Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 2. Runde, Aufgabe 1

Der Graph einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktion f habe mindestens zwei Symmetriezentren.

Man beweise, dass f sich als Summe einer linearen und einer periodischen Funktion darstellen lässt.

Begriffserläuterungen:

Ein Punkt P heißt *Symmetriezentrum* einer Figur F, wenn jeder Punkt von F bei der Spiegelung an P wieder in einen Punkt von F übergeht.

Eine Funktion g heißt *linear*, wenn es reelle Zahlen a, b gilt, so dass die Gleichung $g(x) = ax + b$ für alle x gilt.

Eine Funktion p heißt *periodisch*, wenn es eine positive reelle Zahl k gibt, so dass $p(x) = p(x + k)$ für alle x gilt.

Lösung von Darij Grinberg:

Die Verkettung zweier Punktspiegelungen ist eine Parallelverschiebung[1]. Da der Graph der Funktion f invariant bezüglich der zwei Punktspiegelungen ist, ist er also auch invariant bezüglich deren Verkettung, einer Parallelverschiebung. Sei $\mathfrak{a}$ der Vektor dieser Parallelverschiebung.

Ferner sei

$$g(x) = m \cdot x \tag{1}$$

die lineare Funktion, deren Graph eine Ursprungsgerade darstellt, welche zum Vektor $\mathfrak{a}$ parallel ist.[2] Sind $\mathfrak{a}(u \mid v)$ die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{a}$, dann geht der Graph der Funktion g offensichtlich durch den Punkt $(u \mid v)$, denn, wie schon gesagt, ist der Graph der Funktion g eine Ursprungsgerade und parallel zum Vektor $\mathfrak{a}$. Also ist

$$g(u) = v. \tag{2}$$

Sei ferner die Funktion h definiert durch $h(x) = f(x) - g(x)$.

Sei O der Koordinatenursprung und x eine beliebige reelle Zahl, $P(x \mid y)$ mit

$$y = f(x) \tag{3}$$

der zugehörige Punkt auf dem Graph der Funktion f, und P' der durch die Vektorgleichung $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \mathfrak{a}$ definierte Punkt. Dann liegt auch P' auf dem Graph der Funktion $\mathfrak{a}$, weil dieser Graph ja invariant bezüglich der Parallelverschiebung mit Gleitvektor $\mathfrak{a}$ ist. Das heißt, für die Koordinaten $P'(x + u \mid y + v)$ von P' gilt $f(x + u) = y + v$.

[1] Siehe etwa:
Lambacher-Schweizer: *Geometrie 1*, 2. Auflage 1971, **43** S 1.

[2] So eine Funktion g existiert natürlich nur, falls der Vektor $\mathfrak{a}$ nicht parallel zur y-Achse ist. Aber der Vektor $\mathfrak{a}$ kann auch gar nicht parallel zur y-Achse sein. *Beweis:* Wäre der Vektor $\mathfrak{a}$ parallel zu der y-Achse, dann müßte der Graph der Funktion f durch zwei Punkte P_1 und P_2 gehen, für die $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathfrak{a}$ gilt; daher wäre die Gerade P_1P_2 parallel zu der y-Achse, und die Punkte P_1 und P_2 hätten die gleiche x-Koordinate. Das würde bedeuten, daß die Funktion f einem x zwei verschiedene y zuordnet, was offensichtlich nicht möglich ist. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten.

Dann ist

$$\begin{aligned} f(x+u) - g(x+u) &= (y+v) - m\cdot(x+u) && \text{(nach (1))} \\ &= y+v-m\cdot x - m\cdot u \\ &= f(x)+g(u)-g(x)-g(u) && \text{(nach (1), (2) und (3))} \\ &= f(x)-g(x)\,, \end{aligned}$$

also $h(x+u) = h(x)$.

Ist die Zahl u positiv, dann ist damit bewiesen, daß die Funktion h periodisch ist. Ist die Zahl u negativ, dann ist die Funktion h ebenfalls periodisch, wie man folgendermaßen feststellen kann: Wenn für alle x die Gleichung $h(x+u) = h(x)$ gilt, muß auch für alle y die Gleichung $h(y+(-u)) = h(y)$ gelten, denn wenn man $x = y+(-u)$ setzt, hat man $h(y+(-u)+u) = h(y+(-u))$, also $h(y) = h(y+(-u))$. Also ist die Funktion h periodisch mit der Periode $-u$. In jedem Fall ist also die Funktion h periodisch.

Damit ist die Funktion f als Summe der linearen Funktion g und der periodischen Funktion h dargestellt. Die Aufgabe ist gelöst.