Bundeswettbewerb Mathematik
Lösungen Runde 2

Hanno Becker

Vorwort bzgl. Hilfsmittel

Zur Lösung von Aufgabe 3 habe ich das Geometrie-Programm KSEG verwendet. Hilfreich bei Aufgabe 4 waren mein Taschenrechner (Ti89) sowie mein Computer und C++, mit denen ich einige genauere Abschätzungen als die in der Lösung aufgeführte testete.

Aufgabe 1
Ein Kreis sei in $2n$ kongruente Sektoren eingeteilt, von denen n schwarz und die übrigen n weiß gefärbt sind. Die weißen Sektoren werden, irgendwo beginnend, im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, \ldots, n$ nummeriert. Danach werden die schwarzen Sektoren, irgendwo beginnend, gegen den Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, \ldots, n$ nummeriert.
Man beweise, dass es n aufeinander folgende Sektoren gibt, in denen die Zahlen 1 bis n stehen.

Lösung: Vorbemerkung: im Folgenden werden Abkürzungen wie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ oder $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_k$ verwendet werden. Dabei werden die ersten Elemente der Folge wie üblich nur angegeben, um deutlich zu machen, wie die Indizierung fortzusetzen ist. Falls also $k = 1$, so sei mit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ lediglich x_1 angesprochen. Falls $k = 0$, so sei mit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ kein Element angesprochen, ebensowenig im Falle $k = 1$ und einer Folge $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_1$ (wohl aber für $k = 2$). Keinesfalls sei mit einer solchen Abkürzung eine gewisse Größe von k impliziert.
Für $n = 1$ ist die Behauptung klar. Ich beschränke mich im Folgenden daher auf $n \geq 2$.
Es ist irrelevant, dass die Sektoren kongruent sind. Es kann für jeden Sektor ein Punkt auf dem Schnitt von Sektor und Kreisrand gewählt werden, der diesen Sektor repräsentiert, d.h. seine Farbe und seine Nummer trägt. Mit diesen Überlegungen lässt sich das Problem wie folgt umformulieren: Für natürliches n seien $2n$ verschiedene Punkte auf dem Rand eines Kreises gegeben; n dieser Punkte seien schwarz gefärbt, die übrigen weiß. Die weißen Punkte werden, irgendwo beginnend, im Uhrzeigersinn mit $1, 2, \ldots, n$ nummeriert. Danach werden die schwarzen Punkte, irgendwo beginnend, gegen den Uhrzeigersinn mit $1, 2, \ldots, n$ nummeriert. Man zeige, dass es n aufeinander folgende Punkte (in Bezug auf ihre Lage auf dem Kreisrand) gibt, die mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ (in beliebiger Reihenfolge) nummeriert sind.
Im Folgenden heiße eine Verteilung, Färbung und Nummerierung von $2n$ Punkten in der obigen Art eine n-Punktbelegung. Für Punkte $x_1, \ldots, x_k$ einer n-Punktbelegung ($n \geq k \geq 2$) sei

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \ldots \preceq x_k \tag{1}$$

genau dann, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_k$ im Uhrzeigersinn in der Reihenfolge ihrer Indizierung auf dem Kreis liegen. Dabei ist nicht gefordert, dass x_i und x_{i+1} ($1 \leq i < k$) benachbart oder verschieden seien. Wird hingegen in (1) ein $x_i \preceq x_{i+1}$ durch ein $x_i \prec x_{i+1}$ ($1 \leq i < k$) ersetzt, so bedeute dies, dass zudem $x_i \neq x_{i+1}$ sei. Wird ein $x_i \preceq x_{i+1}$ ($1 \leq i < k$) durch $x_i \tilde{\prec} x_{i+1}$ ersetzt, so bedeute dies, dass x_{i+1} im Uhrzeigersinn der zu x_i nächstgelegene unter allen von x_i verschiedenen Punkten der Belegung sei. Bemerkung: $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_k$ und seine Abwandlungen durch Ersetzen von $\preceq$ durch $\prec, \tilde{\prec}$ sind hierbei rein formelle Ausdrücke, durch welche sich Aussagen über die Anordnung der Punkte auf dem Kreis klarer - da in Verzicht auf verbale Ausformulierung - machen lassen. Insbesondere sind $\prec, \preceq, \tilde{\prec}$ nicht als binäre Relationen zu verstehen und $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_k$ (oder seine Abwandlungen) nicht als Konjunktion der Aussagen $x_i \prec x_j, 1 \leq i < j \leq k$ (oder deren Abwandlungen).
Ein Punkt einer n-Punktbelegung, der bei der Nummerierung die Zahl $k, 1 \leq k \leq n$ erhalten hat, heiße k-markiert. Ist zuletzt $A := \{x_1, \ldots, x_k\}$ Teilmenge der Menge der Punkte einer n-Punktbelegung P ($n \geq k$), so heiße A eine k-Folge von P, wenn für alle $i, 1 \leq i \leq k$ genau ein i-markierter Punkt zu A gehört und es eine Permutation π auf $\{1, 2, \ldots, k\}$ so gibt, dass $x_{\pi(1)} \tilde{\prec} x_{\pi(2)} \tilde{\prec} \ldots \tilde{\prec} x_{\pi(k)}$. Offensichtlich ist mit jeder n-Folge einer n-Punktbelegung auch ihr Komplement (in Bezug auf die Menge aller $2n$ Punkte der Belegung) eine n-Folge.

Mit dieser Begriffsbildung ist nun zu zeigen: jede n-Punktbelegung besitzt eine und damit wenigstens zwei n-Folgen.
Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n. Zum Beweis der Behauptung für $n = 2$ sei eine 2-Punktbelegung P gegeben, $w_i, i = 1, 2$ sei der i-markierte weiße, $s_i, i = 1, 2$ der i-markierte schwarze Punkt. Ist $w_2 \tilde{\prec} w_1$ oder $w_1 \tilde{\prec} w_2$, so ist offensichtlich $\{w_1, w_2\}$ eine 2-Folge von P. Anderenfalls sind - da P nur aus 4 Punkten besteht - s_1 und s_2 die unmittelbaren Nachbarn von w_1; es gilt folglich $s_2 \tilde{\prec} w_1$ oder $w_1 \tilde{\prec} s_2$ und in beiden Fällen ist $\{w_1, s_2\}$ eine 2-Folge von P.
Es sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung bereits für alle k-Punktbelegungen mit $1 \leq k \leq n$ nachgewiesen. Sei weiter eine $n+1$-Punktbelegung P mit den Punkten $\{w_1, ..., w_n, w_{n+1}, s_1, ..., s_n, s_{n+1}\}$ gegeben, wobei w_k der (eindeutig bestimmte) k-markierte weiße Punkt und s_k der (eindeutig bestimmte) k-markierte schwarze Punkt der Belegung sei ($1 \leq k \leq n + 1$). Durch Streichen der $n + 1$-markierten Punkte w_{n+1}, s_{n+1} wird P in eine n-Punktbelegung P' mit den Punkten $\{w_1, ..., w_n, s_1, ..., s_n\}$ überführt (damit die Verwendung des Symbols $\tilde{\prec}$ im Folgenden eindeutig bleibt, werde ich speziell $\tilde{\prec}_{P'}$ schreiben, falls sich eine Aussage auf P' bezieht; bezieht sie sich auf P, so verwende ich weiterhin $\tilde{\prec}$). Nach Induktionsvoraussetzung existieren disjunkte n-Folgen $A = \{x_1, ..., x_n\}, B = \{y_1, ..., y_n\}$ von P', $A \cup B = \{w_1, ..., w_n, s_1, ..., s_n\}$. Dabei seien die x_i, y_i o.B.d.A. derart indiziert, dass $x_1 \tilde{\prec}_{P'} ... \tilde{\prec}_{P'} x_n \tilde{\prec}_{P'} y_1 \tilde{\prec}_{P'} ... \tilde{\prec}_{P'} y_n$. Gilt nun $x_1 \preceq x \preceq x_n$ für einen Punkt x der Belegung P', so folgt aus $x_1 \tilde{\prec}_{P'} ... \tilde{\prec}_{P'} x_n$ und $n \geq 2$, dass $x \in A$. Dieser Schluss wird im Folgenden mehrfach verwendet werden.
Nehmen wir nun an, es sei $x_1 \prec x \prec x_n \prec y$ mit $x, y \in \{w_{n+1}, s_{n+1}\}, x \neq y$, dann lässt sich A durch Hinzunahme von x zu einer $n + 1$-Folge von P erweitern. Analoges gilt im Falle $y_1 \prec x \prec y_n \prec y$ mit $x, y \in \{w_{n+1}, s_{n+1}\}, x \neq y$ für B. Gilt anderenfalls (!), d.h. falls sich weder A noch B auf diese Weise erweitern lassen, $x_n \tilde{\prec} x$ oder $x \tilde{\prec} x_1$ für ein $x \in \{s_{n+1}, w_{n+1}\}$, so lässt sich A durch Hinzunahme von x ebenfalls zu einer $n + 1$-Folge von P erweitern.
Es bleibt daher nur noch der Fall zu prüfen, in dem $x_1 \prec x \prec x_n$ für beide $x \in \{w_{n+1}, s_{n+1}\}$ oder $y_1 \prec x \prec y_n$ für beide $x \in \{w_{n+1}, s_{n+1}\}$ gilt. O.B.d.A. sei $x_1 \prec w_{n+1} \prec x_n$ und $x_1 \prec s_{n+1} \prec x_n$, ferner $w_1 \in A$ (der nachfolgende Beweisteil lässt sich völlig analog auf den Fall übertragen, dass $w_1 \notin A \Rightarrow s_1 \in A$).
Es sei $w_n \notin A \Rightarrow s_n \in A$. Nehmen wir an, es gäbe ein $k, 1 \leq k \leq n$ mit $x_1 \preceq w_k \prec w_{n+1}$. Wegen $w_k \preceq w_n \prec w_{n+1}$ (Nummerierung der weißen Punkte im Uhrzeigersinn) wäre dann auch $x_1 \preceq w_k \preceq w_n \prec w_{n+1} \prec x_n \Rightarrow w_n \in A$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $w_n \notin A$ steht. Folglich sind alle $x \in A$ mit $x_1 \preceq x \prec w_{n+1}$ schwarz. Analog folgt, dass alle $x \in A$ mit $x_1 \preceq x \prec s_{n+1}$ weiß sind: ist nämlich $x_1 \preceq s_k \prec s_{n+1}$ für ein $k, 1 \leq k \leq n$, dann folgt mit $s_k \preceq s_1 \prec s_{n+1}$ (Nummerierung der schwarzen Punkte gegen den Uhrzeigersinn) auch $x_1 \preceq s_k \preceq s_1 \prec s_{n+1} \prec x_n \Rightarrow s_1 \in A$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $w_1 \in A \Rightarrow s_1 \notin A$ steht. Folglich sind alle $x \in A$ mit $x_1 \preceq x \prec s_{n+1}$ weiß. Dann müsste aber x_1 sowohl schwarz als auch weiß sein - Widerspruch.
Folglich muss auch $w_n \in A$ gelten. Daraus folgt $s_k \notin A$ für alle $k = 1, 2, ..., n$: ist nämlich $s_k \in A$, so wegen $x_1 \prec s_{n+1} \prec x_n$ entweder $x_1 \preceq s_k \prec s_{n+1}$ oder $s_{n+1} \prec s_k \preceq x_n$. Ist $x_1 \preceq s_k \prec s_{n+1}$, so folgt wie oben, dass auch $x_1 \preceq s_k \preceq s_1 \prec s_{n+1} \prec x_n \Rightarrow s_1 \in A$, was wegen $w_1 \in A$ im Widerspruch dazu steht, dass A eine n-Folge von P' ist. Ist analog $s_{n+1} \prec s_k \preceq x_n$, so folgt $x_1 \prec s_{n+1} \prec s_n \preceq s_k \preceq x_n \Rightarrow s_n \in A$, was wegen $w_n \in A$ ebenfalls im Widerspruch dazu steht, dass A eine n-Folge von P' ist. Folglich ist $s_k \notin A$, d.h. $s_k \in B$ und $w_k \in A$ für alle $k = 1, 2, ..., n$. Also sind die Punkte aus B genau die schwarzen, die Punkte aus A genau die weißen Punkte von P', und wegen der Nummerierung der schwarzen Punkte gegen den Uhrzeigersinn und $y_n \prec x \prec y_1$

für beide $x \in \{w_{n+1}, s_{n+1}\}$ gilt daher $y_i = s_{n+1-i}$ für $i = 1, 2, ..., n$ und

$$s_n \tilde{\prec} s_{n-1} \tilde{\prec} \ldots \tilde{\prec} s_1.$$

Weiter folgt daraus

$$w_k \tilde{\prec}_{P'} w_{k+1} \tilde{\prec}_{P'} \ldots \tilde{\prec}_{P'} w_n \tilde{\prec}_{P'} w_1 \tilde{\prec}_{P'} \ldots \tilde{\prec}_{P'} w_{k-1},$$

wobei $k, 1 \leq k \leq n$ so gewählt sei, dass $x_1 = w_k$. Nun lässt sich folgendermaßen eine $n+1$-Folge von P finden: Ist $x_1 \prec w_{n+1} \prec s_{n+1}$, so gilt

$$s_{k-1} \tilde{\prec} s_{k-2} \tilde{\prec} \ldots \tilde{\prec} \overset{=y_n}{s_1} \tilde{\prec} \overset{=x_1}{w_k} \tilde{\prec} w_{k+1} \tilde{\prec} \ldots \tilde{\prec} w_{n+1}$$

und $\{s_{k-1}, ..., s_1, w_k, ..., w_{n+1}\}$ ist damit eine $n+1$-Folge von P.
Ist $x_1 \prec s_{n+1} \prec w_{n+1}$, dann gibt es ein $i, k \leq i \leq n$ mit $w_i \tilde{\prec} s_{n+1} \tilde{\prec} w_{i+1}$: ist nämlich $w_i \tilde{\prec} s_{n+1} \tilde{\prec} w_{i+1}$ für kein $i, k \leq i < n$, so gilt $w_n \prec s_{n+1} \prec w_{n+1}$. Hierbei kann $\prec$ durch $\tilde{\prec}$ ersetzt werden, da weder $w_n \prec w_j \prec w_{n+1}$ noch $w_n \prec s_j \prec w_{n+1}$ für ein $j, 1 \leq j \leq n$ gelten kann. Für das so gewählte i ist dann

$$s_{k-1} \tilde{\prec} \ldots \tilde{\prec} s_1 \tilde{\prec} w_k \tilde{\prec} \ldots \tilde{\prec} w_i \tilde{\prec} s_{n+1} \tilde{\prec} w_{i+1} \tilde{\prec} \ldots \tilde{\prec} w_n$$

und $\{s_{k-1}, ..., s_1, w_k, ..., w_n, s_{n+1}\}$ eine $n+1$-Folge in P.
Folglich lässt sich in allen Fällen eine $n+1$-Folge von P finden. Per Induktion folgt nun die Behauptung.

$\square$

Aufgabe 2
Man bestimme alle reellwertigen Funktionen f, die auf der Menge der positiven rationalen Zahlen definiert sind, dort positive Funktionswerte besitzen und die die Gleichung

$$(\star) \qquad f(x) + f(y) + 2xy \cdot f(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)} \qquad \text{für alle positiven rationalen } x, y$$

erfüllen.

Lösung:
Ist $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ Lösung der gegebenen Funktionalgleichung, dann erfüllt die durch $g(x) := \frac{1}{f(x)}$ (wohl)definierte Abbildung $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$ die Gleichung

$$\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{g(y)} + \frac{2xy}{g(xy)} = \frac{g(x+y)}{g(xy)} \Leftrightarrow g(x+y) = \frac{g(xy)}{g(x)} + \frac{g(xy)}{g(y)} + 2xy.$$

Daraus ergibt sich nun der Reihe nach

$$\begin{aligned}
g(2) &= g(1+1) = \frac{g(1)}{g(1)} + \frac{g(1)}{g(1)} + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\
g(4) &= g(2+2) = \frac{g(4)}{g(2)} + \frac{g(4)}{g(2)} + 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{g(4)}{2} + 8 \\
\Rightarrow \quad g(4) &= 16 \\
16 &= g(4) = g(3+1) = \frac{g(3)}{g(3)} + \frac{g(3)}{g(1)} + 2 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{g(3)}{g(1)} + 7 \\
\Rightarrow \quad g(3) &= 9g(1) \\
g(3) &= g(2+1) = \frac{g(2)}{g(2)} + \frac{g(2)}{g(1)} + 2 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{g(1)} + 5.
\end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}
9g(1) &= g(3) = \frac{4}{g(1)} + 5 \\
\Rightarrow \quad 9g(1)^2 - 5g(1) - 4 &= \left(3g(1) - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - 4 = \left(3g(1) - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{169}{36} = 0 \\
\Rightarrow \quad 3g(1) - \tfrac{5}{6} &= \pm\frac{13}{6} \\
\Leftrightarrow \quad g(1) &= \frac{5}{18} \pm \frac{13}{18}.
\end{aligned}$$

Da g Abbildung in die positiven reellen Zahlen ist und daher $g(1) > 0$, folgt daraus $g(1) = \frac{5}{18} + \frac{13}{18} = 1$.
Sei nun $x \in \mathbb{Q}^+$ beliebig. Dann gilt $g(x+1) = \frac{g(x)}{g(1)} + \frac{g(x)}{g(x)} + 2x = g(x) + 2x + 1$. Sei nun $n \in \mathbb{N}, n > 1$ und bereits $g(x+k) = g(x) + 2xk + k^2$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$ und $k \in \mathbb{N}, k < n$ bewiesen.

Dann gilt auch

$$\begin{aligned} g(x+n) &= g((x+n-1)+1) = g(x+n-1) + 2(x+n-1) + 1 \\ &= g(x) + 2x(n-1) + (n-1)^2 + 2(x+n-1) + 1 = g(x) + 2xn + n^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{Q}^+$. Per Induktion folgt somit $g(x+n) = g(x) + 2xn + n^2$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $g(n) = g(1 + (n-1)) = g(1) + 2(n-1) + (n-1)^2 = n^2$ für alle $n > 1$ und damit $g(n) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Andererseits gilt auch $g(x+n) = \frac{g(nx)}{g(x)} + \frac{g(nx)}{g(n)} + 2xn = g(nx)\left(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{n^2}\right) + 2xn$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Zusammen folgt

$$g(x) + 2xn + n^2 = g(x+n) = g(nx)\left(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{n^2}\right) + 2xn \Rightarrow g(nx) = \frac{g(x) + n^2}{\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{n^2}} = n^2 g(x)$$

für alle $x \in \mathbb{Q}^+$ und $n \in \mathbb{N}$.
Ist nun $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^+$, $m, n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$m^2 g(x) = g(mx) = g(n) = n^2 \Rightarrow g(x) = \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

und damit ist $g(x) = x^2$, also $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$.
Umgekehrt gilt für $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) := \frac{1}{x^2}$ und $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tatsächlich

$$f(x) + f(y) + 2xy \cdot f(xy) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2xy}{(xy)^2} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy}{(xy)^2} = \frac{\frac{1}{(xy)^2}}{\frac{1}{(x+y)^2}} = \frac{f(xy)}{f(x+y)}.$$

Damit gibt es eine und nur eine Lösung von $(\star)$, und diese ist durch $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ gegeben.

$\square$

Aufgabe 3
Gegeben seien ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks. Die Lotfußpunkte von P auf die Seiten AB, BC und CA seien C', A' bzw. B'. Bei welchen Lagen von P gelten $\angle BAC = \angle B'A'C'$ und $\angle CBA = \angle C'B'A'$?

Lösung:
Es sei P ein beliebiger Punkt im Innern von ABC und A', B', C' wie in der Aufgabenstellung gewählt. Da $\angle PB'C = \angle CA'P = 90°$, ist das Viereck $PA'CB'$ ein Sehnenviereck und nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz ist $\overline{PC}$ Durchmesser der Umkreises von $PA'CB'$.
Nach dem erweiterten Sinussatz angewandt auf das Dreieck $CB'A'$ gilt dann

$$\frac{|A'B'|}{\sin\angle B'CA'} = \frac{|A'B'|}{\sin\angle ACB} = |PC|$$

Analog erhält man die Gleichungen

$$\frac{|B'C'|}{\sin\angle C'AB'} = \frac{|B'C'|}{\sin\angle BAC} = |PA|$$

und

$$\frac{|C'A'|}{\sin\angle A'BC'} = \frac{|C'A'|}{\sin\angle CBA} = |PB|.$$

Gelten somit $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle CBA = \angle C'B'A'$, so auch $\angle ACB = \angle A'C'B'$ und damit

$$\begin{aligned}
|PA| &= \frac{|B'C'|}{\sin\angle BAC} = \frac{|B'C'|}{\sin\angle B'A'C'} = 2R \\
|PB| &= \frac{|C'A'|}{\sin\angle CBA} = \frac{|C'A'|}{\sin\angle C'B'A'} = 2R \\
|PC| &= \frac{|A'B'|}{\sin\angle ACB} = \frac{|A'B'|}{\sin\angle A'C'B'} = 2R,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt jeder Gleichungskette der erweiterte Sinussatz auf das Dreieck $A'B'C'$ mit Umkreisradius R angewandt wurde.
Insbesondere also folgt $|PA| = |PB| = |PC|$, d.h. P ist der Umkreismittelpunkt von ABC.
Sei nun umgekehrt P der Umkreismittelpunkt. Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung spitzwinklig ist, liegt P in seinem Innern. Da P Schnittpunkt der Mittelsenkrechten in ABC ist, sind ferner A', B', C' genau die Mittelpunkte von $\overline{BC}, \overline{CA}$ und $\overline{AB}$. Folglich ist

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}.$$

Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes sind daher $B'C'$ und BC parallel. Analog zeigt man $A'B' \parallel AB$ und $A'C' \parallel AC$. Dann sind ABC und $A'B'C'$ zueinander ähnlich und es gelten

$$\angle B'A'C' = \angle BAC, \quad \angle A'C'B' = \angle ACB \quad \text{und} \quad \angle C'B'A' = \angle CBA.$$

Folglich gibt es genau einen Punkt im Innern des Dreiecks, der den gestellten Bedingungen genügt, und dieser Punkt ist der Umkreismittelpunkt von ABC.

□

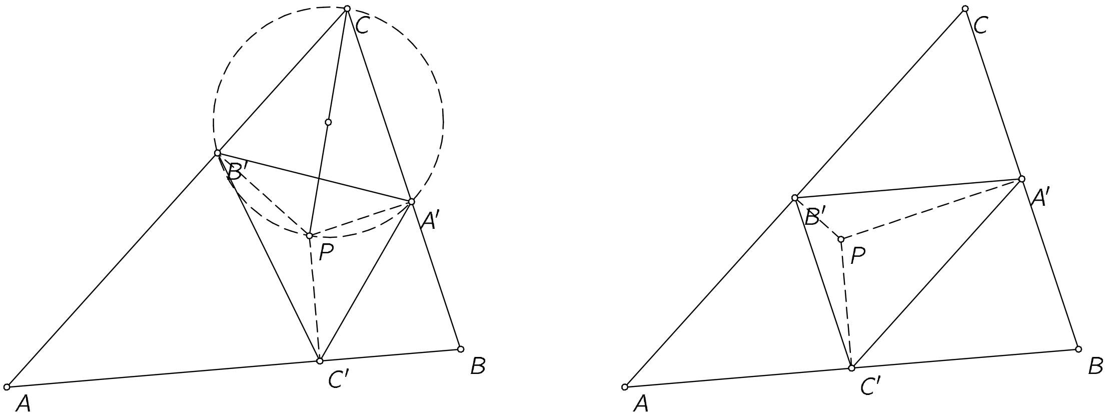

Abbildung 1: Zur Lösung der Aufgabe

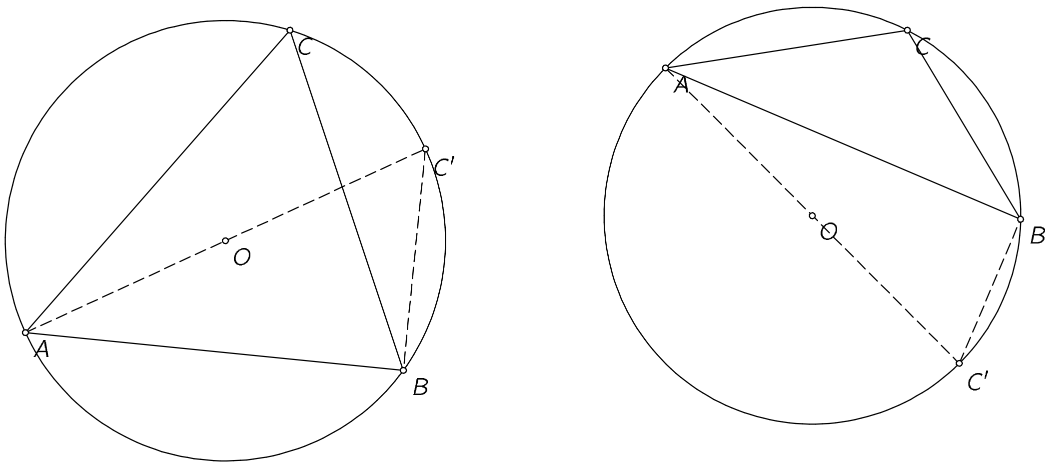

Abbildung 2: Zum Beweis der erweiterten Sinussatzes

Satz 1 (Erweiterter Sinussatz)
Sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c, Innenwinkeln α, β, γ und Umkreisradius R. Dann gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Beweis: Es sei k der Umkreis von ABC und O sein Mittelpunkt. Ferner sei C' der von A verschiedene Schnittpunkt der Geraden durch A und O mit k und γ' der Innenwinkel von ABC' bei C'. Dann ist AC' Durchmesser von k und nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz ist ABC' rechtwinklig bei B. Ferner ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\gamma = \gamma'$, falls C und C' auf der gleichen Seite der Geraden durch A und B liegen, ansonsten $\gamma = 180^\circ - \gamma'$. In jedem Falle also gilt

$$\sin\gamma = \sin\gamma' = \frac{c}{\overline{AC'}} = \frac{c}{2R} \Longrightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Analog erhält man $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ und damit die Behauptung. $\square$

Aufgabe 4
Eine positive ganze Zahl heiße ziffernreduziert, wenn in ihrer Dezimaldarstellung höchstens neun verschiedene Ziffern vorkommen. (Dabei werden führende Nullen nicht berücksichtigt.)
Es sei M eine endliche Menge ziffernreduzierter Zahlen.
Man beweise, dass die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus M kleiner als 180 ist.

Lösung:
Es bezeichne R die Menge aller ziffernreduzierten Zahlen.

- Es sei $A_0 := \emptyset$ und $A_n := R \cap \{1, 2, ..., 10^n - 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist $M \subset R$ endlich, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < 10^n$ für alle $a \in M$, d.h. $M \subset A_n$.
- Sind $A, B \subset R$ endlich und $A \subset B$, so ist
$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} \leq \sum_{b \in B} \frac{1}{b}, \qquad \text{die Ungleichung} \qquad \sum_{b \in B} \frac{1}{b} < 180$$
also stärker als $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} < 180$.

Wegen der beiden vorangegangenen Aussagen ist es daher hinreichend zu zeigen, dass
$$\sum_{a \in A_n} \frac{1}{a} < 180 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $B_n := A_n \setminus A_{n-1} = \{m \in R | 10^{n-1} \leq m \leq 10^n - 1\}$. Mit diesen Definitionen gilt $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ und $B_{k_1} \cap B_{k_2} = \emptyset$ für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_1 \neq k_2$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ sei $Z_{n,z} \subset B_n$ die Menge der (in ihrer Dezimaldarstellung) n-stelligen Zahlen aus R, die die Ziffer z nicht enthalten. Da die Dezimaldarstellung einer Zahl aus B_n aus genau n Stellen besteht und mindestens eine Ziffer nicht beinhaltet, gilt
$$B_n = \bigcup_{z=0}^{9} Z_{n,z}.$$

Für ein $z \in \{1, 2, ..., 9\}$ gibt es genau $8 \cdot 9^{n-1}$ n-stellige natürliche Zahlen, die die Ziffer z nicht enthalten: für die Wahl der ersten, von 0 verschiedenen Stelle aus $\{1, 2, ..., 9\} \setminus \{z\}$ gibt es nämlich genau 8, für die Wahl der übrigen $n - 1$ Stellen aus $\{0, 1, ..., 9\} \setminus \{z\}$ jeweils 9 Möglichkeiten. Folglich gilt $|Z_{n,z}| = 8 \cdot 9^{n-1}$ für $z \in \{1, 2, ..., 9\}$. Weiterhin gibt es genau 9^n n-stellige Zahlen, die die Ziffer 0 nicht enthalten: dies gilt, da es für die Wahl jeder der n Stellen aus $\{1, 2, ..., 9\}$ jeweils 9 Möglichkeiten gibt. Also gilt $|Z_{n,0}| = 9^n$. Mit $B_n = \bigcup_{z=0}^{9} Z_{n,z}$ folgt die Abschätzung
$$|B_n| = |\bigcup_{z=0}^{9} Z_{n,z}| \leq \sum_{z=0}^{9} |Z_{n,z}| = 9 \cdot (8 \cdot 9^{n-1}) + 9^n = 9^{n+1}.$$

Nach Definition gilt $a \geq 10^{n-1}$ für $a \in B_n$. Zusammen mit der letzten Abschätzung für $|B_n|$ folgt damit
$$\sum_{a \in B_n} \frac{1}{a} \leq |B_n| \cdot \frac{1}{10^{n-1}} \leq \frac{9^{n+1}}{10^{n-1}} = 81 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}.$$

Seien nun $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ beliebig gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in A_n} \frac{1}{a} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{a\in B_i} \frac{1}{a} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{a\in B_i} \frac{1}{a} + \sum_{i=k}^{n} \sum_{a\in B_i} \frac{1}{a} \\
&\leq \sum_{i=1}^{10^{k-1}-1} \frac{1}{i} + \sum_{i=k}^{n} \sum_{a\in B_i} \frac{1}{a} \leq \sum_{i=1}^{10^{k-1}-1} \frac{1}{i} + 81 \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} \\
&< \sum_{i=1}^{10^{k-1}-1} \frac{1}{i} + 81 \sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} = \sum_{i=1}^{10^{k-1}-1} \frac{1}{i} + 81 \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{i} \\
&= \sum_{i=1}^{10^{k-1}-1} \frac{1}{i} + 81 \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = \sum_{i=1}^{10^{k-1}-1} \frac{1}{i} + 810 \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde dabei die Formel

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad q < 1$$

für die geometrische Reihe verwendet.
Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = n$$

Wegen $10 < 16 = 2^4$ ist $\mathrm{ld}(10) < 4$, d.h. $\lceil \mathrm{ld}(10) \rceil \leq 4$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daraus

$$\sum_{i=1}^{10^n-1} \frac{1}{i} \leq \sum_{i=1}^{2^{\lceil \mathrm{ld}(10)\rceil n}-1} \frac{1}{i} \leq \sum_{i=1}^{2^{4n}-1} \frac{1}{i} \leq 4n.$$

Weiterhin gilt

$$\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000} < \frac{750}{1000} = \frac{3}{4}, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} < \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

und damit $\left(\frac{9}{10}\right)^{30} = \left(\frac{9}{10}\right)^{3\cdot 5\cdot 2} < \frac{1}{16}$.
Setzen wir dies in obige Abschätzung für $\sum_{a\in A_n} \frac{1}{a}$ ein, so ergibt sich für $n \geq 31 = k$

$$\sum_{a\in A_n} \frac{1}{a} < \sum_{i=1}^{10^{30}-1} \frac{1}{i} + 810 \left(\frac{9}{10}\right)^{30} < 4 \cdot 30 + \frac{810}{16} < 120 + \frac{960}{16} = 120 + 60 = 180.$$

Da zudem $A_n \subset A_{31}$, also $\sum_{a\in A_n} \frac{1}{a} \leq \sum_{a\in A_{31}} \frac{1}{a}$ für alle $1 \leq n \leq 31$ gilt, ist somit $\sum_{a\in A_n} \frac{1}{a} < 180$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach den anfänglichen Überlegungen folgt daraus die Behauptung.

$\square$