Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Verwendete Hilfsmittel:

Blatter, Christian: Analysis 1, Vierte Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg u.a. 1991

Aufgabe 1:

Zwei Spieler A und B haben auf einem 100x100 Schachbrett je einen Stein. Sie ziehen abwechselnd ihren Stein, wobei jeder Zug aus einem Schritt senkrecht oder waagerecht auf ein Nachbarfeld besteht und A den ersten Zug ausführt. Zu Beginn liegt der Stein von A in der linken unteren Ecke und der Stein von B in der rechten unteren Ecke.
Man beweise: Der Spieler A kann unabhängig von den Spielzügen des Spielers B stets nach endlich vielen Zügen das Feld erreichen, auf dem gerade der Stein von B steht.

Definitionen:

Zunächst ordne man jedem Feld eine eineindeutige Bezeichnung zu. Diese ergibt sich aus der waagerechten Reihe und senkrechten Spalte, in der es sich befindet. Dazu verwende man die **Bezeichnung F(x;y)** mit den zwei Variablen x und y. Die erste Variable x stehe dabei für die Spalte und die zweite Variable y für die Zeile.
Dabei werde die linke Spalte als erste (x=1) bezeichnet und für jede weitere Spalte gelte x=k+1, wenn für die unmittelbar [1] links von ihr liegende Spalte x=k gelte. Somit ergibt sich für die Spalte ganz rechts x=100, da das Schachbrett genau 100 Spalten hat.
Die Reihe werde entsprechend definiert:
Die oberste Reihe wird als erste (y=1) bezeichnet und für jede weitere Reihe gelte y=m+1, wenn für die unmittelbar oberhalb von ihr liegende Reihe y=m gelte. Somit ergibt sich für die Reihe ganz unten y=100, da das Schachbrett genau 100 Reihen hat.

Das Feld F(x;y) befindet sich also in der x. Spalte von links und in der y. Reihe von oben.
Mit dieser Definition startet Spieler A mit seinem Stein von Feld F(1;100) (das Eckfeld links unten) und Spieler B von Feld F(100;100) (das Eckfeld rechts unten).

Weiterhin sei als **Zug** die Bewegung eines Steines durch einen Spieler um ein Feld bezeichnet. Der erste Zug sei mit der Zugnummer Z=1 bezeichnet. Jeder weitere Zug sei mit Z=n+1 bezeichnet, wenn der unmittelbar vorhergehende Zug die Zugnummer Z=n trägt.
Da Spieler A den ersten Zug ausführt und die Spieler abwechselnd ziehen, ist jeder Zug mit einer ungeraden Zugnummer Z ein Zug von Spieler A. Entsprechend haben die Züge von Spieler B gerade Zugnummern.

[1] „Unmittelbar“ bedeutet, dass keine weiteren Spalten dazwischen liegen.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Als **Doppelzug** bezeichne man zwei aufeinanderfolgende Züge, deren erster von A ausgeführt wird.

Weiterhin sei mit dem **Abstand** derjenige Wert D(Z) bezeichnet, der sich aus der Gleichung $D(Z)=|x_1-x_2| + |y_1-y_2|$ ergibt, wenn sich der Stein von Spieler A nach Zug Z auf Feld $F(x_1;y_1)$ und der Stein von Spieler B nach Zug Z auf Feld $F(x_2;y_2)$ befindet. Der Abstand D(Z) zerfalle dabei in eine Horizontalkomponente $D_h(Z) = |x_1-x_2|$ und eine Vertikalkomponente $D_v(Z)=|y_1-y_2|$. Daraus folgt direkt auch $D(Z)=D_h(Z)+D_v(Z)$.

Lösung:

Gewinnstrategie für A:

Falls $D_v<D_h$, so bewegt sich A in horizontaler Richtung auf B zu, im Falle $D_v>D_h$ bewegt sich A in vertikaler Richtung auf B zu, für $D_v=D_h$ bewegt sich A in beliebiger Richtung auf B zu.

Es folgt der Beweis, warum diese Strategie zum Erfolg führt:

Satz 1:

Der Abstand zwischen A und B kann sich, sofern Spieler A die oben angegebene Strategie befolgt, während eines Doppelzuges nur auf folgende zwei Weisen verhalten:
Er kann konstant bleiben oder um zwei Felder kleiner werden.

Beweis:

Ein Doppelzug beginnt nach Definition mit einem Zug von Spieler A. Dieser bewegt sich nach obiger Strategie auf den Stein von Spieler B zu. Der Abstand sinkt damit um eins, da eine der beiden Abstandskomponenten (horizontal und vertikal) konstant bleibt und die jeweils andere um genau ein Feld sinkt. Der Spieler B kann sich auf zwei Weisen verhalten, er kann sich entweder um ein Feld von Spieler A fortbewegen oder sich um ein Feld auf ihn zu bewegen. Im ersten Fall vergrößert er den Abstand wieder um ein Feld und stellt damit den Ursprungsabstand vor dem Doppelzug wieder her. Im zweiten Fall verkleinert er den Abstand seinerseits um ein Feld. Damit ist der Abstand um zwei Felder kleiner geworden.

Insbesondere folgt daraus, dass der Abstand nach Durchführung eines Doppelzuges nicht zunehmen kann.

Satz 2:

Nach endlich vielen Doppelzügen nimmt der Abstand um 2 ab.

Beweis durch Widerspruch:

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Würde der Abstand nicht nach endlich vielen Doppelzügen abnehmen, so müsste er nach Satz 1 unendlich lange gleich bleiben.
Dies ist aus folgendem Grund nicht möglich:
Steht Spieler A auf Feld $F(x_a;y_a)$ und Spieler B auf Feld $F(x_b;y_b)$, so sind nach dem Trichotomiegesetz die folgenden vier Fälle möglich, in denen jeweils ganz analog argumentiert werden kann, und zwei Sonderfälle:

a)
$x_a>x_b$ und $y_a>y_b$:

In dem Fall kann sich B nur von A wegbewegen, in dem er sich nach oben links bewegt. Da A ihm in eine dieser Richtungen nachfolgt, bleibt A stets rechts unterhalb von B und B ist stets in dieselbe Richtung eingeschränkt. B kann sich jedoch nicht beliebig oft nach links oder oben bewegen, da er irgendwann im linken oberen Eckfeld angekommen ist und sich von dort aus nur noch nach rechts oder unten bewegen könnte, das heißt, auf den Stein von Spieler A zu, wodurch der Abstand um zwei Felder in diesem Doppelzug sinken würde.

b)
$x_a<x_b$ und $y_a>y_b$:

In diesem Fall kann sich B nur von A wegbewegen, in dem er sich nach oben rechts bewegt. Da A ihm in diese Richtung nachfolgt, bleibt A stets links unterhalb von B und B ist stets in eine dieser Richtungen eingeschränkt. B kann sich jedoch nicht beliebig oft nach rechts oder oben bewegen, da er irgendwann im rechten oberen Eckfeld angekommen ist und sich von dort aus nur noch nach links oder unten bewegen könnte, das heißt, auf den Stein von Spieler A zu, wodurch der Abstand um zwei Felder in diesem Doppelzug sinken würde.

c)
$x_a>x_b$ und $y_a<y_b$:

Im dritten Fall[2] kann sich B nur von A wegbewegen, in dem er sich nach unten links bewegt. Da A ihm in diese Richtung nachfolgt, bleibt A stets rechts oberhalb von B und B ist stets in eine dieser Richtungen eingeschränkt. B kann sich jedoch nicht beliebig oft nach links oder unten bewegen, da er irgendwann im linken unteren Eckfeld angekommen ist und sich von dort aus nur noch nach rechts oder oben bewegen könnte, das heißt, auf den Stein von Spieler A zu, wodurch der Abstand um zwei Felder in diesem Doppelzug sinken würde.

d)
$x_a<x_b$ und $y_a<y_b$:

[2] Diesen Fall kann A übrigens gänzlich vermeiden, ein Beweis dafür wäre jedoch aufwendiger.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

In dem Fall kann sich B nur von A wegbewegen, in dem er sich nach unten rechts bewegt. Da A ihm in diese Richtung nachfolgt, bleibt A stets links oberhalb von B und B ist stets in eine dieser Richtungen eingeschränkt. B kann sich jedoch nicht beliebig oft nach rechts oder unten bewegen, da er irgendwann im rechten unteren Eckfeld angekommen ist und sich von dort aus nur noch nach links oder oben bewegen könnte, das heißt, auf den Stein von Spieler A zu, wodurch der Abstand um zwei Felder in diesem Doppelzug sinken würde.

e) 1. Sonderfall:
$x_a = x_b$ und $y_a \neq y_b$.

In diesem Fall kann sich A der Strategie folgend nur vertikal auf B zu bewegen. Bewegt sich B nun vertikal von A weg, so gelangt er nach weniger als 100 Zügen am oberen oder unteren Ende an, da das Brett nicht mehr Bewegungen in einer Richtung zulässt. Bewegt B sich jedoch horizontal, so ist $x_a=x_b$ nicht mehr erfüllt und es tritt die Situation in einem der oben beschriebenen Fälle auf.

f) 2. Sonderfall:
$x_a \neq x_b$ und $y_a = y_b$.
In diesem Fall kann sich A der Strategie folgend nur horizontal auf B zu bewegen. Bewegt sich B nun horizontal von A weg, so gelangt er nach weniger als 100 Zügen am oberen oder unteren Ende an, da das Brett nicht mehr Bewegungen in einer Richtung zulässt. Bewegt B sich jedoch vertikal, so ist ya=yb nicht mehr erfüllt und es tritt die Situation in einem der oben beschriebenen Fälle auf.
(Dieser Fall ist unter anderem am Anfang gegeben.)

Der denkbare siebte Fall („$x_a=x_b$ und $y_a=y_b$")wäre nach dem Trichotomiegesetz zwar ebenfalls möglich, bedeutet aber, dass A und B sich auf demselben Feld befinden, womit A sein Ziel bereits erreicht hätte.

Da der Abstand zu Beginn 99 Felder beträgt und in jedem Doppelzug entweder konstant bleibt oder um zwei Felder sinkt, ist der Abstand nach jedem Doppelzug ungerade.
Das heißt, es gilt: $Z \equiv 0 \bmod 2: \Rightarrow \quad D(Z) \equiv 1 \bmod 2$
Es folgt also, dass der Abstand nicht länger als 198 Doppelzüge konstant bleiben kann, da mehr als 99 Bewegungen in eine horizontale und 99 in eine vertikale Richtung nicht möglich sind. (Tatsächlich sind es sogar deutlich weniger, dies zu beweisen, ist jedoch für den Endlichkeitsbegriff nicht notwendig, der konkrete Fall hängt von der Position der Spielsteine ab.)

Satz 3:

Nach endlich vielen Doppelzügen beträgt der Abstand D(Z)=1.

Beweis:

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Zu Beginn des Spiels beträgt der Abstand D(0)=|1-100|+|100-100|=99+0= 99 Felder. Da der Abstand jeweils nur weniger als 198 Doppelzüge konstant bleiben kann (es sind grundsätzlich auf dem Brett nicht mehr als 99 Bewegungen in eine Richtung möglich, ohne zwischendurch in die Gegenrichtung zu gehen; siehe Satz 2), nimmt er mindestens einmal alle 198 Züge um zwei ab. Damit ist nach weniger als 198 *49 Doppelzügen der Abstand 1 erreicht.

Hauptaussage:

Der Spieler A kann unabhängig von den Spielzügen des Spielers B stets nach endlich vielen Zügen das Feld erreichen, auf dem gerade der Stein von B steht.

Beweis:

Nach endlich vielen Doppelzügen (Satz 3) ist der Abstand 1 erreicht. Da bisher nur Doppelzüge betrachtet wurden und jeder Doppelzug aus zwei Einzelzügen besteht, ist die Anzahl der bisher durchgeführten Züge gerade. Für den folgenden Zug ist Z also ungerade.
Da alle ungeraden Züge von Spieler A ausgeführt werden, wird auch der folgende Zug von Spieler A ausgeführt. Auch hier bewegt sich A gemäß der Spielstrategie auf B zu, reduziert damit den Abstand um 1, dieser beträgt dann 0 und A hat das Feld erreicht, auf dem sich B momentan befindet.
Das Spiel kann von Spieler A also nach (deutlich) weniger als 49*198+1 Zügen, das heißt nach endlich vielen Zügen gewonnen werden.
Q.E.D.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Aufgabe 2:

Es sei x eine rationale Zahl.
Man beweise: Es gibt nur endlich viele Tripel (a,b,c) ganzer Zahlen mit a<0 und $b^2-4ac=5$, für die ax^2+bx+c positiv ist.

Gegeben:
Ein konstantes $x \in Q$
Variablen $a, b, c \in Z$
a<0
$b^2-4ac=5$
$ax^2+bx+c>0$

Gesucht ist ein Beweis, dass es endlich viele $(a,b,c) \in Z^3$ gibt, die die gegebenen Gleichungen erfüllen.

Lösung:[3]

Definitionen:

Anmerkung: x werde zunächst als reelle Zahl betrachtet, später wird auf den Spezialfall $x \in Q$ reduziert.

Definiere die Funktion f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$: $f(x)=ax^2+bx+c$

Diese ist ganzrational, da die Exponenten 0;1;2 allesamt nichtnegativ und ganzzahlig sind.

Eine ganzrationale reelle Funktion ist stetig.

Außerdem hat die Funktion f maximal zwei Nullstellen x_1 und x_2, da sie ein Polynom zweiten Grades ist, dabei sei $x_1 \le x_2$. Nach der Mitternachtsformel liegen diese Nullstellen bei

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\Leftrightarrow$ Einsetzen von: $b^2-4ac=5$

[3] Hinweis an den Korrektor: Die folgenden Sätze 1 bis 3 beweisen lediglich, dass die Parabel von f(x) nach unten geöffnet ist und positive Funktionswerte somit zwischen den Nullstellen liegen müssen. Anschaulich ist dies eine triviale Aussage.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{5}}{2a}$$

Da die Diskriminante positiv ist, existieren in jedem Fall die reelle Wurzel und damit zwei voneinander verschiedene Nullstellen x_1 und x_2.

Da a<0 gilt, ist $\frac{\sqrt{5}}{2a}$ negativ und damit gilt $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a} < -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{5}}{2a}$. Daher ist die größere Nullstelle

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{5}}{2a}$$

und die kleinere

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a}.$$

Satz 1:

Für stetige Funktionen f: **R**->**R** gilt der Zwischenwertsatz:
Zwischen zwei Funktionswerten mit unterschiedlichem Vorzeichen liegt jeweils mindestens eine Nullstelle.
Das heißt formalisiert:
Ohne Beschränkung der Aussage sei $f(a) < f(b)$. Aus $f(a) < 0 < f(b)$ folgt dann die Existenz wenigstens eines reellen $\xi \in \left]a;b\right[$, für das $f(\xi) = 0$ gilt.

Beweis:[4]

Wir konstruieren durch fortgesetztes Halbieren des Intervalls $[a;b]$ rekursiv eine Folge von Intervallen $[a_k;b_k]$:

$$a_0 := a, \quad b_0 := b;$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right], & \text{falls } f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) > 0 \\ \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right], & \text{falls } f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \le 0. \end{cases}$$

Die Folge a. ist monoton wachsend und beschränkt durch b_0, die Folge b. ist monoton fallend und beschränkt durch a_0; ferner gilt:

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a) \qquad (k \ge 0)$$

[4] Entnommen aus: Blatter, Analysis 1, Seite 143f.

Die beiden Folgen besitzen daher [*da 2^{-k} gegen Null konvergiert*] einen gemeinsamen Grenzwert $\xi \in [a;b]$.
Nach Konstruktionsvorschrift ist

$$f(a_k) \leq 0 < f(b_k) \qquad \forall k \geq 0;$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfe der Stetigkeit von f:

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \leq 0 \leq \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\xi)\,.$$

Somit ist $f(\xi) = 0$, und ξ ist ein innerer Punkt des Intervalls $[a,b]$.

Satz 2.1:
Die Funktionswerte zwischen den beiden Nullstellen x_1 und x_2 sind entweder alle positiv oder alle negativ (Umkehrung des Zwischenwertsatzes).

Beweis:
Existieren zwischen zwei benachbarten Nullstellen x_1 und x_2 sowohl positive als auch negative Funktionswerte, so muss zwischen diesen positiven und negativen Funktionswerten nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle liegen. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass die Nullstellen x_1 und x_2 die einzigen Nullstellen sind.
Existiert zwischen x_1 und x_2 eine Stelle, deren Funktionswert weder positiv noch negativ ist, so ist dieser Funktionswert nach dem Trichotomiegesetz Null und damit eine weitere Nullstelle, auch dies widerspricht der Voraussetzung, dass x_1 und x_2 die einzigen Nullstellen sind.

Satz 2.2
Alle Funktionswerte, deren Stellen kleiner als die kleinste Nullstelle sind, sind entweder alle positiv oder alle negativ.

Beweis:
Existieren zwei Stellen, die beide kleiner als die kleinste Nullstelle x_1 sind und deren einer Funktionswert größer und deren anderer Funktionswert kleiner als Null ist, so muss zwischen diesen Funktionswerten nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle liegen. Diese wäre dann ebenfalls kleiner als die kleinste Nullstelle x_1, woraus sich ein offensichtlich ein Widerspruch ergibt.
Existiert eine Stelle kleiner als x_1, deren Funktionswert weder positiv noch negativ ist, so ist dieser Funktionswert nach dem Trichotomiegesetz Null und damit eine weitere Nullstelle, auch dies widerspricht der Voraussetzung, dass x_1 die kleinste Nullstelle ist.

Satz 2.3

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Alle Funktionswerte, deren Stellen größer als die größte Nullstelle x_2 sind, sind entweder alle positiv oder alle negativ.

Beweis:
Existieren zwei Funktionswerte, deren Stellen beide größer als die größte Nullstelle x_2 sind, so muss zwischen diesen Funktionswerten nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle liegen. Diese wäre dann ebenfalls kleiner als die kleinste Nullstelle x_1, woraus sich ein Widerspruch ergibt.
Existiert eine Stelle größer als x_2, deren Funktionswert weder positiv noch negativ ist, so ist dieser Funktionswert nach dem Trichotomiegesetz Null und damit eine weitere Nullstelle, auch dies widerspricht der Voraussetzung, dass x_2 die größte Nullstelle ist.

Satz 3.1
Alle Funktionswerte f(x) des Intervalls $x \in \left]-\infty; x_1\right[$ sind negativ.

Beweis:
Man wähle einen beliebigen Wert des Intervalls, zum Beispiel $x_1 + \frac{\sqrt{5}}{2a}$ (da a<0).
Man berechne dann dessen Funktionswert:

$$f\left(x_1 + \frac{\sqrt{5}}{2a}\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a}\right) = a \cdot \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a} + \frac{\sqrt{5}}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4a} \cdot \left(-b + 2\sqrt{5}\right)^2 + \frac{b}{2a} \cdot \left(-b + 2\sqrt{5}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4a} \cdot \left(b^2 - 4\sqrt{5}b + 20\right) + \frac{b}{2a} \cdot \left(-b + 2\sqrt{5}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4a} \cdot b^2 - \frac{1}{4a} \cdot 4\sqrt{5}b + \frac{20}{4a} - \frac{b^2}{2a} + \frac{b}{a}\sqrt{5} + c$$

$$= \frac{1}{4a} \cdot b^2 - \frac{b^2}{2a} - \frac{1}{a} \cdot \sqrt{5}b + \frac{b}{a}\sqrt{5} + \frac{20}{4a} + c$$

$$= -\frac{b^2}{4a} + \frac{20}{4a} + c$$

$$= -\frac{b^2}{4a} + \frac{20}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

=

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}+\frac{20}{4a}$$

=

$$-\frac{5}{4a}+\frac{20}{4a} = \frac{15}{4a}<0 \qquad \text{(Da a<0)}$$

Der Funktionswert ist also negativ. Dann sind nach Satz 2.2 alle Funktionswerte dieses Intervalls negativ.

Satz 3.2:

Alle Funktionswerte f(x) des Intervalls $x \in \left]x_2;\infty\right[$ sind negativ.

Beweis: *(vollkommen analog zu 3.1)*

Man wähle wieder einen beliebigen Wert des Intervalls, zum Beispiel $x_2-\frac{\sqrt{5}}{2a}$ (dieser ist größer als x_2), und berechne dann dessen Funktionswert:

$$f\left(x_2-\frac{\sqrt{5}}{2a}\right)=f\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{5}}{2a}-\frac{\sqrt{5}}{2a}\right)=a\cdot\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{5}}{2a}-\frac{\sqrt{5}}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{5}}{2a}-\frac{\sqrt{5}}{2a}\right)+c$$

=

$$\frac{1}{4a}\cdot\left(-b-2\sqrt{5}\right)^2+\frac{b}{2a}\cdot\left(-b-2\sqrt{5}\right)+c$$

=

$$\frac{1}{4a}\cdot\left(b^2+4\sqrt{5}b+20\right)+\frac{b}{2a}\cdot\left(-b-2\sqrt{5}\right)+c$$

=

$$\frac{1}{4a}\cdot b^2+\frac{1}{4a}\cdot 4\sqrt{5}b+\frac{20}{4a}-\frac{b^2}{2a}-\frac{b}{a}\sqrt{5}+c$$

=

$$\frac{1}{4a}\cdot b^2-\frac{b^2}{2a}+\frac{1}{a}\cdot\sqrt{5}b-\frac{b}{a}\sqrt{5}+\frac{20}{4a}+c$$

=

$$-\frac{b^2}{4a}+\frac{20}{4a}+c$$

= (Ab hier exakt wie in Satz 3.1 Zeile 7 bis 10)

$$\frac{15}{4a}<0 \qquad \text{(Da a<0)}$$

Wiederum ergibt sich ein negativer Funktionswert, nach Satz 2.3 haben dann alle Stellen x im Intervall $x \in \left]x_2;\infty\right[$ negative Funktionswerte.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Von Interesse sind nach Aufgabenstellung jedoch Lösungen der Gleichung $ax^2+bx+c>0$, das heißt, positive Funktionswerte.

Diese können sich nur noch im Intervall $x \in \left]x_1 ; x_2\right[$ ergeben. *(Die in keinem Intervall betrachteten Stellen sind x_1 und x_2, diese sind als Nullstellen jedoch per definitionem nicht positiv.)*

Soll die Gleichung $ax^2+bx+c>0$ also lösbar sein, so muss allgemein für beliebige x die folgende Ungleichung gelten:

$$x_1 < x < x_2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{5}}{2a} < x < -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{5}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \text{(da a<0)}$$

$$-b+\sqrt{5} > 2ax > -b-\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{5} < 2ax+b < \sqrt{5}$$

Da x $\in$ **R** ist und **Q** $\subset$ **R** gilt, gilt diese Ungleichung, die für beliebige x $\in$ **R** getroffen wurde, auch für beliebige x $\in$ **Q**.
Diese Einschränkung ist zulässig, da nur eine reelle Variable in der Ungleichung vorkommt.

Im folgenden sei nur der Spezialfall x $\in$ **Q** betrachtet.
Außerdem werde x im Folgenden gemäß Aufgabenstellung als konstant betrachtet.

Definition:
Sei t definiert als t = 2ax+b
Dann folgt:
$-\sqrt{5} < t < \sqrt{5}$
und daraus ein

Hilfssatz:
$-5 \le t^2 - 5 < 0$

<u>Beweis:</u>

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

$-\sqrt{5} < t < \sqrt{5}$
=> t²<5
Außerdem gilt $t^2 \geq 0$
=> $0 \leq t^2 < 5$
<=>
$-5 \leq t^2 - 5 < 0$

Satz 4:

$$ax^2 - (2ax + b)x - c = -\frac{t^2 - 5}{4a}$$

Beweis:
Umformen der Definition für t ergibt:
b = t-2ax

Dies setzt man in b²-4ac=5 ein:
(t-2ax)^2-4ac=5
<=>
(t-2ax)²-5=4ac
<=> (2. Binomische Formel)
$t^2 - 4tax + 4a^2x^2 - 5 = 4ac$
<=> (erlaubt, da $a < 0$)
$$\frac{t^2 - 4tax + 4a^2x^2 - 5}{4a} = c$$
<=>
$$ax^2 - tx + \frac{t^2 - 5}{4a} = c$$
<=> teilweise Rücksubstitution
$$ax^2 - (2ax + b)x - c = -\frac{t^2 - 5}{4a}$$

Definition:
Da x eine rationale Zahl ist, kann sie (vollständig gekürzt) eineindeutig durch die Variablen r und s beschrieben werden:
$x = \frac{r}{s}$ mit r $\in$ **Z** und s $\in$ **N** (ohne Null) und ggT(r,s)=1

Satz 5:
$-\frac{t^2 - 5}{4a} \cdot s^2$ ist ganzzahlig.

Beweis:
Einsetzen der Definition von x durch r und s in Satz 4:

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

$$a \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^2 - \left(2a\frac{r}{s} + b\right) \cdot \frac{r}{s} - c = -\frac{t^2 - 5}{4a}$$

<=> Klammern auflösen

$$a \cdot \frac{r^2}{s^2} - 2a \cdot \frac{r^2}{s^2} - b\frac{r}{s} - c = -\frac{t^2 - 5}{4a}$$

<=>

$$\frac{a \cdot r^2 - 2a \cdot r^2 - b \cdot r \cdot s - c \cdot s^2}{s^2} = -\frac{t^2 - 5}{4a}$$

<=> (mit s² multiplizieren)

$$a \cdot r^2 - 2a \cdot r^2 - b \cdot r \cdot s - c \cdot s^2 = -\frac{t^2 - 5}{4a} \cdot s^2$$

Die linke Seite enthält ausschließlich ganzzahlig definierte Variablen; da die Menge der ganzen Zahlen bezüglich der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation abgeschlossen ist, ist der gesamte Ausdruck auf der linken Seite ganzzahlig. Damit muss auch der rechte Ausdruck ganzzahlig sein.

<u>Satz 6:</u>

$$a \geq \left(t^2 - 5\right) \cdot \frac{s^2}{4}$$

<u>Beweis:</u>

Nach dem Hilfssatz ist

$t^2-5<0$

<=> $-(t^2-5)>0$

<=> $-\left(t^2 - 5\right) \cdot s^2 > 0$ (da s>0)

<=> $\dfrac{-\left(t^2 - 5\right) \cdot s^2}{4a} < 0$

Da der linke Ausdruck nach Satz 5 ganzzahlig ist, folgt:

$$\frac{-\left(t^2 - 5\right) \cdot s^2}{4a} \leq -1$$

<=> (Multiplikation mit -a)

$$\frac{\left(t^2 - 5\right) \cdot s^2}{4} \leq a$$

Nach dem Hilfssatz gilt außerdem:

$t^2 - 5 \geq -5$

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

<=> (Multiplikation mit $\frac{s^2}{4}$)

$$\frac{(t^2-5)\cdot s^2}{4} \geq \frac{-s^2 \cdot 5}{4}$$

Zusammenfassend:

=>

$$a \geq \frac{(t^2-5)\cdot s^2}{4} \geq \frac{-s^2 \cdot 5}{4}$$

=> (Mit der Voraussetzung a<0 folgt:)

$$0 > a \geq -s^2 \cdot \frac{5}{4}$$

Da s konstant ist, hat a nur begrenzt viele ganzzahlige Lösungen.

Aus

$$-\sqrt{5} < 2ax + b < \sqrt{5}$$

<=>

$$-\sqrt{5} - 2ax < b < \sqrt{5} - 2ax$$

folgt, dass für ein gegebenes a und konstantes x nur begrenzt viele Lösungen für ein ganzzahliges b möglich sind.

Nach

$$b^2 - 4ac = 5 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{b^2-5}{4a}$$

kann jeder möglichen Lösung für a und b nur höchstens ein c zugeordnet werden.

Damit gibt es nur endlich viele Lösungen für a, für jede dieser Lösungen nur endlich viele Lösungen für b und für jedes Lösungspaar (a,b) nur jeweils höchstens eine Lösung für c.

Damit gibt es nur endlich viele Lösungstripel (a,b,c), die die gegebenen Gleichungen erfüllen.
Q.E.D.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Aufgabe 3:

Zwei Kreise k1 und k2 schneiden sich in A und B. Eine erste Gerade durch B schneide k1 in C und k2 in E. Eine zweite Gerade durch B schneide k1 in D und k2 in F; dabei liege B zwischen den Punkten C und E sowie zwischen den Punkten D und F.
Schließlich seien M und N die Mittelpunkte der Strecken CE und DF. Man beweise: Die Dreiecke ACD, AEF und AMN sind zueinander ähnlich.

Definitionen:

Mit $\angle XYZ$ sei der Winkel bezeichnet, den die Strecken YX und YZ einschließen.
Alle geometrischen Konstruktionen seien außerdem in der euklidischen Ebene definiert.

Vorbemerkung:

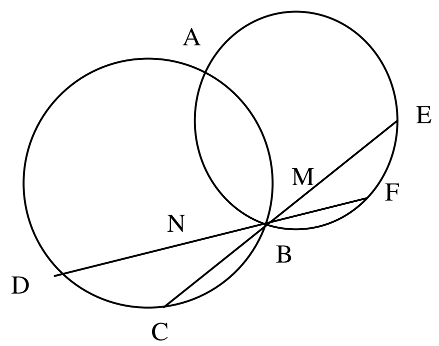
Bekannt aus dem Schulunterricht sind diese elementaren Definitionen, die ohne Beweis bleiben sollen:

Die folgenden drei Aussagen sind für zwei Dreiecke XYZ und X'Y'Z' äquivalent:

- Zwei Dreiecke XYZ und X'Y'Z' sind zueinander ähnlich.
- Für zwei Dreiecke XYZ und X'Y'Z' gilt:
  $\angle XYZ = \angle X'Y'Z' \wedge \angle YZX = \angle Y'Z'X' \wedge \angle ZXY = \angle Z'X'Y'$
- $\exists k : k = \dfrac{|XY|}{|X'Y'|} = \dfrac{|YZ|}{|Y'Z'|} = \dfrac{|XZ|}{|X'Z'|}$

Lösung:

Zeichnung:



Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Lösungsschritt 1: Dreieck ACD ist ähnlich zu Dreieck AEF.

Satz 1: $\angle$CAD=$\angle$EAF

Beweis:

$\angle$CAD	
=	nach Peripheriewinkelsatz
$\angle$ CBD	
=	nach Wechselwinkelsatz
$\angle$EBF	
=	nach Peripheriewinkelsatz
$\angle$EAF	

Satz 2: $\angle$ADC=$\angle$AFE

Beweis:

$\angle$ADC	
=	(ADCB ist ein Sehnenviereck)
180°-$\angle$ABC	
=	nach Nebenwinkelsatz
$\angle$ABE	
=	nach Peripheriewinkelsatz
$\angle$AFE	

Satz 3: $\angle$ ACD = $\angle$ AEF

Beweis:
Aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke folgt:

$\angle$ACD+$\angle$CAD+$\angle$ADC=180°	
<=>	
$\angle$ADC=180° - $\angle$CAD - $\angle$ACD	
<=>	Nach Satz 1
$\angle$ADC=180°-$\angle$EAF-$\angle$ACD	
<=>	Nach Satz 2
$\angle$ADC=180°-$\angle$EAF-$\angle$AEF	
<=>	Winkelsummensatz für Dreiecke
$\angle$ADC = $\angle$AFE	

Da die Dreiecke ACD und AEF nach Satz 1;2 und 3 in ihren Winkeln jeweils paarweise übereinstimmen, sind sie zueinander "ähnlich".

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

<u>Schritt 2: Dreieck AMN ist ähnlich zu den Dreiecken ACD und AEF.</u>

Satz 4:
Das Dreieck DAF ist ähnlich zum Dreieck CAE

Beweis:
Nach Schritt eins sind die Dreiecke ACD und AEF zueinander ähnlich. Dann gilt nach dem konstanten Verhältnis der Dreiecksseiten:

$$\frac{|AD|}{|AF|}=\frac{|AC|}{|AE|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|AC|}{|AD|}=\frac{|AE|}{|AF|}$$

Zunächst definiere man den Faktor r mit $r=\frac{|AC|}{|AD|}=\frac{|AE|}{|AF|}$

Ein beliebiges Dreieck C'A'E', dessen Seitenlängen $|C'E'|=r\cdot|DF|$, $|C'A'|=r\cdot|AD|$ und $|A'E'|=r\cdot|AF|$ betragen, ist wegen dem konstanten Verhältnis der Seiten zueinander ähnlich zu Dreieck DAF. Daher haben beide auch paarweise identische Winkel, das heißt, aus der Ähnlichkeit folgt:
$\angle$ C'A'E' = $\angle$ DAF

Ich zeige nun, dass CAE und C'A'E' nach Kongruenzsatz SWS deckungsgleich sind:

In die Aussage $|A'E'|=r\cdot|AF|$ setze man eine Definition für r ein und kürze:

$$|A'E'|=\frac{|AE|}{|AF|}\cdot|AF|=|AE|$$

In die Aussage $|A'C'|=r\cdot|AD|$ setze man die andere Definition für r ein und kürze:

$$|A'C'|=\frac{|AC|}{|AD|}\cdot|AD|=|AC|$$

Außerdem gilt:
$\angle$ CAE
=
$\angle$CAF+ $\angle$FAE
= (Da $\angle$DAC + $\angle$CAF = $\angle$DAF gilt)
$\angle$DAF- $\angle$DAC+$\angle$FAE
= Da $\angle$DAC= $\angle$FAE gilt (nach Satz 1))
$\angle$DAF

Damit sind CAE und C'A'E' nach Kongruenzsatz SWS deckungsgleich und CAE ist ähnlich zu DAF.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Satz 5:
DAN ist ähnlich zu CAM

Beweis:
Wieder sei ein beliebiges Dreieck C"A"M" gegeben, dessen Seitenlängen mit demselben r folgendermaßen definiert seien: $|A''C''| = r \cdot |AD|$ und $|C''M''| = r \cdot |DN|$ und $|A''M''| = r \cdot |AN|$
Dann stehen sie zu den entsprechenden Seitenlängen im Dreieck DAN in einem konstanten Verhältnis und damit sind die Dreiecke DAN und C"A"M" zueinander ähnlich.
Ich zeige nun, dass die Dreiecke CAM und C"A"M" nach Kongruenzsatz SWS zueinander kongruent sind:

$\angle$ ACM
= (Da C, M und E auf einer Geraden liegen.)
$\angle$ ACE
= (Nach Satz 4)
$\angle$ ADF
= (Da D, N und F auf einer Geraden liegen.)
$\angle$ ADN
= (Da DAN zu C"A"M" ähnlich ist.)
$\angle$ A"C"M"

Setzt man in die Aussage $|A''C''| = r \cdot |AD|$ die Definition für r ein und kürzt, so folgt:

$$|A''C''| = \frac{|AC|}{|AD|} \cdot |AD| = |AC|$$

Des weiteren lässt sich r folgendermaßen umformen:

$$r = \frac{|CE|}{|DF|}$$

$\Leftrightarrow$ erweitern mit 0,5 [5]

$$r = \frac{0{,}5 \cdot |CE|}{0{,}5 \cdot |DF|}$$

$\Leftrightarrow$

$$r = \frac{|CM|}{|DN|}$$

(Da M die Strecke CE und N die Strecke DN halbiert.)

Diese Gleichung setzt man nun anstelle von r in $|C''M''| = r \cdot |DN|$ ein und erhält:

[5] Erweitert man mit einem anderen Faktor aus $]0;1[$, so lassen sich die Strecken CE und DF in einem beliebigen übereinstimmenden Verhältnis teilen, ohne die Ähnlichkeit von AMN und ADF und ACE zu beeinträchtigen.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

$$|C''M''| = \frac{|CM|}{|DN|} \cdot |DN| = |CM|$$

Damit sind CAM und C"A"M" kongruent nach Kongruenzsatz SWS und die Dreiecke ADN und ACM sind zueinander ähnlich.

Satz 6: ACD ist ähnlich zu AMN

Beweis:
Da ADN zu ACM ähnlich ist (nach Satz 5), gilt:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AN|}{|AM|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|AM|}{|AC|}$$

Man definiere nun $t = \frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|AM|}{|AC|}$

Wieder erzeuge man ein Dreieck A'''M'''N''' mit den Seitenlängen $|A'''N'''| = t \cdot |AD|$, $|M'''N'''| = t \cdot |CD|$ und $|A'''M'''| = |AC|$.
Dann ist auf Grund des konstanten Seitenverhältnisses das Dreieck A'''M'''N''' ähnlich zum Dreieck ACD.
Ich zeige nun, dass das Dreieck A'''M'''N''' zum Dreieck AMN kongruent nach Kongruenzsatz SWS ist.
In die Gleichung $|A'''N'''| = t \cdot |AD|$ setze man eine der beiden Definitionen für t ein und kürze:

$$|A'''N'''| = \frac{|AN|}{|AD|} \cdot |AD| = |AN|$$

In die Gleichung $|A'''M'''| = t \cdot |AC|$ setze man die andere Definitionen für t ein und kürze:

$$|A'''M'''| = \frac{|AM|}{|AC|} \cdot |AC| = |AM|$$

Außerdem gilt:
$\angle$M'''A'''N'''
= Da A'''M'''N''' und ACD ähnlich sind.
$\angle$CAD
=
$\angle$MAD - $\angle$MAC
=
$\angle$MAN+$\angle$NAD-$\angle$MAC
= Ähnlichkeit nach Satz 5: $\angle$NAD = $\angle$MAC
$\angle$MAN
Damit sind die Dreiecke AMN und A'''M'''N''' kongruent nach Kongruenzsatz SWS und es folgt, dass ACD zu AMN ähnlich ist.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Aus der Transitivität des Ähnlichkeitsbegriffs folgt, dass die Dreiecke ACD, AEF und AMN jeweils ähnlich zueinander sind.
Q.E.D.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Aufgabe 4:

Es sei A(n) die maximale Anzahl der Selbstüberschneidungen von geschlossenen Streckenzügen $P_1P_2 \ldots P_nP_1$ ($n \geq 3$), bei denen keine drei der Eckpunkte auf einer Geraden liegen.

Man beweise:

a) $A(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, falls n ungerade ist.

b) $A(n) = \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$, falls n gerade ist.

Lösung:

<u>Definitionen:</u>
Sei n die Anzahl der Strecken des Streckenzuges.
Die Strecke zwischen Punkt P_k und P_{k+1} sei als Strecke k bezeichnet, dabei ist $k \leq n$. Die Strecke zwischen Punkt P_n und P_1 ist dann Strecke n.

Weiterhin sei $B_n(k)$ in einem Streckenzug aus n Strecken die Anzahl von Strecken, die von Strecke k geschnitten werden.

Die Begriffe "Selbstüberschneidung" und "Schnittpunkt" werden im folgenden Text synonym verwandt.

Aufgabenteil a):

Schritt 1: $A(n) \leq \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

<u>Beweis:</u>
Da keine Strecke von sich selbst oder von einer der ihr benachbarten Strecken geschnitten werden kann (nach Aufgabenstellung) und diese drei Strecken jeweils voneinander verschieden sind (da $n \geq 3$ gilt), kann eine beliebige Strecke k von mindestens 3 Strecken nicht geschnitten werden. Das heißt, es gilt bei konstantem n für beliebige k:
$B_n(k) \leq n-3$

Summiert man alle Bn(k), die sich für ein konstantes n ergeben, auf, so erhält man n Summanden, deren jeder kleiner als oder gleich n-3 ist. Daraus folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} B_n(k) \leq n \cdot (n-3)$$

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Da in der Aufsummierung aller $B_n(k)$ jede Selbstüberschneidung doppelt gezählt wurde (da sie zum $B_n(k)$ beider beteiligten Strecken beiträgt), ist die Gesamtzahl der Selbstüberschneidungen genau halb so groß wie $\sum_{k=1}^{n} B_n(k)$

Damit gilt:

$$A(n) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} B_n(k) \le \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Schritt 2: $A(n) \ge \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

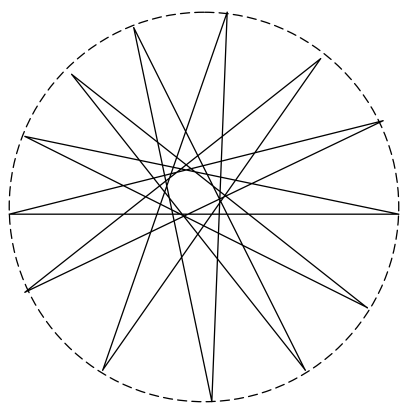
Ich zeige im Folgenden, dass für den Fall n =1 mod 2 ein Streckenzug mit $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Selbstüberschneidungen konstruierbar ist:

Man definiere zunächst r $\in$ **N** mit $r = \frac{n+1}{2}$
(Da n ungerade ist, ist r eine ganze Zahl.)

Dann zeichne man einen Hilfskreis und markiere auf diesem n Punkte, die man im Uhrzeigersinn fortlaufend mit R_1 bis R_n bezeichnet.

Man verbinde jeden Punkt mit dem um r Punkte im Uhrzeigersinn weiter liegenden.

Beispiel für den Fall n=13:



Ich zeige nun, dass diese Konstruktion allgemein für beliebige ungerade n eine Lösung darstellt:

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Satz 1: Jeder Punkt ist Teil desselben Streckenzugs.
Beweis:
Induktionsanfang: Punkt R_1 sei als Startpunkt des Streckenzugs definiert.
Induktionsvoraussetzung: Punkt R_k sei Teil des Streckenzugs.
Induktionsschritt: Dann ist der um r Punkte weiterliegende und mit diesem Punkt direkt verbundene ebenfalls mit dem Anfangsstreckenzug verbunden. Der an diesen Punkt wiederum angebundene liegt weitere r Punkte weiter im Uhrzeigersinn. Ist also Punkt R_k mit dem Streckenzug verbunden, so ist dies auch der um 2r im Uhrzeigersinn weiterliegende Punkt.
Da r als $r = \frac{n+1}{2}$ definiert ist, gilt:
$2 \cdot r = n + 1$

Damit ist der Punkt, der von R_k um n+1 im Uhrzeigersinn weiter liegt, ebenfalls mit dem Streckenzug verbunden. Da der Kreis genau n Punkte enthält, ist der um n weiterliegende Punkt R_k selbst, der um n+1 weiterliegende Punkt ist also R_{k+1}.
Ist also R_k Teil des Streckenzugs, so ist auch R_{k+1} teil desselben Streckenzugs.

Da somit jeder Punkt Teil desselben Streckenzugs ist, kann kein zweiter, von diesem unabhängiger Streckenzug existieren, da für diesen fiktiven zweiten Streckenzug keine Punkte mehr übrigbleiben würden.

Satz 2: Jeder Punkt verbindet genau zwei Strecken (der Streckenzug hat damit keine Verzweigungen).

Jeder Punkt ist mit dem im Uhrzeigersinn um r Punkte weiterliegenden direkt durch eine Strecke verbunden und wird vom r Punkte gegen den Uhrzeigersinn gelegenen Punkt erreicht, da er aus dessen Perspektive um r Punkte im Uhrzeigersinn weiter liegt. Ein weiterer Punkt wäre nicht mehr um r Punkte entfernt, da beide Möglichkeiten (pro Richtung eine) bereits vergeben sind. Nach Konstruktionsanweisung verbindet aber jede Strecke zwei um r auseinanderliegende Punkte.

Satz 3: Der Streckenzug ist geschlossen.

Wäre der Streckenzug offen, so gäbe es mindestens eine Strecke, die an einem Punkt mit keinem weiteren Streckenzug verbunden wäre. Dieser Punkt wäre dann nur mit der gegebenen Strecke verbunden, dies widerspricht Satz 2.

Satz 4: Jede Strecke schneidet genau n-3 andere Strecken.
(Ich zeige zunächst, dass keine zwei Strecken vollkommen disjunkt sind.)

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Beweis:
Eine beliebige Strecke k verbindet zwei Punkte. Damit teilt sie den Kreis in zwei Teile, in einem liegen genau r-1 Punkte. (Man verbindet einen Punkt mit dem um r Punkte weiterliegenden, die übersprungenen r-1 Punkte liegen also auf einer Seite der Strecke). Dieser Teil sei als "Seite 1" bezeichnet. Zwei Punkte sind Teil der trennenden Strecke. Damit können nur noch n-(r-1)-2 Punkte auf der anderen Seite, mit "Seite 2" bezeichnet, liegen. Da r als $r = \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow 2r - 1 = n$ definiert ist, sind dies 2r-1-(r-1)-2=r-2 Punkte.
Soll eine Strecke, die mit der gegebenen keinen Punkt gemeinsam hat, diese nicht schneiden, so müssen die sie begrenzenden Punkte beide auf einer Seite liegen.

Bemerkung:
Die von einer Strecke verbundenen zwei Punkte lassen nach Voraussetzung im Uhrzeigersinn den Abstand r, da $n = 2r - 1$ gilt, beträgt der Abstand in die andere Richtung $n - r = r - 1$

Auf "Seite 1" beträgt der maximale Abstand zwischen zwei Punkten r-2, da r-1 Punkte auf dieser Seite liegen, diese lassen r-2 Zwischenräume.
Liegen zwei Punkte auf dieser Seite, die miteinander verbunden sind, so haben sie maximal den Abstand r-2, in die andere Richtung gezählt minimal n-(r-2)=r+1.
Jede Strecke verbindet nach Konstruktionsvorschrift jedoch zwei um r auseinanderliegende Punkte.

Auf "Seite 2" befinden sich r-2 Punkte, der maximale Abstand zwischen zwei Punkten beträgt über diese Seite gezählt r-3, der minimale Abstand über die Gegenseite gezählt beträgt somit n-(r-3)=r+2.
Es ist somit nicht möglich, zwei Punkte auf dieser Seite zulässig zu verbinden.

Daraus folgt, dass keine zwei vollkommen disjunkten Strecken möglich sind. Entweder schneiden sich zwei Strecken also, oder sie sind benachbart. Da eine Linie nach Satz 2 mit maximal zwei anderen benachbart ist, schneidet sie alle anderen außer diesen beiden benachbarten und sich selbst. Damit schneidet jede Strecke genau n-3 andere.

Satz 5: Es gibt insgesamt genau $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Schnittpunkte

Beweis:
Nach Satz 4 schneidet jede Strecke genau n-3 andere, mit anderen Worten, die Strecke wird n-3 mal von anderen Strecken geschnitten. Der gesamte, aus n Strecken bestehende Streckenzug wird also $n \cdot (n-3)$ mal geschnitten. Da aber an jedem Schnittpunkt zwei Strecken beteiligt sind, in jedem Schnittpunkt also

zwei Strecken geschnitten werden, ist die Gesamtzahl der Schnittpunkte genau halb so groß, das heißt $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$:

Somit ist ein Streckenzug mit $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Schnittpunkten durchaus konstruierbar.

Ist ein Streckenzug mit $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Selbstüberschneidungen konstruierbar, so kann die maximale mögliche Anzahl an Selbstüberschneidungen nicht kleiner sein, woraus die Aussage von Schritt 2 folgt.

Aus $A(n) \leq \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ (Schritt 1)

und $A(n) \geq \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ (Schritt 2)

folgt:

$$A(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Q.E.D.

Aufgabenteil b)

Erster Schritt: $A(n) \leq \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$

Satz 1: $B_n(k) \leq n-3$

Beweis:

Da keine Strecke von sich selbst oder von einer der ihr benachbarten Strecken geschnitten werden kann (nach Aufgabenstellung) und diese drei Strecken jeweils voneinander verschieden sind (da $n \geq 3$ gilt), kann eine beliebige Strecke k von mindestens 3 Strecken nicht geschnitten werden. Das heißt, es gilt bei konstantem n für beliebige k:

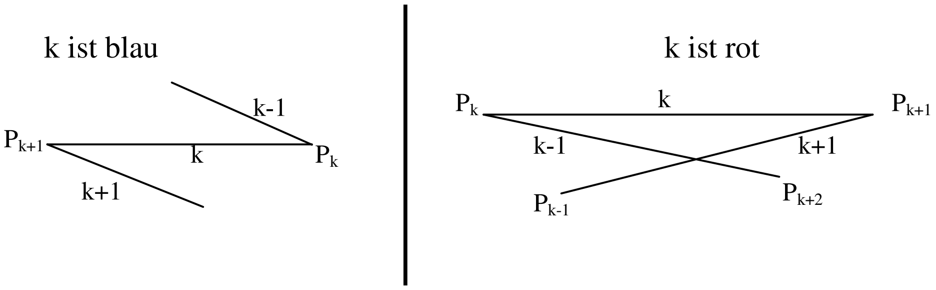
$B_n(k) \leq n-3$

Definition:

Legt man durch eine beliebige Strecke k eine Gerade g derart, dass für jeden Punkt P der Ebene die Aussage $\forall P : P \in k \Rightarrow P \in g$ erfüllt ist, so teilt diese Gerade (wie jede Gerade) die Ebene in zwei Teile. Liegen nun die Strecken k-1 und k+1 auf derselben dieser Seiten, so sei genau dann die Strecke k als "rot" bezeichnet, liegen die Strecken k-1 und k+1 auf verschiedenen Seiten, so sei genau dann die Strecke k als "blau" bezeichnet.

Die Anzahl aller blauen Strecken sei n_{blau}; die Anzahl aller roten Strecken sei n_{rot}.
Die denkbare dritte Möglichkeit, dass eine der mit k benachbarten Strecken ebenfalls auf g liegt, ist nicht erlaubt, da laut Aufgabenstellung keine drei Punkte auf einer Geraden liegen dürfen.
Da somit jede Strecke entweder rot oder blau ist, gilt: $n = n_{blau} + n_{rot}$
Die Summe der Schnitte mit allen roten Strecken sei S_{rot}, die der mit allen blauen sei S_{blau}.

Zeichnung zur Verdeutlichung:



Satz 2:
Für eine rote Strecke k gilt: $B_n(k) \leq n-4$
Beweis:
Sowohl k-1 als auch k+1 liegen nach Definition auf derselben Seite der Strecke k, damit auch die Punkte P_{k-1} und P_{k+2}. Man durchlaufe nun in positiver Durchlaufrichtung den restlichen Streckenzug von P_{k+2} bis P_{k-1}. Mit jedem Schnitt der Strecke k wechselt man die Seite (von k aus gesehen). Da man bei Pk-1 wieder auf der Seite ankommt, auf der man begonnen hat, muss die Strecke k in gerader Häufigkeit geschnitten werden. Somit ist $B_n(k)$ eine gerade Zahl.
Da n nach Voraussetzung gerade ist, ist n-3 ungerade. Der Fall $B_n(k) = n-3$ ist also nicht möglich. Daraus und aus Satz 1 folgt:
$B_n(k) \leq n-4$

Satz 3:
Für eine blaue Strecke k ist $B_n(k)$ ungerade
Beweis:
k-1 und k+1 liegen nach Definition auf verschiedenen Seiten der Strecke k, damit auch die Punkte P_{k-1} und P_{k+2}. Man durchlaufe nun in positiver Durchlaufrichtung den restlichen Streckenzug von P_{k+2} bis P_{k-1}. Mit jedem Schnitt der Strecke k wechselt man die Seite (von k aus gesehen). Das heißt, nach jeweils zwei Schnitten kommt man wieder auf der Seite an, auf der man begonnen hat. Da man bei Pk-1 auf der anderen Seite ankommt, als auf der, bei

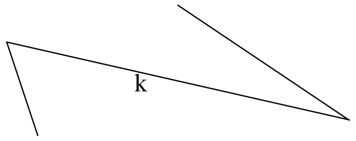
der man begonnen hat, muss die Strecke k in ungerader Häufigkeit geschnitten werden. Somit ist Bn(k) eine ungerade Zahl.

Satz 4:
Zwei beliebige voneinander verschiedene Strecken r und r', für die $B_n(r) = n-3$ und $B_n(r') = n-3$ gilt, schneiden sich.

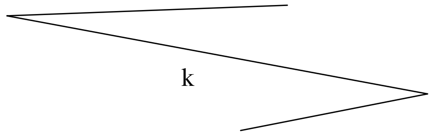
Beweis:
Wenn Sie existieren, sind beide vom Typ blau (da sie nach Satz 2 aus roten Strecken nicht konstruierbar sind). Zu beachten ist, dass eine blaue Strecke nach Definition mit zwei anderen Strecken benachbart ist, die auf verschiedenen Seiten der blauen Strecke liegen und sich somit nicht schneiden können. Ist also r vom Typ $B_n(k) = n-3$, so ist r blau und somit können sich r-1 und r+1 nicht schneiden. Damit schneidet r-1 weder r+1, noch r-2 und r (diese sind zu r-1 benachbart), noch r-1 (sich selbst). Damit schneidet r-1 mindestens vier Strecken nicht. Es gilt also $B_n(r-1) \leq n-4$, was der Annahme widerspricht, es sei mit r' zu identifizieren.
Analog lässt sich zeigen, dass r' nicht r+1 sein kann. r+1 schneidet weder r-1 (da r blau ist), noch r und r+2 (da diese mit ihm benachbart sind) noch r+1 (sich selbst). Somit schneidet auch r+1 mindestens vier Strecken nicht und es gilt $B_n(r+1) \leq n-4$, damit kann r' nicht r+1 sein, daraus folgt, dass r und r' nicht benachbart sein können. Sie müssen sich somit schneiden.
Anmerkung: Da n eine gerade Zahl ist und $n \geq 3$ gilt, folgt $n \geq 4$ und somit sind die vier Strecken die von r-1 und r+1 nicht geschnitten werden, jeweils untereinander verschieden.

Definition:
Ist eine Strecke k blau, so sei sie mit "rechts-links-gerichtet" bezeichnet, wenn in positiver Durchlaufrichtung Strecke k-1 von Strecke k nach rechts gerichtet und Strecke k von Strecke k+1 nach links gerichtet fortgesetzt wird. Vom Mittelpunkt von k aus gesehen, zweigen also sowohl k-1 als auch k+1 gegen den Uhrzeigersinn von k ab.
Ist eine Strecke k blau, so sei mit "links-rechts-gerichtet" bezeichnet, wenn in positiver Durchlaufrichtung Strecke k-1 von Strecke k nach links gerichtet und Strecke k von Strecke k+1 nach rechts gerichtet fortgesetzt wird. Vom Mittelpunkt von k aus gesehen, zweigen also sowohl k-1 als auch k+1 mit dem Uhrzeigersinn von k ab.

Zeichnung zur Verdeutlichung:
„rechts-links“



„links-rechts“



Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Satz 5:
Die Anzahl der blauen Strecken, die rechts-links gerichtet sind, ist gleich der Anzahl der blauen Strecken, die links-rechts gerichtet sind.

Beweis:
Durchläuft ein Punkt den geschlossen Streckenzug vollständig in positiver Durchlaufrichtung von P1 zu P1 zurück, so behält er bei Durchlaufen von einer Strecke des Typs rot seine Umdrehungsrichtung (mit oder gegen den Uhrzeigersinn) bei, bei Passieren einer blauen Strecke kehrt er sie um, da er sie entweder rechtsgerichtet betritt und linksgerichtet verlässt oder linksgerichtet betritt und rechtsgerichtet verlässt. Da er am Ziel (P1) wieder die selbe Umdrehungsrichtung wie zu Beginn (P1) haben muss, muss er genauso häufig von rechts nach links wie auch von links nach rechts gewechselt sein. Es gibt somit genauso viele „rechts-links" gerichtete Strecken wie „links-rechts" gerichtete Strecken.

Fallunterscheidung:

Fall 1: Nur für Strecken eines der beiden Typen "links-rechts" und "rechts-links" gilt: $B_n(k) = n-3$

Dann gilt für alle anderen blauen Strecken $B_n(k) \le n-5$, da nach Satz 3 der Fall $B_n(k) = n-4$ nicht möglich ist. Da es nach Satz 5 von beiden Typen gleich viele gibt, kann $B_n(k) = n-3$ für nicht mehr als die Hälfte aller Strecken gelten.
Somit weisen also weniger oder gleich viele Strecken einen Schnitt mehr als n-4 auf, als es Strecken gibt, die mindestens einen Schnitt weniger (also weniger oder gleich n-5) aufweisen.
Damit ist die Summe S_{blau} aller Schnitte von blauen Strecken
$S_{blau} \le n_{blau} \cdot (n-4)$

Da für beliebige rote Strecken $B_n(k) \le n-4$ gilt, folgt für die Summe S_{rot} aller Schnitte von roten Strecken $S_{rot} \le n_{rot} \cdot (n-4)$
Es folgt:
$$\sum_{k=1}^{n} B_n(k) = S_{rot} + S_{blau} \le n_{blau} \cdot (n-4) + n_{rot} \cdot (n-4) = n \cdot (n-4).$$
Da an jedem Schnittpunkt des Streckenzugs zwei Strecken beteiligt sind, ist die Gesamtzahl *A(n)* der Schnitte genau halb so groß.
$$A(n) \le \frac{n \cdot (n-4)}{2} < \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$$

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Für Fall 1 ist $A(n) \leq \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$ somit wahr.

Fall 2: Es sind Strecken keines der beiden Typen "links-rechts" und "rechts-links" vom Typ $B_n(k) = n-3$.

Dann gilt nach Satz 3 allgemein für blaue Strecken $B_n(k) \leq n-5$
Die Summe S_{blau} aller Schnitte aller n_{blau} blauen Strecken beträgt somit:
$S_{blau} \leq n_{blau} \cdot (n-5)$.
Die Summe S_{rot} aller Schnitte aller n_{rot} roten Strecken beträgt nach Satz 2
$S_{rot} \leq n_{rot} \cdot (n-4)$.
Für die Gesamtsumme folgt dann:

$$\sum_{k=1}^{n} B_n(k) = S_{blau} + S_{rot} \leq n_{blau} \cdot (n-5) + n_{rot} \cdot (n-4)$$
$$\leq (n_{rot} + n_{blau}) \cdot (n-4) = n \cdot (n-4)$$

Da an jedem Schnittpunkt des Streckenzugs genau zwei Strecken beteiligt sind, ist die Gesamtzahl *A(n)* der Schnitte genau halb so groß.

$$A(n) \leq \frac{n \cdot (n-4)}{2} < \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$$

Für Fall 2 ist $A(n) \leq \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$ somit ebenfalls wahr.

Fall 3: Es gilt für Strecken beider Typen "links-rechts" und "rechts-links" die Aussage $B_n(k) = n-3$

Die Betrachtung dieses Falls ist aufwendiger.

Definition:
Alle Strecken, für die $B_n(k) = 3$ gilt, müssen nach Satz 2 blau sein und müssen sich nach Satz 4 schneiden. Eine beliebige dieser Strecken vom Typ "links-rechts" sei mit Z=1 bezeichnet. Weiterhin sei, wenn eine Strecke mit Z bezeichnet ist, diejenige Strecke, die von Z aus gesehen mit Z den kleinsten Winkel im Uhrzeigersinn einschließt, mit Z+1 bezeichnet, bis bei Z=g alle Strecken bezeichnet sind.

Lemma1:
Es gibt mindestens eine Strecke Z=L , die links-rechts gerichtet ist und für die Z=L+1 rechts-links-gerichtet ist.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Beweis durch Widerspruch:
Anderenfalls würde aus der Tatsache, dass Z links-rechts-gerichtet ist, allgemein die Aussage folgen, dass auch Z+1 links-rechts gerichtet ist und es gäbe nach vollständiger Induktion, (Induktionsanfang: Nach Definition ist Z=1 "links-rechts" gerichtet) nur links-rechts-gerichtete Strecken (Widerspruch zur Fallbedingung).

Satz 6:
Es kann maximal zwei Strecken geben, die vom Typ $B_n(k) = 3$ sind

Beweis durch Widerspruch:
Gibt es mehr als zwei Strecken, so gibt es mindestens drei solcher Strecken. Die nach Lemma 1 existente Strecke Z=*L* muss sich nach Satz 4 mit Strecke Z=*L*+ 1 schneiden.

Zeichnung:

Der Bereich, der vom Schnittpunkt von *L* und *L*+1 aus gesehen gegen den Uhrzeigersinn zwischen Strecke *L* und Strecke *L*+1 liegt (in der Zeichnung grün markiert), sei im Folgenden als "grüner Bereich" bezeichnet.
Die Endpunkte der Strecke *L* seien (wie in der Zeichnung) mit E und F bezeichnet, die Endpunkte von *L*+1 mit G und H.

Eine Strecke, die an *L* im Punkt E anschließt, muss die Strecke *L*+1 entweder schneiden (somit liegt ihr anderer Anschlusspunkt E' im grünen Bereich) oder mit *L*+1 benachbart sein. Anderenfalls würde *L*+1 nicht von allen anderen Strecken geschnitten und könnte nicht vom Typ $B_n(L+1) = 3$ sein.

Eine Strecke, die an *L* im Punkt F anschließt, muss die Strecke *L*+1 entweder schneiden (somit liegt ihr anderer Anschlusspunkt F' im grünen Bereich) oder mit *L*+1 benachbart sein. Anderenfalls würde *L*+1 nicht von allen anderen Strecken geschnitten und könnte nicht vom Typ $B_n(L+1) = 3$ sein.

Eine Strecke, die an *L*+1 im Punkt G anschließt, muss die Strecke *L* entweder schneiden (somit liegt ihr anderer Anschlusspunkt G' im grünen Bereich) oder mit *L* benachbart sein. Anderenfalls würde *L* nicht von allen anderen Strecken geschnitten und könnte nicht vom Typ $B_n(L) = 3$ sein.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Eine Strecke, die an L+1 im Punkt H anschließt, muss die Strecke L entweder schneiden (somit liegt ihr anderer Anschlusspunkt H' im grünen Bereich) oder mit L benachbart sein. Anderenfalls würde L nicht von allen anderen Strecken geschnitten und könnte nicht vom Typ $B_n(L) = 3$ sein.

Lemma 2:
Ist ein beliebiger Punkt im grünen Bereich, so muss ein mit diesem durch eine Strecke verbundener Punkt im gegenüberliegenden grünen Bereich sein, da die Strecke sowohl L als auch L+1 schneiden muss, oder einer der Punkte E, F, G, H sein.

Es folgt nach vollständiger Induktion, dass kein Punkt außerhalb des grünen Bereichs sein kann:

Induktionsanfang: Die Punkte E',F',G',H' müssen, wie oben gezeigt, alle im grünen Bereich sein.
Induktionsschritt: Ist ein beliebiger Punkt P_k im grünen Bereich, so muss dies nach Lemma 2 auch für Punkt P_{k+1} zutreffen, oder P_{k+1} liegt genau auf der Grenze und ist einer der Punkte E, F, G, H (er kann kein weiterer sein, da nach Aufgabenstellung keine drei Punkte auf einer Geraden liegen).

Damit kann kein Punkt außerhalb des grünen Bereichs sein.

Nach Voraussetzung wären die Endpunkte einer dritte Strecke, für die $B_n(k) = 3$ gilt, also ebenfalls in je einem der grünen Bereiche. Dann allerdings wäre der Winkel, den diese dritte Strecke mit L+1 bildet, kleiner als der Winkel, den L zu L+1 bildet. Damit könnten L und L+1 keine aufeinanderfolgenden Z-Werte haben, dies widerspricht dem Lemma 1.

Es folgt damit, dass für maximal zwei Strecken $B_n(k) = 3$ gilt. Nach der Bedingung für Fall 3 können es auch nicht weniger sein, da es mindestens eine je vom Typ "links-rechts" und "rechts-links" sein müssen.

Für die restlichen $n_{blau} - 2$ blauen Strecken gilt:
Die Summe $S_{blau\ rest}$ der Schnitte aller übrigen blauen Strecken beträgt
$S_{blau\ rest} \leq (n_{blau} - 2) \cdot (n-5) \leq (n_{blau} - 2) \cdot (n-4)$, da jede einzelne der restlichen Strecken maximal n-5 andere schneiden kann.

Die Summe der Schnitte jeder einzelnen roten Strecke beträgt
$S(rot) \leq n(rot) \cdot (n-4)$, da jede einzelne rote Strecke nach Satz 2 maximal von n-4 anderen Strecken geschnitten werden kann.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Die Summe der Schnitte aller Strecken beträgt somit

$$\sum_{k=1}^{n} B_n(k) = 2\cdot(n-3) + S_{(blau\ \ rest)} + S_{(rot)}$$
$$\le 2\cdot(n-3) + (n_{blau}-2)\cdot(n-4) + n_{rot}\cdot(n-4)$$
$$= 2\cdot(n-4+1) + (n_{blau}-2)\cdot(n-4) + n_{rot}\cdot(n-4)$$
$$= 2\cdot(n-4) + 2 + (n_{blau}-2)\cdot(n-4) + n_{rot}\cdot(n-4)$$
$$= 2 + (2 + n_{blau} - 2 + n_{rot})\cdot(n-4)$$
$$= 2 + n\cdot(n-4)$$

Da an jedem Schnittpunkt genau zwei Strecken geschnitten werden, ist die Anzahl der Schnittpunkte genau halb so groß und es gilt:

$$A(n) \le \frac{2+n\cdot(n-4)}{2}$$
<=>
$$A(n) \le \frac{n\cdot(n-4)}{2}+1$$

Somit genügen alle drei Fälle diesem Satz und es gilt ganz allgemein für gerade n:

$$A(n) \le \frac{n\cdot\left(n-4\right)}{2}+1$$

Schritt 1 ist somit bewiesen.

Schritt 2: $A(n) \ge \frac{n\cdot\left(n-4\right)}{2}+1$

Lässt sich ein geschlossener Streckenzug, der $\frac{n\cdot(n-4)}{2}+1$ Selbstüberschneidungen aufweist, konstruieren, so kann die maximale Anzahl an Selbstüberschneidungen nicht kleiner sein.

Ich zeige nun, das ein solcher Streckenzug konstruierbar ist.

Schritt 2.1: Mindestanzahl möglicher Streckenüberschneidungen bei einem offenen Streckenzug.

Satz 7:
Fügt man an einen offenen unverzweigten Streckenzug aus n Strecken, bei dem keine drei Punkte auf einer Linie liegen und die Strecke n genau n-2 andere

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Strecken schneidet, eine weitere Strecke n+1 an, so kann die Anzahl der neu entstehenden Schnitte n-1 betragen.

Beweis:

Induktionsanfang:

Besteht der Streckenzug aus zwei Streckenzügen, so kann es keine Selbstüberschneidungen geben, da benachbarte Strecken sich nicht schneiden. Fügt man dann an die zweite eine dritte Strecke an, so kann sie die erste Strecke schneiden, da diese mit der zweiten Strecke keinen gestreckten Winkel einschließt.

Induktionsvoraussetzung:

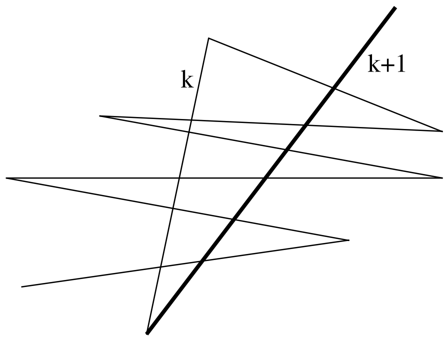
Die Strecke k schneide genau k-2 andere Strecken.

Induktionsschritt:

Dann lässt sich derart an n eine Strecke k+1 anfügen, dass sie die Strecke k-1 schneidet, indem sie auf der entsprechenden Seite von k, auf der auch k-1 ist, angefügt wird, wenn sie nur lang genug ist. Des weiteren kann k+1 alle Strecken schneiden, die auch k schneidet, sofern k+1 nur nah genug an der Strecke k liegt. Damit kann die Strecke k+1 genau eine Strecke mehr schneiden als die Strecke k. Dies sind k-1 = (k+1)-2 Strecken.

Somit lässt sich an einen Streckenzug, bei dem die Strecke n genau n-2 andere Strecken schneidet, eine Strecke n+1 anfügen, die (n+1)-2 andere Strecken schneidet.

Zeichnung:



Satz 8:

Ein offener, nicht verzweigter [kein Punkt schließt an drei Geraden an] Streckenzug aus n Strecken (mit $n \geq 2$) kann $\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2}$ Selbstüberschneidungen haben. Dabei dürfen nicht mehr als drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Beweis:

Für n=2 ist der Fall klar. Zwei benachbarte Strecken können sich nicht schneiden. Die Anzahl der Selbstüberschneidungen ist somit 0. Setzt man für n in die obige Gleichung zwei ein, so erhält man $\frac{(2-2)\cdot(2-1)}{2} = 0$. Für den Fall n=2 ist die Behauptung somit bewiesen.

Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

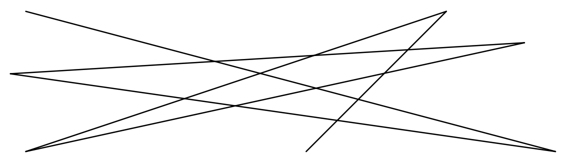
Man konstruiere nun einen Streckenzug aus n Strecken nach dem Konstruktionsverfahren aus Satz 1. Indem man also mit jeder Strecke k (für $k \geq 2$), die man hinzufügt, genau k-2 weitere Schnittpunkte erhält, ist die Gesamtzahl der Schnittpunkte

$$\sum_{k=2}^{n} k-2 \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-2} k \quad = \quad \sum_{k=1}^{n-2} k$$

$$= \frac{((n-2)+1)\cdot(n-2)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$$

Zeichnung mit Beispiel für n=6



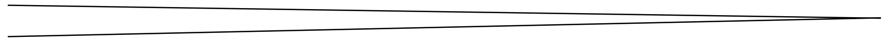
Schritt 2.2:

Konstruktion von $\frac{n\cdot(n-4)}{2}+1$ Streckenüberschneidungen bei einem geschlossenen Streckenzug, für den n eine gerade Zahl ist.

Zunächst fasse man alle Strecken in $\frac{n}{2}$ Gruppen zu je zwei zusammen.

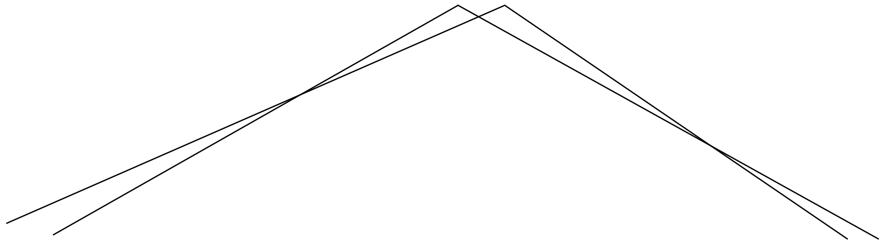
Für $\frac{n}{2}-2$ Gruppen lasse man die beiden Strecken einer Gruppe sich kreuzen. Je zwei Punkte seien dabei beliebig nah angenähert, wie aus folgender Zeichnung ersichtlich:

Für die restlichen beiden Gruppen seien die beiden Strecken an einem Ende verbunden und die beiden anderen Enden seien einander beliebig nah angenähert, wie aus folgender Zeichnung ersichtlich:



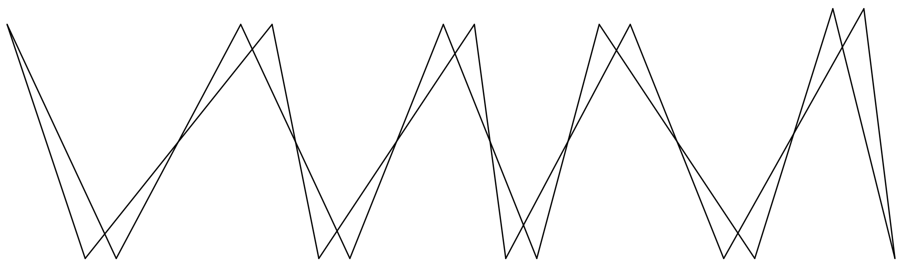
Teilnehmer: Mirko Rösner
Dahlweg 40
48153 Münster

Man verbinde zwei Gruppen, indem man je zwei Endpunkte miteinander identifiziert, derart, dass eine Strecke der einen Gruppe eine der anderen Gruppe schneidet, wie folgt:



Eine solche Verbindung nenne man "Knoten".

Nun konstruiere man einen offenen Zug solcher Gruppen, indem man alle Gruppen zu einer Kette verbindet und die zwei gesondert erzeugten Gruppen je an den Anfang und das Ende einer solchen Kette setzt, wie folgt:



Man erhält einen geschlossenen Streckenzug aus n Strecken, da jede Strecke an jedem Ende mit je einer anderen verbunden ist. Es konnten keine zwei gesonderten Streckenzüge entstehen, da jede Stecken über die fortlaufend angebundenen Gruppen mit beiden Endstücken verbunden ist.

Nähert man nun die beiden Punkte je eines Verbindungsknotens einander beliebig nah an, so lässt sich die Kette angenähert als offener Streckenzug betrachten.

Man lasse diesen angenäherten Streckenzug aus $\frac{n}{2}$ Gruppen sich nach Schritt 1 möglichst oft (das heißt $\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2}$ mal) schneiden.

Ein solcher offener Streckenzug kann dann nach Schritt 1 bis zu $\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2}$ Schnittpunkte haben. Da jedoch an jedem Schnittpunkt zwei Gruppen aus je

Dahlweg 40
48153 Münster

zwei Strecken geschnitten wurden, ist die eigentliche Zahl an Schnittpunkten viermal so groß, das heißt, es sind $4 \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2}$ Schnittpunkte.

Weitere Schnittpunkte ergeben sich daraus, dass sich nach Konstruktionsanweisung die zwei Strecken einer Gruppe sich schneiden, dies gilt für alle Gruppen außer den beiden Endstücken. Es ergeben sich somit $\frac{n}{2}-2$ weitere Schnittpunkte.

Außerdem schneiden sich in jedem Knoten je zwei Strecken. Da genau $\frac{n}{2}-1$ Knoten (Verbindung von $\frac{n}{2}$ Gruppen) existieren, sind dies weitere $\frac{n}{2}-1$ Schnittpunkte.

Die Gesamtzahl aller Schnittpunkte beträgt somit:

$$4 \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2} + \left(\frac{n}{2}-2\right) + \left(\frac{n}{2}-1\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}n + 2\right) + n - 3$$

$$= 2 \cdot \frac{n^2}{4} - 3n + 4 + n - 3$$

$$= \frac{1}{2} \cdot n^2 - 2n + 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 4n\right) + 1$$

$$= \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$$

Da somit ein Streckenzug mit $\frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$ Schnittpunkten konstruiert werden kann, kann die maximale Anzahl an Selbstüberschneidungen *A(n)* eines geschlossenen Streckenzugs nicht kleiner sein.

Beispiel für den Fall n=18:

Es gilt damit:

$$A(n) \geq \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$$

Aus Schritt 1 ergab sich:

$$A(n) \leq \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$$

Aus diesen beiden Aussagen folgt dann:

$$A(n) = \frac{n \cdot (n-4)}{2} + 1$$

Q.E.D.