Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 1. Runde, Aufgabe 2

Die ganze Zahl a habe die Eigenschaft, daß die Zahl $3a$ in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen Zahlen x und y darstellbar ist.

Man beweise, daß dann auch die Zahl a in dieser Form darstellbar ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Bevor wir zur Lösung der Aufgabe kommen, beweisen wir eine Identität:

Satz 1: Für zwei beliebige reelle Zahlen X und Y gilt

$$\frac{X^2+2Y^2}{3} = \left(\frac{X+Y}{3} - Y\right)^2 + 2\left(\frac{X+Y}{3}\right)^2.$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{X+Y}{3} - Y\right)^2 + 2\left(\frac{X+Y}{3}\right)^2 = \left(\frac{X-2Y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{X+Y}{3}\right)^2 \\
= \; & \frac{(X-2Y)^2}{9} + 2\frac{(X+Y)^2}{9} = \frac{(X-2Y)^2 + 2(X+Y)^2}{9} \\
= \; & \frac{\left(X^2 - 2\cdot X\cdot 2Y + (2Y)^2\right) + 2\left(X^2+2XY+Y^2\right)}{9} \\
= \; & \frac{\left(X^2-4XY+4Y^2\right) + \left(2X^2+4XY+2Y^2\right)}{9} = \frac{3X^2+6Y^2}{9} = \frac{3\left(X^2+2Y^2\right)}{9} = \frac{X^2+2Y^2}{3}.
\end{aligned}$$

Somit ist Satz 1 bewiesen.

Kommen wir nun zur Lösung der Aufgabe:

Laut der Aufgabenbedingung ist die Zahl $3a$ in der Form $x^2 + 2y^2$, mit ganzen x und y, darstellbar. Konkret sei also $3a = u^2 + 2v^2$, wobei u und v ganze Zahlen sind. Dann ist

$$(u+v)(u-v) = u^2 - v^2 = \left(u^2+2v^2\right) - 3v^2 = 3a - 3v^2 = 3\left(a - v^2\right);$$

da a und v^2 ganze Zahlen sind, ist $a - v^2$ eine ganze Zahl, und somit ist die Zahl $(u+v)(u-v)$ durch 3 teilbar. Da aber 3 eine Primzahl ist, kann das Produkt zweier ganzer Zahlen nur dann durch 3 teilbar sein, wenn mindestens eine von diesen zwei Zahlen durch 3 teilbar ist. Da die Zahl $(u+v)(u-v)$ durch 3 teilbar ist, ist also mindestens eine von den zwei Zahlen $u+v$ und $u-v$ durch 3 teilbar.

Dementsprechend führen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1: Die Zahl $u+v$ ist durch 3 teilbar.

Fall 2: Die Zahl $u-v$ ist durch 3 teilbar.

(Der Fall, wenn beide Zahlen $u+v$ und $u-v$ durch 3 teilbar sind, ist sowohl in Fall 1, als auch in Fall 2 enthalten; die Fälle 1 und 2 schließen sich also nicht gegenseitig aus!)

Nun werden wir in jedem der beiden Fälle 1 und 2 die Zahl a in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen x und y darstellen.

Betrachten wir zuerst Fall 1. In diesem Fall wenden wir Satz 1 auf die zwei Zahlen $X = u$ und $Y = v$ an. Dann erhalten wir

$$\frac{u^2 + 2v^2}{3} = \left(\frac{u+v}{3} - v \right)^2 + 2 \left(\frac{u+v}{3} \right)^2 .$$

Da $u^2 + 2v^2 = 3a$ ist, ist $\frac{u^2 + 2v^2}{3} = a$, und damit gilt

$$a = \left(\frac{u+v}{3} - v \right)^2 + 2 \left(\frac{u+v}{3} \right)^2 . \tag{1}$$

Da nun die Zahl $u + v$ durch 3 teilbar ist, ist die Zahl $\frac{u+v}{3}$ eine ganze Zahl; somit ist auch die Zahl $\frac{u+v}{3} - v$ ganz; also ist durch die Formel (1) die Zahl a in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen x und y dargestellt.

Betrachten wir nun Fall 2. In diesem Fall wenden wir Satz 1 auf die zwei Zahlen $X = u$ und $Y = -v$ an. Dann erhalten wir

$$\frac{u^2 + 2\,(-v)^2}{3} = \left(\frac{u + (-v)}{3} - (-v) \right)^2 + 2 \left(\frac{u + (-v)}{3} \right)^2 .$$

Mit anderen Worten:

$$\frac{u^2 + 2v^2}{3} = \left(\frac{u-v}{3} + v \right)^2 + 2 \left(\frac{u-v}{3} \right)^2 .$$

Da $u^2 + 2v^2 = 3a$ ist, ist $\frac{u^2 + 2v^2}{3} = a$, und damit wird diese Gleichung zu

$$a = \left(\frac{u-v}{3} + v \right)^2 + 2 \left(\frac{u-v}{3} \right)^2 . \tag{2}$$

Da nun die Zahl $u - v$ durch 3 teilbar ist, ist die Zahl $\frac{u-v}{3}$ eine ganze Zahl; daher ist auch die Zahl $\frac{u-v}{3} + v$ ganz; also ist durch die Formel (2) die Zahl a in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen x und y dargestellt.

Wir haben somit in jedem der beiden Fälle 1 und 2 die Zahl a in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen x und y dargestellt. Daraus schließen wir, daß (unter den Bedingungen der Aufgabe) die Zahl a immer in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen x und y darstellbar ist. Somit ist die Aufgabe gelöst.