Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 2. Runde, Aufgabe 3

Gegeben sei ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ mit Diagonalenschnittpunkt S; die Fußpunkte der Lote von S auf AB und auf CD seien E bzw. F.

Man beweise: Die Mittelsenkrechte der Strecke EF halbiert die Seiten BC und DA.

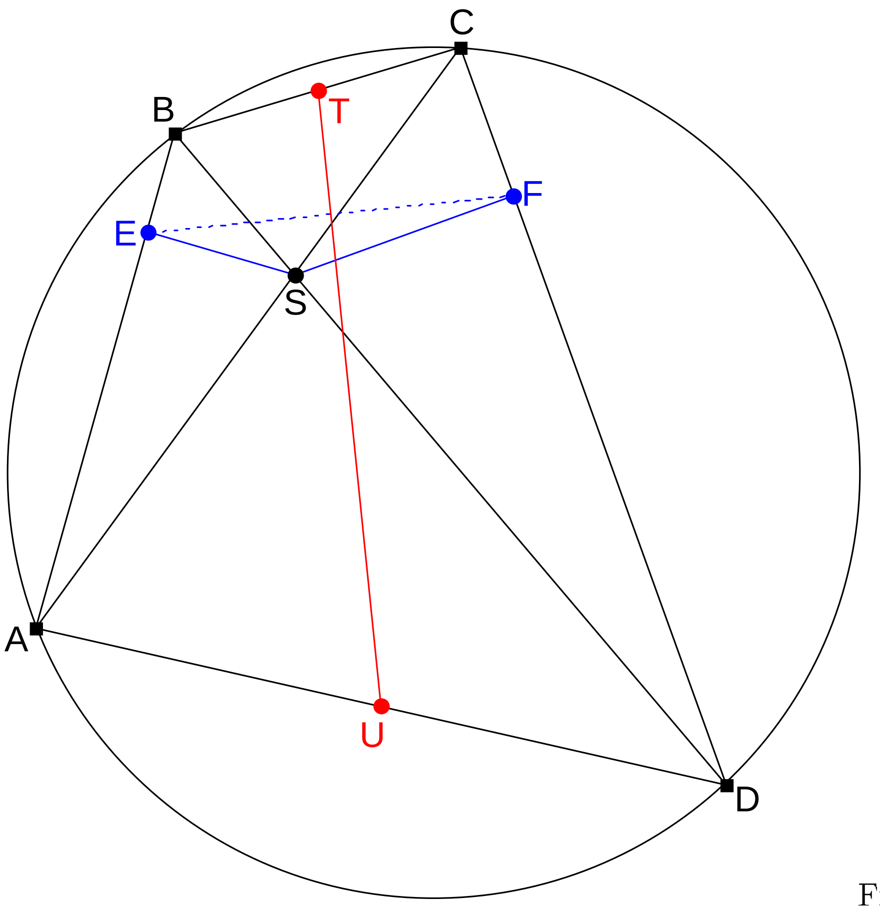

Fig. 1

Lösung von Darij Grinberg:

Wir müssen zeigen, daß die Mittelpunkte T und U der Seiten BC bzw. DA auf der Mittelsenkrechten der Strecke EF liegen. Wir werden nur beweisen, daß U auf der Mittelsenkrechten der Strecke EF liegt; die entsprechende Aussage für T ergibt sich dann analog.

Betrachten wir Fig. 2. (Einige Überlegungen im Beweis, die Streckenlängen und Winkel verwenden werden, sind auf die Punkteanordnung von Fig. 2 abgestimmt und können leicht auf andere Fälle angepasst werden.)

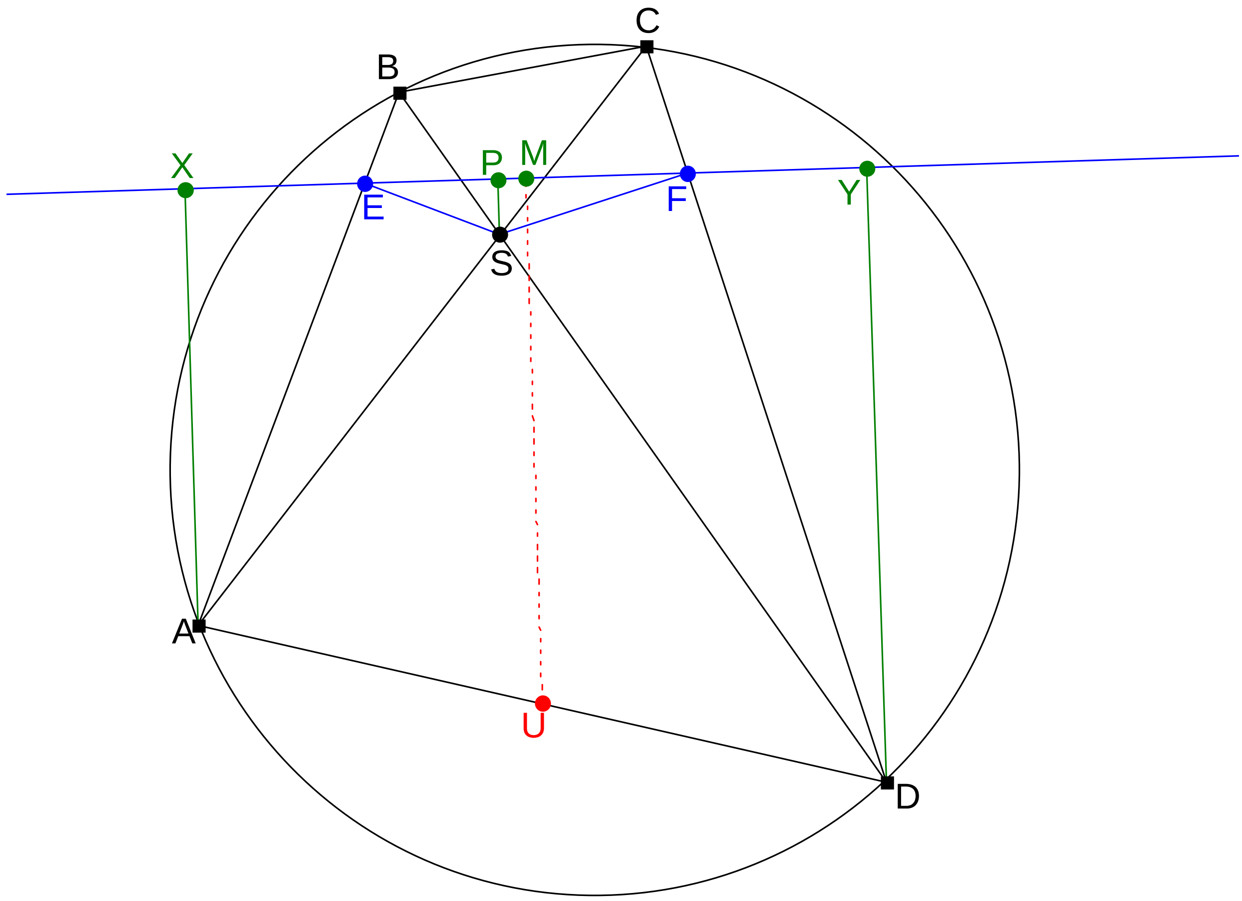

Fig. 2

Seien X, Y und P die Fußpunkte der Lote von A, D bzw. S auf die Gerade EF. Sei M der Mittelpunkt der Strecke EF.

Das Dreieck AXE ist rechtwinklig (mit $\measuredangle AXE = 90°$); also ist $\measuredangle EAX = 90° - \measuredangle AEX$. Andererseits ist $\measuredangle SEP = 180° - \measuredangle AES - \measuredangle AEX = 180° - 90° - \measuredangle AEX = 90° - \measuredangle AEX$. Also haben wir $\measuredangle EAX = \measuredangle SEP$. Andererseits ist $\measuredangle EXA = \measuredangle SPE = 90°$. Also sind die Dreiecke EAX und SEP ähnlich (ww), und es folgt

$$\frac{EX}{SP} = \frac{EA}{SE}. \tag{1}$$

Analog gilt

$$\frac{FY}{SP} = \frac{FD}{SF}. \tag{2}$$

Andererseits gilt $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ (Umfangswinkel), also $\measuredangle EAS = \measuredangle FDS$. Außerdem ist $\measuredangle SEA = \measuredangle SFD = 90°$. Also sind die Dreiecke EAS und FDS ähnlich (ww), und es folgt

$$\frac{EA}{SE} = \frac{FD}{SF}.$$

Folglich sind die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) gleich; also ist

$$\frac{EX}{SP} = \frac{FY}{SP},$$

und $EX = FY$. Andererseits ist $EM = FM$, weil M der Mittelpunkt der Strecke EF ist. Also ist $XM = EX + EM = FY + FM = YM$, und der Punkt M ist auch Mittelpunkt der Strecke XY.

Wegen $AX \perp EF$ und $DY \perp EF$ ist $AX \parallel DY$. In dem Trapez $AXYD$ verbindet die Gerade UM die Mittelpunkte U und M der Schenkel DA bzw. XY; also ist sie Mittelparallele und damit parallel zu AX und DY, also auch senkrecht auf EF. Andererseits geht die Gerade UM durch den Mittelpunkt M der Strecke EF. Das heißt, die Gerade UM ist die Mittelsenkrechte der Strecke EF. Also liegt der Punkt U auf der Mittelsenkrechten der Strecke EF, was zu beweisen war.

Anhang

1. Vermutlich haben die Umkreise der Dreiecke SBC, SDA und SEF einen gemeinsamen Punkt außer S (oder sie berühren sich in S).

2. Bekanntlich gilt: Sind E, G, F und H die Fußpunkte der Lote von S auf AB, BC, CD bzw. DA, dann existiert ein Kreis mit dem Zentrum S, der die Geraden EG, GF, FH und HE berührt. Dies ist übrigens eine Verallgemeinerung der Tatsache, daß der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks der Inkreismittelpunkt des von den Höhenfußpunkten gebildeten Dreiecks ist.