Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 1. Runde, Aufgabe 3

Man beweise, daß die beiden auf Fig. 1 abgebildeten kongruenten regelmäßigen Sechsecke so in insgesamt sechs Teile zerschnitten werden können, daß diese Teile sich lückenlos und überschneidungsfrei zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen lassen.

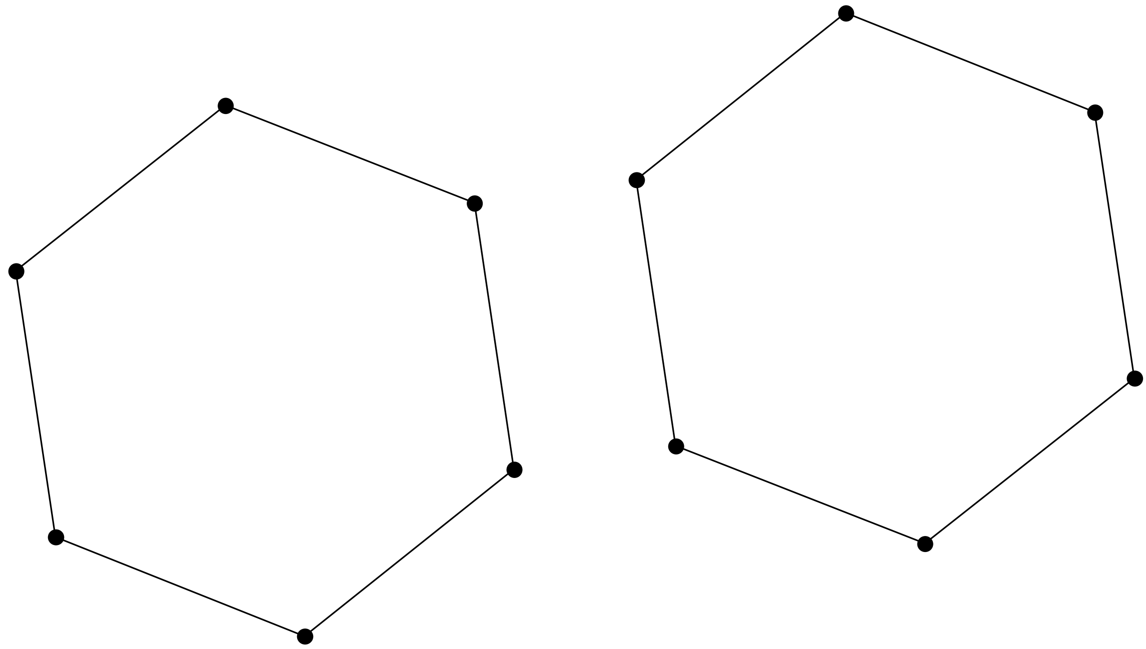


Fig. 1

Lösung von Darij Grinberg:

Wir bezeichnen die beiden Sechsecke mit $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$. Aus der Symmetrie des regelmäßigen Sechsecks und der Kongruenz der beiden Sechsecke folgt

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'F' = F'A';$$

wir bezeichnen diese gleichen Längen mit x. Ferner ist aus demselben Grund

$$AC = BD = CE = DF = EA = FB = A'C' = B'D' = C'E' = D'F' = E'A' = F'B';$$

wir bezeichnen diese gleichen Längen mit y.

Die Innenwinkel der regelmäßigen Sechsecke $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ sind natürlich alle 120°.

Jetzt zerschneiden wir die Sechsecke $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ in die folgenden (insgesamt sechs) Teile (Fig. 2):

- Das erste Teil T_1 ist das Dreieck FAB. Es hat die Seiten x, x und y und die Winkel $30°$, $30°$ und $120°$, denn $\measuredangle FAB = 120°$ ist ein Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$, und da das Dreieck FAB gleichschenklig ist ($FA = AB$), ist
$$\measuredangle ABF = \frac{180° - \measuredangle FAB}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°,$$
und genauso $\measuredangle AFB = 30°$.

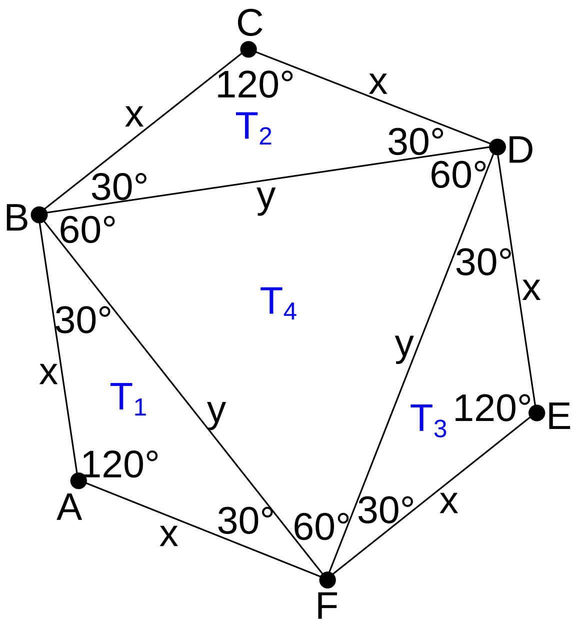
- Das zweite Teil T_2 ist das Dreieck BCD. Es ist (wegen der Drehsymmetrie des regelmäßigen Sechsecks) zu T_1 kongruent und hat genauso die Seiten x, x und y und die Winkel $30°$, $30°$ und $120°$.

- Das dritte Teil T_3 ist das Dreieck DEF. Es ist (wegen der Drehsymmetrie des regelmäßigen Sechsecks) zu T_1 kongruent und hat genauso die Seiten x, x und y und die Winkel $30°$, $30°$ und $120°$.

- Das vierte Teil T_4 ist das Dreieck BDF. Es hat die Seiten y, y und y und ist deshalb gleichseitig, und hat daher die Winkel $60°$, $60°$ und $60°$.

- Das fünfte Teil T_5 ist das Dreieck $E'F'A'$. Es ist (wegen der Drehsymmetrie des regelmäßigen Sechsecks und der Kongruenz der zwei Sechsecke) zu T_1 kongruent und hat genauso die Seiten x, x und y und die Winkel $30°$, $30°$ und $120°$.

- Das sechste Teil T_6 ist das Fünfeck $A'B'C'D'E'$. Es hat die Seiten x, x, x, x und y und die Winkel $120°$, $90°$, $90°$, $120°$ und $120°$. Dabei sind die drei $120°$-Winkel einfach Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks $A'B'C'D'E'F'$; die beiden $90°$-Winkel sind wie folgt zu begründen: Wegen dem Winkel $\measuredangle F'A'E' = 30°$ im Dreieck T_5 und dem Innenwinkel $\measuredangle F'A'B' = 120°$ des Sechsecks $A'B'C'D'E'F'$ ist $\measuredangle E'A'B' = \measuredangle F'A'B' - \measuredangle F'A'E' = 120° - 30° = 90°$, und analog erhält man $\measuredangle A'E'D' = 90°$.



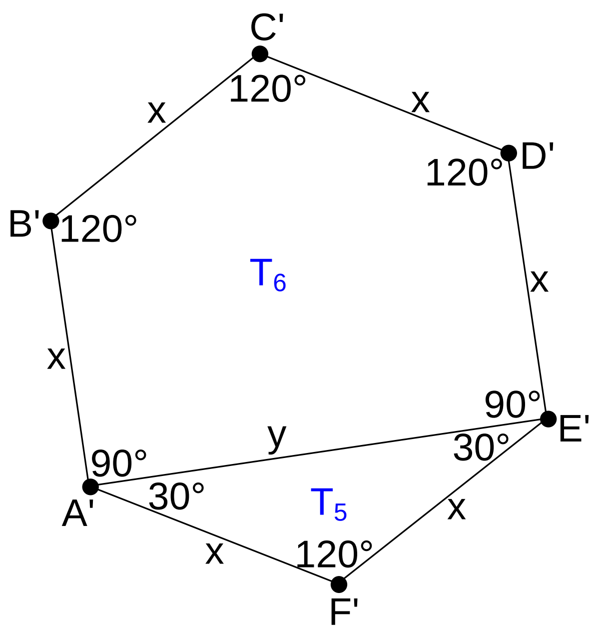


Fig. 2

Nun lassen sich diese sechs Teile T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 und T_6 wie auf Fig. 3 gezeigt zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen. Im folgende werden wir dies beweisen, indem wir die Figur erst ausgehend von einem Teil genetisch aufbauen, um dann zu zeigen, daß man damit die anderen Teile erhalten hat und die Gesamtfigur ein gleichseitiges Dreieck darstellt.

Wir werden im folgenden Punkte mit Kleinbuchstaben bezeichnen.

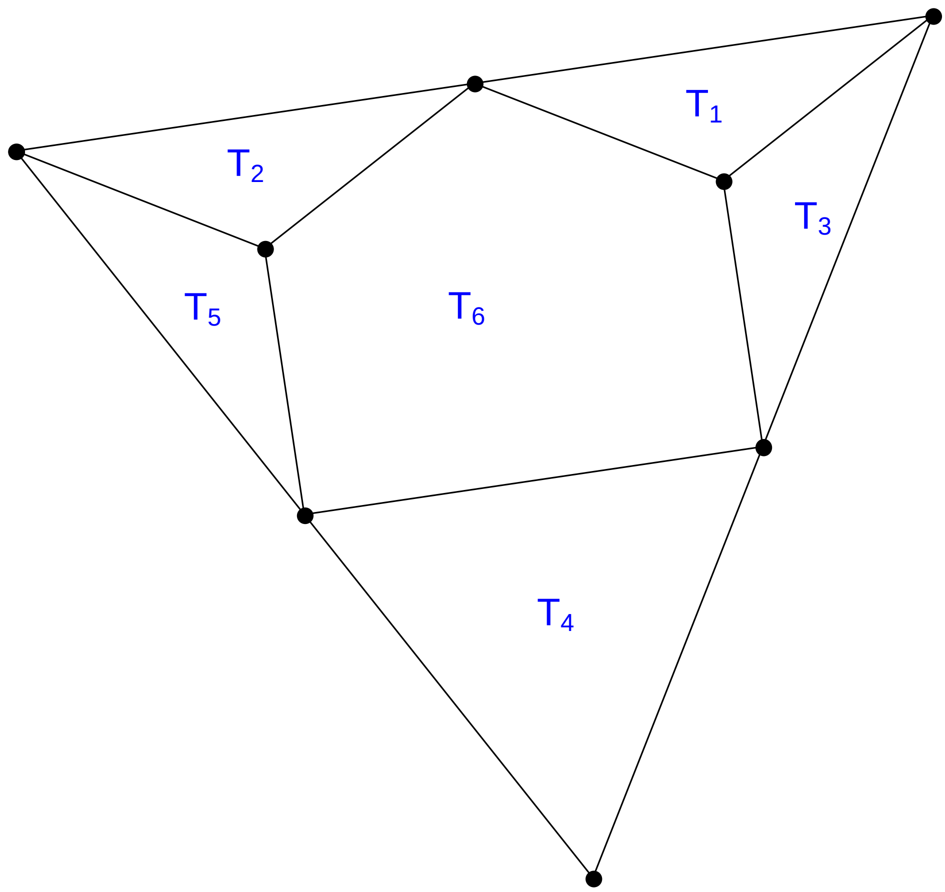


Fig. 3

Zuerst legen wir das Teil T_6 beliebig auf eine Ebene und beschriften es mit $abcde$, und zwar so, daß bei den Ecken b, c und d jeweils Winkel von 120° und bei den Ecken e und a Winkel von 90° auftreten. (Siehe Fig. 4.)

Sei nun f das Spiegelbild des Punktes c an der Geraden de, und sei g das Spiegelbild des Punktes c an der Geraden ab. Wegen der Spiegelung haben wir $\measuredangle fde = \measuredangle cde$, also $\measuredangle fde = 120°$, und $fd = cd$, also $fd = x$. Nun ist $\measuredangle cdf = 360° - \measuredangle fde - \measuredangle cde = 360° - 120° - 120° = 120°$; insgesamt hat also das Dreieck cdf zwei Seiten cd und fd der Länge x und einen Winkel von 120° zwischen ihnen. Folglich ist dieses Dreieck kongruent zum Dreieck $T_1 = \Delta FAB$ (sws).

Völlig analog läßt sich zeigen, daß das Dreieck cbg kongruent zum Dreieck $T_2 = \Delta BCD$ ist.

Wir haben $\measuredangle fde = 120°$. Das Dreieck edf hat also zwei Seiten ed und fd der Länge x und einen Winkel von 120° zwischen ihnen. Folglich ist dieses Dreieck kongruent zum Dreieck $T_3 = \Delta DEF$ (sws). Entsprechend ist das Dreieck abg kongruent zum Dreieck $T_5 = \Delta E'F'A'$.

Da das Dreieck cdf kongruent zu T_1 ist, ist $\measuredangle dcf = 30°$. Analog ist $\measuredangle bcg = 30°$;

folglich ist $\measuredangle gcf = \measuredangle bcg + \measuredangle bcd + \measuredangle dcf = 30° + 120° + 30° = 180°$, und der Punkt c liegt auf der Strecke gf.

Sei h der Schnittpunkt der Geraden ag und ef. Da das Dreieck abg kongruent zu T_5 ist, gilt $\measuredangle bag = 30°$; zusammen mit $\measuredangle eab = 90°$ folgt daraus $\measuredangle eah = 180° - \measuredangle bag - \measuredangle eab = 180° - 30° - 90° = 60°$. Analog ist $\measuredangle aeh = 60°$; folglich hat das Dreieck ahe zwei Winkel der Größe 60° und ist deshalb gleichseitig. Da es zudem noch die Seitenlänge y hat, ist es kongruent zum Dreieck T_4.

Wir haben also ein "großes" Dreieck fgh vorliegen, und die Punkte a, e und c liegen auf dessen Seiten gh, hf bzw. fg. Nun sind die Dreiecke cbg und abg kongruent zu T_2 bzw. T_5; also ist $\measuredangle cgb = 30°$ und $\measuredangle agb = 30°$, und damit $\measuredangle fgh = \measuredangle cgb + \measuredangle agb = 30° + 30° = 60°$. Genauso ist $\measuredangle gfh = 60°$, und das Dreieck fgh hat zwei Winkel von 60° und ist damit gleichseitig.

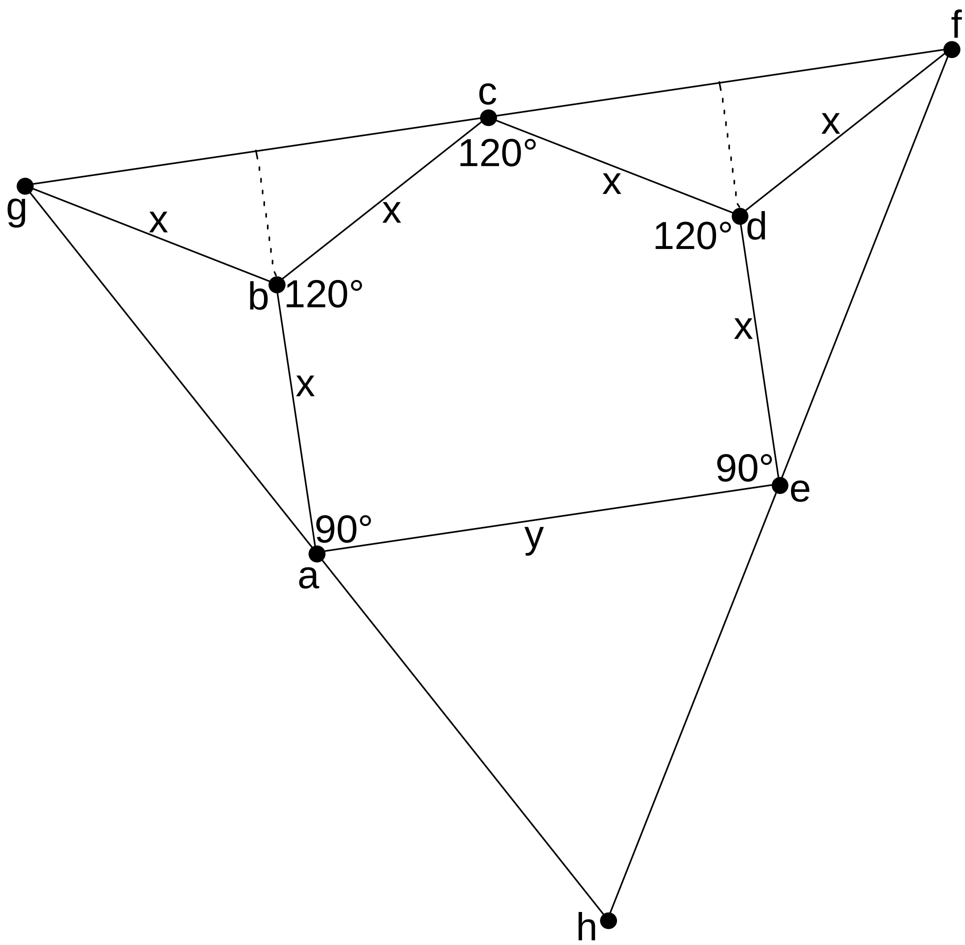


Fig. 4

Wir haben also ein gleichseitiges Dreieck fgh vorliegen, daß zerschnitten werden kann in sechs Teile: Die Dreiecke *cdf*, *cbg*, *edf*, *abg* und *ahe* und das Fünfeck *abcde*. Diese Teile sind (in dieser Reihenfolge) kongruent zu T_1, T_2, T_3, T_5, T_4 bzw. T_6. Folglich können diese Teile zu einem gleichseitigen Dreieck zusammengesetzt werden, was zu beweisen war.