

Über die Bausteine der mathematischen Logik

by Schönfinkel, M.

in: Mathematische Annalen, (page(s) 305 - 316)

Berlin, Göttingen, Heidelberg; 1869

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright.

Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Über die Bausteine der mathematischen Logik.

Von

M. Schönfinkel in Moskau¹⁾.

§ 1.

Es entspricht dem Wesen der axiomatischen Methode, wie sie heute vor allem durch die Arbeiten Hilberts zur Anerkennung gelangt ist, daß man nicht allein hinsichtlich der Zahl und des Gehalts der *Axiome* nach möglicher Beschränkung strebt, sondern auch die Anzahl der als undefiniert zugrunde zu legenden *Begriffe* so klein wie möglich zu machen sucht, indem man nach Begriffen fahndet, die vorzugsweise geeignet sind, um aus ihnen alle anderen Begriffe des fraglichen Wissenszweiges aufzubauen. Begreiflicherweise wird man sich im Sinne dieser Aufgabe bezüglich des Verlangens nach Einfachheit der an den Anfang zu stellenden Begriffe entsprechend bescheiden müssen.

Bekanntlich lassen sich die grundlegenden *Aussagenverknüpfungen* der mathematischen Logik, die ich hier in der von Hilbert in seinen Vorlesungen verwendeten Bezeichnungswiese wiedergebe:

$$\bar{a}, \quad a \vee b, \quad a \& b, \quad a \rightarrow b, \quad a \sim b$$

(lies: „*a* nicht“, „*a* oder *b*“, „*a* und *b*“, „wenn *a*, so *b*“, „*a* äquivalent *b*“), aus einer einzigen von ihnen überhaupt nicht, aus zweien von ihnen aber nur in der Weise gewinnen, daß man die Negation und irgendeine der drei folgenden Verknüpfungen als undefiniert zugrunde legt. (Von diesen drei Arten der Zurückführung haben Whitehead und Russell die erste und Frege die dritte verwendet.)

Daß dessenungeachtet die Zurückführung auf eine einzige Grundverknüpfung sehr wohl möglich ist, sobald man sich von der Einschränkung

¹⁾ Die folgenden Gedanken wurden vom Verfasser am 7. Dez. 1920 vor der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen vorgetragen. Ihre formale und stilistische Durcharbeitung für diese Veröffentlichung wurde von H. Behmann in Göttingen übernommen.

frei macht, daß diese gerade der obigen Reihe entnommen sein soll, ist erst neuerdings von Sheffer²⁾ entdeckt worden. Wählt man nämlich als Grundverknüpfung etwa „ a nicht oder b nicht“, d. h. „von den Aussagen a und b ist mindestens eine falsch“, die mit den obigen Zeichen in den beiden äquivalenten Formen

$$\bar{a} \vee \bar{b} \quad \text{und} \quad \overline{a \& b}$$

geschrieben werden kann, und als zugehöriges neues Zeichen

$$a | b,$$

so ist augenscheinlich

$$\bar{a} = a | a, \quad a \vee b = (a | a) | (b | b),$$

womit wegen

$$a \& b = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}}, \quad (a \rightarrow b) = \bar{a} \vee b, \quad (a \sim b) = (a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a)$$

die Zurückführung grundsätzlich geleistet ist.

Es ist nun bemerkenswerterweise sogar noch darüber hinaus möglich, durch eine geeignete Abänderung der Grundverknüpfung auch die beiden höheren Aussagen

$$(x)f(x) \quad \text{und} \quad (Ex)f(x),$$

d. h. „Alle Individuen haben die Eigenschaft f “ und „Es gibt ein Individuum, das die Eigenschaft f hat“, mit andern Worten, die beiden Operationen (x) und (Ex) , die mit den früheren zusammen bekanntlich ein im Sinne der Axiomatik vollständiges System von Grundverknüpfungen der mathematischen Logik ausmachen, mit zu erfassen.

Verwenden wir nämlich als Grundbeziehung nunmehr

$$(x)[\overline{f(x) \vee g(x)}] \quad \text{bzw.} \quad (x)\overline{f(x) \& g(x)}$$

und schreiben wir hierfür

$$f(x) |^x g(x),$$

so gilt offenbar (da wir Konstante formal wie Funktionen eines Arguments behandeln dürfen):

$$\bar{a} = a |^x a, \quad a \vee b = (x)(\bar{a} \vee \bar{b}) = \bar{a} |^x \bar{b} = (a |^y a) |^x (b |^y b),$$

$$(x)f(x) = (x)\overline{(\overline{f(x)} \vee \overline{f(x)})} = \overline{f(x)} |^x \overline{f(x)} = (f(x) |^y f(x)) |^x (f(x) |^y f(x)),$$

womit wegen

$$(Ex)f(x) = \overline{(x)\overline{f(x)}}$$

auch die neue Behauptung erwiesen ist.

Die bisherigen Erfolge auf dem eingeschlagenen Wege ermutigen zu dem Versuch eines weiteren Fortschreitens. Man wird auf den im ersten

²⁾ Am. Math. Soc. Trans. 14 (1913), S. 481.

Augenblick gewiß äußerst kühn erscheinenden Gedanken geführt, hinsichtlich völlig beliebiger logisch allgemeiner Aussagen — für andere hätte das Verlangen offenbar keinen Sinn — auch die noch verbleibenden Grundbegriffe der Aussage, der Aussagenfunktion und der Veränderlichen durch geeignete Zurückführung zu beseitigen zu suchen. Eine derartige Möglichkeit näher zu prüfen und zu verfolgen, wäre nicht nur vom methodischen Standpunkt des Strebens nach größtmöglicher gedanklicher Einheitlichkeit, sondern auch von einem gewissen philosophischen oder, wenn man will, ästhetischen Standpunkt wertvoll, insofern nämlich, als die Veränderliche in der logischen Aussage ja nichts weiter als ein Abzeichen ist, um gewisse Argumentstellen und Operatoren als zusammengehörig zu kennzeichnen, und somit den Charakter eines bloßen, dem konstanten, „ewigen“ Wesen der logischen Aussage eigentlich unangemessenen Hilfsbegriffes hat.

Es erscheint mir äußerst bemerkenswert, daß auch das eben aufgestellte Ziel der Verwirklichung fähig ist, und zwar in dem Sinne, daß hier die Zurückführung auf drei Grundzeichen gelingt.

§ 2.

Zur Erreichung dieser letzten und tiefsten Zurückführung bedarf es nun freilich einer Reihe von Hilfsmitteln und Tatsachenzusammenhängen, die zunächst bereitgestellt und erklärt werden müssen.

Es wird darum notwendig sein, unser Problem an dem vorhin erreichten Punkte stehen zu lassen und vorerst eine Art von *Funktionskalkül* — in einem gegenüber dem sonst üblichen verallgemeinerten Sinne — zu entwickeln.

Unter einer *Funktion* versteht man bekanntlich im einfachsten Falle eine Zuordnung zwischen den Elementen irgendeines Bereiches von Größen, des Argumentbereiches, und denen eines (zumeist freilich mit dem ersten zusammenfallend gedachten) Bereiches der Funktionswerte, derart, daß jedem Argumentwert höchstens ein Funktionswert entspricht. Dieser Begriff soll hier nun in dem Sinne erweitert werden, daß sowohl als Argumentwerte wie auch als Funktionswerte selbst wieder Funktionen auftreten können. Den Wert einer Funktion f für den Argumentwert x bezeichnen wir durch einfaches Nebeneinanderstellen des Funktions- und des Argumentzeichens, d. h. als

$$fx.$$

Funktionen mehrerer Argumente lassen sich auf Grund unserer erweiterten Begriffsbestimmung der Funktion in der folgenden Weise auf solche eines Arguments zurückführen:

Wir fassen z. B.

$$F(x, y)$$

etwa als eine Funktion des einzigen Arguments y , aber nicht mehr als eine fest gegebene, sondern als eine veränderliche, ihrer Gestalt nach von x abhängige Funktion auf. (Es handelt sich hier — wohlverstanden — um eine Abhängigkeit der *Funktion*, also der Zuordnung selbst, nicht etwa um die selbstverständliche Abhängigkeit des Funktionswertes vom Argument.) In der Mathematik pflegt man hier von einer Funktion zu reden, die noch von einem Parameter abhängt, und etwa

$$G_x(y)$$

zu schreiben. Wir können diese Funktion G selbst — ihre Gestalt sozusagen — als den Wert (Funktionswert) einer neuen Funktion f betrachten, so daß $G = fx$ ist.

Wir schreiben daher in unserer Symbolik

$$(fx)y$$

oder, indem wir, wie dies z. B. aus der Theorie der unendlichen Reihen geläufig ist, verabreden, daß Klammern, die das linke Ende einer derartigen symbolischen Form mit umfassen, wegbleiben dürfen, einfacher

$$fxy,$$

wo die neue Funktion f von der früheren F wohl zu unterscheiden ist.

Ich möchte die eben geschilderte Umformung dadurch dem Verständnis näherbringen, daß ich sie auf die spezielle Zahlenfunktion $x - y$ anwende. Betrachtet man den Ausdruck als Funktion von y allein, so hat diese die „Gestalt“ $x -$, bedeutet also die „Differenz des x mit irgendeiner gegebenen Größe“, womit jener sich als $(x -)y$ darstellt. Wesentlich ist hier, daß nicht etwa für x und y gleichzeitig Werte eingesetzt zu denken sind, sondern zunächst allein für x etwa der Wert a , wodurch als Zwischenstufe erst die Funktion mit dem Wert $a - y$ (kurz: die Funktion $a -$) entsteht, derart, daß nun erst die Ersetzung des y etwa durch den festen Wert b angängig wird.

fx ist also im obigen Falle der Wert einer Funktion, die nach Einsetzung eines Wertes für x noch nicht ein Ding des Grundbereiches (falls ein solches als Wert von $F(x, y)$ gemeint war), sondern wiederum eine Funktion liefert, deren Argument nunmehr y ist; d. h. f ist eine Funktion, deren Argument keiner Einschränkung zu unterliegen braucht, deren Funktionswert aber wieder eine Funktion ist. Die oben beschriebene Umformung werden wir von nun an für Funktionen von mehr als einer Veränderlichen stets durchführen bzw. durchgeführt denken, so daß diese durchweg in der Form

$$fxyz\dots$$

erscheinen, die, wie schon gesagt, als Abkürzung für

$$(((fx)y)z) \dots$$

gedeutet werden soll.

§ 3.

Es soll nunmehr eine Reihe von *individuellen Funktionen* von sehr allgemeiner Natur eingeführt werden. Ich nenne sie: die Identitätsfunktion I , die Konstanzfunktion C , die Vertauschungsfunktion T , die Zusammensetzungsfunktion Z und die Verschmelzungsfunktion S .

1. Unter der *Identitätsfunktion* I soll diejenige völlig bestimmte Funktion verstanden werden, deren Argumentwert keiner Einschränkung unterworfen ist und deren Funktionswert stets mit dem Argumentwert übereinstimmt, durch die also jedes Ding und jede Funktion sich selbst zugeordnet wird. Sie ist somit definiert durch die Gleichung

$$Ix = x,$$

in welcher das Gleichheitszeichen nicht etwa als logische Äquivalenz im Sinne der im logischen Aussagenkalkül üblichen Definition zu lesen ist, sondern besagt, daß die Ausdrücke links und rechts dasselbe bedeuten, d. h. daß der Funktionswert Ix stets derselbe ist wie der Argumentwert x , was man auch für x einsetzen mag. (So wäre z. B. $II = I$.)

2. Nunmehr sei der Argumentwert wieder ohne Einschränkung beliebig, während der Funktionswert unabhängig von jenem stets der feste Wert a sein soll. Diese Funktion ist ihrerseits von a abhängig, also von der Form Ca . Daß ihr Funktionswert stets a ist, wird geschrieben:

$$(Ca)y = a.$$

Und, indem wir nun auch a variabel lassen, erhalten wir:

$$(Cx)y = x \quad \text{bzw.} \quad Cxy = x$$

als Definitionsgleichung der *Konstanzfunktion* C . Diese Funktion C ist augenscheinlich von der auf S. 308 betrachteten Art; sie liefert nämlich erst durch Einsetzen eines festen Wertes für x eine Funktion mit dem Argument y . In der praktischen Anwendung leistet sie uns den Dienst, daß sie eine Größe x als „blinde“ Veränderliche einzuführen gestattet.

3. Einen Ausdruck

$$fxy$$

kann man offenbar auch umgekehrt stets als aus

$$F(x, y)$$

entstanden betrachten, wo F durch das gegebene f eindeutig bestimmt ist. Schreibt man diesen Ausdruck nun andererseits um in

$$g y x,$$

indem man also y als Parameter betrachtet, so ist auch diese neue Funktion durch F und daher mittelbar auch durch f eindeutig gegeben.

Wir können daher die Funktion g als den Wert einer Funktion T für den Argumentwert f auffassen. Diese *Vertauschungsfunktion* T hat als Argument eine Funktion der Form $\varphi x y$, und der Funktionswert

$$\psi = T\varphi$$

ist diejenige Funktion $\psi x y$, für welche der Wert $\psi x y$ mit $\varphi y x$ bei allen den Argumentwerten x, y übereinstimmt, für die $\varphi y x$ einen Sinn hat. Wir schreiben diese Definition kurz:

$$(T\varphi) x y = \varphi y x,$$

wo die Klammern wiederum auch fehlen dürfen.

Die Funktion T bietet die Möglichkeit, die Reihenfolge der Glieder eines Ausdrucks abzuändern, und hilft damit über den Mangel des kommutativen Gesetzes bis zu einem gewissen Grade hinweg.

4. Erscheint an der Argumentstelle einer Funktion f der (von x abhängige) Wert einer anderen Funktion g , so hängt

$$f(g x)$$

augenscheinlich ebenfalls von x ab und kann folglich als der Wert einer dritten, durch f und g eindeutig bestimmten Funktion F betrachtet werden. In der Analysis spricht man hier bekanntlich ungenau von einer „Funktion von einer Funktion“ — es müßte richtig heißen: eine Funktion von einem Funktionswert — und bezeichnet F als die aus f und g „zusammengesetzte“ Funktion. Die Funktion F ist somit ihrerseits der Wert einer bestimmten Funktion Z' von f und g .

Wir könnten daher definieren:

$$[Z'(\varphi, \chi)] x = \varphi(\chi x).$$

Doch werden wir es im Sinne unserer früheren Verabredung vorziehen, Z' durch die zugehörige Funktion eines Arguments zu ersetzen, und erhalten demzufolge als Definitionsgleichung der *Zusammensetzungsfunktion* Z :

$$Z\varphi\chi x = \varphi(\chi x).$$

Vermittels der Funktion Z können Klammern innerhalb eines umfassenderen Ausdrucks verschoben werden (nicht eigentlich beseitigt, da sie stets noch hinzuzudenken sind); sie wirkt also im Sinne des hier ebenfalls nicht erfüllten assoziativen Gesetzes.

5. Setzt man in

$$fxy$$

für y den Wert einer Funktion g ein, und zwar genommen für dasselbe x , das als Argument von f auftritt, so kommt man auf einen Ausdruck

$$fx(gx)$$

oder, wie wir für den Augenblick etwas übersichtlicher schreiben wollen:

$$(fx)(gx).$$

Dies ist natürlich der Wert einer Funktion von x allein, also

$$(fx)(gx) = Fx,$$

wo

$$F = S'(f, g)$$

wieder in einer völlig bestimmten Weise von den gegebenen Funktionen f und g abhängt. Wir haben demgemäß:

$$[S'(\varphi, \chi)]x = (\varphi x)(\chi x)$$

oder, nach der auch im vorigen Fall verwendeten Umformung:

$$S\varphi\chi x = (\varphi x)(\chi x)$$

als Definitionsgleichung der *Verschmelzungsfunktion* S .

Es wird gut sein, diese Funktion durch ein praktisches Beispiel dem Verständnis näherzubringen. Nehmen wir etwa für fxy den Wert ${}^x\log y$ (d. h. den Logarithmus von y zu der Basis x) und für gz den Funktionswert $1 + z$, so ergibt sich $(fx)(gx)$ augenscheinlich als ${}^x\log(1 + x)$, d. h. als der Wert einer Funktion von x , die mit den beiden gegebenen Funktionen eben durch unsere allgemeine Funktion S eindeutig verknüpft ist.

Der praktische Nutzen der Funktion S besteht ersichtlich darin, daß sie es ermöglicht, mehrmals auftretende Veränderliche — und bis zu einem gewissen Grade auch individuelle Funktionen — nur einmal auftreten zu lassen.

§ 4.

Es wird sich für die Durchführung unseres logisch-symbolischen Problems als belangreich erweisen, daß die oben erklärten fünf individuellen Funktionen I, C, T, Z, S des Funktionenkalküls nicht voneinander unabhängig sind, vielmehr zwei von ihnen, nämlich C und S , hinreichen, um die übrigen durch sie zu definieren. Und zwar bestehen hier die folgenden Zusammenhänge:

1. Es ist gemäß der Erklärung der Funktionen I und C :

$$Ix = x = Cxy.$$

Da y willkürlich ist, können wir dafür ein beliebiges Ding oder eine beliebige Funktion einsetzen, also z. B. Cx . Dies gibt:

$$Ix = (Cx)(Cx).$$

Nach der Erklärung von S bedeutet dies aber:

$$SCCx,$$

so daß wir erhalten:

$$I = SCC. ^3)$$

Übrigens kommt es in dem Ausdruck SCC auf das letzte Zeichen C gar nicht einmal an. Setzen wir nämlich oben für y nicht Cx , sondern die willkürliche Funktion φx , so ergibt sich entsprechend:

$$I = SC\varphi,$$

wo also für φ jede beliebige Funktion eingesetzt werden kann⁴⁾.

2. Nach der Erklärung von Z ist

$$Zfgx = f(gx).$$

Weiter ist vermöge der bereits verwendeten Umformungen

$$f(gx) = (Cfx)(gx) = S(Cf)gx = (CSf)(Cf)gx.$$

Verschmelzung nach f ergibt:

$$S(CS)Cf gx,$$

also

$$Z = S(CS)C.$$

3. Ganz entsprechend läßt sich

$$Tf yx = fxy$$

weiter umformen in:

$$\begin{aligned} fx(Cyx) &= (fx)(Cyx) = Sf(Cy)x = (Sf)(Cy)x = Z(Sf)Cyx \\ &= ZZSfCyx = (ZZSf)Cyx = (ZZSf)(CCf)yx = S(ZZS)(CC)fyx. \end{aligned}$$

Es gilt somit:

$$T = S(ZZS)(CC).$$

Setzt man hier für Z den oben gefundenen Ausdruck ein, so ist damit T ebenfalls auf C und S zurückgeführt.

§ 5.

Wir wollen nunmehr unsere Ergebnisse auf den besonderen Fall des Logikkalküls anwenden, in welchem die Grundelemente die Individuen und

³⁾ Diese Zurückführung wurde mir von Herrn Boskowitz mitgeteilt, die etwas weniger einfache $(SC)(CC)$ bereits früher von Herrn Bernays.

⁴⁾ Freilich nur eine solche, die für jedes x einen Sinn hat.

die Funktionen die Aussagefunktionen sind. Wir brauchen zunächst eine weitere individuelle Funktion, die diesem Kalkül eigentümlich ist. Der Ausdruck

$$fx |^x gx,$$

wo f und g Aussagefunktionen eines Arguments sind — auf solche dürfen wir uns gemäß einer früheren Bemerkung beschränken —, ist augenscheinlich eine bestimmte Funktion der beiden Funktionen f und g , also von der Form $U(f, g)$ oder, nach unserem Umformungsprinzip, Ufg . Damit haben wir

$$Ufg = fx |^x gx,$$

wo f und g nun natürlich Aussagefunktionen sind, als Definitionsgleichung der *Unverträglichkeitsfunktion* U .

Es besteht nun die bemerkenswerte Tatsache, daß jede logische Formel sich allein durch unsere individuellen Funktionen I, C, T, Z, S, U , also insbesondere schon durch C, S und U ausdrücken läßt.

Zunächst einmal läßt sich jede logische Formel vermittels der verallgemeinerten Strichsymbolik ausdrücken, wobei die gebundenen Veränderlichen (apparent variables) an den oberen Enden der Striche stehen. Dies gilt ohne Einschränkung, also für beliebige Aussagenordnungen und auch, wenn Beziehungen auftreten. Weiterhin läßt sich schrittweise mit geeigneter Verwendung der übrigen konstanten Funktionen an Stelle des Strichsymbols die Funktion U einführen.

Der Nachweis soll hier nicht vollständig durchgeführt, sondern nur die Rolle der verschiedenen individuellen Funktionen bei dieser Zurückführung erläutert werden.

Vermöge der Funktion C kann man erreichen, daß die beiden links und rechts vom Strich stehenden Ausdrücke Funktionen desselben Arguments sind.

So wäre z. B. der von f, g und y abhängige Ausdruck

$$fx |^x gy,$$

wo also rechts x nicht vorkommt, als

$$fx |^x C(gy)x$$

umzuschreiben. Kommt dagegen x rechts an anderer Stelle vor, so läßt es sich vermittels der Funktion T an den Schluß bringen, wobei es gegebenenfalls vermöge der Funktion Z aus Klammern befreit und, falls es mehrmals vorkommen sollte, vermöge der Funktion S verschmolzen werden muß. So haben wir z. B.:

$$fx |^x gxy = fx |^x Tgyx = Uf(Tgy).$$

Oder, um ein etwas verwickelteres Beispiel zu nehmen:

$$(fxy|y^y gxy)|^x(hxz|^z kxz) = U(fx)(gx)|^x U(hx)(kx).$$

Hier ist z. B. der Ausdruck vor dem Strich in der folgenden Weise weiter zu behandeln:

$$U(fx)(gx) = ZUfx(gx) = S(ZUf)gx.$$

Der Gesamtausdruck wird damit:

$$S(ZUf)gx|^x S(ZUh)kx = U[S(ZUf)g][S(ZUh)k].$$

Wären im letzten Beispiel f und g identisch, so würden wir auf einen Ausdruck

$$S(ZUf)f$$

kommen. Um hier die Verschmelzung nach f durchführen zu können, bedienen wir uns der Funktion I , indem wir weiter rechnen:

$$S(ZUf)f = S(ZUf)(If) = [ZS(ZU)f](If) = S[ZS(ZU)]If.$$

Als praktisches Beispiel für die Behauptung dieses Paragraphen behandeln wir die folgende Aussage: „Zu jedem Prädikat gibt es ein mit ihm unverträgliches“, d. h. „Zu jedem Prädikat f gibt es ein Prädikat g , so daß die Aussage $fx \& gx$ für kein Ding x richtig ist“.

In der Hilbertschen Symbolik schreibt sich der Satz:

$$(f)(Eg)(x)fx \& gx.$$

Dies wird zunächst:

$$(f)(Eg)(fx|^x gx)$$

und, indem man das partikuläre Urteil als Verneinung eines allgemeinen schreibt:

$$\overline{(f)(g)fx|^x gx} \text{ bzw. } \overline{(f)(g)fx|^x gx \& fx|^x gx}.$$

Dies ist:

$$(f) \overline{(fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)}.$$

Verfährt man entsprechend auch für f , so ergibt sich weiterhin:

$$\begin{aligned} & (f) \overline{(fx|^x gx)|^g (fx|^x gx) \& (fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)} \\ & = [(fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)]|^f [(fx|^x gx)|^g (fx|^x gx)]. \end{aligned}$$

Nunmehr erscheint das Strichsymbol als einziges logisches Verknüpfungszeichen. Führen wir jetzt die Unverträglichkeitsfunktion U ein, so erhalten wir zunächst:

$$[(Ufg)|^g (Ufg)]|^f [(Ufg)|^g (Ufg)]$$

und weiterhin:

$$[U(Uf)(Uf)]|^f [U(Uf)(Uf)].$$

Nun ist aber:

$$U(Uf)(Uf) = (ZUUf)(Uf) = S(ZUU)Uf,$$

womit der obige Ausdruck übergeht in:

$$[S(ZUU)Uf] \uparrow [S(ZUU)Uf],$$

d. h. aber:

$$U[S(ZUU)U] [S(ZUU)U].$$

§ 6.

Weiter als bis zu den Symbolen C , S und U läßt sich, soviel wir sehen, die Zurückführung nicht ohne Zwang treiben.

Rein schematisch könnte man freilich C , S und U sogar durch eine einzige Funktion ersetzen, indem man die neue Funktion J einführte durch die Festsetzung:

$$JC = U, \quad JS = C, \quad Jx = S,$$

wo x jedes von C und S verschiedene Ding ist. Wir stellen zunächst fest, daß J seinerseits von C und S verschieden ist, da nämlich J nur drei, C ebenso wie S dagegen unendlich viele Funktionswerte annimmt. Wir haben infolgedessen:

$$JJ = S, \quad J(JJ) = JS = C, \quad J[J(JJ)] = JC = U,$$

womit die Zurückführung in der Tat geleistet ist. Doch hat diese wegen ihrer augenscheinlichen Willkür wohl kaum sachliche Bedeutung.

Dagegen⁵⁾ kann man sich auf einem anderen, natürlicheren Wege wenigstens von dem Zeichen U in gewissem Sinne befreien. Jede logische Formel enthält gewiß das Zeichen U und läßt sich, ganz wie wir dies früher für ein beliebiges Symbol überlegt haben, vermittels der individuellen Funktionen des allgemeinen Funktionenkalküls, also insbesondere vermittels C und S so umformen, daß U als Argument des gesamten Ausdrucks erscheint, dieser also die Form FU annimmt, wo F das U seinerseits nicht mehr enthält. Läßt man beim Hinschreiben das U als selbstverständlich weg, so kommt man in der Tat mit C und S aus.

Andererseits könnte man, mit Verzicht auf die äußerste Zurückführung der Grundfunktionszeichen, die Forderung aufstellen, daß die Klammern ganz vermieden werden sollen. Gehen wir von der Form FU aus, so läßt sich F allein vermöge Z so schreiben, daß alle Klammern verschwinden. Vermittels C , Z und S läßt sich also jede logische Formel als eine einfache Aueinanderfolge dieser Zeichen ohne Klammern schreiben, mithin durch eine Zahl des triadischen Systems erschöpfend kennzeichnen.

⁵⁾ Die folgenden Überlegungen rühren vom Bearbeiter her.

Was die Frage nach der *Eindeutigkeit* der betrachteten Zurückführung betrifft, so kann, rein symbolisch betrachtet, von einer solchen natürlich keine Rede sein, da jede Formel des alten wie auch des neuen Kalküls sich in mannigfacher Weise umformen läßt. Gleichwohl kann man in einem gewissen eingeschränkteren Sinne hier doch eine Eindeutigkeit des Entsprechens feststellen. Nennt man nämlich „gleichwertig“ einerseits solche Formeln des alten Kalküls, die allein auf Grund von Definitionen, d. h. also ohne Benutzung der logischen Axiome — in denen natürlich die verallgemeinerte Sheffersche Verknüpfung nunmehr als Grundverknüpfung zu gelten hätte — aufeinander zurückgeführt werden können, und andererseits solche, die sich allein in den Typen der auftretenden Veränderlichen unterscheiden, so entsprechen in der Tat ein und derselben Formel des neuen Kalküls und ebenso einer jeden, die sich durch symbolische Rechnung aus ihr gewinnen läßt, alle und nur solche Formeln des alten Kalküls, die in dem eben erklärten Sinne untereinander gleichwertig sind. Die hier betrachtete Zurückführung der logischen Formeln hat also die bemerkenswerte Eigentümlichkeit, von den Axiomen der Logik unabhängig zu sein.

(Eingegangen am 15. 3. 1924.)