Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 1. Runde, Aufgabe 1

Zu Beginn eines Spiels stehen an der Tafel die Zahlen 1, 2, ..., 2004.
Ein Spielzug besteht daraus, daß man

- eine beliebige Anzahl der Zahlen an der Tafel auswählt,
- den Elferrest der Summe dieser Zahlen berechnet und an die Tafel schreibt,
- die ausgewählten Zahlen löscht.

Bei einem solchen Spiel standen irgendwann noch zwei Zahlen an der Tafel. Eine davon war 1000; man bestimme die andere Zahl.

Lösung von Darij Grinberg:

Die gesuchte Zahl ist 4. Im folgenden werde ich dies beweisen:

Der Elferrest einer Zahl wird bekanntlich definiert als Rest dieser Zahl bei der Division durch 11. Deshalb ist die Differenz einer Zahl und ihres Elferrests stets durch 11 teilbar.

Betrachten wir nun die Summe t_n aller auf der Tafel stehender Zahlen nach n Spielzügen (ab dem ersten Zug gezählt). Dann gilt:

Satz 1: Der Elferrest der Zahl t_n ist 3 für jedes n.

Beweis: Wir führen den Beweis nach vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist[1]

$$t_1 = 1 + 2 + ... + 2004 = \frac{2004 \cdot 2005}{2} = 2009010.$$

Der Elferrest dieser Zahl ist 3 (in der Tat ist $2009010 = 182637 \cdot 11 + 3$). Damit ist der Elferrest der Zahl t_1 gleich 3.

[1] Hierbei benutzen wir die bekannte Formel

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Der *Beweis* dieser Formel geht folgendermaßen: Wegen

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{k=n} k = \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} k = \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} ((n+1) - k)$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n} (k + ((n+1) - k)) = \sum_{k=1}^{k=n} (n+1) = n \cdot (n+1)$$

ist

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \qquad \text{also} \qquad 1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Induktionsschritt: Angenommen, der Elferrest der Zahl t_n sei 3 für irgendein $n \geq 1$. Wir wollen zeigen, daß auch der Elferrest der Zahl t_{n+1} gleich 3 ist.

Bei dem $(n+1)$-ten Spielzug wird die Summe t_n aller auf der Tafel stehenden Zahlen um eine gewisse Zahl u (nämlich die Summe der ausgewählten Zahlen) verringert und dann wieder um den Elferrest dieser Zahl u vergrößert. Das heißt, $t_{n+1} = t_n - u + r(u)$, wobei $r(u)$ der Elferrest der Zahl u ist. Doch da die Differenz einer Zahl und ihres Elferrestes stets durch 11 teilbar ist, ist $u - r(u)$ durch 11 teilbar. Jedoch ist $t_{n+1} = t_n - u + r(u) = t_n - (u - r(u))$. Da die Zahl t_n den Elferrest 3 hat und die Zahl $u - r(u)$ durch 11 teilbar ist, hat also auch die Zahl t_{n+1} den Elferrest 3, was zu beweisen war.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Jetzt kommen wir zur Lösung der Aufgabe: Irgendwann - sagen wir, nach dem m-ten Spielzug - stehen nur noch zwei Zahlen an der Tafel: 1000 und eine andere Zahl, die ich w nenne. Nach Satz 1 ist der Elferrest der Zahl $t_m = 1000 + w$ immer noch 3. Das heißt, $t_m = 11k + 3$ für irgendeine ganze Zahl k. Damit ist $w = t_m - 1000 = 11k + 3 - 1000$. Doch $1000 = 11 \cdot 91 - 1$; folglich ist $w = 11k + 3 - (11 \cdot 91 - 1) = 11(k - 91) + (3 + 1) = 11(k - 91) + 4$. Folglich hat die Zahl w den Elferrest 4.

Schauen wir uns jetzt die Lage nach dem m-ten Spielzug genau an. Bei jedem Spielzug werden gewisse Zahlen gelöscht und der Elferrest ihrer Summe an die Tafel geschrieben. Das heißt, nach jedem Spielzug steht (mindestens) ein Elferrest auf der Tafel (nämlich der Elferrest der davor gelöschten Zahlen). Nach dem m-ten Spielzug muß also auch eine der beiden übrig gebliebenen Zahlen ein Elferrest sein. Elferreste sind aber < 11; die Zahl 1000 ist es also sicher nicht. Es bleibt nur w übrig, d. h. die Zahl w ist ein Elferrest und damit < 11. Doch diese Zahl w hat den Elferrest 4; also ist $w = 4$. Damit ist gezeigt, daß die gesuchte Zahl gleich 4 ist.