Bundeswettbewerb Mathematik 2005, 1. Runde, Aufgabe 3

Sei ABC ein Dreieck mit den Seiten $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$ und den Winkeln $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$. Es gelte ferner $3\alpha + 2\beta = 180°$.

Man beweise, daß dann $a^2 + bc = c^2$ ist.

Lösung von Darij Grinberg:

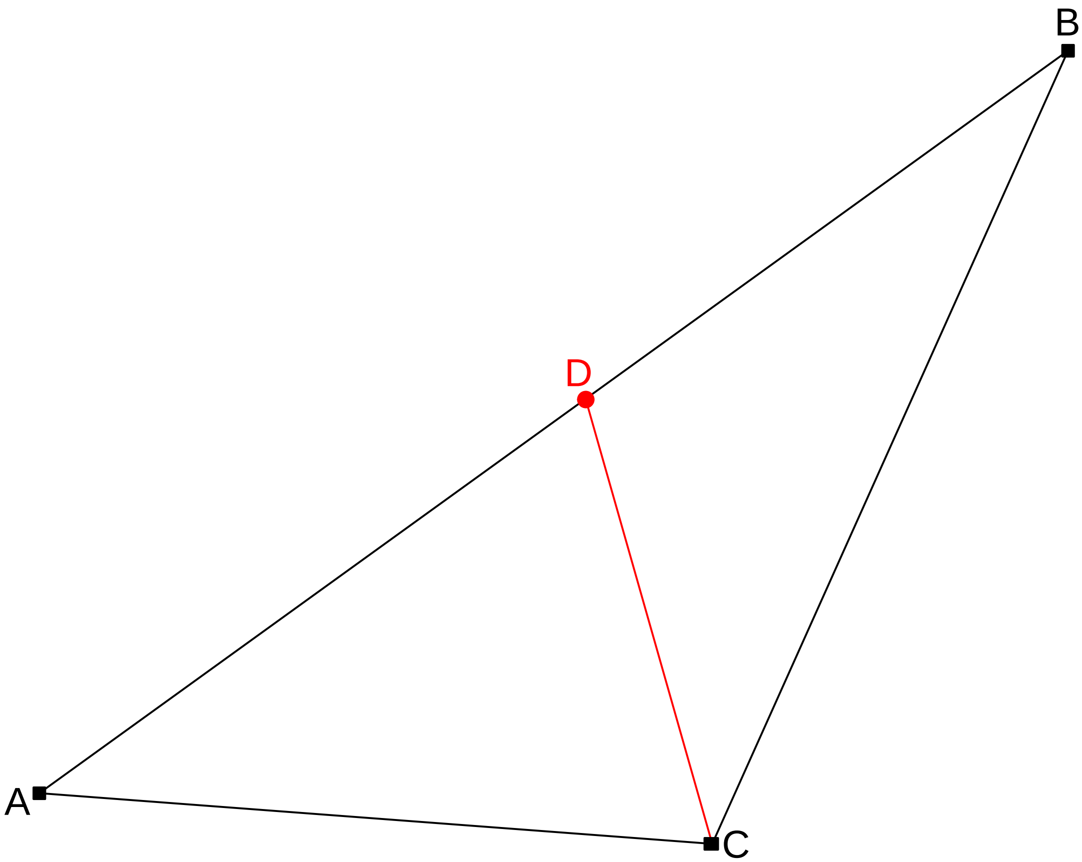

Fig. 1

Im folgenden werden wir mit nicht gerichteten Strecken und Winkeln arbeiten.

Da die Summe der Winkel eines Dreiecks stets $180°$ ist, haben wir $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Damit ist

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180° = 360°.$$

Andererseits gilt aber laut Aufgabenstellung $3\alpha + 2\beta = 180°$; somit ist

$$2\gamma - \alpha = (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) - (3\alpha + 2\beta) = 360° - 180° = 180°.$$

Daraus folgt

$$\gamma - \frac{\alpha}{2} = \frac{2\gamma - \alpha}{2} = \frac{180°}{2} = 90°;$$

somit ist $\gamma = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Wegen $\alpha > 0°$ folgt hieraus natürlich $\gamma > 90°$; somit ist das Dreieck ABC stumpfwinklig, wobei γ der stumpfe Winkel ist.

Daher ist $\beta < \gamma$, denn wäre $\beta \geq \gamma$, dann hätten wir wegen $\gamma > 90°$ auch $\beta > 90°$, was auf

$$\alpha + \beta + \gamma > \beta + \gamma > 90° + 90° = 180°$$

führen würde, was im Widerspruch zu der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ steht. Damit haben wir $\beta < \gamma$. Da bekanntlich in einem Dreieck dem kleineren Winkel stets die kleinere Seite gegenüberliegt, folgt daraus $b < c$, also $CA < AB$.

Sei nun D ein Punkt auf der Strecke AB, für den $AD = CA$ gilt (es gibt tatsächlich einen solchen Punkt D auf der Strecke AB, denn $CA < AB$). Wegen $AD = CA$ ist das Dreieck CAD gleichschenklig; für seinen Basiswinkel $\measuredangle ACD$ gilt also

$$\measuredangle ACD = \frac{180° - \measuredangle CAD}{2} = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Damit ist

$$\measuredangle BCD = \measuredangle BCA - \measuredangle ACD = \gamma - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Da wir aber $\gamma = 90° + \frac{\alpha}{2}$ haben, folgt hieraus

$$\measuredangle BCD = \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha = \measuredangle BAC.$$

Ferner gilt trivialerweise $\measuredangle CBD = \measuredangle ABC$. Somit stimmen die Dreiecke BCD und BAC in zwei Paaren von Winkeln überein; daher sind sie zueinander ähnlich. Folglich gilt $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$, also $BC^2 = BD \cdot BA$.

Nun haben wir $AD = CA$, und daher $BD = AB - AD = AB - CA = c - b$; ferner ist $BC = a$ und $BA = AB = c$. Somit können wir die Gleichung $BC^2 = BD \cdot BA$ äquivalent ausdrücken in der Form $a^2 = (c - b) \cdot c$; mit anderen Worten: $a^2 = c^2 - bc$. Daraus folgt $a^2 + bc = c^2$. Somit ist die Aufgabe gelöst.

Anhang:

Mit etwa den gleichen Überlegungen wie oben können wir auch eine Umkehrung der Aussage der Aufgabe nachweisen. Damit ergibt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Dreiecke mit der Eigenschaft $a^2 + bc = c^2$:

Für ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$ und den Winkeln $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$ gilt genau dann die Gleichung $a^2 + bc = c^2$, wenn $3\alpha + 2\beta = 180°$ ist.

Eine ähnliches, aber bekannteres Resultat ist das folgende:

Für ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$ und den Winkeln $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$ gilt genau dann die Gleichung $a^2 - bc = c^2$, wenn $3\alpha + 2\beta = 360°$ ist.