Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 1. Runde, Aufgabe 2

Die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks seien ganzzahlig, ferner sei eine der Höhen des Dreiecks gleich der Summe seiner beiden anderen Höhen.

Man beweise, daß dann $a^2 + b^2 + c^2$ eine Quadratzahl ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Seien h_a, h_b und h_c die Höhen und F der Flächeninhalt unseres Dreiecks. Eine der drei Höhen h_a, h_b und h_c ist gleich der Summe der beiden anderen; ggfls. durch zyklische Vertauschung der Dreiecksecken können wir bewirken, daß konkret $h_a = h_b + h_c$ gilt. Doch für den Flächeninhalt F gilt bekanntlich $F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$; damit ist $h_a = \frac{2F}{a}$, $h_b = \frac{2F}{b}$ und $h_c = \frac{2F}{c}$, also

$$\frac{2F}{a} = \frac{2F}{b} + \frac{2F}{c}, \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Multiplikation mit abc liefert $bc = ca + ab$. Nun gilt

$$\begin{aligned}(b+c-a)^2 &= (b+c-a)(b+c-a) = bb + bc - ba + cb + cc - ca - ab - ac + aa \\ &= b^2 + c^2 + a^2 + 2bc - 2ca - 2ab = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc - 2(ca + ab).\end{aligned}$$

Wegen $bc = ca + ab$ wird also $(b+c-a)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Doch da a, b und c ganzzahlig sind, ist $(b+c-a)^2$ eine Quadratzahl, d. h. unsere Zahl $a^2 + b^2 + c^2$ ist eine Quadratzahl, was zu beweisen war.

Anhang:

Solche Dreiecke wie die in der Aufgabe betrachteten (also Dreiecke mit $h_a = h_b + h_c$) besitzen beispielsweise die nette Eigenschaft, daß der Schwerpunkt auf der Geraden liegt, die die "Fußpunkte" zweier Winkelhalbierenden verbindet. Dabei verstehen wir unter dem "Fußpunkt" einer Winkelhalbierenden den Punkt, in dem sie die gegenüberliegende Seite schneidet.