Aufgabe 1:

Im Zentrum eines 2005x2005-Schachbretts liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll. Ein Zug besteht aus folgenden Schritten:

- Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,
- Schiebt dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Augenzahl nach links und
- Schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nasch oben oder um um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten. Das erreichte Feld ist das Ausgangsfeld für den nächsten Zug.

Welche Felder lassen sich durch eine endliche Folge derartiger Züge erreichen? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Lösung:

Definitionen und Voraussetzungen:

Das Ausgangsfeld des Würfels sei O(0;0)

Die restlichen Felder des Schachbretts seien mit $P_{m;n}(m;n)$ bezeichnet.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezeichne eine Bewegung des Würfels um x Felder nach rechts und um y Felder nach oben. Bei negativen Werten für x bzw. y bewegt sich der Würfel in die jeweils entgegengesetzte Richtung.

Da die gegenüberliegenden Felder eines regulären Spielwürfels zusammengezählt 7 ergeben, muss für einen einzelnen Zug gelten:

$|x| + |y| = 7$

Lösungsschritt 1 (Erreichen eines benachbarten Feldes):

Folgende drei Züge

$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

ergeben hintereinander ausgeführt $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dadurch wird das rechts des Ausgangsfelds gelegene Feld $P_1(1;0)$ erreicht.

Vertauscht man die Bezeichnungen für x und y, so lässt sich ebenso Feld $P_2(0;1)$ oberhalb vom Ausgangsfeld erreichen.

Lösungsschritt 2 (Erreichen aller Felder $P_{m;n}(m;n)$ für $|m| \leq 996$ und $|n| \leq 996$):

Will man ein solches beliebiges Feld $P_{m;n}$ erreichen, so führe man die Zugfolge

$$m\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}\right)+n\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right)=m\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ aus,

die den Spielwürfel m mal ein Feld nach rechts bewegt und ihn n mal ein Feld nach oben bewegt. Für negative m oder n ziehe man das Vorzeichen in die Vektoren und bewege den Würfel entsprechend. (Da der erste Zug jeder Zugfolge bereits mit einer Bewegung um sechs Felder beginnt, sind nur solche Zugausgangsfelder zulässig, bei denen der Würfel das Brett nicht verlässt.)

<u>Lösungsschritt 3</u> Erreichen aller Felder:
Für die restlichen Felder gilt:

a) Für $m>0$ und $n>0$ erreiche man das Feld $P_{m-7;\,n-7}$ und addiere die Züge $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, durch die man das gewünschte Feld erreicht.

b) Für $m<0$ und $n>0$ erreiche man das Feld $P_{m+7;\,n-7}$ und addiere die Züge $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, durch die man das gewünschte Feld erreicht.

c) Für $m<0$ und $n<0$ erreiche man das Feld $P_{m+7;\,n+7}$ und addiere die Züge $\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$, durch die man das gewünschte Feld erreicht.

d) Für $m>0$ und $n<0$ erreiche man das Feld $P_{m-7;\,n+7}$ und addiere die Züge $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, durch die man das gewünschte Feld erreicht.

Somit sind alle Felder $P_{m;n}$ des Schachbretts durch eine endliche Folge von Zügen erreichbar.

Aufgabe 2:

Die ganze Zahl a habe die Eigenschaft, dass 3a in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen Zahlen x, y darstellbar ist.
Man beweise, dass dann auch a in dieser Form darstellbar ist.

➔Behauptung: $a = p^2 + 2q^2 \quad \forall a, p, q \in Z$

Lösung:

Voraussetzungen:

Da a eine ganze Zahl ist, muss gelten:

$x^2 + 2y^2 \equiv 0 \bmod 3$

Außerdem gilt:

$3y^2 \equiv 0 \bmod 3$

Damit auch:

$x^2 + 2y^2 - 3y^2 = x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) \equiv 0 \bmod 3$

Da 3 eine Primzahl ist, ist der kommutative Restklassenring $Z/3Z$ nullteilerfrei. Daraus folgt:

$x + y \equiv 0 \bmod 3 \vee x - y \equiv 0 \bmod 3$

$\Leftrightarrow \; x \equiv -y \bmod 3 \vee x \equiv y \bmod 3$

Fallunterscheidung:

Erster Fall: $x \equiv -y \bmod 3$

Da x und –y kongruent modulo 3 sind, gilt:
$x = -y - 3n \quad \forall n, x, y \in Z$

Setzt man diese Gleichung in die Ausgangsgleichung $3a = x^2 + 2y^2$ ein, so erhält man:

$(-y - 3n)^2 + 2y^2 = 3a$
$\Leftrightarrow y^2 + 6yn + 9n^2 + 2y^2 = 3a$
$\Leftrightarrow 3y^2 + 6yn + 9n^2 = 3a$
$\Leftrightarrow y^2 + 2yn + 3n^2 = a$
$\Leftrightarrow (y + n)^2 + 2n^2 = a$

Es gelte: $p = y + n$ und $q = n$
➔ $a = p^2 + 2q^2 \quad \forall a, p, q \in Z$
Dies ist die geforderte Darstellung für a.

Zweiter Fall: $x \equiv y \bmod 3$

Aufgrund der Kongruenz modulo 3 gilt:
$x = y + 3n \quad \forall n, x, y \in \mathbb{Z}$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung $3a = x^2 + 2y^2$ ergibt:

$(y + 3n)^2 + 2y^2 = 3a$

$\Leftrightarrow y^2 + 6yn + 9n^2 + 2y^2 = 3a$

$\Leftrightarrow y^2 + 6yn + 9n^2 + 2y^2 = 3a$

$\Leftrightarrow 3y^2 + 6yn + 9n^2 = 3a$

$\Leftrightarrow y^2 + 2yn + 3n^2 = a$

$\Leftrightarrow (y + n)^2 + 2n^2 = a$

Es gelte: $p = y + n$ und $q = n$

$\Rightarrow$ $a = p^2 + 2q^2 \quad \forall a, p, q \in \mathbb{Z}$

Dies ist die geforderte Darstellung für a.

Somit ist in beiden Fällen die ganze Zahl a in der verlangten Form darstellbar, q.e.d.

Aufgabe 3:

Den Seiten a,b,c eines Dreiecks liegen die Winkel α, β, γ gegenüber. Es sei ferner $3\alpha + 2\beta = 180°$.

Man beweise, dass dann $a^2 + bc = c^2$ ist.

<u>Verwendete Sätze:</u>

Winkelsummensatz des Dreiecks:
(I) $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 180° - \gamma = \alpha + \beta$

(II) $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$

(III) $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$

Multiplikationssatz des Cosinus[1]:
(IV) $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

(V) $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha)$

(VI) $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\alpha)$ (Spezialfall von (V))

Sinussatz im Dreieck:
(VII) $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$ (r ist Inkreisradius)

Aus der gegebenen Beziehung $3\alpha + 2\beta = 180°$ folgt:
$1{,}5\alpha + \beta = 90°$
$\Leftrightarrow 1{,}5\alpha = 90° - \beta$ (VIII)
$\Leftrightarrow 0{,}5\alpha = 90° - (\alpha + \beta)$ (IX)

Lösung:

Setzt man in Satz (IV) die Werte 1,5α und 0,5α ein, so erhält man:

$$\cos(1{,}5 \cdot \alpha) \cdot \cos(0{,}5\alpha) = \frac{1}{2}[\cos(1{,}5 \cdot \alpha - 0{,}5 \cdot \alpha) + \cos(1{,}5 \cdot \alpha + 0{,}5 \cdot \alpha)]$$

$$\Leftrightarrow \cos(1{,}5 \cdot \alpha) \cdot \cos(0{,}5\alpha) = \frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(2 \cdot \alpha)$$

ergänzen durch $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2 \cdot \alpha)$:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2 \cdot \alpha) + \cos(1{,}5 \cdot \alpha) \cdot \cos(0{,}5 \cdot \alpha) = \frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}$$

[1] Wie auch alle folgenden Sätze aus entnommen.

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \cos(1{,}5\cdot\alpha)\cdot\cos(0{,}5\cdot\alpha) = \cos^2\left(\tfrac{1}{2}\cdot\alpha\right)$$ nach (V) und (VI)

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \cos(90° - \beta)\cdot\cos(90° - (\alpha+\beta)) = \cos^2(90° - (\alpha+\beta))$$ nach (VIII) und (IX)

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$$ nach (IV)

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) = \sin^2(\gamma)$$ nach (I) und (II)

$$\sin^2(\alpha)\cdot 4r^2 + \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)\cdot 4r^2 = \sin^2(\gamma)\cdot 4r^2$$ erweitern mit $4r^2$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha)\cdot\left(\frac{a}{\sin(\alpha)}\right)^2 + \sin(\beta)\cdot\frac{b}{\sin(\beta)}\cdot\sin(\gamma)\cdot\frac{c}{\sin(\gamma)} = \sin^2(\gamma)\cdot\left(\frac{c}{\sin(\gamma)}\right)^2$$ nach (VIII)

Kürzen führt auf:
$\Leftrightarrow a^2 + bc = c^2$, q.e.d.

Somit ist die verlangte Beziehung erfüllt.

Aufgabe 4: Für welche positiven ganzen Zahlen n kann man die n Zahlen 1, 2, 3, ..., n so in einer Reihe anordnen, dass für je zwei beliebige Zahlen der Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht genau zwischen ihnen steht?

Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Lösung:

Hilfssatz 1: Sind gegeben p, q, r derart, dass r nicht arithmetisches Mittel von p und q ist, dann ist auch 2r nicht das arithmetische Mittel von 2p und 2q.

Beweis:

$$\frac{p+q}{2} \neq r$$
$$\Leftrightarrow \frac{(p+q)\cdot 2}{2} \neq 2r$$
$$\Leftrightarrow \frac{2p+2q}{2} \neq 2r$$

Hilfssatz 2: Sind gegeben s, t, u derart, dass u nicht arithmetisches Mittel von s und t, dann ist auch u-1 nicht das arithmetische Mittel von s-1 und t-1.

Beweis:

$$\frac{s+t}{2} \neq u$$
$$\Leftrightarrow \frac{s+t}{2} + 1 \neq u+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{s+t+2}{2} \neq u+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{(s+1)+(t+1)}{2} \neq u+1$$

Hilfssatz 3: Das arithmetische Mittel einer geraden Zahl g und einer ungeraden Zahl u ist keine ganze Zahl.

Beweis:

Eine gerade Zahl g sei dargestellt durch $g = 2m \quad \forall m \in Z$

Eine ungerade Zahl u sei dargestellt durch $u = 2n+1 \quad \forall n \in Z$

Arithmetisches Mittel: $\frac{g+u}{2} = \frac{2m+2n+1}{2} = m+n+\frac{1}{2}$

Da $m,n \in Z$,

ist $\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \notin Z$.

<u>Lösungsschritt 1:</u>

Zunächst gehe man von einer Reihe R der natürlichen Zahlen von 1 bis k aus, für die die geforderte Eigenschaft erfüllt ist.
Dann verdopple man jede dieser Zahlen und erhält eine Reihe R_{gerade} der geraden Zahlen von 2 bis 2k.
Nach Hilfssatz 1 ist auch für R_{gerade} die Bedingung, dass für zwei beliebige Zahlen von R_{gerade} ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht, erfüllt.

Dann subtrahiere man von jeder der Zahlen aus R_{gerade} 1 und erhalte die Reihe $R_{ungerade}$ der ungeraden Zahlen von 1 bis 2k-1. Da die Bedingung für R_{gerade} erfüllt ist, ist sie nach Hilfssatz 2 auch für $R_{ungerade}$ erfüllt.

Man bilde dann eine Reihe R_{2k}, indem man die Reihen R_{gerade} und $R_{ungerade}$ hintereinander schreibt. Das arithmetische Mittel zweier gerader Zahlen kann dann nicht zwischen ihnen liegen, da beide in R_{gerade} liegen und für diese Reihe die Bedingung erfüllt ist. Das arithmetische Mittel zweier ungerader Zahlen kann ebenso nicht zwischen ihnen liegen, da beide in $R_{ungerade}$ liegen und die Bedingeung für diese Reihe ebenfalls erfüllt ist. Das arithmetische Mittel einer geraden und einer ungeraden Zahl ist nach Hilfssatz 3 keine ganze Zahl und somit nicht Element der Reihe.
Damit existieren keine zwei Zahlen aus R_{2k}, deren arithmetisches Mittel zwischen ihnen liegt, die Bedingung ist also erfüllt.

Damit gilt:
Wenn die verlangte Bedingung für eine Reihe der Zahlen 1 bis k erfüllt ist, dann lässt sich auch für die Zahlen von 1 bis 2k eine Reihe bilden, die die Bedingung erfüllt.

<u>Lösungsschritt 2:</u>

Für n=2 ist die Bedingung durch die Reihe 1, 2 erfüllt.

Ist die Bedingung für ein beliebiges positives ganzes k erfüllt, so ist sie nach Lösungsschritt 1 auch für 2k erfüllt. Verdoppelt man 2 beliebig oft, so ist die Bedingung also für 2^b für beliebige positive ganze b erfüllt (Verfahren entspricht der vollständigen Iteration).

Somit gibt es beliebig große endliche n, für die die Bedingung erfüllt ist.

Entfernt man aus einer Reihe von 1 bis k, für die die Bedingung erfüllt ist, das größte Element k, so werden die Eigenschaften für beliebige zwei der noch verbliebenen Zahlen der Reihe nicht beeinflusst, da zwischen ihnen keine Zahl verändert oder neu eingefügt wird. Somit ist die Reihe auch für die Zahlen von 1 bis n-1 zu bilden.

Um zu einem beliebigen n eine zulässige Reihe zu bilden, bilde man zunächst durch Iteration von Schritt 1 eine Reihe der Zahlen von 1 bis 2^b so lange bis $2^b>n$ ist. Dann entferne man so oft das jeweils größte Element aus der Reihe, bis n erreicht ist.

Die verlangte Bedingung ist somit für alle beliebigen positiven ganzen Zahlen n erfüllt.