Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 1. Runde, Aufgabe 4

Für welche positiven ganzen Zahlen n kann man die n Zahlen 1, 2, 3, ..., n so in einer Reihe anordnen, daß für je zwei verschiedene Zahlen dieser Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht?

Lösung von Darij Grinberg:

Wir werden zeigen, daß man *für jede positive ganze Zahl* n die n Zahlen 1, 2, 3, ..., n so in einer Reihe anordnen kann, daß für je zwei verschiedene Zahlen dieser Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht.

Bevor wir diese Behauptung bewiesen, führen wir eine Sprechweise ein:

Angenommen, die Zahlen 1, 2, 3, ..., n seien irgendwie in einer Reihe angeordnet. Eine solche Anordnung nennen wir **mittelfrei**, wenn für je zwei verschiedene Zahlen in dieser Anordnung ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht.

Mithilfe dieser Sprechweise können wir unsere Behauptung wie folgt umformulieren:

Satz 1: Für jede positive ganze Zahl n existiert eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., n.

Um Satz 1 zu beweisen, bedienen wir uns eines Tricks: Wir beweisen Satz 1 zuerst für den Fall, daß die Zahl n eine Zweierpotenz ist. Mit anderen Worten, wir beweisen den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2: Für jede nichtnegative ganze Zahl k existiert eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^k.

Bevor wir zum Beweis von Hilfssatz 2 kommen, führen wir eine weitere Schreibweise ein:

Wenn n bestimmte Zahlen x_1, x_2, ..., x_n auf eine bestimmte Weise angeordnet sind, dann bezeichnen wir diese Anordnung mit $(a_1;\ a_2;\ ...;\ a_n)$, wobei a_1, a_2, ..., a_n die gleichen Zahlen sind wie x_1, x_2, ..., x_n, aber nicht mehr unbedingt in der ursprünglichen Reihenfolge der Zahlen x_1, x_2, ..., x_n, sondern vielmehr in der Reihenfolge, wie sie in der konkreten Anordnung vorkommen (das heißt: a_1 ist die erste Zahl in der Anordnung, a_2 die zweite, usw., und a_n die letzte Zahl). So bezeichnen wir beispielsweise die Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, bei der die Zahl 2 an erster Stelle, die Zahl 3 an zweiter, die Zahl 1 an dritter und die Zahl 4 an letzter Stelle steht, mit $(2;\ 3;\ 1;\ 4)$.

Nun kommen wir zum *Beweis von Hilfssatz 2.* Wir führen diesen Beweis nach der vollständigen Induktion über k.

Der *Induktionsanfang* wird bei $k = 0$ angesetzt und ist trivial: Wegen $2^k = 2^0 = 1$ müssen wir nur zeigen, daß eine mittelfreie Anordnung der Zahl 1 existiert, was klar ist (man kann die Zahl 1 nur in einer Weise anordnen, nämlich in der Anordnung (1), und die Aussage, daß für je zwei verschiedene Zahlen in dieser Anordnung ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht, ist trivialerweise wahr, weil es keine zwei verschiedene Zahlen in dieser Anordnung gibt!).

Nun kommen wir zum *Induktionsschritt*: Angenommen, Hilfssatz 2 gelte für $k = u$, wobei u eine nichtnegative ganze Zahl ist. Wir müssen nachweisen, daß Hilfssatz 2 auch für $k = u + 1$ gilt.

Wir haben angenommen, daß Hilfssatz 2 für $k = u$ gilt, also daß eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^u existiert. Bezeichnen wir diese Anordnung mit $A = (a_1;\ a_2;\ ...;\ a_{2^u})$. Wir müssen zeigen, daß Hilfssatz 2 auch für $k = u + 1$ gilt, d. h. daß eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} existiert. Um dies zu zeigen, konstruieren wir eine solche Anordnung einfach: Sei A' die wie folgt definierte Anordnung von Zahlen:

$$A' = \left(\underbrace{2a_1;\ 2a_2;\ ...;\ 2a_{2^u}}_{\text{erster Block}};\ \underbrace{2a_1 - 1;\ 2a_2 - 1;\ ...;\ 2a_{2^u} - 1}_{\text{zweiter Block}} \right).$$

Diese Anordnung A' ist aus zwei Blöcken zusammengesetzt: Der erste Block, $(2a_1;\ 2a_2;\ ...;\ 2a_{2^u})$, ergibt sich aus der ursprünglichen Anordnung $A = (a_1;\ a_2;\ ...;\ a_{2^u})$ der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^u dadurch, daß man jede Zahl in der Anordnung verdoppelt; der zweite Block, $(2a_1 - 1;\ 2a_2 - 1;\ ...;\ 2a_{2^u} - 1)$, entseht aus der ursprünglichen Anordnung $A = (a_1;\ a_2;\ ...;\ a_{2^u})$ dadurch, daß man jede Zahl in der Anordnung verdoppelt und von dem Ergebnis 1 subtrahiert.

Nun werden wir zeigen, daß unsere Anordnung A' wirklich eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} ist. Dazu müssen wir die folgenden vier Eigenschaften dieser Anordnung beweisen:

Eigenschaft 1: Die Anordnung A' enthält alle Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1}.

Eigenschaft 2: Die Anordnung A' enthält keine Zahl mehrfach.

Eigenschaft 3: Die Anordnung A' enthält nur die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1}.

Eigenschaft 4: Die Anordnung A' ist mittelfrei.

Beweis von Eigenschaft 1: Sei t eine beliebige von den Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1}.

Ist diese Zahl t gerade, dann ist die Zahl $\frac{t}{2}$ ganz. Diese Zahl $\frac{t}{2}$ ist dann eine von den Zahlen 1, 2, ..., 2^u (denn wegen $t \leq 2^{u+1}$ ist $\frac{t}{2} \leq \frac{2^{u+1}}{2} = 2^u$). Damit ist die Zahl $\frac{t}{2}$ in der Anordnung $A = (a_1;\ a_2;\ ...;\ a_{2^u})$ enthalten; sei $\frac{t}{2} = a_i$. Dann ist $t = 2a_i$. Somit ist die Zahl t in der Anordnung

$$A' = \left(\underbrace{2a_1;\ 2a_2;\ ...;\ 2a_{2^u}}_{\text{erster Block}};\ \underbrace{2a_1 - 1;\ 2a_2 - 1;\ ...;\ 2a_{2^u} - 1}_{\text{zweiter Block}} \right)$$

enthalten, und zwar in dem ersten Block dieser Anordnung.

Ist dagegen die Zahl t ungerade, dann ist die Zahl $t + 1$ gerade; somit ist die Zahl $\frac{t+1}{2}$ ganz. Diese Zahl $\frac{t+1}{2}$ ist dann eine von den Zahlen 1, 2, ..., 2^u (denn wegen $t \leq 2^{u+1}$ ist $t+1 \leq 2^{u+1}+1$, also $\frac{t+1}{2} \leq \frac{2^{u+1}+1}{2} = 2^u + \frac{1}{2}$; wegen der Ganzzahligkeit von $\frac{t+1}{2}$ ergibt sich also $\frac{t+1}{2} \leq 2^u$). Damit ist die Zahl $\frac{t+1}{2}$ in der Anordnung $A = (a_1;\ a_2;\ ...;\ a_{2^u})$ enthalten; sei $\frac{t+1}{2} = a_i$. Dann ist $t + 1 = 2a_i$, also $t = 2a_i - 1$. Somit ist die Zahl t in der Anordnung

$$A' = \left(\underbrace{2a_1;\ 2a_2;\ ...;\ 2a_{2^u}}_{\text{erster Block}};\ \underbrace{2a_1 - 1;\ 2a_2 - 1;\ ...;\ 2a_{2^u} - 1}_{\text{zweiter Block}} \right)$$

enthalten, und zwar in dem zweiten Block dieser Anordnung.

Damit haben wir festgestellt, daß von den Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} jede Zahl t, ob gerade oder ungerade, in der Anordnung A' enthalten ist. Somit ist Eigenschaft 1 bewiesen.

Beweis von Eigenschaften 2 und 3: Wir werden nun die Eigenschaften 2 und 3 gleichzeitig beweisen:

Laut der gerade bewiesenen Eigenschaft 1 enthält die Anordnung A' alle Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1}. Das sind insgesamt 2^{u+1} paarweise verschiedene Zahlen. Doch die Anordnung A' enthält insgesamt genau 2^{u+1} Zahlen (denn sie ist zusammengesetzt aus dem ersten Block $(2a_1;\ 2a_2;\ ...;\ 2a_{2^u})$, der genau 2^u Zahlen enthält, und aus dem zweiten Block $(2a_1 - 1;\ 2a_2 - 1;\ ...;\ 2a_{2^u} - 1)$, der ebenfalls genau 2^u Zahlen enthält, und somit enthält die gesamte Anordnung A' genau $2^u + 2^u = 2 \cdot 2^u = 2^{u+1}$ Zahlen). Wenn man die 2^{u+1} paarweise verschiedenen Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} auf genau 2^{u+1} Plätze verteilen will, kann man es sich nicht leisten, eine Zahl mehrfach vorkommen zu lassen, oder eine Zahl, die nicht zu den Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} gehört, irgendwo zu plazieren. Folglich kann die Anordnung A' keine Zahl mehrfach enthalten, und auch keine Zahl enthalten, die nicht zu den Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} gehört (das heißt, diese Anordnung enthält nur die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1}). Somit sind Eigenschaften 2 und 3 bewiesen.

Beweis von Eigenschaft 4: Um die Eigenschaft 4 nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß die Anordnung A' mittelfrei ist, also daß für je zwei verschiedene Zahlen in dieser Anordnung ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht. Dies zeigen wir indirekt: Nehmen wir an, daß es zwei verschiedene Zahlen in der Anordnung A' gibt, deren arithmetisches Mittel irgendwo zwischen ihnen steht. Wir bezeichnen diese zwei Zahlen mit c und d; und zwar sei c die "vorderste" dieser zwei Zahlen, also diejenige von den Zahlen c und d, die in der Anordnung A' weiter vorne steht.

Nun unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem, wie diese Zahlen c und d in der Anordnung A' liegen:

Fall 1: Beide Zahlen c und d stehen im ersten Block der Anordnung A'.

Fall 2: Beide Zahlen c und d stehen im zweiten Block der Anordnung A'.

Fall 3: Eine der beiden Zahlen c und d steht im ersten Block der Anordnung A', und die andere im zweiten.

Betrachten wir zuerst den Fall 1: In diesem Fall stehen ja beide Zahlen c und d im ersten Block der Anordnung A'. Das arithmetische Mittel $\frac{c+d}{2}$ dieser beiden Zahlen steht irgendwo zwischen ihnen, also auch im ersten Block. Nun enthält der erste Block genau die Zahlen $2a_1$, $2a_2$, ..., $2a_{2^u}$; da die Zahlen c, d und $\frac{c+d}{2}$ in diesem ersten Block stehen, muß es also Indizes γ, δ und ε geben, für die $c = 2a_\gamma$, $d = 2a_\delta$ und $\frac{c+d}{2} = 2a_\varepsilon$ ist. Für diese Indizes gilt dann $\gamma < \delta$, weil die Zahl c in der Anordnung A' weiter vorne steht als die Zahl d (wir haben sie ja so bezeichnet), und $\gamma < \varepsilon < \delta$, weil die Zahl $\frac{c+d}{2}$ zwischen den Zahlen c und d steht. Nun folgt aus den Gleichungen $c = 2a_\gamma$, $d = 2a_\delta$ und $\frac{c+d}{2} = 2a_\varepsilon$ sofort, daß $\frac{2a_\gamma + 2a_\delta}{2} = 2a_\varepsilon$ ist; mit anderen Worten: $a_\gamma + a_\delta = 2a_\varepsilon$, und daher $\frac{a_\gamma + a_\delta}{2} = a_\varepsilon$. Mit anderen Worten: Die Zahl a_ε ist das arithmetische Mittel der Zahlen a_γ und a_δ. Doch die Zahlen a_γ, a_δ und a_ε gehören alle zur Anordnung A, und wegen $\gamma < \varepsilon < \delta$ steht die Zahl a_ε zwischen den Zahlen a_γ und a_δ; damit erfüllen die Zahlen a_γ und a_δ in der Anordnung A die Eigenschaft, daß ihr arithmetisches Mittel zwischen ihnen steht. Doch dies kann nicht sein, denn die Anordnung A ist mittelfrei, d. h. für je zwei verschiedene Zahlen in dieser Anordnung steht ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen. Damit erhalten wir einen Widerspruch.

Beinahe analog können wir Fall 2 abhandeln: In diesem Fall stehen beide Zahlen c und d im zweiten Block der Anordnung A'. Ihr arithmetisches Mittel $\frac{c+d}{2}$ muß laut unserer Annahme zwischen ihnen stehen; somit steht es auch im zweiten Block. Nun enthält der zweite Block genau die Zahlen $2a_1 - 1$, $2a_2 - 1$, ..., $2a_{2^u} - 1$; da die Zahlen c, d und $\frac{c+d}{2}$ in diesem zweiten Block stehen, muß es also Indizes γ, δ und ε geben, für die $c = 2a_\gamma - 1$, $d = 2a_\delta - 1$ und $\frac{c+d}{2} = 2a_\varepsilon - 1$ ist. Für diese Indizes gilt dann $\gamma < \delta$, weil die Zahl c in der Anordnung A' weiter vorne steht als die Zahl d (wir haben sie ja so bezeichnet), und $\gamma < \varepsilon < \delta$, weil die Zahl $\frac{c+d}{2}$ zwischen den Zahlen c und d steht. Nun folgt aus den Gleichungen $c = 2a_\gamma - 1$, $d = 2a_\delta - 1$ und $\frac{c+d}{2} = 2a_\varepsilon - 1$ sofort $\frac{(2a_\gamma - 1) + (2a_\delta - 1)}{2} = 2a_\varepsilon - 1$; mit anderen Worten: $\frac{2a_\gamma + 2a_\delta - 2}{2} = 2a_\varepsilon - 1$, also $a_\gamma + a_\delta - 1 = 2a_\varepsilon - 1$, und daher $a_\gamma + a_\delta = 2a_\varepsilon$ und $\frac{a_\gamma + a_\delta}{2} = a_\varepsilon$. Ausgehend von dieser Gleichung und von der Ungleichung $\gamma < \varepsilon < \delta$ kommen wir wieder, wie beim Fall 1, zu einem Widerspruch.

Schließlich betrachten wir den Fall 3, also den Fall, wenn eine der beiden Zahlen c und d im ersten Block der Anordnung A' steht und die andere im zweiten. Wir wissen, daß der erste Block aus den Zahlen $2a_1$, $2a_2$, ..., $2a_{2^u}$ besteht, also ausschließlich aus geraden Zahlen, und der zweite Block aus den Zahlen $2a_1 - 1$, $2a_2 - 1$, ..., $2a_{2^u} - 1$, also ausschließlich aus ungeraden Zahlen. Da eine der beiden Zahlen c und d im ersten Block steht und die andere im zweiten, ist also eine der beiden Zahlen c und d gerade und die andere ungerade. Die Summe $c + d$ dieser beiden Zahlen ist also ungerade. Folglich ist die Zahl $\frac{c+d}{2}$ keine ganze Zahl, und kann deshalb auch nicht in der Anordnung A' vorkommen (denn diese Anordnung enthält nur ganze Zahlen). Andererseits wissen wir aber, daß die Zahl $\frac{c+d}{2}$ das arithmetische Mittel der Zahlen c und d ist, und somit, laut unserer Annahme, irgendwo zwischen den Zahlen c und d in der Anordnung A' vorkommt. Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch.

Wir haben also in allen drei Fällen 1, 2 und 3 einen Widerspruch erhalten. Damit muss unsere Annahme, daß es zwei verschiedene Zahlen in der Anordnung A' gibt, deren arithmetisches Mittel irgendwo zwischen ihnen steht, falsch sein. Folglich gibt es keine zwei solche Zahlen, und damit ist gezeigt, daß die Anordnung A' mittelfrei ist. Das heißt, Eigenschaft 4 ist bewiesen.

Damit haben wir alle vier Eigenschaften 1, 2, 3 und 4 nachgewiesen. Betrachten wir nun, was aus diesen Eigenschaften folgt: Während die Eigenschaften 1, 2 und 3 zeigen, daß die Anordnung A' eine Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} ist, ergibt die Eigenschaft 4, daß die Anordnung A' mittelfrei ist; damit haben wir also mit A' eine nachweislich mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} konstruiert. Somit ist gezeigt, daß eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^{u+1} existiert. Der

Induktionsschritt ist also vollzogen, und Hilfssatz 2 ist bewiesen.

Kommen wir nun zum *Beweis von Satz 1:*

Um Satz 1 zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß für eine beliebige natürliche Zahl n eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., n existiert. Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Zweierpotenz 2^r, die größer als n ist (eine solche Zweierpotenz existiert immer, denn Zweierpotenzen können beliebig groß werden). Laut Hilfssatz 2 existiert dann eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^r. Weil die Zahl 2^r größer als n ist, sind in dieser Anordnung die Zahlen 1, 2, 3, ..., n alle enthalten. Nun streichen wir aus dieser Anordnung alle Zahlen, die größer als n sind, und erhalten damit eine Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., n. Diese Anordnung ist mittelfrei. Denn wäre sie nicht mittelfrei, d. h. gäbe es zwei verschiedene Zahlen in dieser Anordnung, deren arithmetisches Mittel irgendwo zwischen ihnen steht, so würde dies auch vor dem Wegstreichen der Fall gewesen sein, d. h. auch in der ursprünglichen Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^r würde das arithmetische Mittel dieser zwei Zahlen zwischen ihnen stehen; dies ist aber nicht möglich, weil die ursprüngliche Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., 2^r mittelfrei ist. Somit haben wir eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., n gefunden. Wir haben also bewiesen, daß eine mittelfreie Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, ..., n existiert. Somit ist Satz 1 bewiesen.

Und aus Satz 1 folgt, wie oben bereits erklärt, die Aufgabe.