Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 1. Runde, Aufgabe 1
(mit leicht veränderten Bezeichnungen)

Im Zentrum eines 2005×2005-Schachbretts liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll.

Ein **legaler Zug** besteht dabei aus folgenden drei Schritten:

– Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,

– schiebt dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Augenzahl nach links und

– schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nach oben oder um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten.

Das erreichte Feld ist das Ausgangsfeld für den nächsten Zug.

Welche Felder lassen sich durch eine endliche Folge legaler Züge erreichen?

Lösung von Darij Grinberg:

Vorbemerkung: Es ist unklar, ob bei dieser Aufgabenstellung vorausgesetzt wird, daß der Spielwürfel (wie ein üblicher Spielwürfel) die Eigenschaft besitzt, daß Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen jeweils zusammen 7 ergeben. Jedenfalls werde ich in der folgenden Lösung diese Voraussetzung nicht verwenden. Ich werde nur verwenden, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 als Augenzahlen auf den Seitenflächen des Würfels angeordnet sind; wie genau sie angeordnet sind, wird keine Rolle spielen.

§1. Einleitung

Ich werde beweisen: Jedes Feld des 2005×2005-Schachbretts läßt sich durch eine endliche Folge legaler Züge erreichen.

Um diese Behauptung zu beweisen, werden wir sie erst in eine möglichst formale Form bringen.

§2. Formalisation der Behauptung

Sei $(A;\ A';\ B;\ B';\ C;\ C')$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Das heißt, die Zahlen A, A', B, B', C und C' sind nichts anderes als die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6, aber (möglicherweise) in einer anderen Reihenfolge aufgelistet.

Sei J die Menge aller ganzen Zahlen n, für die $-1002 \leq n \leq 1002$ ist. Je zwei Elemente u und v dieser Menge J bilden ein Paar, welches wir $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$**-Vektor** nennen, und kurz mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ bezeichnen. Betrachten wir die Menge J^2 aller solcher Vektoren (also Paaren von Elementen aus der Menge J). Auf dieser Menge J^2 werden Addition, Subtraktion und S-Multiplikation folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u+u' \\ v+v' \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u-u' \\ v-v' \end{pmatrix}; \\
k \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ku \\ kv \end{pmatrix} \qquad \text{(für beliebiges } k \in \mathbb{Z}\text{)},
\end{aligned}$$

wobei diese Operationen jeweils nur dann Sinn machen, wenn sie nicht aus dem Definitionsbereich, d. h. der Menge J^2 herausführen, d. h. wenn der entstehende Vektor $\begin{pmatrix} u+u' \\ v+v' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u-u' \\ v-v' \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} ku \\ kv \end{pmatrix}$ immer noch in der Menge J^2 enthalten ist.[1]

Es sei angemerkt, daß für jeden Vektor $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ aus der Menge J^2 gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u+0 \\ v+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{und} \\
-\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-u \\ 0-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Weiterhin definieren wir die sogenannten **legalen Abbildungen** auf der Menge J^2; und zwar sollen dies die Abbildungen sein, die einen Vektor $t \in J^2$ in die folgenden Vektoren überführen:

$$\begin{array}{llll}
t + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -A \\ A' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} A \\ -A' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -A \\ -A' \end{pmatrix}; \\
t + \begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -A' \\ A \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} A' \\ -A \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -A' \\ -A \end{pmatrix}; \\
t + \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -B \\ B' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} B \\ -B' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -B \\ -B' \end{pmatrix}; \\
t + \begin{pmatrix} B' \\ B \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -B' \\ B \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} B' \\ -B \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -B' \\ -B \end{pmatrix}; \\
t + \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -C \\ C' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} C \\ -C' \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -C \\ -C' \end{pmatrix}; \\
t + \begin{pmatrix} C' \\ C \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -C' \\ C \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} C' \\ -C \end{pmatrix}; & t + \begin{pmatrix} -C' \\ -C \end{pmatrix}.
\end{array}$$

[1]Denn versucht man beispielsweise $\begin{pmatrix} 1000 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1000 \\ 5 \end{pmatrix}$ auszurechnen, kommt man auf $\begin{pmatrix} 1000+1000 \\ 5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 10 \end{pmatrix}$, doch dies ist kein Element der Menge J^2 mehr, weil 2000 kein Element der Menge J ist.

Aus diesem Grund ist die Menge J^2 auch kein echter Vektorraum, denn in einem wirklichen Vektorraum müssen Addition, Subtraktion und S-Multiplikation *stets* definiert sein. Wir bezeichnen aber die Elemente der Menge J^2 trotzdem als Vektoren, weil sie in gewisser Hinsicht den Elementen eines Vektorraums ähneln.

Dabei ist eine solche Abbildung natürlich nur für solche t definiert, für die das Bild, also z. B. der Vektor $t + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$, auch wirklich in der Menge J^2 enthalten ist.

Nun werden wir beweisen:

Satz 1: Ausgehend von dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man jeden Vektor aus der Menge J^2 durch eine endliche Folge legaler Abbildungen erreichen.

§3. Erklärung der Äquivalenz

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes 1 kommen, zeigen wir zuerst, daß Satz 1 äquivalent ist zu unserer Behauptung, daß sich jedes Feld des 2005×2005-Schachbretts durch eine endliche Folge legaler Züge erreichen läßt.

In der Tat bezeichne man die Augenzahlen auf dem Spielwürfel mit A, A', B, B', C und C', wobei die Zahlen A und A' auf jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen des Spielwürfels stehen, die Zahlen B und B' auf jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen des Spielwürfels stehen, und die Zahlen C und C' auf jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen des Spielwürfels stehen. Dann ist natürlich $(A;\ A';\ B;\ B';\ C;\ C')$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6.

Nun stellen wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem vor, dessen Ursprung im Zentrum unseres 2005×2005-Schachbretts liegt, dessen x-Achse in die Richtung "nach rechts" und dessen y-Achse in die Richtung "nach oben" weist. Die Einheit dieses Koordinatensystems sei der Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Schachbrettfelder[2]. Dann hat der Mittelpunkt eines jeden Schachbrettfelds ganzzahlige Koordinaten in diesem Koordinatensystem; diese Koordinaten kann man in der Form $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ schreiben, wobei u und v ganze Zahlen sind, und $-1002 \leq u \leq 1002$ und $-1002 \leq v \leq 1002$ erfüllen (denn das Schachbrett hat Länge und Breite 2005, und daher kann der horizontale oder der vertikale Abstand des Mittelpunktes eines Felds von dem Zentrum des Schachbretts höchstens $\frac{2005-1}{2} = 1002$ sein). Das heißt, die Zahlen u und v sind Elemente der Menge J; damit ist der Vektor $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ein Element der Menge J^2. Also ist jedem Feld unseres Schachbretts ein Vektor aus der Menge J^2 zugeordnet, nämlich der Vektor aus den Koordinaten des Mittelpunktes dieses Felds. Insbesondere ist dem Zentrum des Schachbretts der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zugeordnet.

Umgekehrt ist jeder Vektor $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ aus der Menge J^2 der Vektor aus den Koordinaten des Mittelpunktes eines Felds in unserem 2005×2005-Schachbrett.

Somit können wir die Felder unseres Schachbretts identifizieren mit Vektoren aus der Menge J^2. Mit anderen Worten: Die Menge aller Schachbrettfelder auf unserem Schachbrett kann mit der Menge J^2 identifiziert werden (bzw., formal ausgedrückt: es besteht eine Bijektion zwischen diesen beiden Mengen).

[2] Zwei Schachbrettfelder heißen **benachbart**, wenn sie eine Kante gemeinsam haben.

Man sieht auch sofort folgendes ein: Sind $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Koordinaten des Mittelpunktes von einem Schachbrettfeld f, dann ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ dasjenige Feld, das man erreicht, wenn man von dem Feld f aus um s Schritte nach rechts und um t Schritte nach oben geht (wobei eine negative Anzahl von Schritten nach rechts bedeutet, daß man nicht nach rechts, sondern nach links geht, und entsprechend eine negative Anzahl von Schritten nach oben, daß man nicht nach oben, sondern nach unten geht).

Wenn man nun die Definition eines legalen Zugs unseres Spielwürfels auf dem Schachbrett mit der Definition einer legalen Abbildung enes Vektors auf der Menge J^2 vergleicht, sieht man: Ein legaler Zug des Spielwürfels entspricht einer legalen Abbildung des Vektors, der dem Feld, auf dem der Spielwürfel steht, zugeordnet ist.

Die Aussage von Satz 1, daß man, ausgehend von dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, jeden Vektor aus der Menge J^2 durch eine endliche Folge legaler Abbildungen erreichen kann, ist damit äquivalent zu der Aussage, daß man, ausgehend von dem Zentrum des Schachbretts, jedes Feld des Schachbretts durch eine endliche Folge legaler Züge erreichen kann. Doch letzteres ist gerade unsere Behauptung; damit erkennen wir: Sobald Satz 1 bewiesen sein wird, wird die Behauptung sich sofort ergeben, und die Aufgabe wird gelöst sein.

Um die Aufgabe nun zu lösen, wird es für uns also ausreichen, Satz 1 zu beweisen.

§4. Beweis von Satz 1

Kommen wir also zum *Beweis von Satz 1:*

Bezeichnen wir mit L die Menge aller Vektoren aus der Menge J^2, die man, ausgehend von dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, durch eine endliche Folge legaler Abbildungen erreichen kann. Unter anderem ist also auch der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ selber in der Menge L enthalten (die zugehörige endliche Folge legaler Abbildungen ist leer).

Laut ihrer Definition ist die Menge L eine Teilmenge der Menge J^2. Wir werden im folgenden (Hilfssatz 5) zeigen, daß jeder Vektor aus der Menge J^2 in der Menge L enthalten ist, also daß die Menge J^2 eine Teilmenge der Menge L ist; daraus wird dann natürlich folgen, daß die Mengen J^2 und L übereinstimmen.

Zuerst jedoch zeigen wir einen Hilfssatz:

Hilfssatz 2: Sei h ein beliebiger Vektor aus der Menge J^2. Dann kann man, ausgehend von dem Vektor h, den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch Hintereinanderausführung von zwei legalen Abbildungen erreichen, falls dieser Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur Menge J^2 gehört.

Beweis von Hilfssatz 2: Schreiben wir zuerst den Vektor h in der Koordinatenform aus: $h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Betrachten wir zuerst den Fall, wenn $v \leq 0$ ist.

Da der Vektor $h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ zur Menge J^2 gehört, gehören die Zahlen u und v zur Menge J. Es gilt also $-1002 \leq u \leq 1002$ und $-1002 \leq v \leq 1002$.

Da laut Annahme der Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2 \\ v+0 \end{pmatrix}$ zur Menge J^2 gehört, gehört die Zahl $u+2$ zur Menge J. Es gilt also $-1002 \leq u+2 \leq 1002$. Addieren wir diese Ungleichung zu der Ungleichung $-1002 \leq u \leq 1002$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\cdot(-1002) &\leq u + (u+2) \leq 2\cdot 1002, \qquad \text{also} \\ 2\cdot(-1002) &\leq 2u + 2 \leq 2\cdot 1002, \qquad \text{also} \\ 2\cdot(-1002) &\leq 2\cdot(u+1) \leq 2\cdot 1002; \end{aligned}$$

nach Division durch 2 ergibt sich hieraus $-1002 \leq u+1 \leq 1002$.

Die Zahlen A, A', B, B', C und C' sind, wie wir wissen, nichts anderes als die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6; somit ist eine von diesen Zahlen A, A', B, B', C und C' gleich 1. Wir wollen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Zahl A gleich 1 ist.

Da die Zahlen A, A', B, B', C und C' nichts anderes sind als die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6, sind alle diese Zahlen ≤ 6; insbesondere ist also $A' \leq 6$. Wegen $v \leq 0$ ist somit $v + A' \leq 0 + 6 = 6$, und damit trivialerweise auch $v + A' \leq 1002$. Ferner ist $-1002 \leq v + A'$, denn $-1002 \leq v$ und $0 \leq A'$. Damit erhalten wir $-1002 \leq v + A' \leq 1002$.

Betrachten wir nun die legale Abbildung, die den Vektor h in den Vektor

$$h' = h + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+A \\ v+A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+1 \\ v+A' \end{pmatrix}$$

überführt. (Dieser Vektor h' ist in der Menge J^2 enthalten, denn $-1002 \leq u+1 \leq 1002$ und $-1002 \leq v + A' \leq 1002$.)

Betrachten wir ferner die legale Abbildung, die den Vektor h' in den Vektor

$$\begin{aligned} h'' &= h' + \begin{pmatrix} A \\ -A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+1 \\ v+A' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ -A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u+1)+A \\ (v+A)+(-A') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+1+A \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u+2 \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{(denn wegen } A = 1 \text{ ist } u+1+A = u+1+1 = u+2\text{)} \\ &= \begin{pmatrix} u+2 \\ v+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

überführt. (Dieser Vektor $h'' = h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist laut unserer Annahme auch in der Menge J^2 enthalten).

Damit haben wir den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus dem Vektor h durch Hintereinanderausführung von zwei legalen Abbildungen erhalten (die erste legale Abbildung überführt den Vektor h in den Vektor h', und die zweite legale Abbildung überführt den Vektor h' in den Vektor $h'' = h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$). Dies alles bezog sich auf den Fall $v \leq 0$; doch im Fall $v \geq 0$ können wir völlig analog vorgehen, wobei wir die Definition des Vektors

h' von $h' = h + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ in $h' = h + \begin{pmatrix} A \\ -A' \end{pmatrix}$ und die Definition des Vektors h'' von $h'' = h' + \begin{pmatrix} A \\ -A' \end{pmatrix}$ in $h'' = h' + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ umändern (wegen $A' \leq 6$ ist $-A' \geq 6$, und der Beweis kann genauso wie oben geführt werden).

Damit können wir in beiden Fällen $v \leq 0$ und $v \geq 0$ den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus dem Vektor h durch Hintereinanderausführung von zwei legalen Abbildungen erhalten. Somit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Als nächstes beweisen wir:

Hilfssatz 3: Ist h ein Vektor aus der Menge L, dann gehören die Vektoren $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ auch zur Menge L, vorausgesetzt, diese Vektoren sind jeweils in der Menge J^2 enthalten[3].

Beweis von Hilfssatz 3: Zunächst werden wir zeigen, daß der Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur Menge L gehört, vorausgesetzt, er ist in der Menge J^2 enthalten.

Da der Vektor h zu der Menge L gehört, kann man ihn, ausgehend von dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, durch eine endliche Folge legaler Abbildungen erreichen. Nach Hilfssatz 2 können wir aber den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ausgehend von dem Vektor h, durch Hintereinanderausführung von zwei legalen Abbildungen erreichen. Hängen wir diese zwei legalen Abbildungen an die endliche Folge der legalen Abbildungen, durch die der Vektor h aus dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wird, an, dann bekommen wir eine endliche Folge legaler Abbildungen, durch die man, ausgehend vom Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält. Damit existiert eine solche endliche Folge legaler Abbildungen, und somit gehört der Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur Menge L. Wir haben also gezeigt, daß der Vektor $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zur Menge L gehört, vorausgesetzt, er ist in der Menge J^2 enthalten.

Entsprechend kann man, indem man anstatt von Hilfssatz 2 analoge Aussagen heranzieht, zeigen, daß die Vektoren $h + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ zur Menge L gehören, vorausgesetzt, diese Vektoren sind jeweils in der Menge J^2 enthalten. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Wir können Hilfssatz 3 wie folgt umformulieren: Gehört ein Vektor h zur Menge L, dann gilt dies auch für jeden Vektor, den man erhält, wenn man zu diesem Vektor h einen der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ addiert (vorausgesetzt,

[3] Genauer ausgedrückt: alle diejenigen von diesen Vektoren $h + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, die in der Menge J^2 enthalten sind, gehören auch zur Menge L.

dieser Vektor ist in der Menge J^2 enthalten). Mehrmalige Anwendung dieses Resultats ergibt: Gehört ein Vektor h zur Menge L, dann gilt dies auch für jeden Vektor, den man erhält, wenn man zu diesem Vektor h wiederholt Vektoren aus der Menge $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ addiert. Doch auf diese Weise erhält man aus dem Vektor h alle Vektoren, die zur Menge J^2 gehören und die Form $h + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$ haben, wobei U und V ganze Zahlen sind. Denn:

- im Fall $U \geq 0$ und $V \geq 0$ erhält man den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$ aus dem Vektor h durch U-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und V-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- im Fall $U \geq 0$ und $V \leq 0$ erhält man den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$ aus dem Vektor h durch U-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-V$-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$;
- im Fall $U \leq 0$ und $V \geq 0$ erhält man den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$ aus dem Vektor h durch $-U$-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und V-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- im Fall $U \leq 0$ und $V \leq 0$ erhält man den Vektor $h + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$ aus dem Vektor h durch $-U$-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-V$-malige Addition des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Somit müssen alle Vektoren, die zur Menge J^2 gehören und die Form $h + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$ haben, wobei U und V ganze Zahlen sind, zur Menge L gehören. Damit erhalten wir:

Hilfssatz 4: Sei h ein beliebiger Vektor aus der Menge L, und seien U und V zwei ganze Zahlen. Dann gilt: Ist der Vektor $h + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$ in der Menge J^2 enthalten, dann gehört er auch zur Menge L.

Schließlich zeigen wir:

Hilfssatz 5: Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ein beliebiger Vektor aus der Menge J^2. Dann ist dieser Vektor in der Menge L enthalten.

Beweis von Hilfssatz 5: Im Beweis von Hilfssatz 2 hatten wir angenommen, daß A gleich 1 ist. Diese Annahme lassen wir jetzt wieder fallen, um die Symmetrie wiederherzustellen.

Nun betrachten wir wieder die Zahlen A, A', B, B', C und C'. Laut ihrer Definition sind diese Zahlen ja nichts anderes als die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6, aber (möglicherweise) in einer anderen Reihenfolge aufgelistet. Damit ist $A + A' + B + B' + C + C' = 1+2+3+4+5+6$. Doch $1+2+3+4+5+6 = 21$; somit ist $A+A'+B+B'+C+C' = 21$. Mit anderen Worten:

$$(A + A') + (B + B') + (C + C') = 21.$$

Doch $A+A'$, $B+B'$ und $C+C'$ sind ganze Zahlen; wären diese Zahlen alle drei gerade, dann wäre auch ihre Summe $(A + A') + (B + B') + (C + C')$ gerade, was offensichtlich nicht möglich ist, weil diese Summe 21 ist. Somit können die Zahlen $A + A'$, $B + B'$ und $C + C'$ nicht alle gerade sein; das heißt, unter ihnen findet sich (mindestens) eine ungerade Zahl. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß diese ungerade Zahl $A + A'$ ist. Nun sind A und A' beides ganze Zahlen, und die Summe zweier ganzen Zahlen ist genau dann ungerade, wenn eine von diesen Zahlen gerade und die andere ungerade ist. Somit ist eine von den beiden Zahlen A und A' gerade, und die andere ungerade. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß die Zahl A gerade ist und die Zahl A' ungerade.

Da die Zahlen A, A', B, B', C und C' mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 übereinstimmen, sind sie alle nicht größer als 6 und nicht kleiner als 1. Insbesondere gilt $1 \leq A \leq 6$ und $1 \leq A' \leq 6$. Daraus folgt natürlich $-1002 \leq A \leq 1002$ und $-1002 \leq A' \leq 1002$. Somit gehören die Zahlen A und A' zu der Menge J; damit ist der Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ in der Menge J^2 enthalten. Wenn wir ferner die Ungleichungen $1 \leq A \leq 6$ und $1 \leq A' \leq 6$ zueinander addieren, erhalten wir $2 \cdot 1 \leq A + A' \leq 2 \cdot 6$, also $2 \leq A + A' \leq 12$; folglich ist natürlich $-1002 \leq A + A' \leq 1002$. Das heißt, die Zahl $A + A'$ gehört zur Menge J; damit ist der Vektor $\begin{pmatrix} A + A' \\ A + A' \end{pmatrix}$ in der Menge J^2 enthalten.

Der Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ gehört zur Menge L, denn man erhält ihn aus dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch Anwendung der legalen Abbildung, die jedem Vektor t den Vektor $t + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ zuordnet (denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + A \\ 0 + A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$).

Wenden wir auf den Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ selber die legale Abbildung an, die jedem Vektor t den Vektor $t + \begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix}$ zuordnet, dann erhalten wir den Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A' \\ A' + A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A' \\ A + A' \end{pmatrix}$. Somit erhält man den Vektor $\begin{pmatrix} A + A' \\ A + A' \end{pmatrix}$ aus dem Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ durch eine legale Abbildung. Da man den Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ seinerseits aus dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch eine legale Abbildung erhält, kann man somit den Vektor

$\begin{pmatrix} A+A' \\ A+A' \end{pmatrix}$ aus dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch Hintereinanderausführung zweier legaler Abbildungen erhalten. Somit gehört der Vektor $\begin{pmatrix} A+A' \\ A+A' \end{pmatrix}$ zur Menge L.

Wir unterscheiden nun vier Fälle:

Fall 1: Die Zahlen u und v sind beide gerade.

Fall 2: Die Zahl u ist gerade, und die Zahl v ist ungerade.

Fall 3: Die Zahl u ist ungerade, und die Zahl v ist gerade.

Fall 4: Die Zahlen u und v sind beide ungerade.

Betrachten wir zuerst Fall 1: In diesem Fall sind die Zahlen u und v beide gerade; also gibt es ganze Zahlen U und V, sodaß $u = 2U$ und $v = 2V$ ist. Damit ist $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix}$. Da nun der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Menge L enthalten ist, ist nach Hilfssatz 4 auch der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ in der Menge L enthalten (denn laut Voraussetzung gehört dieser Vektor zur Menge J^2). Somit ist Hilfssatz 5 für den Fall 1 bewiesen.

Betrachten wir nun Fall 2: In diesem Fall ist die Zahl u gerade, und die Zahl v ungerade. Andererseits wissen wir, daß die Zahl A gerade ist und die Zahl A' ungerade. Da die Zahlen u und A beide gerade sind, ist auch ihre Differenz $u - A$ gerade; also gibt es eine ganze Zahl U, sodaß $u - A = 2U$ gilt. Da die Zahlen v und A' beide ungerade sind, ist ihre Differenz $v - A'$ gerade; also gibt es eine ganze Zahl V, sodaß $v - A' = 2V$ gilt. Aus $u - A = 2U$ folgt $u = A + 2U$, und aus $v - A' = 2V$ folgt $v = A' + 2V$.

Da nun der Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ zur Menge L gehört, muß nach Hilfssatz 4 der Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+2U \\ A'+2V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ auch zur Menge L gehören (denn, wie wir wissen, gehört dieser Vektor zur Menge J^2); somit ist Hilfssatz 5 für den Fall 2 bewiesen.

Für den Fall 3 kann man Hilfssatz 5 analog beweisen, indem man nicht den Vektor $\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$, sondern den Vektor $\begin{pmatrix} A' \\ A \end{pmatrix}$ betrachtet.

Schließlich beweisen wir Hilfssatz 5 für den Fall 4: In diesem Fall sind beide Zahlen u und v ungerade. Andererseits wissen wir, daß die Zahl $A + A'$ ungerade ist. Da die Zahlen u und $A + A'$ beide ungerade sind, ist ihre Differenz $u - (A + A')$ gerade; also gibt es eine ganze Zahl U, für die $u - (A + A') = 2U$ gilt. Da die Zahlen v und $A + A'$ beide ungerade sind, ist ihre Differenz $v - (A + A')$ gerade; also gibt es eine ganze Zahl V, für die $v - (A + A') = 2V$ gilt. Aus $u - (A + A') = 2U$ folgt $u = (A + A') + 2U$, und aus $v - (A + A') = 2V$ folgt $v = (A + A') + 2V$.

Nun wissen wir, daß der Vektor $\begin{pmatrix} A+A' \\ A+A' \end{pmatrix}$ zur Menge L gehört; also muß nach Hilfssatz 4 auch der Vektor $\begin{pmatrix} A+A' \\ A+A' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2U \\ 2V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A+A')+2U \\ (A+A')+2V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ zur Menge L gehören (denn, wie wir wissen, gehört dieser Vektor zur Menge J^2); somit ist Hilfssatz 5 für den Fall 4 bewiesen.

Damit ist der Hilfssatz 5 in allen vier Fällen 1, 2, 3 und 4 bewiesen; das heißt, der

Beweis von Hilfssatz 5 ist komplett.

Nun besagt Hilfssatz 5, daß jeder Vektor aus der Menge J^2 in der Menge L enthalten ist. Doch die Menge L war definiert als die Menge aller Vektoren aus der Menge J^2, die man, ausgehend von dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, durch eine endliche Folge legaler Abbildungen erreichen kann. Somit kann man jeden Vektor aus der Menge J^2, ausgehend von dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, durch eine endliche Folge legaler Abbildungen erreichen. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wie bereits oben erklärt, ist dadurch die Aufgabe gelöst.