Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 1. Runde, Aufgabe 4

Ein Würfel sei so in endlich viele Quader zerlegt, daß der Rauminhalt der Umkugel des Würfels so groß ist wie die Summe der Rauminhalte der Umkugeln aller Quader der Zerlegung.

Man beweise, daß dann alle diese Quader Würfel sind.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir beweisen zuerst einen bekannten Satz ([1], Aufgabe 263):

Satz 1: Seien a, b und c drei positive Zahlen; dann gilt die Ungleichung

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Dabei tritt Gleichheit genau dann auf, wenn $a = b = c$ ist.[1]

Beweis: Für drei beliebige Zahlen x, y und z gilt

$$\begin{aligned}
& (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\right) \\
= \; & (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)(yz+zx+xy) \\
= \; & \left(xx^2+xy^2+xz^2+yx^2+yy^2+yz^2+zx^2+zy^2+zz^2\right) \\
& -(xyz+xzx+xxy+yyz+yzx+yxy+zyz+zzx+zxy) \\
= \; & \left(x^3+xy^2+xz^2+yx^2+y^3+yz^2+zx^2+zy^2+z^3\right) \\
& -\left(xyz+zx^2+yx^2+zy^2+xyz+xy^2+yz^2+xz^2+xyz\right) \\
= \; & \left(x^3+y^3+z^3\right)-(xyz+xyz+xyz)=x^3+y^3+z^3-3xyz,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
& x^3+y^3+z^3-3xyz \\
= \; & (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\right) \\
= \; & (x+y+z)\cdot\frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy\right) \\
= \; & (x+y+z)\cdot\frac{1}{2}\left(\left(y^2-2yz+z^2\right)+\left(z^2-2zx+x^2\right)+\left(x^2-2xy+y^2\right)\right) \\
= \; & (x+y+z)\cdot\frac{1}{2}\left((y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right).
\end{aligned}$$

Für positive Zahlen x, y und z ist dieser Term also stets ≥ 0, da die Faktoren $x+y+z$ und $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$ beide nichtnegativ sind (letzterer ist nichtnegativ, weil Quadrate stets nichtnegativ sind). Außerdem ist dieser Term $x^3+y^3+z^3-3xyz$ genau dann gleich 0, wenn entweder $x+y+z=0$ ist (was für positive x, y und z unmöglich ist), oder wenn $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=0$ ist. Doch letzteres tritt genau dann ein, wenn $y-z=0$, $z-x=0$ und $x-y=0$ ist, d. h. wenn $x=y=z$ ist.

[1] Dies ist natürlich nichts anderes als die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel für drei Zahlen.

Setzen wir nun $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$ und $z = \sqrt[3]{c}$, dann sind die Zahlen x, y und z positiv (da a, b und c positiv sind), und wir erhalten, daß der Term $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{c}\right)^3 - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$ stets nichtnegativ ist, und genau dann $= 0$ ist, wenn $x = y = z$ ist, d. h. wenn $a = b = c$ ist. In anderen Worten: Es gilt stets die Ungleichung $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{c}\right)^3 \geq 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b = c$ ist. Doch $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{c}\right)^3 = a + b + c$ und $3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} = 3\sqrt[3]{abc}$; also wird diese Ungleichung zu $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, und $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dabei tritt Gleichheit immer noch genau dann auf, wenn $a = b = c$ ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wir zeigen ferner:

Satz 2: Der Rauminhalt der Umkugel eines Quaders mit den Seiten x, y und z ist

$$\frac{\pi}{6} \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3 .$$

Beweis: (Siehe Fig. 1.) Wir beschriften unseren Quader mit $ABCDEFGH$, und zwar so, daß $DE = z$, $EF = y$ und $FG = x$ ist. Dann ist der Mittelpunkt der Umkugel des Quaders der Mittelpunkt der Raumdiagonale DG, und deshalb ist der Radius r der Umkugel die halbe Länge dieser Raumdiagonale. Wir haben also $r = \frac{1}{2} \cdot DG$. Doch im rechtwinkligen Dreieck DEF (mit $\measuredangle DEF = 90°$) gilt nach dem Satz von Pythagoras $DF^2 = EF^2 + DE^2 = y^2 + z^2$, und im rechtwinkligen Dreieck DFG (mit $\measuredangle DFG = 90°$) gilt nach dem Satz von Pythagoras $DG = \sqrt{FG^2 + DF^2} = \sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Damit ist $r = \frac{1}{2} \cdot DG = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

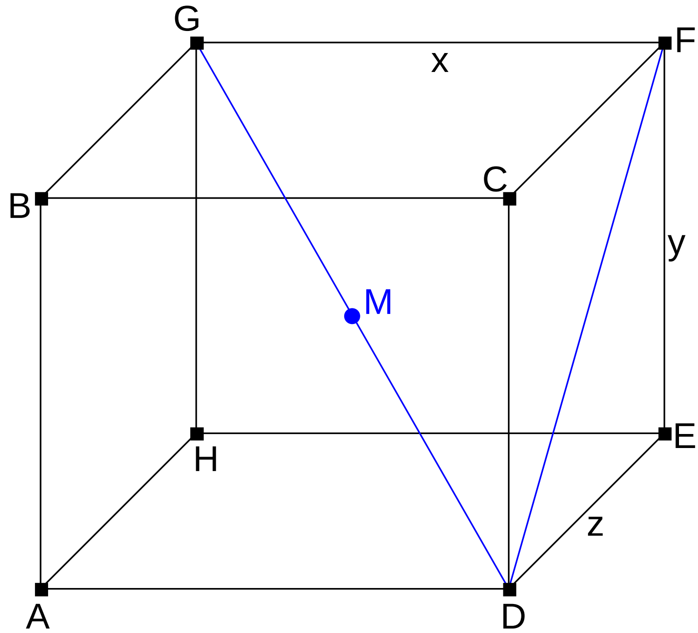

Fig. 1

Die Umkugel des Quaders hat nun den Radius r und damit den Rauminhalt

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3 ,$$

was zu beweisen war.

Eine Folgerung aus Satz 1 und 2 ist:

Satz 3: Gegeben sei ein Quader X; sei S_X der Rauminhalt der Umkugel von X, und sei V_X das Volumen von X. Dann ist

$$S_X \geq \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_X.$$

Dabei tritt Gleichheit genau dann ein, wenn unser Quader X ein Würfel ist.

Beweis: Sind x, y und z die Seiten des Quaders X, dann folgt aus Satz 2 erstmals

$$S_X = \frac{\pi}{6} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3.$$

Außerdem ist $V_X = xyz$. Doch wir können Satz 1 auf die (positiven) Zahlen x^2, y^2 und z^2 anwenden, und erhalten

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \qquad \text{mit Gleichheit nur bei } x^2 = y^2 = z^2.$$

Da alle hier auftretenden Zahlen positiv sind, können wir die Wurzel aus dieser Ungleichung ziehen:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \sqrt{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}, \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{3}} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

(die rechte Seite ist $\sqrt[3]{xyz}$, da die Zahlen x, y und z positiv sind). Damit ist $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \sqrt{3}\sqrt[3]{xyz}$; nehmen wir diese Ungleichung in die dritte Potenz:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 &\geq \left(\sqrt{3}\right)^3 xyz, && \text{also auch} \\ \frac{\pi}{6} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 &\geq \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot xyz, && \text{d. h.} \qquad S_X \geq \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_X. \end{aligned}$$

Dabei gilt Gleichheit immer noch nur für $x^2 = y^2 = z^2$, d. h. nur für $x = y = z$ (man bedenke, daß die Zahlen x, y und z positiv sind), d. h. wenn der Quader X gleiche Kanten hat, also ein Würfel ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Kommen wir jetzt zur Lösung unserer Aufgabe. Sei Q unser Würfel, V sein Volumen und S der Rauminhalt seiner Umkugel. Dieser Würfel Q ist in n Quader zerschnitten; der i-te Quader (mit $1 \leq i \leq n$) heiße Q_i, sein Volumen V_i, und der Rauminhalt seiner Umkugel S_i. Dann haben wir nach der Aufgabenstellung $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$. Ferner gilt $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$, weil die Quader Q_1, Q_2, ..., Q_n den Würfel Q lückenlos und überlappungsfrei bedecken.

Nach Satz 3, angewandt auf den Quader Q_i für jedes i mit $1 \leq i \leq n$, gilt

$$S_i \geq \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_i$$

mit Gleichheit nur dann, wenn Q_i ein Würfel ist. Wenn wir diese Ungleichungen für alle i mit $1 \leq i \leq n$ aufsummieren, erhalten wir

$$S_1 + S_2 + ... + S_n \geq \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_1 + \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_2 + ... + \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_n$$

mit Gleichheit nur dann, wenn *alle* Quader Q_1, Q_2, ..., Q_n Würfel sind. Doch auf der linken Seite dieser Ungleichung steht $S_1 + S_2 + ... + S_n = S$, und auf der rechten Seite steht

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_1 + \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_2 + ... + \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V_n \\ = & \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot (V_1 + V_2 + ... + V_n) = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V. \end{aligned}$$

Also gilt

$$S \geq \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V \tag{1}$$

mit Gleichheit nur dann, wenn *alle* Quader Q_1, Q_2, ..., Q_n Würfel sind. Doch wendet man Satz 3 auf den Quader Q an, erhält man

$$S = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot V$$

(hier tritt Gleichheit ein, da Q wirklich ein Würfel ist). Also muß in der Ungleichung (1) Gleichheit eintreten, und folglich sind alle Quader Q_1, Q_2, ..., Q_n Würfel. Die Aufgabe ist damit gelöst.

Literatur

[1] D. O. Shkljarskij, N. N. Chenzov, I. M. Jaglom: *Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoj matematiki: Chastj 1 (Arifmetika i Algebra)*, 2. Auflage Moskau 1954.