QED-Mathematikolympiade 4: Aufgaben und Lösungen

Algebra (Version 1)

Darij Grinberg

Aufgabe A1

Seien a, b und c drei nichtnegative reelle Zahlen. Beweise:

$$|ca - ab| + |ab - bc| + |bc - ca| \leq \left|b^2 - c^2\right| + \left|c^2 - a^2\right| + \left|a^2 - b^2\right|.$$

Lösung der Aufgabe A1

Erste Lösung: Da die zu beweisende Ungleichung

$$|ca - ab| + |ab - bc| + |bc - ca| \leq \left|b^2 - c^2\right| + \left|c^2 - a^2\right| + \left|a^2 - b^2\right| \qquad \text{(A1.1)}$$

in den Variablen a, b und c symmetrisch ist (also bei Vertauschung der Variablen a, b und c ihre Aussage nicht ändert), können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $a \geq b \geq c$ ist (denn sonst können wir die Variablen a, b und c so miteinander vertauschen, daß $a \geq b \geq c$ gilt).

Da die Zahlen a, b und c nichtnegativ sind, folgt aus $a \geq b \geq c$, daß

$$\begin{aligned}
&b \geq c \;\Rightarrow\; b^2 \geq c^2 \;\Rightarrow\; b^2 - c^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \left|b^2 - c^2\right| = b^2 - c^2;\\
&c \leq a \;\Rightarrow\; c^2 \leq a^2 \;\Rightarrow\; c^2 - a^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; \left|c^2 - a^2\right| = -\left(c^2 - a^2\right) = a^2 - c^2;\\
&a \geq b \;\Rightarrow\; a^2 \geq b^2 \;\Rightarrow\; a^2 - b^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \left|a^2 - b^2\right| = a^2 - b^2;\\
&c \leq b \;\Rightarrow\; ca \leq ab \;\Rightarrow\; ca - ab \leq 0 \;\Rightarrow\; |ca - ab| = -(ca - ab) = ab - ca;\\
&a \geq c \;\Rightarrow\; ab \geq bc \;\Rightarrow\; ab - bc \geq 0 \;\Rightarrow\; |ab - bc| = ab - bc;\\
&b \leq a \;\Rightarrow\; bc \leq ca \;\Rightarrow\; bc - ca \leq 0 \;\Rightarrow\; |bc - ca| = -(bc - ca) = ca - bc.
\end{aligned}$$

Daher ist die zu beweisende Ungleichung (A1.1) äquivalent zu

$$\begin{aligned}
(ab - ca) + (ab - bc) + (ca - bc) &\leq \left(b^2 - c^2\right) + \left(a^2 - c^2\right) + \left(a^2 - b^2\right), && \text{also zu}\\
2(ab - bc) &\leq 2\left(a^2 - c^2\right), && \text{also zu}\\
2(a - c)\,b &\leq 2(a - c)(a + c).
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist aber wahr, denn sie folgt aus $2(a - c) \geq 0$ (denn $a \geq c$) und $b \leq a + c$ (denn $b \leq a$). Damit ist die Ungleichung (A1.1) bewiesen, und die Aufgabe ist gelöst.

Zweite Lösung: Wir beweisen eine Verallgemeinerung der Aufgabe:

Satz A1.1: Seien n eine positive ganze Zahl, und a_1, a_2, ..., a_n beliebige nichtnegative Zahlen. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i-1}a_i - a_i a_{i+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^2 - a_{i+1}^2\right|.$$

Dabei sind die Indizes zyklisch modulo n zu verstehen, d. h. wir setzen $a_0 = a_n$ und $a_{n+1} = a_1$.

Beweis von Satz A1.1: Für jedes $i \in \{1;\ 2;\ ...;\ n\}$ ist

$$|a_i - a_{i+1}| + |a_{i-1} - a_i| \geq |a_{i-1} - a_{i+1}|, \tag{A1.2}$$

denn nach der Dreiecksungleichung ist

$$|a_i - a_{i+1}| + |a_{i-1} - a_i| \geq |(a_i - a_{i+1}) + (a_{i-1} - a_i)| = |a_{i-1} - a_{i+1}|.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^2 - a_{i+1}^2\right| = \sum_{i=1}^{n} |(a_i + a_{i+1})(a_i - a_{i+1})| \\
= & \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i+1})|a_i - a_{i+1}| \qquad \text{(denn } a_i + a_{i+1} \geq 0\text{)} \\
= & \sum_{i=1}^{n} a_i |a_i - a_{i+1}| + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} |a_i - a_{i+1}| \\
= & \sum_{i=1}^{n} a_i |a_i - a_{i+1}| + \sum_{i=1}^{n} a_i |a_{i-1} - a_i| \qquad \text{(Indexverschiebung in der zweiten Summe)} \\
= & \sum_{i=1}^{n} a_i (|a_i - a_{i+1}| + |a_{i-1} - a_i|) \\
\geq & \sum_{i=1}^{n} a_i |a_{i-1} - a_{i+1}| \qquad \text{(nach (A1.2) und wegen } a_i \geq 0\text{)} \\
= & \sum_{i=1}^{n} |a_i (a_{i-1} - a_{i+1})| \qquad \text{(denn } a_i \text{ ist nichtnegativ)} \\
= & \sum_{i=1}^{n} |a_{i-1}a_i - a_i a_{i+1}|,
\end{aligned}$$

und Satz A1.1 ist bewiesen.

Die Aufgabe A1 folgt aus Satz A1.1, indem man $n = 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ und $a_3 = c$ setzt.

Aufgabe A2

Sei $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ eine Folge reeller Zahlen, sodaß

$$a_n \geq \frac{(n-1)\,a_{n-1} + (n-2)\,a_{n-2} + ... + 2a_2 + 1a_1}{(n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1}$$

für jedes natürliche $n \geq 2$ gilt. Beweise, daß

$$a_n \geq \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1}{n-1}$$

für jedes natürliche $n \geq 2$ ist.

Lösung der Aufgabe A2

Wir beweisen einen allgemeineren Satz:

Satz A2.1: Sei $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ ...)$ eine monoton steigende Folge positiver reeller Zahlen. Sei $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ eine Folge reeller Zahlen, sodaß

$$a_n \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i} \qquad \text{(A2.1)}$$

für jedes natürliche $n \geq 2$ gilt. Dann ist

$$a_n \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1}$$

für jedes natürliche $n \geq 2$.

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, zeigen wir einen einfachen Hilfssatz, der uns im Folgenden die Rechnung erleichtert:

Satz A2.2: Sind A, a, U, u, V und v sechs reelle Zahlen mit $U \geq u$, $V \geq v$ und $Aa \geq 0$, dann ist $(A+a)\,(AUV + auv) \geq (AU + au)\,(AV + av)$.

Beweis von Satz A2.2: Wir haben

$$\begin{aligned}
& (A+a)\,(AUV + auv) - (AU + au)\,(AV + av) \\
= & \left(A^2UV + Aauv + AaUV + a^2uv\right) - \left(A^2UV + AaUv + AauV + a^2uv\right) \\
= & Aauv + AaUV - AaUv - AauV = Aa\,(uv + UV - Uv - uV) = Aa\,(U-u)\,(V-v) \geq 0,
\end{aligned}$$

denn $Aa \geq 0$, $U - u \geq 0$ (weil $U \geq u$) und $V - v \geq 0$ (denn $V \geq v$). Somit ist $(A+a)\,(AUV + auv) \geq (AU + au)\,(AV + av)$, und Satz A2.2 ist bewiesen.

Nun kommen wir zum *Beweis von Satz A2.1:* Wir beweisen zuerst, daß für jedes natürliche $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i} \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1}. \tag{A2.2}$$

Diese Ungleichung (A2.2) beweisen wir nach der vollständigen Induktion über n:

Induktionsanfang: Für $n = 2$ ist die Ungleichung (A2.2) äquivalent zu $\frac{b_1 a_1}{b_1} \geq \frac{a_1}{2-1}$, also zu $a_1 \geq a_1$, was offensichtlich erfüllt ist.

Induktionsschritt: Sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Angenommen, die Ungleichung (A2.2) gilt für $n = k$. Das heißt, es gilt

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i} \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i}{k-1}. \tag{A2.3}$$

Um den Induktionsschritt zu vollenden, müssen wir zeigen, daß die Ungleichung (A2.2) auch für $n = k+1$ gilt, also daß

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i} \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i}{(k+1)-1}$$

ist.

Nun setzen wir

$$A = 1; \qquad a = k-1; \qquad U = b_k; \qquad V = a_k; \qquad u = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i}{k-1}; \qquad v = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i}.$$

Dann ist $Aa = 1\,(k-1) = k-1 \geq 0$. Ferner ist die Folge $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ ...)$ monoton steigend; somit ist $b_k \geq b_i$ für jedes natürliche i mit $1 \leq i \leq k-1$. Daher ist $\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_k \geq \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i$, also $(k-1)\,b_k \geq \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i$, und damit $b_k \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i}{k-1}$. Mit anderen Worten: $U \geq u$.

Ferner ist nach der Formel (A2.1), angewandt auf $n = k$, offensichtlich $a_k \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i}$, also $V \geq v$.

Wegen $U \geq u$, $V \geq v$ und $Aa \geq 0$ können wir Satz A2.2 anwenden, und erhalten

$$(A+a)\,(AUV + auv) \geq (AU + au)\,(AV + av)\,,$$

also

$$(1+(k-1))\left(1\cdot b_k\cdot a_k+(k-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}{k-1}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}\right)$$

$$\geq \left(1\cdot b_k+(k-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}{k-1}\right)\left(1\cdot a_k+(k-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}\right).$$

Dies vereinfacht sich zu

$$k\left(b_ka_k+\sum_{i=1}^{k-1}b_ia_i\right)\geq\left(b_k+\sum_{i=1}^{k-1}b_i\right)\left(a_k+(k-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}\right),\qquad\text{also zu}$$

$$k\sum_{i=1}^{k}b_ia_i\geq\sum_{i=1}^{k}b_i\cdot\left(a_k+(k-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}\right).$$

Nun ist $\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}\geq\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_i}{k-1}$ laut (A2.3), und damit wird hieraus

$$\begin{aligned}k\sum_{i=1}^{k}b_ia_i &\geq \sum_{i=1}^{k}b_i\cdot\left(a_k+(k-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}b_i}\right)\geq\sum_{i=1}^{k}b_i\cdot\left(a_k+(k-1)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_i}{k-1}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k}b_i\cdot\left(a_k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)=\sum_{i=1}^{k}b_i\cdot\sum_{i=1}^{k}a_i,\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}b_i}\geq\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{k}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{(k+1)-1}.$$

Somit ist die Ungleichung (A2.2) für $n=k+1$ bewiesen. Damit ist der Induktionsschritt erledigt, und die Ungleichung (A2.2) ist nachgewiesen.

Aus (A2.1) und (A2.2) folgt nun

$$a_n\geq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_ia_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_i}\geq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i}{n-1}$$

für jedes natürliche $n \geq 2$. Damit ist Satz A2.1 bewiesen.

Die Aufgabe A2 folgt aus Satz A2.1 sofort, wenn man diesen Satz auf die durch $b_i = i$ für jede positive ganze Zahl i definierte Folge $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ ...)$ anwendet (daß diese Folge monoton steigend ist und alle ihre Folgenglieder positiv sind, ist offensichtlich).

Bemerkung: Satz A2.2 ist ein Sonderfall von folgendem Sachverhalt:

> **Satz A2.3, die gewichtete Tschebyschew-Ungleichung:** Sind $(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_n)$ und $(v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n)$ zwei (endliche) monoton steigende Folgen reeller Zahlen, und sind a_1, a_2, ..., a_n beliebige reelle Zahlen, sodaß $a_i a_j \geq 0$ für beliebige ganze Zahlen i und j mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ gilt, dann ist
>
> $$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i u_i v_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Dieser Satz heißt **gewichtete Tschebyschew-Ungleichung**, da die gewöhnliche Tschebyschew-Ungleichung seinen Sonderfall für $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ darstellt.