Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 2. Runde, Aufgabe 2

Die Zahlenfolge $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ sei rekursiv definiert durch:

$$a_1 := 1, \qquad a_2 := 1, \qquad a_3 := 2 \qquad \text{und} \qquad a_{n+3} := \frac{1}{a_n} \cdot (a_{n+1} \cdot a_{n+2} + 7) \qquad \text{für } n > 0.$$

Man beweise, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Lösung von Darij Grinberg:

Erstens folgt aus der Definition der Folge offensichtlich, daß alle Folgenglieder positive Zahlen sind. Unter anderem ist auch keines der Folgenglieder 0, sodaß man durch jedes Folgenglied ungehindert dividieren kann.

Das vierte Glied der Folge ist $a_4 = \frac{1}{a_1}(a_2 a_3 + 7) = \frac{1}{1}(1 \cdot 2 + 7) = 1 \cdot 2 + 7 = 9$.

Ich beweise jetzt eine wichtige Formel:

Satz 1: Für jedes n gilt:

$$a_{n+4} = 13 a_{n+2} - a_n.$$

Beweis: Wir beweisen diese Formel nach der vollständigen Induktion.

- **Induktionsanfang:** Für $n = 1$ überzeugt man sich leicht von der Wahrheit der Formel: Wir haben

$$a_5 = \frac{1}{a_2}(a_3 a_4 + 7) = \frac{1}{1}(2 \cdot 9 + 7) = 2 \cdot 9 + 7 = 25.$$

  Andererseits ist

$$13 a_3 - a_1 = 13 \cdot 2 - 1 = 26 - 1 = 25,$$

  also $a_5 = 13 a_3 - a_1$.

- **Induktionsschritt:** Angenommen, die Formel $a_{n+4} = 13 a_{n+2} - a_n$ gelte für ein gewisses n. Wir wollen zeigen, daß sie auch für $n + 1$ gilt, d. h. daß gilt: $a_{n+5} = 13 a_{n+3} - a_{n+1}$. Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned}
a_{n+5} &= \frac{1}{a_{n+2}}(a_{n+3} a_{n+4} + 7) = \frac{1}{a_{n+2}}(a_{n+3}(13 a_{n+2} - a_n) + 7) \\
&= \frac{1}{a_{n+2}}(13 a_{n+3} a_{n+2} - a_{n+3} a_n + 7) = 13 a_{n+3} + \frac{1}{a_{n+2}}(-a_{n+3} a_n + 7) \\
&= 13 a_{n+3} + \frac{1}{a_{n+2}}\left(-\frac{1}{a_n}(a_{n+1} a_{n+2} + 7) a_n + 7\right) \\
&= 13 a_{n+3} + \frac{1}{a_{n+2}}(-(a_{n+1} a_{n+2} + 7) + 7) \\
&= 13 a_{n+3} + \frac{1}{a_{n+2}}(-a_{n+1} a_{n+2}) = 13 a_{n+3} - a_{n+1},
\end{aligned}$$

  was zu beweisen war.

Damit ist die Formel von Satz 1 allgemein gültig.

Aus Satz 1 und den ersten vier Folgengliedern folgt leicht, daß alle Folgenglieder a_n ganzzahlig sind. Den Beweis führen wir mit einer Variante der vollständigen Induktion:

- **Induktionsanfang:** Für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ sind die Folgenglieder a_n ganzzahlig, denn $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ und $a_4 = 9$.

- **Induktionsschritt:** Angenommen, für ein gewisses $n \geq 4$ seien alle Folgenglieder a_k mit $k < n$ ganzzahlig. Wir wollen zeigen, daß auch das Folgenglied a_{n+1} ganzzahlig ist.
  In der Tat folgt nach Satz 1 die Gleichung $a_{n+1} = 13a_{n-1} - a_{n-3}$, und damit ist das Folgenglied a_{n+1} ganzzahlig, was zu beweisen war.

Damit hat man gezeigt, daß alle Folgenglieder a_n ganzzahlig sind.

Anhang

1. Die ersten Glieder der Zahlenfolge sind

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 9, \quad 25, \quad 116, \quad 323, \quad 1499, \quad 4174, \quad 19371,$$
$$53939, \quad 250324, \quad 697033, \quad 3234841, \quad 9007490, \quad ....$$

Es fällt auf, daß das Folgenglied a_n genau dann gerade ist, wenn n durch 3 teilbar ist. Dies ist allerdings eine Vermutung.

2. Man kann die ursprüngliche Aufgabe verallgemeinern: Definiert sei eine Zahlenfolge $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ durch

$$a_1 := 1, \qquad a_2 := 1, \qquad a_3 := 2 \qquad \text{und} \qquad a_{n+3} := \frac{1}{a_n} \cdot (a_{n+1} \cdot a_{n+2} + k) \qquad \text{für} \qquad n > 0.$$

Dabei sei k irgendeine ganzzahlige Konstante. Für welche k sind dann alle Folgenglieder ganzzahlig?

Ich vermute wiederum, daß dies genau dann gilt, wenn k ungerade oder 0 ist. Für $k = 7$ habe ich es ja bewiesen. Für $k = 0$ ist die Folge $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ die Folge der Zweierpotenzen, wobei aber jede Zweierpotenz zweimal vorkommt:

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 4, \quad 4, \quad 8, \quad 8, \quad 16, \quad 16, \quad 32, \quad 32, \quad ....$$

Für $k = 3$ gilt die einfachere Rekursionsformel $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$, was ich auch durch vollständige Induktion bewiesen habe. Die Folge $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...)$ ist dann

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 13, \quad 34, \quad 89, \quad 233, \quad 610, \quad 1597, \quad ....$$

In der Tat läßt sich diese Folge aber sehr einfach charakterisieren als die Folge der *Fibionaccizahlen mit ungeraden Indizes*: Ist $(f_1,\ f_2,\ f_3,\ ...)$ die durch die Werte $f_1 := 1$, $f_2 := 1$ und die Rekursion $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ definierte Fibionaccifolge, dann zeigt man leicht $a_k = f_{2k-3}$. (Der Wert a_1 entspricht der Fibionaccizahl f_{-1}; in der Tat ermöglicht die Rekursion $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ in der Form $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$ eine sinnvolle Erweiterung der Fibionaccifolge auf negative Indizes).

Interessant ist auch der Fall $k = 1$, der zu der Folge

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 7, \quad 11, \quad 26, \quad 41, \quad 97, \quad 153, \quad 362,$$
$$571, \quad 1351, \quad 2131, \quad 5042, \quad 7953, \quad 18817, \quad 29681, \quad \ldots$$

führt. Für diese Folge zeigt man die Rekursionsformel $a_{n+4} = 4a_{n+2} - a_n$.

Ich habe meine obige Vermutung, daß genau dann alle Folgenglieder ganzzahlig sind, falls k ungerade oder 0 ist, zumindest in eine Richtung bewiesen: Für $k = 0$ wissen wir ja schon (und es ist leicht einzusehen), daß $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ die wiederholten Zweierpotenzen sind. Nun habe ich leicht verifizieren können (direkte Verallgemeinerung des Beweises von Satz 1 in der Lösung von der Aufgabe), daß für jedes reelle k die rekursive Formel $a_{n+4} = \left(3\frac{k+1}{2} + 1\right) a_{n+2} - a_n$ gilt. Diese Formel gilt für alle reellen k und kann, zusammen mit den Werten $a_1 := 1$, $a_2 := 1$, $a_3 := 2$ und $a_4 := 2 + k$ als alternative Definition der Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ verwendet werden. (Im Unterschied zu der Definitionsformel $a_{n+3} = \frac{1}{a_n}(a_{n+1}a_{n+2} + k)$ braucht man hier natürlich 4 Anfangswerte und nicht 3; der Wert a_4 berechnet sich zu $\frac{1}{a_1}(a_2a_3 + k) = \frac{1}{1}(1 \cdot 2 + k) = 2 + k$.) [1]

Ist k ungerade, dann ist $k + 1$ gerade, also $\frac{k+1}{2}$ eine ganze Zahl, und wir erhalten damit: Sind die Zahlen a_n und a_{n+2} ganz, dann ist auch die Zahl a_{n+4} ganz. Da die Folgenglieder $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ und $a_4 = 2 + k$ ganz sind, erhalten wir damit genau so wie in der Lösung der Aufgabe, daß alle Folgenglieder ganzzahlig ist.

Noch allgemeiner kann man eine Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ durch

$$a_1 := x, \qquad a_2 := y, \qquad a_3 := z \qquad \text{und} \qquad a_{n+3} := \frac{1}{a_n} \cdot (a_{n+1} \cdot a_{n+2} + k) \qquad \text{für} \qquad n > 0$$

definieren, wobei x, y, z und k Konstanten sind. Dann ist

$$a_4 = \frac{1}{a_1}(a_2a_3 + k) = \frac{1}{x}(yz + k),$$

und man beweist die Rekursionsformel

$$a_{n+4} = \left(\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \frac{k}{y}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)\right) a_{n+2} - a_n.$$

Ich will hier aber nicht die Frage nach der Ganzzahligkeit stellen.

[1] Diese alternative Definition der Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ist manchmal sogar besser als die Rekursionsvorschrift $a_{n+3} = \frac{1}{a_n}(a_{n+1}a_{n+2} + k)$, denn beispielsweise im Fall $k = -1$ bricht die durch $a_{n+3} = \frac{1}{a_n}(a_{n+1}a_{n+2} + k)$ definierte Folge an einer Stelle ab, weil der Nenner a_n Null wird, während die durch $a_{n+4} = \left(3\frac{k+1}{2} + 1\right) a_{n+2} - a_n$ bestimmte Folge weiter geht.