Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 2. Runde, Aufgabe 4

Es seien p und q zwei verschiedene teilerfremde positive ganze Zahlen. Die Menge der ganzen Zahlen soll so in drei Teilmengen A, B, C zerlegt werden, daß für jede positive ganze Zahl z in jeder der Mengen A, B, C genau eine der drei Zahlen z, $z+p$, $z+q$ liegt.

Man beweise, daß eine solche Zerlegung genau dann möglich ist, wenn $p+q$ durch 3 teilbar ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Unter "natürlichen Zahlen" verstehe ich im Folgenden positive ganze Zahlen, also Elemente der Menge $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...\}$.

Zuerst beweisen wir einen (bekannten) Hilfssatz:

Satz 1: Seien P und Q zwei teilerfremde natürliche Zahlen. Dann existieren zwei ganze Zahlen x und y, für die $xP + yQ = 1$ gilt.

Beweis: Wir führen eine vollständige Induktion nach $P + Q$.

- **Induktionsanfang:** Für $P + Q = 2$ muß $P = 1$ und $Q = 1$ sein; dann nehme man etwa $x = 1$ und $y = 0$, und die Behauptung ist erfüllt.

- **Induktionsschritt:** Nehmen wir nun an, daß wir ein bestimmtes $n \geq 2$ haben, sodaß für alle teilerfremden P und Q mit $P + Q \leq n$ unsere Behauptung gilt. Seien nun P und Q zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $P + Q = n + 1$. O. B. d. A. sei $P < Q$ (wäre $P = Q$, dann wären die Zahlen P und Q nicht teilerfremd, denn sie können nicht beide gleich 1 sein, weil sonst $P+Q = 2$ wäre; aber $n + 1 > 2$).
  Betrachten wir jetzt die Zahlen $P' = P$ und $Q' = Q - P$. Die Summe dieser Zahlen ist $P' + Q' = Q \leq P + Q - 1 = (n + 1) - 1 = n$; damit können wir die Induktionsannahme anwenden, und daher existieren ganze x' und y', für die $x'P' + y'Q' = 1$ ist. Dann ist $x'P + y'(Q - P) = 1$, also $(x' - y')P + y'Q = 1$. Wir setzen $x = x' - y'$ und $y = y'$, und die Behauptung gilt auch für $P + Q = n + 1$.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Kommen wir jetzt zur Lösung der Aufgabe. Wir müssen zwei Teilsätze beweisen:

Satz 2: Ist $p + q$ durch 3 teilbar, dann ist eine geforderte Zerlegung möglich.

Satz 3: Ist eine geforderte Zerlegung möglich, dann ist $p + q$ durch 3 teilbar.

Dabei verstehe ich unter "geforderte Zerlegung" eine Zerlegung der Menge der ganzen Zahlen in drei Teilmengen A, B, C, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Der *Beweis von Satz 2* ist relativ einfach: Man braucht ja nur eine mögliche Zerlegung anzugeben. Sei also A die Menge aller ganzen Zahlen, die durch 3 teilbar sind;

sei B die Menge aller ganzen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen; und sei C die Menge aller Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen. Die Vereinigung der Mengen A, B und C ist die Menge aller ganzen Zahlen (denn bei der Division durch 3 können nur die Reste 0, 1 und 2 vorkommen).

Da die Summe $p+q$ durch 3 teilbar ist, darf keine der beiden Zahlen p und q durch 3 teilbar sein, denn sonst wäre auch die andere Zahl durch 3 teilbar (denn die Differenz zweier durch 3 teilbarer Zahlen ist selbst durch 3 teilbar); dann wären die beiden Zahlen aber nicht mehr teilerfremd. Also kann keine der beiden Zahlen p und q durch 3 teilbar sein.

Ist $p \equiv 1 \mod 3$, dann muß $q \equiv 2 \mod 3$ sein (denn aus $p \equiv 1 \mod 3$ und $p + q \equiv 0 \mod 3$ folgt $q = (p+q) - q \equiv 0 - 1 = -1 \equiv 2 \mod 3$). Ist $p \equiv 2 \mod 3$, dann muß $q \equiv 1 \mod 3$ sein (denn aus $p \equiv 2 \mod 3$ und $p + q \equiv 0 \mod 3$ folgt $q = (p+q) - q \equiv 0 - 2 = -2 \equiv 1 \mod 3$).

Wir haben damit erhalten: Genau eine der beiden Zahlen p und q läßt bei der Division durch 3 den Rest 1, und die andere läßt bei der Division durch 3 den Rest 2.

O. B. d. A. sei p die Zahl, die den Rest 1 läßt, und q die Zahl, die den Rest 2 läßt.

Wir müssen zeigen, daß für jede ganze Zahl z in jeder der Mengen A, B und C genau eine der Zahlen z, $z+p$ und $z+q$ liegt. Den *Beweis* führen wir mithilfe einer Fallunterscheidung:

Erster Fall: Ist $z \in A$, dann ist $z \equiv 0 \mod 3$, und damit $z + p \equiv 0 + 1 = 1 \mod 3$, also $z + p \in B$, und ferner $z + q \equiv 0 + 2 = 2 \mod 3$, also $z + q \in C$.

Zweiter Fall: Ist $z \in B$, dann ist $z \equiv 1 \mod 3$, und damit $z+p \equiv 1+1 = 2 \mod 3$, also $z + p \in C$, und ferner $z + q \equiv 1 + 2 = 3 \equiv 0 \mod 3$, also $z + q \in A$.

Dritter Fall: Ist $z \in C$, dann ist $z \equiv 2 \mod 3$, und damit $z + p \equiv 2 + 1 = 3 \equiv 0 \mod 3$, also $z + p \in A$, und ferner $z + q \equiv 2 + 2 = 4 \equiv 1 \mod 3$, also $z + q \in A$.

In jedem der drei Fälle liegt tatsächlich in jeder der Mengen A, B und C genau eine der Zahlen z, $z+p$ und $z+q$. Damit haben wir die gewünschte Zerlegung gefunden, und Satz 2 ist bewiesen.

Schwieriger ist der *Beweis von Satz 3:* Angenommen, wir haben eine Zerlegung der Menge der ganzen Zahlen in drei Teilmengen A, B, C, sodaß für jede ganze Zahl z in jeder der Mengen A, B, C genau eine der drei Zahlen z, $z+p$, $z+q$ liegt. Wir müssen zeigen, daß $p+q$ durch 3 teilbar ist.

Wir führen die Äquivalenzrelation $\sim$ ein, die folgendermaßen definiert wird: Für zwei Zahlen a und b gelte $a \sim b$ genau dann, wenn die Zahlen a und b beide in einer und derselben von den drei Mengen A, B, C liegen. Dann sagen wir, die Zahlen a und b seien **ähnlich**. Für die Aussage "es gilt nicht $a \sim b$" schreiben wir "$a \nsim b$".

Dann können wir unsere Bedingung folgendermaßen umschreiben:

$$z \nsim z+p; \qquad z \nsim z+q; \qquad z+p \nsim z+q \qquad \text{für jedes ganze } z.$$

Doch wir können dies genauso auf die Zahl $z' = z - p$ anwenden:

$$\begin{array}{rclclcl} z' & \nsim & z'+p; & z' \nsim z'+q; & z'+p \nsim z'+q, & & \text{also} \\ z-p & \nsim & z; & z-p \nsim z-p+q; & z \nsim z-p+q & & \text{für jedes ganze } z. \end{array}$$

Da wir nur drei Mengen A, B, C haben, müssen (mindestens) zwei von den vier Zahlen z, $z+p$, $z+q$ und $z-p+q$ zueinander ähnlich sein. Aber wir haben $z \nsim z+p$,

$z \nsim z+q$, $z \nsim z-p+q$, $z+p \nsim z+q$ und $z+q \nsim z-p+q$ (was aus der Formel $z-p \nsim z$, angewandt auf die Zahl $z' = z+q$ folgt). Daher muß $z+p \sim z-p+q$ sein. Wenden wir diese Ähnlichkeit auf die Zahl $z' = z-p$ an, dann erhalten wir $(z-p)+p \sim (z-p)-p+q$, also $z \sim z-2p+q$ für jedes z.

Analog ist $z \sim z-2q+p$ für jedes z (denn wir können ja die Zahlen p und q vertauschen).

Bezeichnen wir mit $T_s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, wobei s ganzzahlig ist, die Transformation $T_s(z) = z+s$. Ferner nennen wir $I \subseteq \mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen s mit der Eigenschaft, daß die Transformation T_s jede der drei Mengen A, B, C in sich selbst abbildet. Wir beweisen nun den fast offensichtlichen Hilfssatz:

Satz 4: Die Menge I ist eine Additionsgruppe mit dem Nullelement 0. Das heißt:

$$\begin{aligned} 0 &\in I; \\ \text{wenn } s &\in I \text{ gilt, ist auch } -s \in I; \\ \text{für } s &\in I \text{ und } t \in I \text{ ist auch } s+t \in I. \end{aligned}$$

Beweis: Die Eigenschaft $0 \in I$ ist trivial.

Ist $s \in I$, dann liegt für jedes $z \in \mathbb{Z}$ die Zahl $z+s$ in derselben der Mengen A, B, C, wie die Zahl z. Also ist $z+s \sim z$. Wenden wir dies auf die Zahl $z' = z-s$ an, dann ist $z'+s \sim z'$, also $z \sim z-s$. Also bildet auch die Transformation T_{-s} jede der drei Mengen A, B, C in sich selbst ab, und es ergibt sich $-s \in I$.

Ist $s \in I$ und $t \in I$, dann ist $z+s \sim z$ für jedes z, und $z'+t \sim z'$ für jedes z'. Nehmen wir $z' = z+s$, dann erhalten wir $z+s+t \sim z+s$; zusammen mit $z+s \sim z$ ergibt dies also $z+s+t \sim z$ für jedes z. Also bildet die Transformation T_{s+t} jede der drei Mengen A, B, C in sich selbst ab, und es ergibt sich $s+t \in I$.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Aus den zuvor bewiesenen Ähnlichkeiten $z \sim z-2p+q$ und $z \sim z-2q+p$ für jedes z ergibt sich also

$$-2p+q \in I \qquad \text{und} \qquad -2q+p \in I.$$

Aus den in Satz 4 bewiesenen Gruppeneigenschaften der Menge I folgt: Für jede $s \in I$ und $t \in I$ ist $as+bt \in I$, wenn a und b beliebige ganze Zahlen sind. Insbesondere ist also

$$2 \cdot (-2p+q) + 1 \cdot (-2q+p) \in I,$$

also $-4p+2q-2q+p \in I$, d. h. $-3p \in I$. Mithin ist auch $3p \in I$. Wiederum gilt analog $3q \in I$.

Doch da die Zahlen p und q teilerfremd sind, existieren nach Satz 1 zwei ganze Zahlen l und k, für die $lp+kq=1$ gilt. Also ist $l \cdot 3p + k \cdot 3q = 3$. Aus $3p \in I$ und $3q \in I$ folgt damit $3 \in I$.

Folglich sind auch alle ganzen durch 3 teilbaren Zahlen in der Menge I enthalten. Nach der Definition der Menge I heißt das, daß für jedes z gilt: $z \sim z+3k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Daraus folgt:

- Wenn eine der drei Mengen A, B, C die Zahl 0 enthält, dann enthält sie alle ganzen durch 3 teilbaren Zahlen.

- Wenn eine der drei Mengen A, B, C die Zahl 1 enthält, dann enthält sie alle ganzen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen.

- Wenn eine der drei Mengen A, B, C die Zahl 2 enthält, dann enthält sie alle ganzen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen.

Die Mengen A, B und C enthalten, zusammen, alle ganzen Zahlen und sind paarweise disjunkt.

Bemerken wir, daß keine der Mengen A, B, C leer sein darf, denn wäre eine Menge leer, könnten wir die Bedingung in der Aufgabenstellung nicht erfüllen, daß für jede positive ganze Zahl z in jeder der Mengen A, B, C genau eine der drei Zahlen z, $z+p$, $z+q$ liegt.

Da die Vereinigung der Mengen A, B, C die gesamte Menge der ganzen Zahlen ist, muß jede der Zahlen 0, 1 und 2 in irgendeiner von den drei Mengen enthalten sein. Wir werden im Folgenden zeigen, daß jede der Mengen A, B, C genau eine der Zahlen 0, 1 und 2 enthält.

Würde eine Menge - o. B. d. A. sei dies die Menge A - genau zwei der Zahlen 0, 1 und 2 enthalten - o. B. d. A. seien es die Zahlen 0 und 1 -, würde sie alle durch 3 teilbaren Zahlen enthalten und auch alle Zahlen enthalten, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen. Eine andere Menge - o. B. d. A. sei dies die Menge B - müßte dann die Zahl 3 enthalten, und damit alle Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen. Dann wären für die Menge C keine Zahlen mehr übrig. Die Menge C wäre also leer. Dies wäre ein Widerspruch.

Würde eine Menge - o. B. d. A. sei dies die Menge A - alle drei Zahlen 0, 1 und 2 enthalten, würde sie auch alle durch 3 teilbaren Zahlen enthalten, alle Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, und alle Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen. Dann wären für die Mengen B und C keine Zahlen mehr übrig. Die Mengen B und C wären also leer. Dies ist wieder ein Widerspruch.

Also kann keine der Mengen A, B, C mehr als eine von den drei Zahlen 0, 1 und 2 enthalten. Andererseits muß jede von den Zahlen 0, 1 und 2 in einer der drei Mengen enthalten sein[1]. Also enthält jede der Mengen A, B, C genau eine der Zahlen 0, 1 und 2.

O. B. d. A. enthalte die Menge A die Zahl 0, die Menge B die Zahl 1 und die Menge C die Zahl 2. Dann enthält die Menge A alle durch 3 teilbaren Zahlen, die Menge B alle Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, und die Menge C alle Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen.

Aber wir haben vorausgesetzt, daß für jede ganze Zahl z in jeder der Mengen A, B, C genau eine der drei Zahlen z, $z+p$, $z+q$ liegt. Für $z=0$ erhalten wir also, daß in jeder der Mengen A, B, C genau eine der drei Zahlen 0, p, q liegt. Das heißt: Jeder der drei Reste 0, 1 und 2, der bei der Division durch 3 vorkommen kann, kommt genau einmal unter den Zahlen 0, p, q vor. Also ist die Summe $0+p+q \equiv 0+1+2=3 \equiv 0 \mod 3$. Das heißt, die Summe $0+p+q=p+q$ ist durch 3 teilbar.

Damit ist auch Satz 3 bewiesen, und damit die Aufgabe vollständig gelöst.

[1] Jede ganze Zahl ist in einer der drei Mengen A, B, C enthalten.