Bundeswettbewerb Mathematik 2005

-

Stufe 2

Peter Patzt

1. September 2005

Hilfsmittel

Literatur

[1] Karlheinz Martin (u.a.): “Das große Tafelwerk”; Volk und Wissen Verlag GmbH & Co.; Berlin 1999

[2] http://mathworld.wolfram.com: mathworld; the web's most extensive mathematics resource

[3] R. Brauner, F. Geiß (Herausg.): “Abitur Wissen, Mathematik”; Weltbild Verlag GmbH; Augsburg 2000; S. 44

[4] Prof. Dr. Harald Scheid: “Schüler Duden, Die Mathematik I”; Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG; Mannheim 1990

[5] Fritz Reinhardt, Heinrich Soeder: “dtv-Atlas Mathematik, Band 1, Grundlagen, Algebra und Geometrie”; Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG; München 1974/1998

[6] Prof. Dr. Gehard Musiol, Prof. Dr. Heiner Mühlig: “Bronstein, Taschenbuch der Mathematik”; Verlag Harri Deutsch; Frankfurt am Main, Thun; 1999 (4. Auflage)

Zur Ideenfindung waren außerdem das Training der Mecklenburg-Vorpommern-Seminare, sowie die Beschäftigung mit mathematischen Problemstellungen aus zahlreichen Büchern mit Aufgaben, als auch das Forum http://www.mathlinks.ro hilfreich. Hierin wurde zwar das Auge für solche Aufgaben geschult, aber die Aufgaben dieser BWM Runde wurden nicht explizit gestellt oder gelöst.

Aufgabe 1

Wir wollen zunächst drei Fälle betrachten. In diesen Fällen sind alle Standorte von A und B auf dem Schachbrett zusammengefasst.
Der erste Fall ist wenn A und B auf dem gleichen Feld stehen. In diesem Fall hat A schon gewonnen und B wird nicht mehr ziehen. Diesen Fall soll A nach endlich vielen Schritten erreichen. Fall 2 ist falls A und B auf Feldern entweder der gleichen Spalte oder Zeile des Schachbrettes stehen. Und der dritte Fall schließt den Rest ein, das heißt alle Positionen, in denen sie weder in der gleichen Spalte noch in der gleichen Zeile stehen. Wir betrachten nun im folgenden wie A auf die Züge von B reagiert. Dazu gebrauchen wir den Begriff Abstand, um die Anzahl der Züge, die A zu B bräuchte, wenn B stehen blieb und sich A möglichst direkt auf B zubewegt. Das heißt zum Beispiel, dass A sich zunächst auf die gleiche Spalte oder Zeile wie B und dann direkt auf B zu bewegt. Außerdem führen wir den Begriff Situation ein, um die Stellung von A und B zu einem Zeitpunkt genau vor dem Zug von B zu beschreiben.
Im Fall 2 kann sich nun B entweder auf A zubewegen oder nicht. Wenn B dies tut, wird A sich auch auf B zubewegen und der Abstand ist im Vergleich zu der vorherigen Situation um zwei Züge geschrumpft. Macht B irgend einen anderen Zug wird A sich genauso verhalten, als wenn B auf ihn zugekommen wäre und wird so den Abstand im Vergleich zur Situation davor nicht erhöhen. Um danach wieder Fall 2 zu erhalten und keinen Verlust an Abstand gegenüber der vorhergehenden Situation hinzunehmen, kann B nur in eine Richtung ziehen. Ein solches Ziehen ist aber durch den Spielfeldrand begrenzt. Daraus folgt, nach endlich vielen Schritten tritt entweder Fall 3 ein oder der Abstand zwischen A und B hat sich verringert (an dieser Stelle kann durch das Verringern natürlich auch Fall 1 eintreten), erhöhen wird er sich von Situation zu Situation allerdings nicht.
Für den Fall 3 wollen wir zunächst noch ausschließen, dass A auf die gleiche Spalte oder Zeile wie B ziehen muss, um den Abstand zu verringern. Das ist nämlich nur der Fall, wenn A und B diagonal direkt nebeneinander stehen. Das heißt, dass der Abstand 2 wäre bevor A zieht. Wie wir aber schon gesehen haben bzw. noch sehen werden, zieht A immer genau so, dass der Abstand von Situation zu Situation konstant modulo 2 bleibt. Da sich Der Abstand nach einem Zug *immer* um eins ändert, bleibt auch der Abstand vor dem Zug von A konstant. Da der Abstand vor A's erstem Zug 99 beträgt, ist ein gerader Abstand vor irgendeinem Zug von A nicht möglich. In der Betrachtung von Fall 3 ergibt sich nun folgendes. B kann sich einerseits so bewegen, dass sich der Abstand erhöht; das ist nur in höstens zwei Richtungen möglich. In diesem Fall wird A in die selbe Richtung ziehen; so bleibt der Abstand zur vorherigen Situation wie gehabt. Zieht B so, dass der Abstand sich veringert, wird A senkrecht zur Zugrichtung von B, in Richtung B ziehen, dass sich der Abstand nochmal verringert. Somit lässt sich vermeiden, dass A an B vorbei läuft, bzw. dass Fall 2 eintritt, ohne dass sich der Abstand zu Stituation davor verändert hat. Der Abstand wird also in jedem Fall um zwei kleiner sein als in der vorhergehenden Situation, wenn B den Zug so gestaltet, dass sich der Abstand nach seinem Zug verkleinert hat. A und B ziehen nun aber parallel zueinander, wenn B zunächst den Abstand vergrößert. Dann ensteht also die gleiche Situation, nur um ein Feld veschoben. Daraus folgt, dass Fall 2 nur auftreten kann, wenn sich der Abstand zur Situation davor um 2 verringert. Da B nur in zwei nicht entgegengesetzte Richtungen ziehen kann, um die Verringerung des Abstands vorläufig zu verhindern, und das Spielfeld in beide Richtungen begrenzt ist, wird sich der Abstand nach endlich vielen Schritten verringern.
Da Fall 2 nach endlich vielen Situationen den Abstand zu einer Situation entweder verringert hat oder in Fall 3 übergegangen ist, jedoch niemals den Abstand vergrößert und Fall 3 auf jeden Fall nach endlich vielen Situationen den Abstand erniedrigt, wird der Abstand nach jeweils endlich vielen Situationen immer kleiner. Wir haben aber schon betrachtet, dass der Abstand in jeder Situation modulo 2 konstant ist. Da der Abstand aber nach dem ersten Zug von A nach besagter Methodik 98 beträgt, wird der Abstand irgendwann 0, wobei dann sofort Fall 1 eintritt und A hat gewonnen.

Aufgabe 2

Wir wollen zunächst die gegebenen Daten verarbeiten:

$$
\begin{aligned}
a, b, c \in \mathbb{Z}: \\
a &< 0 && (1)\\
b^2 - 4ac &= 5 && (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in \mathbb{Q} \\
ax^2 + bx + c &> 0 && (3)
\end{aligned}
$$

Außerdem können wir für die rationale Zahl x sagen, dass $x = \frac{p}{q}$, sodass $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ und $\operatorname{ggT}(p, q) = 1$, sodass p und q für jedes $x \neq 0$ genau bestimmt sind. Der Fall $x = 0$, soll noch später einzeln betrachtet werden.

Wir führen erst ein paar allgemeine Umformungen von (3) mit Hilfe von (1) und (2) durch:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\frac{p}{q} + c &> 0 \qquad | \cdot 4aq^2; (1)\\
4a^2p^2 + 4abpq + 4acq^2 &< 0\\
(2ap + bq)^2 - b^2q^2 + 4acq^2 &< 0 \qquad |(2)\\
(2ap + bq)^2 &< 5q^2 \quad |\sqrt{\ }\\
|2ap + bq| &< \sqrt{5q^2}\\
-\sqrt{5}q < 2ap + bq &< \sqrt{5}q \quad | - 2ap\\
-\sqrt{5}q - 2ap < bq &< \sqrt{5}q - 2ap \quad | \div q; q > 0\\
-\frac{\sqrt{5}q + 2ap}{q} < b &< \frac{\sqrt{5}q - 2ap}{q} && (4)
\end{aligned}
$$

Außerdem wissen wir, dass

$$ax^2 + bx + c = a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \cdot \frac{p}{q} + c = \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2} > 0$$

gilt.
Da aber $ap^2 + bpq + cq^2 \in \mathbb{Z}$ und $q^2 > 0$, gilt

$$ap^2 + bpq + cq^2 \geq 1 \tag{5}$$

Dazu kommt auch wegen (1) die obere Grenze:

$$
\begin{aligned}
ap^2 + bpq + cq^2 &= a\left(p^2 + \frac{bpq}{a} + \frac{b^2q^2}{4a^2} - \frac{b^2q^2}{4a^2}\right) + cq^2\\
&= a\left(p + \frac{bq}{2a}\right)^2 - q^2\frac{b^2}{4a} + cq^2\\
&= a\left(p + \frac{bq}{2a}\right)^2 - \frac{5q^2}{4a} \leq -\frac{5q^2}{4a} && (6)
\end{aligned}
$$

Fügt man (5) und (6) zusammen, kommt man auf folgende Einschränkung für a:

$$
\begin{aligned}
-\frac{5q^2}{4a} &\geq ap^2 + bpq + cq^2 \geq 1\\
-\frac{5q^2}{4a} &\geq 1\\
-\frac{5q^2}{4} &\leq a < 0 && (7)
\end{aligned}
$$

Nun zunächst noch zwei weitere Identitäten für den Fall $p > 0$:

$$\begin{aligned} a &< 0 \quad | \cdot 2p \\ 2ap &< 0 \quad | -q; q > 0 \\ \frac{-2ap}{q} &> 0 \quad | -\sqrt{5} \\ -\frac{\sqrt{5}q + 2ap}{q} &> -\sqrt{5} \end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned} a &\geq -\frac{5q^2}{4} \quad | \cdot -2\frac{p}{q} \\ \frac{-2ap}{q} &\leq \frac{5pq^2}{4q} = \frac{5pq}{4} \quad | + \sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}q - 2ap}{q} &\leq \sqrt{5} + \frac{5pq}{4} \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (4) und (7) folgt, dass b in Abhängigkeit von x und a eingeschränkt ist. Aus (8) und (9) folgt die Einschränkung von b in ein festes, d.h. von p und q, also x abhängigen Interval:

$$-\sqrt{5} < -\sqrt{5} - 2ax < b < \sqrt{5} - 2ax \leq \sqrt{5} + \frac{5pq}{4}$$

Analog gilt für $x < 0$:

$$-\sqrt{5} + \frac{5pq}{4} \leq -\sqrt{5} - 2ax < b < \sqrt{5} - 2ax < \sqrt{5}$$

Wir haben also bisher gezeigt, dass a und b jeweils nur endlich viele ganze Zahlen darstellen können, da sie jeweils in einem festen Interval eingegrenzt sind.

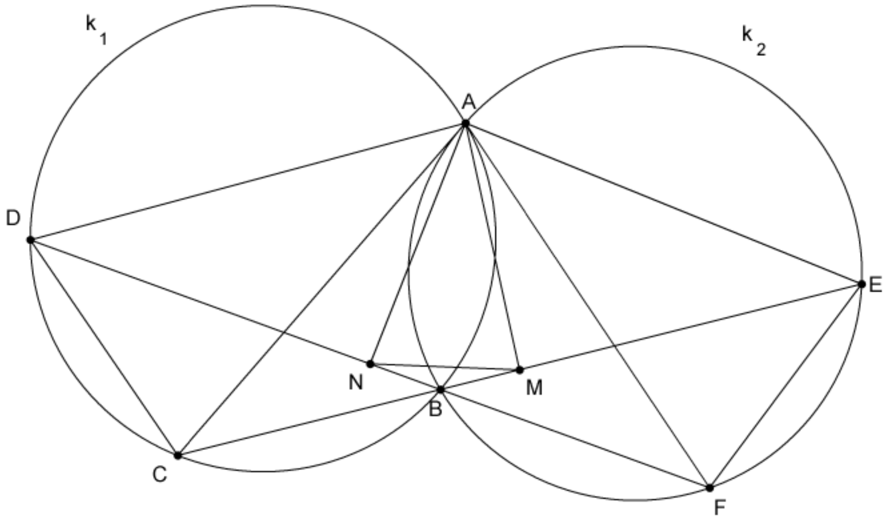
Aus (2) erkennen wir aber, dass, wenn es nur endlich viele Paare (a, b) gibt, die die Aufgabenstellung erfüllen, kann es auch nur endlich viele c geben. Dies ergibt sich daraus, dass für jedes Paar (a, b) die Gleichung (2) nur eine Lösung für c hat, da sie dann linear ist. Somit gibt es nur endlich viele Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$ für jedes rationale $x \neq 0$.

Wollen wir uns nun den Fall $x = 0$ widmen.
Aus (3) folgt, dass $c > 0$. Weiterhin ist bekannt $5+4ac = b^2 \geq 0$. Diese Gleichung kann nur für $c < 2$ gelöst werden. Dies wird klar wenn man $c \geq 2$ setzt. Da a negativ ist gilt außerdem $a \leq -1$, sodass man darauf kommt, dass $-ac \geq 2 \implies 4ac \leq -8 \implies 5 + 4ac \leq -3 < 0$. Das ergibt einen Widerspruch. Also gilt für alle Lösungen, für die $c > 0$ gilt, $c = 1$. Außerdem gilt für $a \leq -2$, dass $b^2 = 5 + 4a \leq -3 < 0$, was auch zu einem Widerspruch führt. Folglich ist $a = -1$ und $b^2 = 1$, was auf die beiden Lösungstripel $(-1, 1, 1)$ und $(-1, -1, 1)$ hinausläuft.

Hiermit ist für alle rationalen x die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 3

Um eine genauere Betrachtung dieser Aufgabenstellung zu ermöglichen, wollen wir zunächst die genannten Dreieck in der Skizze einzeichnen:



Nun noch ein Lemma im Bezug auf Ähnlichkeiten, welches wir mehrmals brauchen werden.

Lemma 1 *Genau dann wenn ein Winkel und das Verhältnis der anliegenden Seiten bei zwei Dreiecken übereinstimmt, sind die beiden Dreiecke ähnlich. (Dieses Lemma können wir als bewiesen voraussetzen, da es Teil des Schulstoffes ist und zum Beispiel in [1] finden ist.)*

Nun zum eigentlichen Beweis.
Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA \Leftrightarrow \sphericalangle FDA = \sphericalangle ECA$ und $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB \Leftrightarrow \sphericalangle AFD = \sphericalangle AEC$. Da zwei Winkel von $\triangle DFA$ und $\triangle CEA$ gleich sind, gilt, dass $\triangle DFA \sim \triangle CEA$. Mit Hilfe von Lemma 1 können wir außerdem sagen, dass $\triangle DNA \sim \triangle CMA$. Das gilt, weil $\frac{\overline{DA}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \frac{2\cdot\overline{DA}}{\overline{DF}} = \frac{2\cdot\overline{CA}}{\overline{CE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CM}}$ und $\sphericalangle MCA = \sphericalangle NDA$ (Peripheriewinkel).
Aus dieser Überlegung können wir weiterhin

$$\begin{aligned} \sphericalangle DAN &= \sphericalangle CAM \\ \sphericalangle DAN - \sphericalangle CAN &= \sphericalangle CAM - \sphericalangle CAN \\ \sphericalangle DAC &= \sphericalangle NAM \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DA}}{\overline{AN}} &= \frac{\overline{CA}}{\overline{AM}} \\ \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} &= \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} \end{aligned}$$

erkennen. Somit ist nach Lemma 1 $\triangle DCA \sim \triangle NMA$.
Der Beweis für $\triangle FEA$ und $\triangle NMA$ ist analog.
Also gilt $\triangle DCA \sim \triangle NMA \sim \triangle FEA$. ∎

Aufgabe 4

Vorbetrachtung:

Zunächst soll gesagt werden, dass wir diese Aufgabe vollständig in der Ebene betrachten, da erstens eine Strecke nur in ganzzahligen Dimensionen für uns sinnvoll ist. Zweitens sollen drei Punkte nicht kollinear sein, was bei drei oder mehr Punkten im eindimensionalen Raum und darunter nicht möglich ist. Drittens kann jeder Streckenzug aus einem drei oder höher dimensionalen Raum ohne Verlust an Anzahl der Selbstübersschneidungen auf eine Ebene projeziert werden. Dabei muss man natürlich beachten, dass dann drei Punkte nicht kollinear sind. Da es aber nur endlich viele Ebenen gibt die drei Punkte einschließen, lässt sich vermeiden den Streckenzug auf eine Ebene die senkrecht auf einer solchen Ebene steht zu projezieren.

Es sollen die Begriffe geschlossener und vollständiger Streckenzug für jeweils einen Streckenzug mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stehen. Bei einem vollständigen Streckenzug soll aber zusätzlich erfüllt sein, dass alle n Punkte der jeweiligen Ebene in diesem eingeschlossen sind.

Um diese Aufgabe in angemessener mathematischen Form darzustellen, werden wir zunächst ein paar Vereinbarungen treffen.
Es seinen n Punkte auf einen Kreis mit jeweils gleichem Abstand zu den Nachbarn angeordnet und von 0 bis $n-1$ in dieser Reihenfolge und mit dem Uhrzeigersinn bezeichnet. Sei $\mathbb{P}_n = \{[0]_n; [1]_n; \cdots ; [n-1]_n\}$, wobei $[a]_n$ die Restklasse a modulo n darstellt. Dann wissen wir es gibt eine bijektive Abbildung von $\mathbb{P}_n$ auf die Menge aller n Punkte (nämlich genauso, dass $[a]_n \mapsto a$, wobei $a \in \{0; \cdots ; n-1\}$ einen Punkt identifiziert). In diesem Fall ist $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$ ein Ring, wenn $+$ und $\cdot$ folgender Maßen für $a, b \in \mathbb{P}_n$ definiert sind:

$$[a]_n + [b]_n := [a+b]_n$$
$$[a]_n \cdot [b]_n := [a \cdot b]_n$$

Es ist sinnvoll und gerechtfertigt zu sagen, dass $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$ ein Ring ist, da $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$ gleich dem Restklassenring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$. Dieser ist laut [6] ein Ring. (Dies ist insofern Schulmathematik, da wir Gruppen, Ringe und Körper im Zusammenhang mit Vektorräumen im LK Mathe 13 betrachtet haben.)

Außerdem wollen wir eine weitere Verknüpfung für $[a]_n, [b]_n \in \mathbb{P}_n$ definieren:

$$[a]_n \circ [b]_n := [n-1]_n \cdot [a]_n + [b]_n = [b-a]_n$$

Da diese Verknüpfung eine Aneinanderreihung von den im Ring definierten Verknüpfungen ist, ist das Ergebnis dieser Verknüpfung genau *ein* Elment von $\mathbb{P}_n$.
Des Weiteren gilt:

$$[a]_n \circ [b]_n = [b-a]_n = [0]_n \iff [a]_n = [b]_n \tag{1}$$

Diese Verknüpfung soll Abstand der Punkte a und b heißen. (Die Reihenfolge der genannten Punkte ist wichtig, da diese Verknüpfung nicht kommutativ ist.)
Außerdem gilt:

$$[a_1]_n \circ [a_k]_n = [a_k - a_1]_n = \sum_{i=1}^{k-1} [a_{i+1} - a_i]_n = \sum_{i=1}^{k-1} [a_i]_n \circ [a_{i+1}]_n \tag{2}$$

Hieraus erkennt wir, dass man aus den Abständen zwischen den Punkten eines Streckenzuges den Abstand des Anfangspunktes zum Endpunkt bestimmen kann.

a)

Wir betrachten nun einen oben besprochenden Ring $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$, wobei $n = 2m + 1$ $(m \in \mathbb{N} \geq 1)$. Dann wollen wir jeden Punkt mit der Restklasse p_i mit einem weiteren Punkt mit der Restklasse p'_i verbinden, sodass $p_i \circ p'_i = [m]_n$ gilt. Fangen wir mit dem Punkt a an, dann wird wegen (2) klar, dass $[a]_n \circ p_j = \sum_{i=1}^{j} p_{i-1} \circ p_i = \sum_{i=0}^{j} [m]_n = j \cdot [m]_n$, wenn p_i die Restklasse des i-sten Punkte, der mit a verbunden wird, darstellt $(p_0 = [a]_n)$. Für jeden Punkt a gilt nun wegen (1), dass mit j Strecken genau dann ein geschlossener Streckenzug entsteht, wenn $[a]_n \circ p_j = j \cdot [m]_n = [0]_n$. Da laut Euklid m und n teilerfremd sind $(\mathrm{ggT}(n, m) = \mathrm{ggT}(2m + 1, m) = \mathrm{ggT}(2m + 1 - 2 \cdot m, m) = \mathrm{ggT}(1, m) = 1)$, sind folgende Gleichungen äquivalent:

$$j \cdot [m]_n = [0]_n \iff [j \cdot m]_n = [0]_n \iff [j]_n = [0]_n$$

Womit klar wird, dass nach n Strecken genau *ein* geschlossener Streckenzug entstanden ist. Da dies für alle n Punkte gilt, sind in dem Streckenzug genau n verschiedene Punkte eingeschlossen, das heißt es handelt sich um einen vollständigen Streckenzug.

Nun soll die Anzahl der Selbstüberschneidungen einer solchen Konstruktion bestimmt werden. Hierzu wollen wir zunächst zeigen, dass jede dieser Strecken von allen anderen geschnitten wird außer von den beiden benachbarten Strecken. Diesen Beweis werden wir indirekt führen. Sei a ein Punkt der offensichtlich mit dem Punkt der Restklasse $[a + m]_n$ eine Strecke bildet (weil $[a]_n \circ [a + m]_n = [a + m - a]_n = [m]_n$), dann soll es zwei Punkte mit den Restklassen $[a + r_1]_n$ und $[a + m - r_2]_n$ mit dem Abstand $[m]_n$ geben, für die gilt, dass $1 \leq (r_1, r_2 \in \mathbb{N}) \leq m - 1$. Damit liegen beide auf dem, in Uhrzeigerzeigerrichtung genannten, Kreisbogen mit Anfangspunkt a und Endpunkt $a + m$, weil $a < a + 1 \leq (a + r_1), (a + m - r_2) \leq a + m - 1 < a + m$ gilt:

$$1 \leq r_1 \leq m - 1 \Leftrightarrow a < a + 1 \leq a + r_1 \leq a + m - 1 < a + m$$

$$1 \leq r_2 \leq m - 1 \Leftrightarrow 1 - m \leq -r_2 \leq -1 \Leftrightarrow a < a + 1 \leq a + m - r_2 \leq a + m - 1 < a + m$$

Es ist leicht einzusehen, dass $0 < 2 \leq r_1 + r_2 \leq 2m - 2 < 2m + 1 = n$, womit klar ist, dass $[r_1 + r_2]_n \neq [0]_n \implies [a + r_1]_n \circ [a + m - r_2]_n = [(a + m - r_2) - (a + r_1)]_n = [m]_n - [r_1 + r_2]_n \neq [m]_n$. Dies ist der Widerspruch für die eine Seite zwischen den beiden Punkten der Strecke.
Zwei Punkte $a - r'_1$ und $a + m + r'_2$ mit $1 \leq (r'_1, r'_2 \in \mathbb{N}) \leq m$ mit dem Abstand $[m]_n$ sind beide zwischen a und $a + m$ auf der anderen Seite, wegen:

$$1 \leq r'_1 \leq m \Leftrightarrow -m \leq -r'_1 \leq -1 \Leftrightarrow a - m - 1 < a - m \leq a - r'_1 \leq a - 1 < a$$

$$1 \leq r'_2 \leq m \Leftrightarrow a + m < a + m + 1 \leq a + m + r'_2 \leq a + 2m < a + 2m + 1$$

und, da

$$[a - m - 1]_n = [a + m]_n - [2m + 1]_n = [a + m]_n$$

$$[a + 2m + 1]_n = [a]_n + [2m + 1]_n = [a]_n$$

Für diese gilt aber wie folgt auch $0 < 2 \leq r_1 + r_2 \leq 2m < 2m + 1$, also $[r_1 + r_2]_n \neq [0]_n$, womit wiederum $[a - r_1]_n \circ [a + m + r_2]_n = [a + m + r_1 - (a - r_1)]_n$ $=[m]_n + [r_1 + r_2]_n \neq [m]_n$. Somit führt auch der zweite Fall zu einem Widersrpuch. Also wird eine Strecke von allen anderen Strecken geschnitten, die keinen Punkt mit ihr gemeinsam haben, da alle Endpunkte der anderen Strecken nicht beide auf der selben Seite zwischen den Endpunkten von ihr liegen können.

Diese Anordnung ist auch zugleich die mit den meisten Selbstüberschneidungen, da zwei Strecken mit einem Punkt gemeinsam, keine Selbstüberschneidung haben können. Also schneidet jede der n Strecken $n - 3$ andere Strecken (sie selbst und die benachbarten Strecken werden abgezogen). Da eine Selbstüberschneidung ein Schnitt von *zwei* Strecken ist, gilt für jedes ungerade $n \geq 3$: $A(n) = \frac{n(n-3)}{2}$

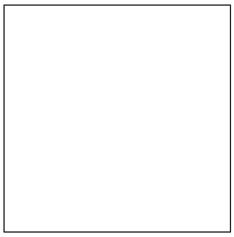
b)

Um auf die Aufgabe näher eingehen zu können wollen wir uns zunächst ein Lemma definieren und auch beweisen, das für den Fall, dass n gerade ist gilt.

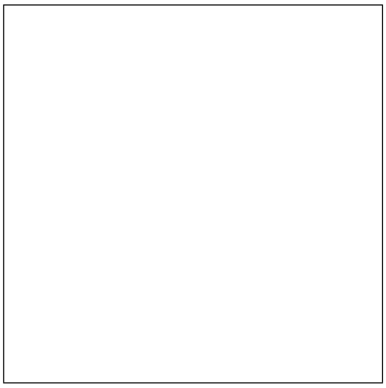
Lemma 1 *Wird eine Strecke von allen anderen Strecken außer den beiden Nachbarstrecken geschnitten, so soll sie Hauptstrecke heißen. Die Hauptstrecke teilt die Ebene des Streckenzuges in zwei Halbebenen. Die Endpunkte der Nachbarstrecken, die von den Hauptstreckenpunkten verschieden sind, können nicht in der selben Halbebene liegen.*

Beweis 1 *Man nehme an, beide Endpunkte liegen in der selben Halbebene. Wenn in der Halbebene, in der die beiden Endpunkte liegen, k weitere Punkte liegen, dann können an jeden Punkt zwei Strecken und an den beiden Endpunkten der Nachbarstrecken jeweils eine weitere Strecke also insgesammt $2k+2$ Strecken enden. Da jede von diesen Strecken die Hauptstrecke schneiden soll, müssen diese $2k+2$ Strecken auch in der anderen Halbebene enden. In dieser muss es demnach $k+1$ Punkte liegen, da in jedem Punkt genau zwei Strecken enden (Vorausetzung für einen vollständdigen Streckenzug). Das heißt die Summe der Punkte sind die Anzahl der Punkte der einen Halbebene plus die der anderen Halbebene plus die beiden der Hauptstrecke, also $2k+5$ Punkte. Das ergibt eine ungerade Zahl, was im Widerspruch mit der Voraussetzung für b) steht. Also müssen die Endpunkte in verschiedenen Halbebenen liegen (oder es gibt keine Anordnung für b) in der es eine Hauptstrecke gibt, was später mittels einer Konstruktion widerlegt wird).*

Als nächstes wollen wir den Fall ausschließen, dass es drei (oder mehr) Hauptstrecken gibt. Es soll also angenommen werden, dass es drei Hauptstreecken gibt. Hierzu sollen zwei Fälle betrachtet werden.



Zunächst zu dem Fall, dass sich wenigstens zwei der Hauptstrecken einen Endpunkt teilen (s. Abb. 1). Die von $\overline{AC}$ verschiedene und von A ausgehende Strecke muss auch $\overline{BC}$ schneiden, da die beiden Strecken bei $n > 3$ keinen gemeinsamen Endpunkt haben. Das heißt, dass die beiden Strecken, die von der Hauptstrecke $\overline{AC}$ ausgehen in der selbe Halbebene enden. Dies steht aber im Widerspruch zu Lemma 1, ist also nicht möglich.



Der andere Fall ist, dass keiner dieser Strecken einen Endpunkt gemeinsam haben (s. Abb. 2). Hierbei bezeichenen wir die durch die Hauptstrecken eingeteilten Halbebenen und Flächen mit den römischen Ziffern I-VII und die Punkte von A bis F, wie in Abb. 2. Dass kein Punkt in VII liegen kann, ist klar, da jede Strecke mit einem solchen Endpunkt höstens zwei der Strecken $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ schneiden kann.
Die von $\overline{AD}$ verschiedene und von A ausgehende Strecke kann nur in III, IV, C oder E außer in A enden, da diese Strecke $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ schneiden muss. Betrachten wir zunächst E. Wegen Lemma 1 muss die zweite Nachbarstrecke von $\overline{BE}$ außer in B in D oder IV enden. Endet sie in D gibt es keinen vollständigen Streckenzug, der C und F mit einschließt. Endet sie in IV, so wissen wir, dass alle weiteren Strecken die in IV enden auch in I enden müssen, da in A und B schon zwei Strecken enden und sie alle drei Hauptstrecken schneiden müssen. Dies gilt auch umgekehrt, da die Nachbarstrecke von $\overline{AD}$ mit D als Endpunkt wegen Lemma 1 in I enden muss und somit auch in D und E schon zwei Strecken enden. Alle Nachbarstrecken von $\overline{CF}$ und ihre weiteren Nachbarstrecken können aber nur in II, III, V oder VI bzw. C oder F enden. Somit kann ein vollständiger Streckenzug, der C und F enthält nicht zustande kommen.
Betrachten wir den Fall, dass die von $\overline{AD}$ verschiedene und von A ausgehende Strecke in IV endet. Nun muss die andere Nachbarstrecke in I oder in B enden. Endet sie in

B, ist der Fall analog dem obrigen mit E zu betrachten. Endet sie in I, wissen wir widerum, dass die Strecken, die in I enden nur auch in IV oder E und die die in IV enden nur auch in I oder B enden können. Das heißt, der Streckenzug, der von A oder der von D ausgeht wird sich irgendwann von IV mit B verbinden (oder es entsteht sofort ein geschlossener Streckenzug, der B, C,E und F nicht enthält). Daraus folgt, wegen Lemma 1, dass die Nachbarstrecke von $\overline{BE}$ von E ausgehend auch in I enden muss, da in A schon zwei Strecken enden. Außerdem wissen wir ja auch, dass alle Nachbarstrecken und ihre Nachbarstrecken von $\overline{CF}$ nie in I oder IV enden können ohne vorher in B oder E geendet zu haben. Diese beiden Punkte sind aber nur von I oder IV zu erreichen. Daraus folgt widerum, dass ein geschlossener Streckenzug, der A enthält in diesem Fall nicht C und F enthalten kann. Das heißt es kann wieder kein vollständiger Streckenzug entstehen.
Für die Fälle in denen die von $\overline{AD}$ verschiedene und von A ausgehende Strecke in III oder C endet sind absolut analog zu denen mit IV und E. Das heißt es gibt keinen vollständigen Streckenzug mit mindestens drei Hauptstrecken.

Wir wollen nun einen vollständigen Streckenzug konstruieren, in dem es zwei Hauptstrecken gibt und alle anderen Strecken alle Strecken bis auf vier schneiden. Diese Konstruktion ist offensichtlich der Streckenzug mit den meisten Selbstüberschneidungen, da wenn irgendeine Strecke noch eine Strecke schneiden würde, gäbe es drei oder mehr Hauptstrecken bzw. es würden Strecken ihre eigenen Nachbarn schneiden, was nicht möglich ist. Wenn es einen solchen Streckenzug gibt, lässt sich die Anzahl der Selbstüberschneidungen leicht berechnen. Alle n Strecken schneiden alle Strecken bis auf vier und außerdem schneiden die beiden Hauptstrecke jeweils noch eine Strecke mehr, nämlich sich gegenseitig. Weil jede Selbstüberschneidung eine Schnitt *zweier* Strecken ist, hat man jede Selbstüberschneidung doppelt gezählt. Es ergibt sich also für ein gerades n: $A(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1$. Es soll also nur noch ein solcher Streckenzug konstruiert werden.

Wir betrachten nun wieder einen in der Vorbetrachtung besprochenen Ring $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$, mit $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N} \geq 2$). Jetzt wollen wir jeden Punkt mit der Restklasse p_i modulo n mit dem Punkt p_i' modulo n verbinden, sodass $p_i \circ p_i' = [m+1]_n$. Dazu gibt es aber zwei Ausnahmen. $2m-1$ soll mit $m-1$ und umgekehrt verbunden werden , sodass $[m-1]_n \circ [2m-1]_n = [2m-1-(m-1)]_n = [m]_n = [m-2m]_n = [m-1-(2m-1)]_n = [2m-1]_n \circ [m-1]_n$ und *nicht* mit einem Punkt a bzw. a', sodass $[m-1]_n \circ [a]_n = [m+1]_n$ bzw. $[2m-1]_n \circ [a']_n = [m+1]_n$.
Für 0 und m gilt wiederum, dass sie *zusätzlich* miteinander verbunden werden sollen, also $[0]_n \circ [m]_n = [m-0]_n = [m]_n = [2m-m]_n = [0-m]_n = [m]_n \circ [0]_n$. Eine Skizze einer solchen Konstruktion für $n = 8$ bzw. 10 sind Abb. 3 und 4.

Es gibt nun genau n Strecken, da für jeden Punkt a_i es zwei Punkte $a_i' \neq a_i''$ gibt, sodass $[a_i]_n \circ [a_i']_n = [m+1]_n$ und $[a_i'']_n \circ [a_i]_n = [m+1]_n$. Sei nämlich $a_i' = a_i''$, würde $[m+1]_n = [-m-1]_n = [m-1]_n$ gelten, was offensichtlich für $n \geq 3$ falsch ist. Für die Ausnahmen 0, $m-1$, m und $2m-1$ gilt, dass aber auch, da 0 nur mit m und $m+1$, $m-1$ nur mit $2m-1$ und $2m-2$, m nur mit 0 und 1, und $2m-1$ nur mit $m-1$ und $m-2$ verbunden ist.
Wir verfolgen nun den Streckenzug jeweils von den Punkten 0 und m. Dazu sagen wir, es sei a_i der i-te Punkte der von 0 aus erreicht wird ($a_0 = 0$) und b_i der i-te Punkte der von m aus erreicht wird ($b_0 = m$). ($a_1 \neq m$ und $b_1 \neq 0$)
Dann gilt für alle $j \in \{1; \cdots; n-1\}$, wenn $\forall (i \in \mathbb{N}^+) < 2j : a_i \notin \{0; m-1; m; 2m-1\}$,

dass:

$$
\begin{aligned}
[0]_n \circ [a_{2j}]_n &= \sum_{i=0}^{j-1} ([a_{2i}]_n \circ [a_{2i+1}]_n + [a_{2i+1}]_n \circ [a_{2i+2}]_n) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1}([m+1]_n + [m+1]_n) = \sum_{i=0}^{j-1}[2]_n = [2j]_n \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Es gilt aber außerdem für alle $j \in \{0; \cdots ; n-1\}$, wenn $\forall(i \in \mathbb{N}^+) < 2j+1 : a_i \notin \{0; m-1; m; 2m-1\}$, dass:

$$
\begin{aligned}
[0]_n \circ [a_{2j+1}]_n &= \sum_{i=1}^{j} ([a_{2i-1}]_n \circ [a_{2i}]_n + [a_{2i}]_n \circ [a_{2i+1}]_n) + [0]_n \circ [a_1]_n \\
&= \sum_{i=1}^{j}([m+1]_n + [m+1]_n) + [m+1]_n = \sum_{i=0}^{j-1}[2]_n + [m+1]_n \\
&= [2j+m+1]_n \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Des weiteren gilt für alle $j' \in \{1; \cdots ; n-1\}$, wenn $\forall(i \in \mathbb{N}^+) < 2j' : a_i \notin \{0; m-1; m; 2m-1\}$, dass:

$$
\begin{aligned}
[m]_n \circ [a_{2j'}]_n &= \sum_{i=0}^{j'-1} ([a_{2i}]_n \circ [a_{2i+1}]_n + [a_{2i+1}]_n \circ [a_{2i+2}]_n) \\
&= \sum_{i=0}^{j'-1}([m+1]_n + [m+1]_n) = \sum_{i=0}^{j'-1}[2]_n = [2j']_n \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Und für alle $j' \in 0; \cdots ; n-1$, wenn $\forall(i \in \mathbb{N}^+) < 2j'+1 : a_i \notin \{0; m-1; m; 2m-1\}$, dass:

$$
\begin{aligned}
[m]_n \circ [a_{2j'+1}]_n &= \sum_{i=1}^{j'} ([a_{2i-1}]_n \circ [a_{2i}]_n + [a_{2i}]_n \circ [a_{2i+1}]_n) + [m]_n \circ [a_1]_n \\
&= \sum_{i=1}^{j'}([m+1]_n + [m+1]_n) + [m+1]_n = \sum_{i=0}^{j'-1}[2]_n + [m+1]_n \\
&= [2j'+m+1]_n \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Betrachten wir den Fall $m = 2k+1$:
Es lässt sich aus (3) und (4) erkennen, dass zunächst alle „geraden Punkte" mit dem Streckenzug von 0 verbunden werden. Nun ist $m-1$ der $(m-1)$-ste Punkt in diesem Streckenzug ($[0]_n \circ [a_{2j}]_n = [a_{2j}]_n = [2j]_n = [m-1]_n$), da $\forall i \in \mathbb{N} | 0 < i < m-1$: $0 < a_i < m-1$, wenn i gerade ist und $m < a_i < 2m-1$, wenn i ungerade ist. Da auf beiden Seiten die Punkte immer jeweils den Abstand $[2]_n$ haben, gibt es mit 0 und $m-1$ genau m verschieden Punkte in diesem Streckenzug.
Aus (5) und (6) erkennen wir wiederum, dass zunächst nur „ungerade Punkte" sich zu einem Streckenzug mit m verbinden. Dies erkennt man, da m ungerade ist und alle Punkte, die mit m verbunden sind, einen geraden Abstand haben. Hier ist aus Symetriegründen $2m-1$ auch der $(m-1)$-ste Punkt. Da hier genauso alle Punkte jeweils den Abstand $[2]_n$ zu einander haben, enthält dieser Streckenzug auch m verschiedene Punkte.

Laut Definition der Konstruktion ist $m-1$ mit $2m-1$ und 0 mit m verbunden. Außerdem wurden alle n Punkte in diesen geschlossenen Streckenzug eingeschlossen, da mit 0 nur gerade und mit m nur ungerade Punkte verbunden wurden, die paarweise voneinander verschieden waren und ihre Summe insgesamt $n = 2m$ ist. Somit handelt es sich um einen vollständigen Streckenzug.

Betrachten wir den Fall $m = 2k$:
Es lässt sich von (3) ableiten, dass auf der rechten Seite nur gerade Punkte mit 0 und von (4), dass auf der linken Seite nur ungerade mit 0 verbunden werden. Da $m-1$ aber ungerade ist und auf der rechten Seite liegt und $2m-1$ auch ungerade aber auf der linken Seite liegt, wird der Streckenzug von 0 aus zunächst $2m-1$ erreichen, da wieder zuvor kein anderer Endpunkt, der beiden Hauptstrecken erreicht wurde.
Aus (5) und (6) erkennen wir wiederum, dass zunächst nur gerade Punkte auf der linken Seite und ungerade Punkte auf der rechten sich zu einem Streckenzug mit m verbinden. Dies erkennt man, da m gerade ist. Außerdem haben alle Punkte, die mit m auf der linken Seite verbunden sind, einen geraden Abstand und die mit m auf der rechten Seite verbunden sind, einen ungeraden Abstand zu m. Hier wird der Streckenzug aus Symetriegründen mit $m-1$ verbunden.
Laut Definition der Konstruktion ist $m-1$ mit $2m-1$ und 0 mit m verbunden. Außerdem wurden alle n Punkte in diesen geschlossenen Streckenzug eingeschlossen, da mit 0 nur gerade Punkte auf der rechten Seite und ungerade auf der linken Seite verbunden sind bzw. mit m nur ungerade auf der rechten Seite und gerade auf der linken Seite verbunden sind. Es handelt sich insgesamt um n Punkte, da $[0]_n \circ [2m-1]_n = [2m-1]_n = [2j+m+1]_n \implies [(2j+1)+1]_n = [m]_n$ bzw. $[m]_n \circ [m-1]_n = [-1]_n = [2j+m+1]_n \implies [(2j+1)+1]_n = [m]_n$ (Das „+1" kommt durch den 0-ten Punkt zustande). Somit handelt es sich auch hier um einen vollständigen Streckenzug.

Nun wollen wir noch zum Abschluss zeigen, dass die Hauptstrecken genau $n-3$ und die anderen Strecken genau $n-4$ Strecken schneiden.
Für die Hauptstrecken muss nur bewiesen werden, dass es keine Strecke gibt, deren Endpunkte auf einer Seite zwischen ihren eigenen Endpunkten liegt und den Abstand $[m+1]_n$ haben. Dass die beiden Hauptstrecken sich schneiden geht aus der Definition der Konstruktioin hervor.
Seien die Punkte mit den Restklassen $[a]_n$ und $[a+m]_n$ die Endpunkte eine Hauptstrecke. Dies kann angenommen werden, da $m = 0+m$ und $2m-1 = m-1+m$. Für die beiden Punkte der Restklassen $[a+r_1]_n$ und $[a+m-r_2]_n$ gilt analog zu a), dass sie auf einer Seite von der Hauptstrecke liegen, wenn $0 < 1 \leq (r_1, r_2 \in \mathbb{N}) \leq m-1 < m$. Also gilt $0 < 3 \leq r_1 + r_2 + 1 \leq 2m-1 < 2m$ bzw. $[r_1 + r_2 + 1]_n \neq [0]_n$. Das heißt der Abstand der beiden Punkte kann wieder nicht $[m+1]_n$ sein: $[a+r_1]_n \circ [a+m-r_2]_n = [m-(r_1+r_2)]_n = [m+1] - [r_1+r_2+1]_n \neq [m+1]_n$ Widerspruch! Das selbe gilt auch für die andere Seite, weil $[a]_n \circ [a+m]_n = [a+m]_n \circ [a]_n$.

Da schon klar ist, dass die beiden Hauptstrecken alle anderen Strecken schneiden, dessen Nachbarn sie nicht sind, muss nur gezeigt werden, dass es für jede Strecke, die nicht Hauptstrecke ist, es genau *eine* Strecke gibt, die diese nicht schneidet.
Man betrachte nun die Punkte der Restklassen $[a]_n$ und $[a+m+1]_n$. Wenn $a \notin \{m-1; 2m-1\}$, gilt dass beide Punkte zusammen eine Strecke bilden. Die Punkte mit den Restklassen $[a+r_1]_n$ und $[a+m+1-r_2]_n$ sind also dann auf einer Seite von der Strecke zwischen den Punkten von $[a]_n$ und $[a+m+1]_n$, wenn $0 < 1 \leq (r_1; r_2 \in \mathbb{N}) \leq m < m+1$, da:

$$1 \leq r_1 \leq m \iff a < a+1 \leq a+r_1 \leq a+m < a+m+1$$

$$1 \leq r_2 \leq m \iff -m \leq -r_2 \leq -1 \iff a < a+1 \leq a+m+1-r_2 \leq a+m < a+m+1$$

Wiederum folgern wir dass $0 < 2 \leq r_1+r_2 \leq 2m$. Die Gleichheit $r_1+r_2 = 2m = n$ gilt genau dann, wenn r_1 und r_2 jeweils ihr Maximum m erreichen. Wenn $r_1+r_2 < 2m$ gilt aber $[r_1+r_2]_n \neq [0]_n$, was da zu dem Widerspruch führt, dass der Abstand der beiden Punkte nicht $[m+1]_n$ sein kann: $[a+r_1]_n \circ [a+m+1-r_2]_n = [m+1-(r_1+r_2)]_n = [m+1] - [r_1+r_2]_n \neq [m+1]_n$.

Wenn man nun die andere Seite betrachtet erkennt man, dass zwei Punkte $a - r'_1$ und $a + m + 1 + r'_2$ auf dieser Seite liegen, wenn $0 < 1 \leq (r'_1; r'_2 \in \mathbb{N}) \leq m - 2 < m - 1$, da:

$$1 \leq r'_1 \leq m-2 \iff 2-m \leq -r'_1 \leq -1 \iff a-m+1 < a-m+2 \leq a-r'_1 \leq a-1 < a$$

$$1 \leq r'_2 \leq m-2 \iff a+m+1 < a+m+2 \leq a+m+1+r'_2 \leq a+2m-1 < a+2m$$

und, da

$$[a - m + 1]_n = [a + m + 1]_n - [2m]_n = [a + m + 1]_n$$

$$[a + 2m]_n = [a] + [2m]_n = [a]_n$$

Also gilt auch hier $0 < 2 \leq r'_1 + r'_2 \leq 2m - 4 < 2m \implies [r'_1 + r'_2]_n \neq [0]_n$. Somit wird klar, dass der Abstand der beiden Punkte nich $[m + 1]_n$ werden kann, was erneut ein Widerspruch: $[a - r'_1]_n \circ [a + m + 1 + r'_2]_n = [m + 1 + (r_1 + r_2)]_n = [m + 1] + [r_1 + r_2]_n \neq [m + 1]_n$. Es gibt also genau eine Strecke mit den Endpunkten der Restklassen $[a + m]_n$ und $[a + 1]_n$.

Wir wollen also zusammenfassen. Wir haben bewiesen, dass die angegebene Konstruktion ein vollständiger Streckenzug mit einer geraden Anzahl an Punkten ist. Außerdem haben wir gezeigt, dass dieser Streckenzug, ein solcher Streckenzug von den meist möglichen Selbstüberschneidungen, ist. Und wir haben gezeigt, dass die Anzahl in Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte n gleich $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ ist. Also folgt, dass für jedes gerades $n \geq 4$: $A(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1$.