Es stellt sich heraus, dass es einfacher ist, nicht sofort die Normalverteilung φ mit der Binomialverteilung φ_n zu vergleichen, sondern von den jeweiligen natürlichen Logarithmen ln $\varphi(z)$ beziehungsweise ln $\varphi_n(z)$ auszugehen.

Außerdem ist es zweckmäßig, zuerst die Ableitungen auf ihre Konvergenz zu untersuchen. Die Funktion ln $\varphi(z)$ läst sich leicht bilden und ableiten:

$$\left[\ln\varphi(z)\right]' = \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)\right]' = \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}z^2\right]' = -z$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\varphi_n(z)\right]' = \left[\ln\varphi(z)\right]'$$

Nebenrechnung: $\ln\left(e^{-\frac{1}{2}z^2}\right) = -\frac{1}{2}z^2$ und $\left(-\frac{1}{2}z^2\right) = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot z = -z$

$$\left[\ln\varphi(z)\right]' = -z$$

Nun muss also gezeigt werden, dass der Differenzenquotient der Funktion $\varphi_n(z)$ für $n \to \infty$ zum Differentialquotienten, also zur Ableitung wird, und dieser genau $-z$ als Grenzwert hat. Durch Anwendung der Kettenregel und $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ergibt sich:

$$\left[\ln\varphi_n(z)\right]' = \frac{1}{\varphi_n(z)}\cdot\varphi_n'(z) = \frac{1}{\varphi_n(z)}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\varphi_n(z+\Delta z)-\varphi_n(z)}{\Delta z}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\varphi_n(z+\Delta z)-\varphi_n(z)}{\varphi_n(z)}\cdot\frac{1}{\Delta z}\right)$$

Bemerkung: Da $\varphi_n(z)$ nicht von Δz abhängt, kann es in den Limes gezogen werden.

$$\left[\ln\varphi_n(z)\right]' = \lim_{\Delta z\to 0} Q =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\underbrace{\left(\frac{\varphi_n(z+\Delta z)-\varphi_n(z)}{\varphi_n(z)}\cdot\frac{1}{\Delta z}\right)}_{:=Q}$$

Da nicht der Grenzwert für $\Delta z \to 0$, sondern der für $n \to \infty$ von Interesse ist, ist es wichtig zu untersuchen, wie sich Δz bei wachsendem n verhält. Da $z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ mit $x \in N_0$ erhält man das kleinste Δz wenn man $z(x+1) - z(x)$ berechnet:

$\Delta z = \frac{(x+1)-np}{\sqrt{npq}} - \frac{x-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$; Das bedeutet, dass Δz für große n gegen 0 strebt. Deshalb kann man den Limes des Differenzenquotienten in der Tat als Ableitung betrachten.

$n \to \infty \Rightarrow \Delta z \to 0$

$\Delta z_{minimal} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$

Nun kann man daran gehen, diesen Grenzwert zu berechnen. Dafür setzt man $\frac{1}{\Delta z} = \sqrt{npq}$ und für φ_n die Formel der Wahrscheinlichkeit der Binomialverteilung ein, wobei gilt, dass $\varphi_n(z) = f_n(x)$ und $\varphi_n(z + \Delta z) = f_n(x + 1)$ ist (da der kleinste mögliche Zuwachs von x ganzzahlig, also 1 sein muss, siehe oben):

$$\frac{\varphi_n(z+\Delta z)-\varphi_n(z)}{\varphi_n(z)} \cdot \frac{1}{\Delta z} = \frac{f_n(x+1)-f_n(x)}{f_n(x)} \cdot \sqrt{npq} =$$

$$= \left(\frac{f_n(x+1)}{f_n(x)} - 1\right) \cdot \sqrt{npq} = \left(\frac{\binom{n}{x+1} \cdot p^{x+1} \cdot q^{n-x-1}}{\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}} - 1\right) \cdot \sqrt{npq} =$$

$$= \frac{n! \cdot x! \cdot (n-x)!}{n! \cdot (x+1)! \cdot (n-x-1)!} \cdot \frac{p}{q} = \left(\frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} - 1\right) \cdot \sqrt{npq} =$$

$$= \left(\frac{np-px}{qx+q} - \frac{qx+q}{qx+q}\right) \cdot \sqrt{npq} = \frac{np-x-q}{qx+q} \cdot \sqrt{npq}$$

$$f_n(x+1) = \binom{n}{x+1} \cdot p^{x+1} \cdot q^{n-x-1}$$

$$f_n(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \; Q = \frac{np-x-q}{qx+q} \cdot \sqrt{npq}$$

(Bemerkung: -px - qx = -x · (p+q) = -x · 1 = -x). Nun soll die Variable aber nicht x sondern z heißen. Man verwendet daher die Beziehung $x = z \cdot \sigma + \mu$ und vereinfacht:

$$= \frac{np - (z \cdot \sqrt{npq} + np) - q}{q(z \cdot \sqrt{npq} + np) + q} \cdot \sqrt{npq} = \frac{-z \cdot npq - q \cdot \sqrt{npq}}{zq \cdot \sqrt{npq} + npq + q} =$$

$$x = z \cdot \sigma + \mu = z \cdot \sqrt{npq} + np$$

Um den Grenzwert dieses Ausdrucks ausrechnen zu können, dividiert man Zähler und Nenner durch npq und erhält somit:

$$= \frac{-z - \frac{q}{\sqrt{npq}}}{\frac{zq}{\sqrt{npq}} + 1 + \frac{1}{np}}$$

Da die drei Brüche für $n \to \infty$ jeweils gegen 0 gehen, erhält man als endgültigen Grenzwert:

$\lim\limits_{n\to\infty}[\ln \varphi_n(z)]' = -z$, also denselben Wert wie für $[\ln \varphi(z)]'$

$$Q = \frac{-z - \frac{q}{\sqrt{npq}}}{\frac{zq}{\sqrt{npq}} + 1 + \frac{1}{np}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} Q = -z$$

Bis jetzt konnte also gezeigt werden, dass die Ableitungen der Normal- und der Binomialverteilung auf den gleichen Grenzwert konvergieren. Es streben aber noch nicht notwendigerweise die Funktionen selbst auf einen gemeinsamen Wert. Zum direkten Vergleich muss nun wieder integriert und delogarithmiert werden:

$\left[\ln\varphi_n(z)\right]' = -z \Rightarrow \ln\varphi_n(z) = -\frac{1}{2}z^2 + c \Rightarrow \varphi_n(z) = e^c \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}$	$\Rightarrow \varphi_n(z) = e^c \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}$

Vergleicht man diese Funktion mit der Normalverteilung, so erkennt man, dass nur noch zu zeigen ist, dass e^c genau den Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ haben muss. Dies folgt direkt aus der Bedingung jeder Wahrscheinlichkeitsfunktion, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss:

Auch nach dem Grenzübergang muss jetzt gelten: $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(z)dz = 1 = e^c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}dz$

$\sum\varphi_n(z) = 1$

Da $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}dz = \sqrt{2\pi}$ ist, ergibt sich somit für e^c der Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Damit wäre gezeigt, dass eine standardisierte Binomialverteilung gegen die Standardnormalverteilung strebt, wenn n nur genügend groß wird.