(\sigma) = (8 \mid 7, 9 \mid 5 \mid 2, 6 \mid 1, 4, 3).$$

(b) Sei $n = 7$, und sei σ die Permutation von $[n]$, die in Beispiel 3.8 definiert wurde. Die Werteliste von σ ist $[2, 6, 3, 7, 5, 4, 1]$. Die Zykelliste von σ ist

$$C(\sigma) = (5 \mid 3 \mid 1, 2, 6, 4, 7).$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei id_n die Permutation $\mathrm{id} : [n] \to [n]$ von $[n]$. Die Werteliste von id_n ist $[1, 2, \ldots, n]$. Die Zykelliste von id_n ist

$$C(\mathrm{id}_n) = (n \mid n-1 \mid \cdots \mid 1).$$

(d) Sei n eine positive ganze Zahl, und sei ζ die zyklische Permutation von $[n]$, die $1, 2, \ldots, n-1, n$ auf $2, 3, \ldots, n, 1$ (in dieser Reihenfolge) abbildet. Die Werteliste von ζ ist $[2, 3, \ldots, n, 1]$. Die Zykelliste von ζ ist

$$C(\zeta) = (1, 2, \ldots, n).$$

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $k \in [n-1]$. Sei σ die Permutation von $[n]$, die die zwei Zahlen k und $k+1$ vertauscht und alle anderen Elemente von $[n]$ unverändert läßt. Die Werteliste von σ ist $[1, 2, \ldots, k-1, k+1, k, k+2, \ldots, n]$ (also die Liste $[1, 2, \ldots, n]$ nach Vertauschung der Einträge k und $k+1$). Die Zykelliste von σ ist

$$(n \mid n-1 \mid \cdots \mid k+2 \mid k, k+1 \mid k-1 \mid k-2 \mid \cdots \mid 1).$$

Folgendes wurde in Definition 3.15 ohne Beweis impliziert:

Proposition 3.17. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei σ eine Permutation von $[n]$. Dann ist $C(\sigma)$ tatsächlich eine normale n-Blockliste.

Beweisskizze. Folgt unschwer aus Proposition 3.7 und Proposition 3.11. □

Es ist klar, dass jede Permutation σ von $[n]$ eindeutig durch ihre Werteliste bestimmt ist. Das gleiche gilt für die Zykelliste:

Proposition 3.18. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist jede Permutation σ von $[n]$ eindeutig durch ihre Zykelliste $C(\sigma)$ bestimmt.

Beweisskizze. Sei σ eine Permutation von $[n]$. Sei $i \in [n]$. Dann muss die Zahl i irgendwo in der Zykelliste $C(\sigma)$ vorkommen (denn $C(\sigma)$ ist eine normale n-Blockliste). Laut Konstruktion von $C(\sigma)$ ist dann klar, wo $\sigma(i)$ in $C(\sigma)$ vorkommt:

- Steht die Zahl i in $C(\sigma)$ am Ende eines Blocks, dann steht $\sigma(i)$ am Anfang dieses Blocks.
- Steht die Zahl i in $C(\sigma)$ nicht am Ende eines Blocks, dann steht $\sigma(i)$ gleich rechts von i in $C(\sigma)$.

Somit können wir $\sigma(i)$ aus der Zykelliste $C(\sigma)$ ablesen. Daher können wir die gesamte Permutation σ aus ihrer Zykelliste $C(\sigma)$ rekonstruieren (denn wenn wir die Werte $\sigma(i)$ für alle $i \in [n]$ kennen, dann kennen wir ganz σ). Proposition 3.18 ist damit bewiesen. □

Proposition 3.19. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei D eine normale n-Blockliste. Dann gibt es genau eine Permutation σ von $[n]$, deren Zykelliste D ist.

Beweisskizze. Im Beweis von Proposition 3.18 haben wir gesehen, wie wir eine Permutation σ aus ihrer Zykelliste $C(\sigma)$ ablesen können. Wenden wir die gleiche Methode auf D statt $C(\sigma)$ an, dann finden wir eine Permutation σ von $[n]$, deren Zykelliste D ist. □

Wir können jetzt die fundamentale Bijektion definieren:

Definition 3.20. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei σ eine Permutation von $[n]$. Wenn wir in der Zykelliste $C(\sigma)$ von σ alle Balken durch Kommas ersetzen, erhalten wir ein n-Tupel $C'(\sigma)$ von ganzen Zahlen, welches jede der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ genau einmal enthält. Wir ersetzen die runden Klammern um dieses n-Tupel $C'(\sigma)$ durch eckige Klammern, und definieren $\widehat{\sigma}$ als diejenige Permutation von $[n]$, deren Werteliste dieses n-Tupel $C'(\sigma)$ ist.

Beispiel 3.21. Sei $n = 9$, und sei σ die Permutation von $[n]$, die in Beispiel 3.12 definiert wurde. Laut Beispiel 3.16 ist $C(\sigma) = (8 \mid 7, 9 \mid 5 \mid 2, 6 \mid 1, 4, 3)$. Das n-Tupel $C'(\sigma)$ in Definition 3.20 ist also

$$C'(\sigma) = [8, 7, 9, 5, 2, 6, 1, 4, 3].$$

Also ist $\widehat{\sigma}$ die Permutation von $[9]$, deren Werteliste $[8, 7, 9, 5, 2, 6, 1, 4, 3]$ ist.

Satz 3.22. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\Phi : \{\text{Permutationen von } [n]\} \to \{\text{Permutationen von } [n]\}, \quad \sigma \mapsto \widehat{\sigma}$$

(also die Abbildung, die jede Permutation σ von $[n]$ in $\widehat{\sigma}$ überführt) ist bijektiv.

Beweisskizze. Wir zeigen erst einmal, dass Φ injektiv ist. Dazu müssen wir erklären, wie wir eine Permutation σ aus ihrem Bild $\Phi(\sigma) = \widehat{\sigma}$ rekonstruieren können.

Dazu führen wir folgende Notation ein: Ist $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ eine Liste von n verschiedenen ganzen Zahlen, dann bezeichnen wir einen Eintrag u_i dieser Liste als *Negativrekord* von u, wenn er kleiner ist als alle vorherigen Einträge (d.h., wenn er $u_i < u_j$ für alle $j < i$ erfüllt). Beispielsweise hat die Liste $(5, 3, 4, 2, 6, 7, 1, 8)$ genau 4 Negativrekorde, nämlich die Einträge 5, 3, 2 und 1. (Der erste Eintrag einer Liste ist immer ein Negativrekord, denn für ihn gibt es keine vorherigen Einträge, und somit ist er trivialerweise kleiner als sie alle.) Wir verwenden den Begriff von Negativrekorden auch für n-Blocklisten; dabei betrachten wir sie wie ganz gewöhnliche Listen (d.h., wir interessieren uns nicht dafür, ob zwischen zwei Einträgen ein Komma oder ein Balken steht).

Nun sieht man folgendes sehr einfach: Wenn eine n-Blockliste normal ist, dann sind ihre Negativrekorde genau diejenigen Einträge, die am Anfang ihrer Blöcke stehen.[15] Die Balken in einer normalen n-Blockliste stehen also genau vor ihren Negativrekorden (abgesehen vom ersten Eintrag); an allen anderen Stellen stehen Kommas. Somit sind in einer normalen n-Blockliste die Positionen der Balken eindeutig bestimmt durch die Einträge. Das heißt, wenn man in einer normalen n-Blockliste alle Balken durch Kommas ersetzt, dann verliert man keine Information (d.h., man kann die Positionen der Balken wieder rekonstruieren).

Was bedeutet dies für uns? Sei σ eine Permutation von $[n]$. Dann ist $C(\sigma)$ eine normale n-Blockliste, und wir erhalten $C'(\sigma)$ aus $C(\sigma)$ indem wir alle Balken durch Kommas ersetzen. Laut dem vorherigen Absatz verlieren wir bei dieser Ersetzung keine Information – d.h., wir können $C(\sigma)$ aus $C'(\sigma)$ rekonstruieren. Ferner können wir $C'(\sigma)$ aus $\widehat{\sigma}$ rekonstruieren (denn $\widehat{\sigma}$ ist definiert

[15] Denn das erste Element eines jeden Blocks ist kleiner als die ersten Elemente aller vorherigen Blöcke, und letztere sind wiederum kleiner als alle übrigen Elemente dieser Blöcke.

als die Permutation von $[n]$, deren Werteliste $C'(\sigma)$ ist), und schließlich können wir σ aus $C(\sigma)$ rekonstruieren (laut Proposition 3.18). Insgesamt können wir also σ aus $\widehat{\sigma}$ rekonstruieren (indem wir zuerst $C'(\sigma)$, dann $C(\sigma)$ und schließlich σ rekonstruieren). Damit ist σ durch $\widehat{\sigma}$ eindeutig bestimmt; das heißt, die Abbildung Φ ist injektiv (denn diese sendet ja jedes σ auf $\widehat{\sigma}$).

Warum ist Φ nun bijektiv? Der einfachste Weg, dies einzusehen, ist folgender: Bekanntlich ist jede injektive Abbildung zwischen zwei gleichmächtigen endlichen Mengen automatisch bijektiv[16]. Hieraus folgt, dass Φ bijektiv ist, denn Φ ist ja eine injektive Abbildung zwischen zwei gleichmächtigen endlichen Mengen. Satz 3.22 ist also bewiesen.

[Alternativ können wir die Bijektivität von Φ auch dadurch beweisen, dass wir von Hand eine Umkehrabbildung zu Φ konstruieren. Dies geht folgendermaßen: Sei τ eine Permutation von $[n]$. Wir modifizieren die Werteliste von τ, indem wir jedes Komma, das direkt vor einem Negativrekord steht, durch einen Balken ersetzen, und die eckigen Klammern durch runde Klammern ersetzen. Das Resultat ist eine normale n-Blockliste[17]; nennen wir es $D(\tau)$. Laut Proposition 3.19 gibt es genau eine Permutation σ von $[n]$, deren Zykelliste $D(\tau)$ ist. Unsere Umkehrabbildung soll nun τ auf diese Permutation σ senden. An dieser Definition sollte nichts verwundern; dies ist einfach eine Wiederholung der obigen Methode, wie wir σ aus $\widehat{\sigma}$ rekonstruiert haben, bloß ohne mit σ anzufangen.] $\square$

Beispiel 3.23. Zum obigen Beweis von Satz 3.22 ist ein Beispiel angebracht. Sei $n = 9$. Sei τ die Permutation von $[n]$ mit Werteliste $[5,3,4,2,6,9,7,1,8]$. Wir suchen eine Permutation σ von $[n]$, deren Bild $\Phi(\sigma) = \widehat{\sigma}$ gleich τ ist.

Wir fangen damit an, dass wir $C'(\sigma)$ rekonstruieren; nämlich ist $C'(\sigma)$ die Werteliste von τ. Das heißt,

$$C'(\sigma) = [5,3,4,2,6,9,7,1,8].$$

Um $C(\sigma)$ zu erhalten, fangen wir mit $C'(\sigma)$ an und ersetzen jedes Komma, das direkt vor einem Negativrekord steht, durch einen Balken (denn die Balken in $C(\sigma)$ stehen genau vor den Negativrekorden). Wir erhalten also

$$C(\sigma) = (5 \mid 3,4 \mid 2,6,9,7 \mid 1,8)$$

(denn die Negativrekorde von $C'(\sigma)$ sind $5,3,2,1$). Nun ist σ die Permutation mit Zykelliste $C(\sigma)$. Man sieht daher leicht an, dass σ die Werteliste $[8,6,4,3,5,9,2,1,7]$ hat.

Schließlich können wir Aufgabe 9 **(b)** lösen:

*Lösungsskizze zu Aufgabe 9 **(b)**.* **(b)** Eine Permutation σ von $[n]$ heiße

[16] Dies ist eine Form des Schubfachprinzips.

[17] Dass sie normal ist, kann man sich leicht überlegen (dies liegt daran, dass wir die Balken genau vor die Negativrekorde gesetzt haben).

- *grün*, wenn sie $\sigma(i) \neq i+1$ für alle $i \in [n-1]$ erfüllt;
- *rot*, wenn sie $\sigma(i)+1 \neq \sigma(i+1)$ für alle $i \in [n-1]$ erfüllt.

Wir müssen also zeigen, dass die Anzahl aller roten Permutationen von $[n]$ gleich $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dbinom{n-1}{k} (n-k)!$ ist. Wir haben aber in Aufgabe 9 **(a)** bereits gezeigt, dass die Anzahl aller grünen Permutationen von $[n]$ gleich derselben Summe $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dbinom{n-1}{k} (n-k)!$ ist. Also bleibt es nur noch zu zeigen, dass die Anzahl aller roten Permutationen von $[n]$ gleich der der grünen ist. Dafür wird es ausreichen, eine Bijektion zwischen den grünen und den roten Permutationen zu finden.

Betrachten wir die Abbildung Φ aus Satz 3.22. Laut Satz 3.22 ist diese eine Bijektion. Wir behaupten nun folgendes:

> *Behauptung 1:* Sei σ eine Permutation von $[n]$. Genau dann ist σ grün, wenn $\Phi(\sigma)$ rot ist.

[*Beweis von Behauptung 1:* Wir beweisen erst einmal die Implikation

$$(\Phi(\sigma) \text{ ist rot}) \implies (\sigma \text{ ist grün}).$$

Dazu nehmen wir an, dass $\Phi(\sigma)$ rot ist. Wir wollen zeigen, dass σ grün ist.

Nehmen wir das Gegenteil an. Das heißt, σ ist nicht grün. Mit anderen Worten: Nicht für alle $i \in [n-1]$ gilt $\sigma(i) \neq i+1$. Das heißt, es gibt ein $k \in [n-1]$ mit $\sigma(k) = k+1$. Betrachten wir dieses k.

Wir betrachten die Zykelliste $C(\sigma)$ von σ, sowie das in der Definition 3.20 definierte n-Tupel $C'(\sigma)$ und die dort ebenfalls definierte Permutation $\widehat{\sigma}$. Laut Definition von Φ ist dann $\Phi(\sigma) = \widehat{\sigma}$. Ferner ist $C'(\sigma)$ die Werteliste von $\widehat{\sigma}$ (denn so wurde $\widehat{\sigma}$ definiert).

Die n-Blockliste $C(\sigma)$ ist normal; sie enthält also genau einmal die Zahl k. Sei B der Block von $C(\sigma)$, der k enthält. Da die n-Blockliste $C(\sigma)$ normal ist, beginnt jeder Block von $C(\sigma)$ mit seinem kleinsten Element; insbesondere also auch B. Das erste Element von B ist also das kleinste Element von B. Da der Block B die Zahl k enthält, kann $k+1$ nicht das kleinste Element von B sein (denn k ist kleiner); somit kann $k+1$ nicht das erste Element von B sein (denn das erste Element von B ist das kleinste Element von B).

Nun erinnern wir uns wieder daran, wie $C(\sigma)$ konstruiert wurde. Jeder Block von $C(\sigma)$ ist die σ-Spur eines Elementes von $[n]$. Insbesondere ist also auch B eine solche σ-Spur. Eine σ-Spur S ist stets unter der Wirkung von σ abgeschlossen, im folgenden Sinne: Ist eine Zahl i in einer σ-Spur S enthalten, dann ist auch ihr Bild $\sigma(i)$ in S enthalten, und zwar folgt $\sigma(i)$ entweder direkt auf i oder ist das erste Element von S. Wenden wir dies auf $S = B$ und $i = k$ an, so erhalten wir folgendes: Das Bild $\sigma(k)$ ist in B enthalten, und zwar folgt $\sigma(k)$

entweder direkt auf k oder ist das erste Element von B. Wegen $\sigma(k) = k+1$ läßt sich dies folgendermaßen umschreiben: Die Zahl $k+1$ ist in B enthalten, und zwar folgt $k+1$ entweder direkt auf k oder ist das erste Element von B. Da $k+1$ nicht das erste Element von B sein kann, folgt also $k+1$ direkt auf k in B. Also folgt $k+1$ direkt auf k in $C(\sigma)$ (denn B ist ein Block von $C(\sigma)$). Daher folgt $k+1$ auch direkt auf k in $C'(\sigma)$ (denn $C'(\sigma)$ unterscheidet sich von $C(\sigma)$ nur dadurch, dass Balken durch Kommas ersetzt wurden). Mit anderen Worten: $k+1$ folgt direkt auf k in der Werteliste von $\widehat{\sigma}$ (denn $C'(\sigma)$ ist die Werteliste von $\widehat{\sigma}$). Mit anderen Worten: Es gibt ein $j \in [n-1]$ mit $\widehat{\sigma}(j) = k$ und $\widehat{\sigma}(j+1) = k+1$. Betrachte dieses j. Es gilt also $\underbrace{\widehat{\sigma}(j)}_{=k} + 1 = k+1 = \widehat{\sigma}(j+1)$.

Doch wir erinnern uns, dass $\Phi(\sigma)$ rot ist. Mit anderen Worten: $\widehat{\sigma}$ ist rot (denn $\Phi(\sigma) = \widehat{\sigma}$). Das heißt, es gilt $\widehat{\sigma}(i) + 1 \neq \widehat{\sigma}(i+1)$ für alle $i \in [n-1]$. Dies steht im Widerspruch zu $\widehat{\sigma}(j) + 1 = \widehat{\sigma}(j+1)$. Dieser Widerspruch vollendet unseren Beweis, dass σ grün ist.

Wir haben also die Implikation

$$(\Phi(\sigma) \text{ ist rot}) \implies (\sigma \text{ ist grün})$$

gezeigt. Die umgekehrte Implikation

$$(\sigma \text{ ist grün}) \implies (\Phi(\sigma) \text{ ist rot})$$

läßt sich im Wesentlichen mit dem gleichen Argument (rückwärts gelesen) beweisen[18]. Kombinieren wir diese beiden Implikationen, erhalten wir die Äquivalenz $(\sigma \text{ ist grün}) \iff (\Phi(\sigma) \text{ ist rot})$. Damit ist Behauptung 1 bewiesen.]

Wegen Behauptung 1 ist die Abbildung

$$\{\text{grüne Permutationen in } [n]\} \to \{\text{rote Permutationen in } [n]\},$$
$$\sigma \mapsto \Phi(\sigma)$$

wohldefiniert und bijektiv (denn Φ ist bijektiv). Also folgt, dass

$$|\{\text{grüne Permutationen in } [n]\}| = |\{\text{rote Permutationen in } [n]\}|$$

gilt. Mit anderen Worten: Die Anzahl aller roten Permutationen von $[n]$ ist gleich der der grünen. Wie gesagt, ist damit Aufgabe 9 **(b)** gelöst. □

[18] Hier muss man sich überlegen, warum in $C(\sigma)$ niemals ein Balken zwischen einer Zahl k und der Zahl $k+1$ stehen kann (mit k direkt links und $k+1$ direkt rechts vom Balken). Dies folgt aus der Tatsache, dass der Eintrag direkt rechts von einem Balken immer kleiner ist als der Eintrag direkt links von ihm (und sogar kleiner als jeder Eintrag links von dem Balken). Wir haben dies bereits im Beweis von Satz 3.22 gesehen, als wir argumentiert haben, dass die Balken in einer normalen n-Blockliste genau vor ihren Negativrekorden stehen.

3.10. zu Aufgabe 19

Aufgabe 19 ist [Grinbe15, Exercise 3.21], und läßt sich recht einfach durch Auflösen der Klammern (mit dem Binomischen Satz) lösen; diese Lösung ist in [Grinbe15] zu finden. Wir zeigen hier eine alternative (und für manchen Geschmack befriedigendere) Lösung mithilfe der Sylvesterschen Siebformel:

Lösungsskizze zu Aufgabe 19. Wir fixieren $m, n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, dass

$$Z_{m,n}(y) = Z_{n,m}(y) \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{N}$$

gilt.

In der Tat sei $y \in \mathbb{N}$.

Eine (m, n, y)-*Matrix* sei definiert als eine $m \times n$-Matrix[19], deren Einträge allesamt zur Menge $\{0, 1, \ldots, y-1\}$ gehören. Beispielsweise ist $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ eine $(2, 3, 5)$-Matrix (und, allgemeiner, eine $(2, 3, y)$-Matrix für jedes $y \geq 5$).

Eine *Nullzeile* in einer (m, n, y)-Matrix bedeute eine Zeile, in der sämtliche Einträge Nullen sind. Eine *Nullspalte* in einer (m, n, y)-Matrix bedeute eine Spalte, in der sämtliche Einträge 0 sind.

Wieviele (m, n, y)-Matrizen haben weder Nullzeilen noch Nullspalten?

Zunächst bestimmen wir ein paar einfachere Anzahlen. Die Anzahl aller (m, n, y)-Matrizen ist y^{mn}, denn für jeden der mn Einträge einer (m, n, y)-Matrix gibt es y viele Wahlmöglichkeiten. Die Anzahl aller (m, n, y)-Matrizen ohne Nullzeilen ist $(y^n - 1)^m$, denn für jede Zeile einer solchen (m, n, y)-Matrix gibt es genau $y^n - 1$ viele Möglichkeiten (sie darf ja keine Nullzeile sein, kann ansonsten aber beliebig sein). Analog kann man die Anzahl aller (m, n, y)-Matrizen ohne Nullspalten berechnen; sie ist $(y^m - 1)^n$.

Mit solchen Argumenten findet man aber nicht die Anzahl aller (m, n, y)-Matrizen, die weder Nullzeilen noch Nullspalten haben; man kann hier nämlich weder die Zeilen noch die Spalten unabhängig voneinander wählen. Dafür kann man jetzt aber die Sylvestersche Siebformel einsetzen. Hierzu definiere man U als die Menge aller (m, n, y)-Matrizen ohne Nullzeilen. Für jedes $i \in [n]$ setzen wir

$$A_i = \{M \in U \mid \text{die } i\text{-te Spalte von } M \text{ ist eine Nullspalte}\}.$$

Somit haben wir n Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ von U definiert. Die (m, n, y)-Matrizen, die weder Nullzeilen noch Nullspalten haben, sind also die Elemente von $U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. Daher ist

$$\begin{aligned} &(\text{Anzahl aller } (m, n, y) \text{-Matrizen, die weder Nullzeilen noch Nullspalten haben}) \\ &= |U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \end{aligned} \tag{63}$$

[19] d.h., eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten

laut Aufgabe 3 **(b)**.

Wir wollen nun die Mächtigkeiten $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ auf der rechten Seite von (63) bestimmen. Dazu fixieren wir eine Teilmenge I von $[n]$. Wenn wir im Folgenden von den "I-ten Spalten" einer Matrix reden, meinen wir immer die i-ten Spalten für alle $i \in I$. (Wenn beispielsweise $I = \{2, 3, 5\}$ ist, dann sind die "I-ten Spalten" die zweite, dritte und fünfte Spalte.) Nun ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ die Menge aller (m, n, y)-Matrizen $M \in U$ mit der Eigenschaft, dass die I-ten Spalten von M allesamt Nullspalten sind[20]. Wir behaupten, es gibt genau $\left(y^{n-|I|} - 1\right)^m$ solche Matrizen. Denn eine solche Matrix können wir konstruieren, indem wir ihre m Zeilen unabhängig voneinander füllen; für jede Zeile gibt es dabei $y^{n-|I|} - 1$ Wahlmöglichkeiten (denn die $|I|$ viele Einträge, die in den I-ten Spalten liegen, müssen allesamt 0 sein; somit muss man nur die restlichen $n - |I|$ Einträge bestimmen, und dabei vermeiden, dass sie alle 0 werden[21]). Da $\bigcap_{i\in I} A_i$ die Menge all dieser Matrizen ist, haben wir also gezeigt, dass

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \left(y^{n-|I|} - 1\right)^m \tag{64}$$

ist.

Vergessen wir nun, dass wir I fixiert haben. Für jede Teilmenge I von $[n]$

[20] Die anderen Spalten von M dürfen dabei ebenfalls Nullspalten sein (müssen aber nicht).
[21] denn eine Matrix $M \in U$ darf keine Nullzeilen enthalten

haben wir also (64) bewiesen. Damit wird (63) zu

$$
\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller } (m,n,y)\text{-Matrizen, die weder Nullzeilen noch Nullspalten haben}) \\
&= \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}_{\substack{=\left(y^{n-|I|}-1\right)^m \\ \text{(nach (64))}}} = \sum_{I\subseteq[n]} (-1)^{|I|} \left(y^{n-|I|}-1\right)^m \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ |I|=k}} \underbrace{(-1)^{|I|}\left(y^{n-|I|}-1\right)^m}_{\substack{=(-1)^k\left(y^{n-k}-1\right)^m \\ \text{(denn } |I|=k)}} \\
&\qquad \left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir die Summe nach dem Wert von } |I| \text{ aufgespalten,} \\ \text{denn für jede Teilmenge } I \text{ von } [n] \text{ ist } |I|\in\{0,1,\ldots,n\}\end{array}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sum_{\substack{I\subseteq[n];\\ |I|=k}} (-1)^k \left(y^{n-k}-1\right)^m}_{=(-1)^k\left(y^{n-k}-1\right)^m\cdot(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n] \text{ mit } |I|=k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(y^{n-k}-1\right)^m \cdot \underbrace{(\text{Anzahl aller Teilmengen } I \text{ von } [n] \text{ mit } |I|=k)}_{\substack{=(\text{Anzahl aller } k\text{-elementigen Teilmengen von } [n]) \\ =\binom{n}{k} \\ \text{(laut der kombinatorischen Interpretation der Binomialkoeffizienten)}}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(y^{n-k}-1\right)^m \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(y^{n-k}-1\right)^m \\
&= Z_{m,n}(y) \qquad (65)
\end{aligned}
$$

(denn die Definition von $Z_{m,n}$ ergibt $Z_{m,n}(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(y^{n-k}-1\right)^m$).

Unser Abzählverfahren hat etwas asymmetrisches: Wir haben mit der Menge

$$U = \{(m,n,y)\text{-Matrizen ohne Nullzeilen}\}$$

angefangen, und dann mithilfe der Sylvesterschen Siebformel in dieser Menge U die Matrizen mit Nullspalten "ausgesiebt". Zeilen und Spalten haben also recht unterschiedliche Rollen in unserem Argument gespielt. Wenn wir das gleiche Argument anwenden, aber die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht hätten, dann erhalten wir statt (65) die analoge Formel

$$
\begin{aligned}
&(\text{Anzahl aller } (m,n,y)\text{-Matrizen, die weder Nullzeilen noch Nullspalten haben}) \\
&= Z_{n,m}(y).
\end{aligned}
$$

Abgleich dieser Formel mit (65) ergibt $Z_{m,n}(y) = Z_{n,m}(y)$.

Vergessen wir nun, dass wir y fixiert haben. Wir haben also gezeigt, dass $Z_{m,n}(y) = Z_{n,m}(y)$ für jedes $y \in \mathbb{N}$ gilt. Jetzt können wir wie im Beweis von Lemma 3.1 argumentieren: Für jedes $y \in \mathbb{N}$ gilt $Z_{m,n}(y) = Z_{n,m}(y)$ und damit $(Z_{m,n} - Z_{n,m})(y) = \underbrace{Z_{m,n}(y)}_{=Z_{n,m}(y)} - Z_{n,m}(y) = 0$. Das heißt, jedes $y \in \mathbb{N}$ ist eine Nullstelle des Polynoms $Z_{m,n} - Z_{n,m}$. Das Polynom $Z_{m,n} - Z_{n,m}$ hat also unendlich viele Nullstellen, und ist daher das Nullpolynom. Das heißt, $Z_{m,n} = Z_{n,m}$. Damit ist Aufgabe 19 gelöst. □

3.11. zu Aufgabe 20

Lösungsskizze zu Aufgabe 20. Wir gehen ähnlich wie bei Aufgabe 5 vor: Wir beweisen die Behauptung zuerst im Fall, wenn P ein **Monom** (von Grad $< n$) ist, und folgern dann ihre Gültigkeit im allgemeinen Fall (denn jedes Polynom ist eine Summe von Monomen mit Koeffizienten).

Kommen wir zu den Details. Die Behauptung für ein einzelnes Monom sieht folgendermaßen aus:

> *Behauptung 1:* Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nichtnegative ganze Zahlen mit $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < n$. Sei $H = \{0, 1, \ldots, h-1\}$. Dann gilt
>
> $$\sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} = 0.$$

[*Beweis von Behauptung 1:* Wäre jede der n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ größer oder gleich 1, dann wäre ihre Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ größer oder gleich n, was im Widerspruch zu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < n$ stünde. Somit ist nicht jede der n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ größer oder gleich 1. Es gibt also ein $i \in [n]$ mit $a_i < 1$. Betrachte dieses i. Da a_i eine nichtnegative ganze Zahl ist, erhalten wir also $a_i = 0$ (da $a_i < 1$).

Wir können das Summenzeichen $\sum\limits_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n}$ durch das Summenzeichenpaar

$$\sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_{i-1},d_{i+1},d_{i+2},\ldots,d_n)\in H^{n-1}} \quad \sum_{d_i\in H}$$

ersetzen (denn ein n-Tupel $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in H^n$ kann immer in ein $(n-1)$-Tupel $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, d_{i+2}, \ldots, d_n) \in H^{n-1}$ und ein einzelnes Element $d_i \in H$ aufgespalten werden). Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
&\sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\
&= \sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_{i-1},d_{i+1},d_{i+2},\ldots,d_n)\in H^{n-1}} \quad \sum_{d_i\in H} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Fixieren wir nun ein $(n-1)$-Tupel $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, d_{i+2}, \ldots, d_n) \in H^{n-1}$. Für jedes $d_i \in H$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n}}_{\substack{=(-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_{i+1}+d_{i+2}+\cdots+d_n}(-1)^{d_i} \\ (\text{denn } d_1+d_2+\cdots+d_n=(d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_{i+1}+d_{i+2}+\cdots+d_n)+d_i)}} \underbrace{d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n}}_{=\left(d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_{i-1}^{a_{i-1}} d_{i+1}^{a_{i+1}} d_{i+2}^{a_{i+2}} \cdots d_n^{a_n}\right) d_i^{a_i}} \\
&= (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_{i+1}+d_{i+2}+\cdots+d_n} (-1)^{d_i} \left(d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_{i-1}^{a_{i-1}} d_{i+1}^{a_{i+1}} d_{i+2}^{a_{i+2}} \cdots d_n^{a_n}\right) \underbrace{d_i^{a_i}}_{\substack{=1 \\ (\text{denn } a_i=0)}} \\
&= (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_{i+1}+d_{i+2}+\cdots+d_n} (-1)^{d_i} \left(d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_{i-1}^{a_{i-1}} d_{i+1}^{a_{i+1}} d_{i+2}^{a_{i+2}} \cdots d_n^{a_n}\right).
\end{aligned}$$

Summieren wir diese Gleichung über alle $d_i \in H$ auf, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{d_i \in H} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\
&= \sum_{d_i \in H} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_{i+1}+d_{i+2}+\cdots+d_n} (-1)^{d_i} \left(d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_{i-1}^{a_{i-1}} d_{i+1}^{a_{i+1}} d_{i+2}^{a_{i+2}} \cdots d_n^{a_n}\right) \\
&= (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_{i+1}+d_{i+2}+\cdots+d_n} \left(d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_{i-1}^{a_{i-1}} d_{i+1}^{a_{i+1}} d_{i+2}^{a_{i+2}} \cdots d_n^{a_n}\right) \sum_{d_i \in H} (-1)^{d_i}.
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
\sum_{d_i \in H} (-1)^{d_i} &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{h-2} + (-1)^{h-1} \\
&\qquad (\text{denn } H = \{0, 1, \ldots, h-1\}) \\
&= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + 1 + (-1) \qquad (\text{denn } h \text{ ist gerade}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt, wird dies zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{d_i \in H} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\
&= (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_{i-1}+d_{i+1}+d_{i+2}+\cdots+d_n} \left(d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_{i-1}^{a_{i-1}} d_{i+1}^{a_{i+1}} d_{i+2}^{a_{i+2}} \cdots d_n^{a_n}\right) \underbrace{\sum_{d_i \in H} (-1)^{d_i}}_{=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vergessen wir nun, dass wir $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, d_{i+2}, \ldots, d_n)$ fixiert haben. Wir haben also für jedes $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, d_{i+2}, \ldots, d_n) \in H^{n-1}$ gezeigt, dass

$$\sum_{d_i \in H} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} = 0$$

gilt. Somit wird (66) zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\
&= \sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_{i-1},d_{i+1},d_{i+2},\ldots,d_n)\in H^{n-1}} \underbrace{\sum_{d_i\in H} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n}}_{=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Behauptung 1 ist damit bewiesen.]

Sei $H = \{0, 1, \ldots, h-1\}$.

Nun ist P ein Polynom in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von Grad $\deg P < n$. Wir können es also schreiben als

$$P = \sum_{\substack{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n; \\ a_1+a_2+\cdots+a_n<n}} \lambda_{a_1,a_2,\ldots,a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}, \tag{67}$$

wobei $\lambda_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ die Koeffizienten von P sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} \underbrace{P(d_1, d_2, \ldots, d_n)}_{\substack{= \sum_{\substack{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n; \\ a_1+a_2+\cdots+a_n<n}} \lambda_{a_1,a_2,\ldots,a_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\ \text{(nach (67))}}} \\
&= \sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} \sum_{\substack{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n; \\ a_1+a_2+\cdots+a_n<n}} \lambda_{a_1,a_2,\ldots,a_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\
&= \sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} \sum_{\substack{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n; \\ a_1+a_2+\cdots+a_n<n}} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} \lambda_{a_1,a_2,\ldots,a_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\
&= \sum_{\substack{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n; \\ a_1+a_2+\cdots+a_n<n}} \sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} \lambda_{a_1,a_2,\ldots,a_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n} \\
&= \sum_{\substack{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n; \\ a_1+a_2+\cdots+a_n<n}} \lambda_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \underbrace{\sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in H^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_n^{a_n}}_{\substack{=0 \\ \text{(nach Behauptung 1)}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wegen $H = \{0, 1, \ldots, h-1\}$ läßt sich dies umschreiben als

$$\sum_{(d_1,d_2,\ldots,d_n)\in\{0,1,\ldots,h-1\}^n} (-1)^{d_1+d_2+\cdots+d_n} P(d_1, d_2, \ldots, d_n) = 0.$$

Damit ist Aufgabe 20 gelöst.

[*Bemerkung:* Man sieht dieser Lösung leicht an, dass die Menge $\{0, 1, \ldots, h-1\}$ durch eine beliebige endliche Menge ganzer Zahlen ersetzt werden kann, in der gleich viele gerade und ungerade Zahlen vorkommen.] $\square$

3.12. zu Aufgaben 21, 22 und 23

Aufgaben 21, 22 und 23 lassen sich auf diverse Weisen lösen, aber wir werden sie alle aus folgendem Satz erhalten:

Satz 3.24. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $p(x)$ ein Polynom (in einer Variablen x, mit komplexen Koeffizienten) von Grad $\leq n$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(x+k) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C}.$$

Satz 3.24 ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 6 **(c)** und folgt aus dem gleichen Argument:

Beweisskizze zu Satz 3.24. Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei $\mathbb{A} = \mathbb{C}$. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ die Funktion, die jedes $k \in \mathbb{A}$ in $p(k) \in \mathbb{C}$ überführt. Dies ist eine Polynomfunktion von Grad $\leq n$ (denn $p(x)$ ist ein Polynom von Grad $\leq n$). Laut der Aussage 2 in der obigen Lösung von Aufgabe 6 **(a)** (angewandt auf n und $n+1$ statt k und n) ist somit $\Delta^{n+1} f$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq n - (n+1)$. Da $n - (n+1) = -1 < 0$ gilt, folgt hieraus, dass $\Delta^{n+1} f$ eine Polynomfunktion von Grad < 0 ist. Das heißt, $\Delta^{n+1} f$ ist die Nullfunktion. Somit gilt $\left(\Delta^{n+1} f\right)(x) = 0$.

Doch nach Aufgabe 6 **(b)** (angewandt auf $n+1$ statt n) gilt

$$\begin{aligned}
\left(\Delta^{n+1} f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{(-1)^{n+1-k}}_{=(-1)^{n+1}(-1)^k} \binom{n+1}{k} \underbrace{f(x+k)}_{\substack{=p(x+k) \\ \text{(nach der Definition von } f)}} \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(x+k).
\end{aligned}$$

Abgleich dieser Gleichheit mit $\left(\Delta^{n+1} f\right)(x) = 0$ ergibt

$$(-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(x+k) = 0.$$

Dividieren wir beide Seiten dieser Identität durch $(-1)^{n+1}$, dann finden wir

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(x+k) = 0.$$

Dies beweist Satz 3.24. □

Folgende Folgerung aus Satz 3.24 ist für uns besonders handlich:

Folgerung 3.25. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $p(x)$ ein Polynom (in einer Variablen x, mit komplexen Koeffizienten) von Grad $\leq n$. Dann ist

$$(-1)^n p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(k).$$

Beweisskizze zu Folgerung 3.25. Anwendung von Satz 3.24 auf $x = 0$ ergibt

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(k) = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(k) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(k) + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{=-(-1)^n} \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{\substack{=1 \\ \text{(nach (6))}}} p(n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(k) - (-1)^n p(n+1)
\end{aligned}$$

ergibt dies

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(k) - (-1)^n p(n+1) = 0.$$

Das heißt,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(k) = (-1)^n p(n+1).$$

Damit ist Folgerung 3.25 bewiesen. □

Mit Folgerung 3.25 werden Aufgaben 21 und 22 zu leichten Rechnungen:

Lösungsskizze zu Aufgabe 21. Laut Folgerung 3.25 ist

$$\begin{aligned}
(-1)^n p(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} \underbrace{p(k)}_{\substack{=2^k \\ \text{(nach Annahme)}}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} 2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \underbrace{(-1)^k 2^k}_{=(-2)^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-2)^k \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-2)^k}_{\substack{=(1+(-2))^{n+1} \\ \text{(nach dem Binomischen Satz)}}} - \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{\substack{=1 \\ \text{(nach (6))}}} (-2)^{n+1} \\
&= \Bigg(\underbrace{1+(-2)}_{=-1}\Bigg)^{n+1} - \underbrace{(-2)^{n+1}}_{=(-1)^{n+1}2^{n+1}} \\
&= (-1)^{n+1} - (-1)^{n+1} 2^{n+1} = (-1)^{n+1} \left(1 - 2^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Dividieren wir beide Seiten nun durch $(-1)^n$, so erhalten wir $p(n+1) = -\left(1-2^{n+1}\right) = 2^{n+1} - 1$. □

Lösungsskizze zu Aufgabe 22. Laut Folgerung 3.25 ist

$$\begin{aligned}
(-1)^n p(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} \underbrace{p(k)}_{\substack{= \frac{1}{\binom{n+1}{k}} \\ \text{(nach Annahme)}}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\binom{n+1}{k} \cdot \frac{1}{\binom{n+1}{k}}}_{=1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n \\
&= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade ist;} \\ -1, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade ist;} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dividieren wir beide Seiten nun durch $(-1)^n$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
p(n+1) &= \frac{1}{(-1)^n} \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade ist;} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade ist;} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}
\end{aligned}$$

(denn wenn n gerade ist, dann ist $(-1)^n = 1$). □

Für Aufgabe 23 benötigen wir zusätzlich eine Eigenschaft der Fibonaccizahlen:

> **Proposition 3.26.** Sei $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ die Fibonaccifolge (mit $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$). Dann gilt
>
> $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{2k+p} = (-1)^n f_{n+p} \qquad \text{für alle } n, p \in \mathbb{N}.$$

Proposition 3.26 ist der Behauptung von Aufgabe 6 **(f)** sehr ähnlich, und auch bei dem Beweis geht es ähnlich zu: Es ist nicht schwer, Proposition 3.26 entweder aus der Binet-Formel (und dem Binomischen Satz) herzuleiten, oder durch Induktion nach n zu beweisen. Wir überlassen beides dem interesssierten Leser. Hier zeigen wir stattdessen einen anderen Beweis von Proposition 3.26, der (genauso wie unsere Lösung von Aufgabe 6 **(f)**) auf die Theorie der n-ten Differenzen zurückgreift (genauer gesagt auf das Resultat von Aufgabe 6 **(b)**; das Wort "Theorie" ist hier eine Übertreibung):

Beweisskizze zu Proposition 3.26. Wir setzen $\mathbb{A} = \mathbb{N}$. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $g_p : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, indem wir

$$g_p(x) = f_{p+2x} \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{N}$$

setzen. Wir betrachten die in Aufgabe 6 definierten n-ten Differenzen $\Delta^n g_p$ dieser Funktion g_p. Wir behaupten nun, dass

$$\Delta^n (g_p) = g_{n+p} \tag{68}$$

für alle $n, p \in \mathbb{N}$ gilt.

[*Beweis von (68):* Wir beweisen (68) durch Induktion nach n:

Induktionsbasis: Für $n = 0$ gilt (68), weil $\Delta^0 (g_p) = g_p = g_{0+p}$ ist.

Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, dass (68) für $n = m$ gilt. Wir müssen zeigen, dass (68) auch für $n = m + 1$ gilt.

Wir haben angenommen, dass (68) für $n = m$ gilt. Das heißt, für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Delta^m (g_p) = g_{m+p}. \tag{69}$$

Sei nun $p \in \mathbb{N}$. Sei ferner $x \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\Delta^{m+1} (g_p) = \Delta (\Delta^m (g_p)) = \Delta (g_{m+p})$$

(denn (69) ergibt $\Delta^m\left(g_p\right) = g_{m+p}$). Folglich ist

$$\left(\Delta^{m+1}\left(g_p\right)\right)(x) = \left(\Delta\left(g_{m+p}\right)\right)(x) = \underbrace{g_{m+p}(x+1)}_{\substack{=f_{m+p+2(x+1)} \\ \text{(nach der Definition} \\ \text{von } g_{m+p})}} - \underbrace{g_{m+p}(x)}_{\substack{=f_{m+p+2x} \\ \text{(nach der Definition} \\ \text{von } g_{m+p})}}$$

$$\left(\text{nach der Definition von } \Delta\left(g_{m+p}\right)\right)$$

$$= f_{m+p+2(x+1)} - f_{m+p+2x}. \tag{70}$$

Doch die rekursive Definition der Fibonaccifolge ergibt $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für jedes $n \geq 2$. Wenden wir dies auf $n = m + p + 2(x+1)$ an, so erhalten wir

$$f_{m+p+2(x+1)} = \underbrace{f_{m+p+2(x+1)-1}}_{\substack{=f_{m+p+2x+1} \\ =f_{(m+1)+p+2x}}} + \underbrace{f_{m+p+2(x+1)-2}}_{=f_{m+p+2x}} = f_{(m+1)+p+2x} + f_{m+p+2x},$$

also

$$f_{m+p+2(x+1)} - f_{m+p+2x} = f_{(m+1)+p+2x}.$$

Somit wird (70) zu

$$\left(\Delta^{m+1}\left(g_p\right)\right)(x) = f_{m+p+2(x+1)} - f_{m+p+2x} = f_{(m+1)+p+2x} = g_{(m+1)+p}(x)$$

(denn die Definition von $g_{(m+1)+p}$ ergibt $g_{(m+1)+p}(x) = f_{(m+1)+p+2x}$).

Vergessen wir, dass wir x fixiert haben. Wir haben also gezeigt, dass $\left(\Delta^{m+1}\left(g_p\right)\right)(x) = g_{(m+1)+p}(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt. Das heißt, es gilt $\Delta^{m+1}\left(g_p\right) = g_{(m+1)+p}$ (denn $\Delta^{m+1}\left(g_p\right)$ und $g_{(m+1)+p}$ sind zwei Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$).

Vergessen wir, dass wir p fixiert haben. Wir haben also gezeigt, dass $\Delta^{m+1}\left(g_p\right) = g_{(m+1)+p}$ für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt. Mit anderen Worten: Die Gleichheit (68) gilt für $n = m+1$. Damit ist der Induktionsschritt fertig. Somit ist (68) bewiesen.]

Seien nun $n, p \in \mathbb{N}$. Wenden wir Aufgabe 6 **(b)** auf $f = g_p$ und $x = 0$ an, so erhalten wir

$$\left(\Delta^n\left(g_p\right)\right)(0) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k}}_{=(-1)^n(-1)^k} \binom{n}{k} \underbrace{g_p(0+k)}_{\substack{=g_p(k)=f_{p+2k} \\ \text{(nach Definition von } g_p)}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n (-1)^k \binom{n}{k} \underbrace{f_{p+2k}}_{=f_{2k+p}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^n (-1)^k \binom{n}{k} f_{2k+p} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{2k+p}.$$

Gleichen wir dies mit

$$\underbrace{\left(\Delta^n\left(g_p\right)\right)}_{\substack{=g_{n+p} \\ \text{(nach (68))}}}(0) = g_{n+p}(0) = f_{n+p+2\cdot 0} \qquad \left(\text{nach Definition von } g_{n+p}\right)$$

$$= f_{n+p}$$

ab, so erhalten wir

$$f_{n+p} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{2k+p}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $(-1)^n$, so erhalten wir

$$(-1)^n f_{n+p} = \underbrace{(-1)^n (-1)^n}_{=(-1)^{2n}=1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{2k+p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{2k+p}.$$

Damit ist Proposition 3.26 bewiesen. □

Jetzt können wir Aufgabe 23 lösen:

Lösungsskizze zu Aufgabe 23. Definiere ein Polynom $q(x)$ durch $q(x) = p(2x+1)$. Dann ist $q(x)$ ein Polynom von Grad 1008 (denn $p(x)$ ist ein solches). Für alle $n \in \{0, 1, \ldots, 1008\}$ gilt ferner

$$q(n) = p(2n+1) = f_{2n+1}$$

(laut Annahme). Mit anderen Worten: Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, 1008\}$ gilt

$$q(k) = f_{2k+1}. \tag{71}$$

Sei $n = 1008$. Aus (71) wissen wir also, dass $q(k) = f_{2k+1}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt.

Laut Folgerung 3.25 (angewandt auf $q(x)$ statt $p(x)$) gilt nun

$$\begin{aligned}
(-1)^n q(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} \underbrace{q(k)}_{\substack{=f_{2k+1} \\ \text{(nach (71))}}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} f_{2k+1} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} f_{2k+1}}_{\substack{=(-1)^{n+1} f_{(n+1)+1} \\ \text{(nach Proposition 3.26,} \\ \text{angewandt auf } n+1 \text{ und } 1 \text{ statt } n \text{ und } p)}} - (-1)^{n+1} \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{\substack{=1 \\ \text{(nach (6))}}} \underbrace{f_{2(n+1)+1}}_{=f_{2n+3}} \\
&= (-1)^{n+1} \underbrace{f_{(n+1)+1}}_{=f_{n+2}} - (-1)^{n+1} f_{2n+3} \\
&= (-1)^{n+1} f_{n+2} - (-1)^{n+1} f_{2n+3} = \underbrace{(-1)^{n+1}}_{=-(-1)^n} (f_{n+2} - f_{2n+3}) \\
&= -(-1)^n (f_{n+2} - f_{2n+3}) = (-1)^n (f_{2n+3} - f_{n+2}).
\end{aligned}$$

Dividieren wir beide Seiten durch $(-1)^n$, so erhalten wir

$$q(n+1) = f_{2n+3} - f_{n+2}.$$

Wegen $n = 1008$ "vereinfacht" sich dies zu $q(1009) = f_{2019} - f_{1010}$. Nach Definition von q ist aber $q(1009) = p(2019)$. Also ist $p(2019) = q(1009) = f_{2019} - f_{1010}$. □

3.13. zu Aufgabe 27

Lösungsskizze zu Aufgabe 27. Wenn X und Y zwei Teilmengen von V sind, dann schreiben wir "$X \not\leftrightarrow Y$", wenn es keine Kante von G gibt, die einen Endknoten in X und ihren anderen Endknoten in Y hat. Die Relation "$\not\leftrightarrow$" ist offensichtlich symmetrisch; das heißt, für je zwei Teilmengen X und Y von V gilt die logische Äquivalenz

$$(X \not\leftrightarrow Y) \iff (Y \not\leftrightarrow X). \tag{72}$$

Folgendes ist ebenfalls leicht einzusehen: Für je zwei Teilmengen X und Y von V gilt die logische Äquivalenz

$$(X \not\leftrightarrow Y) \iff (N(X) \cap Y = \varnothing). \tag{73}$$

22

[22]Der Vollständigkeit halber sei hier ein *Beweis von (73)* gegeben:

Seien X und Y zwei Teilmengen von V.

Wir nehmen an, dass $X \not\leftrightarrow Y$ gilt. Sei $v \in N(X) \cap Y$. Dann ist $v \in N(X)$ und $v \in Y$. Wegen $v \in N(X)$ ist v ein Knoten von G, der mit mindestens einem Knoten in X verbunden ist (denn $N(X)$ ist definiert als die Menge aller solchen Knoten). Also ist v mit mindestens einem Knoten in X verbunden. Das heißt, es gibt einen Knoten in X, mit dem v verbunden ist. Sei x dieser Knoten in X. Dann ist v mit x verbunden. Es gibt also eine Kante von G, deren Endknoten v und x sind. Sei e diese Kante. Diese Kante hat also einen Endknoten in X (nämlich x) und ihren anderen Endknoten in Y (nämlich v, denn $v \in Y$).

Doch laut Annahme ist $X \not\leftrightarrow Y$. Das heißt, es gibt keine Kante von G, die einen Endknoten in X und ihren anderen Endknoten in Y hat. Wir haben aber soeben eine solche Kante gefunden (nämlich e). Dies ist ein Widerspruch.

Vergessen wir, dass wir v gewählt haben. Wir haben also für jedes $v \in N(X) \cap Y$ einen Widerspruch erhalten. Also gibt es kein $v \in N(X) \cap Y$. Die Menge $N(X) \cap Y$ ist also leer. Das heißt, $N(X) \cap Y = \varnothing$.

Vergessen wir nun unsere Annahme, dass $X \not\leftrightarrow Y$ gilt. Wir haben also die Implikation

$$(X \not\leftrightarrow Y) \implies (N(X) \cap Y = \varnothing) \tag{74}$$

bewiesen.

Nehmen wir nun an, dass $N(X) \cap Y = \varnothing$ ist. Sei nun f eine Kante von G, die einen Endknoten in X und ihren anderen Endknoten in Y hat. Seien x und y die Endknoten dieser Kante f, wobei x derjenige in X und y derjenige in Y ist. Dann ist $x \in X$ und $y \in Y$. Ferner ist y mit x verbunden (denn x und y sind die Endknoten der Kante f). Somit ist y mit mindestens einem Knoten in X verbunden (nämlich mit x). Das heißt, $y \in N(X)$ (denn $N(X)$ ist definiert als die Menge aller Knoten von G, die mit mindestens einem Knoten in X verbunden sind). Aus $y \in N(X)$ und $y \in Y$ folgt jedoch $y \in N(X) \cap Y = \varnothing$, was absurd ist

Sei nun X eine Teilmenge von A. Da unser Graph G bipartit ist, gilt dann $N(X) \subseteq B$ [23]. Somit gilt $N(X) = B$ genau dann, wenn $B \subseteq N(X)$ ist. Wir haben also folgende Kette von Äquivalenzen:

$$(N(X) = B) \iff (B \subseteq N(X)) \iff (B \setminus N(X) = \varnothing).$$

Da äquivalente Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben, erhalten wir also

$$[N(X) = B] = [B \setminus N(X) = \varnothing]. \tag{75}$$

Für jede Teilmenge Y von B gilt ferner folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
(X \not\leftrightarrow Y) &\iff (N(X) \cap Y = \varnothing) \qquad \text{(nach (73))} \\
&\iff (\text{kein Element von } Y \text{ gehört zu } N(X)) \\
&\iff (\text{jedes } y \in Y \text{ erfüllt } y \notin N(X)) \\
&\iff (\text{jedes } y \in Y \text{ erfüllt } y \in B \setminus N(X)) \\
&\qquad \left(\begin{array}{c} \text{denn für jedes } y \in Y \text{ ist die Aussage "} y \notin N(X) \text{"} \\ \text{äquivalent zu "} y \in B \setminus N(X) \text{" (denn } y \in Y \subseteq B) \end{array}\right) \\
&\iff (Y \subseteq B \setminus N(X)).
\end{aligned}$$

(denn die leere Menge $\varnothing$ hat kein Element). Somit haben wir einen Widerspruch erhalten.

Vergessen wir, dass wir f gewählt haben. Wir haben also für jede Kante f von G, die einen Endknoten in X und ihren anderen Endknoten in Y hat, einen Widerspruch erhalten. Also gibt es keine solche Kante. Das heißt, wir haben $X \not\leftrightarrow Y$ (nach der Definition von "$X \not\leftrightarrow Y$").

Vergessen wir nun unsere Annahme, dass $N(X) \cap Y = \varnothing$ gilt. Wir haben also die Implikation

$$(N(X) \cap Y = \varnothing) \implies (X \not\leftrightarrow Y)$$

bewiesen.

Vereinigt mit der bereits bewiesenen Implikation (74) führt diese Implikation zu der Äquivalenz $(X \not\leftrightarrow Y) \iff (N(X) \cap Y = \varnothing)$. Damit ist (73) bewiesen.

[23] *Beweis:* Sei $v \in N(X)$. Also ist v ein Knoten von G, der mit mindestens einem Knoten in X verbunden ist (denn $N(X)$ ist definiert als die Menge aller solchen Knoten). Folglich ist v mit mindestens einem Knoten in X verbunden. Das heißt, es gibt einen Knoten in X, mit dem v verbunden ist. Sei x dieser Knoten in X. Dann ist $x \in X \subseteq A$ und somit $x \notin B$ (denn wegen $A \cap B = \varnothing$ kann ein Element von A niemals ein Element von B sein).

Nun ist aber v mit x verbunden (nach Definition von x). Das heißt, es gibt eine Kante von G, deren Endknoten v und x sind. Sei e eine solche Kante. Wir wissen, dass jede Kante von G einen Knoten in A mit einem Knoten in B verbindet (laut der Aufgabenstellung). Jede Kante von G hat also einen Endknoten in B. Dies gilt daher insbesondere für die Kante e. Das heißt, die Kante e hat einen Endknoten in B. Somit ist $v \in B$ oder $x \in B$ (denn die Endknoten von e sind v und x). Wegen $x \notin B$ muss somit $v \in B$ sein.

Vergessen wir, dass wir v fixiert haben. Wir haben also gezeigt, dass $v \in B$ für jedes $v \in N(X)$ ist. Mit anderen Worten: Es gilt $N(X) \subseteq B$.

Somit ist

$$\sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ X\not\leftrightarrow Y}} (-1)^{|X|+|Y|} = \underbrace{\sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ Y\subseteq B\setminus N(X)}}}_{\substack{=\sum\limits_{Y\subseteq B\setminus N(X)}\\ \text{(denn } B\setminus N(X)\subseteq B\text{)}}} \underbrace{(-1)^{|X|+|Y|}}_{=(-1)^{|X|}(-1)^{|Y|}} = \sum_{Y\subseteq B\setminus N(X)} (-1)^{|X|}(-1)^{|Y|}$$

$$= (-1)^{|X|} \sum_{Y\subseteq B\setminus N(X)} (-1)^{|Y|} = (-1)^{|X|} \underbrace{\sum_{I\subseteq B\setminus N(X)} (-1)^{|I|}}_{\substack{=[B\setminus N(X)=\varnothing]\\ \text{(nach (10),}\\ \text{angewandt auf } S=B\setminus N(X))}}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir den Summationsindex } Y\\ \text{in } I \text{ umbenannt}\end{array}\right)$$

$$= (-1)^{|X|} \underbrace{[B\setminus N(X)=\varnothing]}_{\substack{=[N(X)=B]\\ \text{(laut (75))}}} = (-1)^{|X|}[N(X)=B].$$

Vergessen wir nun, dass wir X fixiert haben. Wir haben damit gezeigt, dass

$$\sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ X\not\leftrightarrow Y}} (-1)^{|X|+|Y|} = (-1)^{|X|}[N(X)=B]$$

für jede Teilmenge X von A gilt. Summieren wir diese Gleichung über alle Teilmengen X von A auf, so erhalten wir

$$\sum_{X\subseteq A}\ \sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ X\not\leftrightarrow Y}} (-1)^{|X|+|Y|} = \sum_{X\subseteq A} (-1)^{|X|}[N(X)=B]. \qquad (76)$$

Führen wir das gleiche Argument noch einmal durch, vertauschen dabei aber die Rollen von A und B sowie die Rollen von X und Y, so erhalten wir genauso

$$\sum_{Y\subseteq B}\ \sum_{\substack{X\subseteq A;\\ Y\not\leftrightarrow X}} (-1)^{|Y|+|X|} = \sum_{Y\subseteq B} (-1)^{|Y|}[N(Y)=A]. \qquad (77)$$

Aus (76) folgt aber

$$\begin{aligned}
&\sum_{X\subseteq A} (-1)^{|X|} [N(X) = B] \\
&= \sum_{X\subseteq A} \underbrace{\sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ X\nleftrightarrow Y}}}_{\substack{=\sum\limits_{\substack{Y\subseteq B;\\ Y\nleftrightarrow X}} \\ \text{(denn laut (72) können wir} \\ \text{die Bedingung “}X\nleftrightarrow Y\text{” unter dieser} \\ \text{Summe durch “}Y\nleftrightarrow X\text{” ersetzen)}}} \underbrace{(-1)^{|X|+|Y|}}_{=(-1)^{|Y|+|X|}} = \underbrace{\sum_{X\subseteq A} \sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ Y\nleftrightarrow X}}}_{=\sum\limits_{Y\subseteq B} \sum\limits_{\substack{X\subseteq A;\\ Y\nleftrightarrow X}}} (-1)^{|Y|+|X|} \\
&= \sum_{Y\subseteq B} \sum_{\substack{X\subseteq A;\\ Y\nleftrightarrow X}} (-1)^{|Y|+|X|} = \sum_{Y\subseteq B} (-1)^{|Y|} [N(Y) = A]
\end{aligned}$$

(laut (77)). Damit ist Aufgabe 27 gelöst. □

Wir bemerken, dass wir die Behauptung von Aufgabe 27 auch folgendermaßen umschreiben können:

Folgerung 3.27. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph, und seien A und B die zwei Komponenten der Knotenmenge von G. (Das heißt, $V = A \cup B$ und $A \cap B = \varnothing$; und jede Kante von G verbindet einen Knoten in A mit einem Knoten in B.) Für jede Teilmenge S von V sei $N(S)$ die Menge aller Knoten von G, die mit mindestens einem Knoten in S verbunden sind. Man zeige:

$$\sum_{\substack{X\subseteq A;\\ N(X)=B}} (-1)^{|X|} = \sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ N(Y)=A}} (-1)^{|Y|}.$$

Beweisskizze. Für jede Teilmenge $X \subseteq A$ gilt entweder $N(X) = B$ oder $N(X) \neq B$ (aber nicht beides). Somit können wir die Summe $\sum\limits_{X\subseteq A} (-1)^{|X|} [N(X) = B]$ folgendermaßen aufspalten:

$$\begin{aligned}
&\sum_{X\subseteq A} (-1)^{|X|} [N(X) = B] \\
&= \sum_{\substack{X\subseteq A;\\ N(X)=B}} (-1)^{|X|} \underbrace{[N(X) = B]}_{\substack{=1 \\ (\text{denn } N(X)=B)}} + \sum_{\substack{X\subseteq A;\\ N(X)\neq B}} (-1)^{|X|} \underbrace{[N(X) = B]}_{\substack{=0 \\ (\text{denn } N(X)\neq B)}} \\
&= \sum_{\substack{X\subseteq A;\\ N(X)=B}} (-1)^{|X|} + \underbrace{\sum_{\substack{X\subseteq A;\\ N(X)\neq B}} (-1)^{|X|} 0}_{=0} = \sum_{\substack{X\subseteq A;\\ N(X)=B}} (-1)^{|X|}. \qquad (78)
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\sum_{Y\subseteq B}(-1)^{|Y|}[N(Y)=A]=\sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ N(Y)=A}}(-1)^{|Y|}. \tag{79}$$

Aus (78) folgt nun

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{X\subseteq A;\\ N(X)=B}}(-1)^{|X|}&=\sum_{X\subseteq A}(-1)^{|X|}[N(X)=B]\\&=\sum_{Y\subseteq B}(-1)^{|Y|}[N(Y)=A] \qquad \text{(laut Aufgabe 27)}\\&=\sum_{\substack{Y\subseteq B;\\ N(Y)=A}}(-1)^{|Y|} \qquad \text{(laut (79))}.\end{aligned}$$

Damit ist Folgerung 3.27 bewiesen. □

3.14. Verweise für den Rest der Aufgaben

So schnell komme ich mit dem Schreiben nicht mit... also:

- Aufgabe 10 ist [17f-hw4s, Exercise 3].
- Aufgabe 11 ist [Grinbe15, Theorem 3.44].
- Aufgabe 12 **(a)** ist [Grinbe15, Theorem 3.45]. Aufgabe 12 **(b)** folgt leicht aus **(a)**.
- Aufgabe 13 ist [Grinbe15, Theorem 3.46].
- Aufgabe 14 **(a)** ist [18s-hw2s, Exercise 5]. Aufgabe 14 **(b)** ist [18f-mt1s, Exercise 3].
- Aufgabe 15 **(a)** ist [18f-hw4s, Exercise 7].

  Aufgabe 15 **(b)** läßt sich folgendermaßen auf **(a)** zurückführen: Wir färben die Kanten des Graphen G mit den Farben $1,2,\ldots,d$; und zwar sei die Farbe der Kante von $(e_1,e_2,\ldots,e_d)$ nach $(f_1,f_2,\ldots,f_d)$ definiert als die (einzige) Zahl $j\in[d]$ mit $e_j\neq f_j$. (Die Farbe einer Kante gibt also an, zu welcher Koordinatenachse diese Kante parallel ist, d.h., welche Koordinate des Punktes sich beim Durchlaufen der Kante verändert.) Jedem Kantenzug $\mathbf{k}$ der Länge n in G können wir somit ein n-Tupel $f(\mathbf{k})\in[d]^n$ zuordnen, und zwar durch folgende Regel: Der i-te Eintrag von $f(\mathbf{k})$ soll gleich der Farbe der i-ten Kante des Kantenzugs $\mathbf{k}$ sein. Hierdurch erhalten wir eine Bijektion

  $$\{\text{Kantenzüge der Länge } n \text{ von } v \text{ nach } v\}\to\{\text{all-gerade } n\text{-Tupel in } [d]^n\},$$
  $$\mathbf{k}\mapsto f(\mathbf{k})$$

(in der Tat ist ein Kantenzug $\mathbf{k}$ genau dann geschlossen, wenn das Tupel $f(\mathbf{k})$ all-gerade ist). Diese Bijektion führt Aufgabe 15 **(b)** auf Teil **(a)** zurück.

Aufgabe 15 **(b)** ist auch der Sonderfall von [Stanley-AC2, Corollary 2.5] für $k = 0$ und $u = v$.

- Aufgabe 16 ist [Grinbe08, Problem 2].
- Aufgabe 17 **(a)** ist ein Sonderfall von [Grinbe15, Exercise 6.51 **(a)**].
- Aufgabe 17 **(b)** ist ein Sonderfall von [Grinbe15, Exercise 6.51 **(b)**].
- Aufgabe 17 **(c)** ist ein Sonderfall von [Grinbe15, Exercise 6.51 **(d)**].
- Aufgabe 18 **(a)** ist [19fco, Theorem 2.5.1] (zumindest im Sonderfall $k \in \mathbb{N}$; aber der allgemeine Fall folgt hieraus mit dem Polynomidentitäts-Trick).

  Aufgabe 18 **(b)** ist [19fco, Theorem 2.5.2].

  Aufgabe 18 **(c)** ist [19fco-hw3s, Exercise 3].
- Die Antwort auf Aufgabe 24 **(a)** ist "ja". Dies hat damit zu tun, dass 2000 durch 16 teilbar ist. Denn es gibt Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{15} \in \{1, -1\}$, welche

$$\sum_{k=0}^{15} a_k (x+k)^3 = 0$$

  für beliebige 16 aufeinanderfolgende ganze Zahlen $x, x+1, \ldots, x+15$ erfüllen. Solche Koeffizienten findet man folgendermaßen: Man schreibt jedes $k \in \{0, 1, \ldots, 15\}$ im Binärsystem als $d_0 + 2d_1 + 4d_2 + 8d_3$ mit $d_0, d_1, d_2, d_3 \in \{0, 1\}$, und setzt $a_k = (-1)^{d_0+d_1+d_2+d_3}$. Dass dann $\sum\limits_{k=0}^{15} a_k (x+k)^3 = 0$ gilt, folgt aus Aufgabe 20 wegen $3 < 4$.

  Die Antwort auf Aufgabe 24 **(b)** ist "nein". Dies folgt schon aus Paritätsgründen (die Summe ist stets ungerade).
- Aufgabe 25 ist [Grinbe15, Exercise 5.4].
- Für Aufgabe 26 siehe `https://artofproblemsolving.com/community/c6h2231398` .
- Aufgabe 28 **(a)** ist [HeiTit18, Theorem 10]; siehe [Grinbe17, Theorem 3.2.2] für einen anderen Beweis. Aufgabe 28 **(b)** ist [Grinbe17, Theorem 3.2.1] (und auch [HeiTit18, Corollary 1]); andere Beweise (unabhängig von dem komplizierteren Teil **(a)**) finden sich in [Brouwe09].
- Aufgabe 29 ist im Wesentlichen [Elser84, Lemma 1]. Meine Lieblingslösung ist natürlich meine eigene ([Grinbe20], wo ich auch über Analoga und Verallgemeinerungen schwadroniere). (Sämtliche Quellen betrachten nur den Fall $E \neq \varnothing$; aber der Fall $E = \varnothing$ ist natürlich trivial.)

4. Weitere Lesevorschläge

4.1. Weiterführende Literatur

- Die kanonische Einführung in *Binomialkoeffizienten-Identitäten* ist das Buch [GrKnPa94, Chapter 5], das eine generelle Fundgrube für bemerkenswerte Phänomene in der elementaren diskreten Mathematik ist. Mehr findet man u.a. in [Spivey19].

- Die Strategie der *vorzeichenumkehrenden Involutionen*, die wir beim Lösen von Aufgabe 2 **(b)** eingesetzt haben, wird in [BenQui08] und [Sagan19, Chapter 2] deutlich weiter getrieben.

- Aufgabe 5 **(c)** und Aufgabe 16 sind Beispiele für die Anwendung von Polynomen in der "Nullsummentheorie" endlicher Körper. Klassischere Beispiele sind der *Kombinatorische Nullstellensatz* [Alon02] und der *Satz von Chevalley–Warning* [Reiher07].

- Die in der Aufgabe 6 eingeführten n-ten Differenzen sind – als *endliche Differenzen* oder "*Differenzen höherer Ordnung*" – ein klassischer (allerdings auch notationell altertürmlicher) Text dazu ist [MilTho33].

- Sowohl die Möbius-Inversion im Booleschen Verband (Aufgabe 8 **(a)**) als auch die Binomialinversion (Aufgabe 8 **(b)**) als auch die klassische Möbius-Inversion aus der Zahlentheorie sind Sonderfälle der *allgemeinen Möbiusinversion*; siehe dazu [Stanle11, §3.7].

- Die wohl bekannteste vorzeichenbehaftete Summe in der Mathematik ist die *Determinante* einer Matrix. (Das Vorzeichen ist dabei die Signatur einer Permutation.) Determinanten sind Dauergäste an vielen Orten der Mathematik und auch an universitären Mathematikolympiaden wie Putnam. Eine elementar-kombinatorische Einführung findet sich in [Strick13, Notes, Section 12 und Appendix B]. Detaillierte Beweise vieler Eigenschaften finden sich in [Grinbe15, Chapter 6]; Aufgaben ohne Ende in [FadSom72] und [Prasol94]. Auch in der elementaren Wettbewerbsmathematik hat man von Determinanten oft Nutzen – siehe [AndDos10, Chapters 9 and 12], [AndDos12, Chapters 9 and 12] und [Grinbe09].

4.2. Zusätzliche Aufgaben (ohne Lösungen)

Aufgabe 30. (Newtons Interpolationsformel) Sei die Notation wie in Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion von Grad $\leq m$ (für ein $m \in \mathbb{N}$). Man zeige:

$$f(x+a) = \sum_{k=0}^{m} \left(\Delta^k f\right)(a) \cdot \binom{x}{k} \qquad \text{für alle } x, a \in \mathbb{A}.$$

(Man vergleiche dies mit der Taylorformel $f(x+a) = \sum_{k=0}^{m} \left(\partial^k f\right)(a) \cdot \frac{x^k}{k!}$, wobei ∂ der Differentialoperator $g \mapsto \frac{d}{dx} g$ ist.)

Aufgabe 31. ([18f-hw4s, Exercise 6])

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ beweise man

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (a+bk)^m = 0.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r \in [n-1]$ beweise man

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} (n-k)^{2r} = 0.$$

Aufgabe 32. ([Grinbe16b] oder auch [19fco, Exercise 2.10.7]) Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Man zeige:

$$\sum_{u=0}^{k} \binom{n+u-1}{u} \binom{n}{k-2u} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Aufgabe 33. ([19fco-mt1s, Exercise 4]) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ endliche Mengen ganzer Zahlen. Für jedes $i \in [n]$ sei a_i die Anzahl aller geraden Elemente von T_i und sei b_i die Anzahl aller ungeraden Elemente von T_i. Für jedes $i \in [n]$ setze man ferner $s_i = a_i + b_i = |T_i|$ und $d_i = a_i - b_i$.

Ein n-Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$ heiße *gerade*, wenn $i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ gerade ist. (Beispielsweise ist das 4-Tupel $(1, 0, 4, 1)$ gerade, nicht aber das 4-Tupel $(1, 0, 3, 1)$.)

Zeige, dass die Anzahl aller geraden n-Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$ gleich

$$\frac{s_1 s_2 \cdots s_n + d_1 d_2 \cdots d_n}{2}$$

ist.

Aufgabe 34. (Putnam 2005 Aufgabe B6; siehe auch [AndDos12, Exercise 12.2]) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei S_n die Menge aller Permutationen von $[n]$. Für jedes $\sigma \in S_n$

- sei $\ell(\sigma)$ die Anzahl aller Inversionen von σ (siehe Aufgabe 25 für die Definition);

- sei $\operatorname{sign}\sigma = (-1)^{\ell(\sigma)}$ (diese Zahl heißt *Signatur* von σ);
- sei $\operatorname{fix}\sigma$ die Anzahl aller Fixpunkte von σ (das heißt, aller $i \in [n]$ mit $\sigma(i) = i$).

Man beweise:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\operatorname{sign}\sigma}{\operatorname{fix}\sigma + 1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$

Aufgabe 35. ([19fco-mt2s, Exercise 5]) Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Permutation σ von $[n]$ heiße *dominofrei*, wenn es kein $i \in [n-1]$ gilt, das $\sigma(i) = i+1$ und $\sigma(i+1) = i$ erfüllt. Man bestimme die Anzahl aller dominofreien Permutationen von $[n]$.

Aufgabe 36. ([20f, Theorem 7.8.9])

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei U eine endliche Menge. Für jedes $x \in U$ sei $w(x)$ eine Zahl. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von U. Man zeige:

$$\sum_{\substack{x \in U; \\ x \notin A_i \text{ für alle } i \in [n]}} w(x) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \sum_{\substack{x \in U; \\ x \in A_i \text{ für alle } i \in I}} w(x).$$

(b) Man leite die Sylvestersche Siebformel (11) aus diesem Resultat her.

Aufgabe 37. ([21s, Solution of Exercise 6.1.0.1]) Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Sei $g = 1 + 2 + \cdots + k$. Wenn S eine endliche Menge ganzer Zahlen ist, dann bezeichne $\operatorname{sum} S$ die Summe aller Elemente von S. (Beispielsweise ist also $\operatorname{sum}\{2,4,5\} = 2+4+5 = 11$.) Man zeige:

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}; \\ |S| = k}} (-1)^{\operatorname{sum} S} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ gerade und } k \text{ ungerade ist;} \\ (-1)^g \dbinom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $\lfloor u \rfloor$ den *Ganzteil* einer reellen Zahl u (also die größte ganze Zahl, die $\leq u$ ist).

Aufgabe 38. ([Sagan19, Theorem 2.3.3]) Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter einer *Partition* von n verstehen wir ein Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ positiver ganzer Zahlen mit $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ und $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$. (Beispielsweise ist $(4,2,2,1)$ eine Partition von 9.)

Sei $p_{\text{odd}}(n)$ die Anzahl aller Partitionen $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ von n, deren Einträge $a_1, a_2, \ldots, a_k$ alle ungerade sind.

Sei $p_{\text{dist}}(n)$ die Anzahl aller Partitionen $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ von n, deren Einträge $a_1, a_2, \ldots, a_k$ paarweise verschieden sind.

Man beweise *Eulers Identität* $p_{\text{odd}}(n) = p_{\text{dist}}(n)$.

(Beispielsweise ist

$$p_{\text{odd}}(7) = |\{(7), \ (5,1,1), \ (3,3,1), \ (3,1,1,1,1), \ (1,1,1,1,1,1,1)\}| = 5;$$
$$p_{\text{dist}}(7) = |\{(7), \ (6,1), \ (5,2), \ (4,3), \ (4,2,1)\}| = 5;$$

damit gilt die Identität für $n = 7$.)

Aufgabe 39. ([Whitne32, (12)]) Sei G ein ungerichteter Graph mit Eckenmenge V. Sei $n \in \mathbb{N}$.

Unter einer *n-Färbung* von G verstehen wir eine Abbildung $c : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Wenn c eine n-Färbung ist, dann stellen wir uns die Werte $c(v)$ von c als die "Farben" der entsprechenden Ecken v vor.

Eine n-Färbung c von G heiße *gültig*, wenn es keine Kante von G gibt, deren zwei Endpunkte v und w die Gleichung $c(v) = c(w)$ erfüllen. (Mit anderen Worten: Eine n-Färbung von G heißt gültig, wenn es keine Kante gibt, deren zwei Endpunkte die gleiche Farbe haben.)

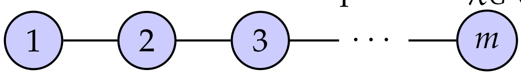
Sei $\chi_G(n)$ die Anzahl aller gültigen n-Färbungen von G.

(a) Man zeige, dass

$$\chi_G(n) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} n^{\text{conn}(V,F)}$$

gilt, wobei $\text{conn}(V, F)$ die Anzahl aller Zusammenhangskomponenten des Graphen mit Eckenmenge V und Kantenmenge F bedeutet.

Hieraus folgt insbesondere, dass $\chi_G(n)$ eine Polynomfunktion in n ist. (Das entsprechende Polynom heißt das *chromatische Polynom* von G.)

(b) Man bestimme explizit $\chi_G(n)$, wenn G ein Pfad  mit m Ecken ist.

(c) Allgemeiner bestimme man $\chi_G(n)$, wenn G ein Baum mit m Ecken ist.

(d) Man bestimme explizit $\chi_G(n)$, wenn G ein Zykel mit m Ecken ist.

Aufgabe 40. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ beweise man

$$n + 1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

[*Hinweis* zu einer kombinatorischen Lösung: Wie viele n-Tupel

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ gibt es, die für **kein** $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ der Bedingung "$a_k = 1$ und $a_{k+1} = 0$" genügen?]

Literatur

[17f-hw4s] Darij Grinberg, *UMN Fall 2017 Math 4990 homework set #4 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/17f/hw4os.pdf`

[18f-hw2s] Darij Grinberg, *UMN Fall 2018 Math 5705 homework set #2 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/18f/hw2s.pdf`

[18f-hw3s] Darij Grinberg, *UMN Fall 2018 Math 5705 homework set #3 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/18f/hw3s.pdf`

[18f-hw4s] Darij Grinberg, *UMN Fall 2018 Math 5705 homework set #4 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/18f/hw4s.pdf`

[18f-mt1s] Darij Grinberg, *UMN Fall 2018 Math 5705 midterm #1 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/18f/mt1s.pdf`

[18s-hw2s] Darij Grinberg, *UMN Spring 2018 Math 4707 homework set #2 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/18s/hw2s.pdf`

[18s-hw3s] Darij Grinberg, *UMN Spring 2018 Math 4707 homework set #3 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/18s/hw3s.pdf`

[19fco] Darij Grinberg, *Enumerative Combinatorics: class notes*, 14 May 2021.
`http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/19fco/n/n.pdf`

[19fco-hw3s] Darij Grinberg, *Drexel Fall 2019 Math 222 homework set #3 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/19fco/hw3s.pdf`

[19fco-mt1s] Darij Grinberg, *Drexel Fall 2019 Math 222 midterm #1 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/19fco/mt1s.pdf`

[19fco-mt2s] Darij Grinberg, *Drexel Fall 2019 Math 222 midterm #1 with solutions*, `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/19fco/mt1s.pdf`

[20f] Darij Grinberg, *Math 235: Mathematical Problem Solving*, 22 March 2021.
`http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/20f/mps.pdf`

[21s] Darij Grinberg, *An Introduction to Algebraic Combinatorics [Math 701, Spring 2021 lecture notes]*, 17 May 2022.
`https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/21s/lecs.pdf`

[Aigner07] Martin Aigner, *A Course in Enumeration*, Graduate Texts in Mathematics #238, Springer 2007.

[Alon02] Noga Alon, *Combinatorial Nullstellensatz*, Probability and Computing **8** (1999), pp. 7–29.
`https://www.cs.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/null2.pdf`

[AndDos10] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*, 2nd edition, XYZ Press 2010.

[AndDos12] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Straight from the Book*, XYZ Press 2012.

[AndFen04] Titu Andreescu, Zuming Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Springer 2004.

[BenQui03] Arthur T. Benjamin and Jennifer J. Quinn, *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, The Mathematical Association of America, 2003.

[BenQui08] Arthur T. Benjamin and Jennifer J. Quinn, *An Alternate Approach to Alternating Sums: A Method to DIE for*, The College Mathematics Journal, Volume 39, Number 3, May 2008, pp. 191-202(12).

[Brouwe09] Andries E. Brouwer, *The number of dominating sets of a finite graph is odd*, `http://www.win.tue.nl/~aeb/preprints/domin2.pdf` .

[Cigler06] Johann Cigler, *Konkrete Analysis (SS 2004)*, `https://homepage.univie.ac.at/johann.cigler/preprints/KonkreteAnalysis.pdf` .

[Comtet74] Louis Comtet, *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*, D. Reidel Publishing Company, 1974.

[DHLetc19] Galen Dorpalen-Barry, Cyrus Hettle, David C. Livingston, Jeremy L. Martin, George Nasr, Julianne Vega, Hays Whitlatch, *A positivity phenomenon in Elser's Gaussian-cluster percolation model*, arXiv:1905.11330v5.

[Elser84] Veit Elser, *Gaussian-cluster models of percolation and self-avoiding walks*, J. Phys. A: Math. Gen. **17** (1984), pp. 1515–1523.

[FadSom72] D. Faddeev, I. Sominsky, *Problems in Higher Algebra*, Mir 1972.

[Galvin17] David Galvin, *Basic discrete mathematics*, 13 December 2017.
http://www-users.math.umn.edu/~dgrinber/comb/60610lectures2017-Galvin.pdf
(Falls sich die URL ändert, oder der Text Updates bekommt: Die Version vom 13. Dezember 2017 ist in archive.org's Wayback Machine (https://web.archive.org/web/20180205122609/http://www-users.math.umn.edu/~dgrinber/comb/60610lectures2017-Galvin.pdf) zu finden.)

[Granvi05] Andrew Granville, *Binomial coefficients modulo prime powers*, preprint.
https://web.archive.org/web/20181024055320/http://ebooks.bharathuniv.ac.in/gdlc1/gdlc1/EngineeringMergedLibraryv3.0/AndrewGranville/BinomialCoefficientsModuloPrimePowers(5579)/BinomialCoefficientsModuloPrimePowers-AndrewGranville.pdf

[Grinbe08] Darij Grinberg, *St. Petersburg 2003: An alternating sum of zero-sum subset numbers*, 14 March 2008.
https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/StPeters2003.pdf

[Grinbe09] Darij Grinberg, *A hyperfactorial divisibility*, 2015.
http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/hyperfactorialBRIEF.pdf

[Grinbe15] Darij Grinberg, *Notes on the combinatorial fundamentals of algebra*, 10 January 2019, arXiv:2008.09862v1.
Auch auf https://github.com/darijgr/detnotes/releases/tag/2019-01-10 zu finden.
Siehe auch http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/primes2015/sols.pdf für eine Version, die (evtl.) Updates bekommen wird.

[Grinbe16b] Darij Grinberg, *4th QEDMO, Problem 13 with solution*, version of 28 May 2016.
http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/QEDMO4P13.pdf

[Grinbe17] Darij Grinberg, *Notes on graph theory*, 10 January 2019.
http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/t/17s/nogra.pdf

[Grinbe20] Darij Grinberg, *The Elser nuclei sum revisited*, arXiv:2009.11527v1, 24 September 2020.
http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/algebra/elsersum.pdf

[GrKnPa94] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, *Concrete Mathematics, Second Edition*, Addison-Wesley 1994.
Siehe `https://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/gkp.html` für Verbesserungen.

[HeiTit18] Irene Heinrich, Peter Tittmann, *Neighborhood and Domination Polynomials of Graphs*, Graphs and Combinatorics **34** (2018), pp. 1203–1216.

[Huette17] Jesko Hüttenhain, *Permutationsgruppen*, 2017.
`https://huettenhain.net/written/scripts/zykelzerlegung.pdf`

[Knuth93] Donald E. Knuth, *Johann Faulhaber and sums of powers*, Math. Comp. **61** (1993), no. 203, 277–294.
`https://www.ams.org/journals/mcom/1993-61-203/S0025-5718-1993-1197512-7/`

[Loeh18] Clara Löh, *Algebra: Wintersemester 2017/18*, 9. Februar 2018.
`http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/algebra_ws1718/lecture_notes.pdf`

[Loehr11] Nicholas A. Loehr, *Bijective Combinatorics*, Chapman & Hall/CRC 2011.

[MilTho33] L. M. Milne-Thomson, *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan 1933.

[Prasol94] Viktor V. Prasolov, *Problems and Theorems in Linear Algebra*, Translations of Mathematical Monographs, vol. #134, AMS 1994.

[Reiher07] Christian Reiher, *On Kemnitz' conjecture concerning lattice points in the plane*, Ramanujan J. **13** (2007), pp. 333–337, arXiv:1603.06161v1.

[Sagan19] Bruce Sagan, *Combinatorics: The Art of Counting*, preliminary version, 7 January 2020.
`https://users.math.msu.edu/users/bsagan/Books/Aoc/final.pdf`

[Sete10] Olivier Sète, *Zur Zykelliste von Permutationen*, 2010.
`https://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinAlg1/Permutationen.pdf`

[Smid09] Vita Smid, *Inclusion-Exclusion Principle: Proof by Mathematical Induction*, 2 December 2009.
`https://faculty.math.illinois.edu/~nirobles/files453/iep_proof.pdf`

[Soerge20] Wolfgang Soergel, *Mathematische Werkbank*, 9. September 2020. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXALLES.pdf

[Spivey19] Michael Z. Spivey, *The Art of Proving Binomial Identities*, CRC Press 2019.

[Stanle01] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, volume 2*, First edition, Cambridge University Press 2001.
Siehe http://math.mit.edu/~rstan/ec/ für Verbesserungen.

[Stanle11] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, volume 1*, Second edition, version of 15 July 2011.
http://math.mit.edu/~rstan/ec/ .
Siehe http://math.mit.edu/~rstan/ec/ für Verbesserungen.

[Stanley-AC2] Richard P. Stanley, *Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More*, 2nd edition, Springer 2018.
Siehe http://www-math.mit.edu/~rstan/algcomb/ für Verbesserungen.

[Stix16] Jakob Stix, *Grundlagen der Algebra*, 6. September 2016.
https://www.uni-frankfurt.de/60889078/Stix-GrundlagenAlgebra-Skript2016.pdf

[Stoll18] Michael Stoll, *Einfuhrung in die Algebra: Sommersemester 2018*, 16. Juli 2018.
http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/teaching/EinfAlg-SS2018/Skript-EinfAlg-pub-print.pdf

[Strick13] Neil Strickland, *MAS201 Linear Mathematics for Applications*, 2019.
https://neilstrickland.github.io/linear_maths/

[Ward91] James Ward, *100 years of Dixon's identity*, Irish Mathematical Society Bulletin **27** (1991), pp. 46–54.
https://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull27/bull27_46-54.pdf

[White10] Dennis White, *Math 4707: Inclusion-Exclusion and Derangements*, 18 October 2010.
http://www-users.math.umn.edu/~reiner/Classes/Derangements.pdf

[Whitne32] Hassler Whitney, *A logical expansion in mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. **38**(8), pp. 572–579 (August 1932).
https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1932-05460-X