Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 1. Runde, Aufgabe 2

Man ermittle alle Tripel $(x,\ y,\ z)$ ganzer Zahlen, die jede der folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 16x + 60 &= y; \\ y^3 - 4y^2 - 16y + 60 &= z; \\ z^3 - 4z^2 - 16z + 60 &= x. \end{aligned}$$

Lösung von Darij Grinberg:

Antwort: Die einzigen Lösungstripel sind

$$\begin{aligned} T_1 &= (x,\ y,\ z) = (-4,\ -4,\ -4)\,; \\ T_2 &= (x,\ y,\ z) = (3,\ 3,\ 3)\,; \\ T_3 &= (x,\ y,\ z) = (5,\ 5,\ 5)\,. \end{aligned}$$

Beweis: Wir definieren das kubische Polynom $f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 60$. Dann wird unser Gleichungssystem zu

$$f(x) = y; \qquad f(y) = z; \qquad f(z) = x. \tag{1}$$

Wir haben zu beweisen:
Satz 1: Die Tripel T_1, T_2 und T_3 erfüllen wirklich die Gleichungen.
Satz 2: Es gibt keine weiteren Tripel, die alle drei Gleichungen erfüllen.
Beweis von Satz 1: Es ist

$$\begin{aligned} f(-4) &= (-4)^3 - 4(-4)^2 - 16(-4) + 60 = -4; \\ f(3) &= 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 60 = 3; \\ f(5) &= 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 16 \cdot 5 + 60 = 5; \end{aligned}$$

für alle drei Tripel gilt also offensichtlich $f(x) = f(y) = f(z) = x = y = z$, und damit sind alle Gleichungen (1) erfüllt.

Beweis von Satz 2: Wir werden folgende "unvollständige Faktorisierung" benutzen:

$$f(x) = x + (x-5)(x+4)(x-3)\,, \tag{2}$$

denn $f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = x + (x^3 - 4x^2 - 17x + 60)\,.$

Wir werden zuerst zeigen:
Hilfssatz 3: Alle drei Zahlen x, y und z sind ≤ 5.
Hilfssatz 4: Alle drei Zahlen x, y und z sind ≥ -4.
Beweis von Hilfssatz 3: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x die größte der Zahlen x, y und z, da jedes Lösungstripel $(x,\ y,\ z)$ auch zur Folge hat, daß $(y,\ z,\ x)$ und $(z,\ x,\ y)$ Lösungstripel sind.

Damit ist $x \geq y \geq z$. Wäre $x > 5$, dann wären $x - 5$, $x + 4$ und $x - 3$ positive Zahlen, und wegen (2) wäre dann $f(x) = x + (x-5)(x+4)(x-3) > x$. Da aber

$y = f(x)$ sein muß, wäre dann $y > x$. Weil aber $y \leq x$ vorausgesetzt wurde, haben wir einen Widerspruch. Daher muß $x \leq 5$ sein. Wegen $x \geq y \geq z$ ist dann auch $y \leq 5$ und $z \leq 5$. Hiermit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Beweis von Hilfssatz 4: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x jetzt die kleinste der Zahlen x, y und z, da jedes Lösungstripel $(x,\ y,\ z)$ auch zur Folge hat, daß $(y,\ z,\ x)$ und $(z,\ x,\ y)$ Lösungstripel sind.

Damit ist $x \leq y \leq z$. Wäre $x < -4$, dann wären $x-5$, $x+4$ und $x-3$ negative Zahlen, und wegen (2) wäre dann $f(x) = x + (x-5)(x+4)(x-3) < x$. Da aber $y = f(x)$ sein muß, wäre dann $y < x$. Weil aber $y \geq x$ vorausgesetzt wurde, haben wir einen Widerspruch. Daher muß $x \geq -4$ sein. Wegen $x \leq y \leq z$ ist dann auch $y \geq -4$ und $z \geq -4$. Hiermit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Da x, y und z aber ganze Zahlen sein müssen, kommen zum Beispiel für x als Lösungen nur die Zahlen

$$x \in \{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$$

in Frage.

Man rechnet nun leicht nach:

Für $x = -3$ ist $y = f(x) = f(-3) = 45 > 5$, also Widerspruch mit Hilfssatz 3.
Für $x = -2$ ist $y = f(x) = f(-2) = 68 > 5$, also Widerspruch mit Hilfssatz 3.
Für $x = -1$ ist $y = f(x) = f(-1) = 71 > 5$, also Widerspruch mit Hilfssatz 3.
Für $x = 0$ ist $y = f(x) = f(0) = 60 > 5$, also Widerspruch mit Hilfssatz 3.
Für $x = 1$ ist $y = f(x) = f(1) = 41 > 5$, also Widerspruch mit Hilfssatz 3.
Für $x = 2$ ist $y = f(x) = f(2) = 20 > 5$, also Widerspruch mit Hilfssatz 3.
Für $x = 4$ ist $y = f(x) = f(4) = -4$, also $z = f(y) = f(-4) = -4$, und $x = f(z) = f(-4) = -4$, also $x = 4 = -4$, was einen Widerspruch ergibt.

Also bleiben für x als Lösung nur die Zahlen $x \in \{-4;\ 3;\ 5\}$ in Frage. Da aber bei jedem x die zugehörigen y und z durch (1) eindeutig gegeben sind, kann es höchstens drei Lösungstripel des Gleichungssystems geben. Doch in Satz 1 haben wir gezeigt, daß T_1, T_2 und T_3 Lösungstripel sind. Deshalb sind sie die einzigen Lösungstripel, womit Satz 2 bewiesen ist.

Anhang:

Fig. 1 zeigt Graphe der Funktionen $f(x)$ und x; es sind die drei Stellen mit $f(x) = x$ zu erkennen.

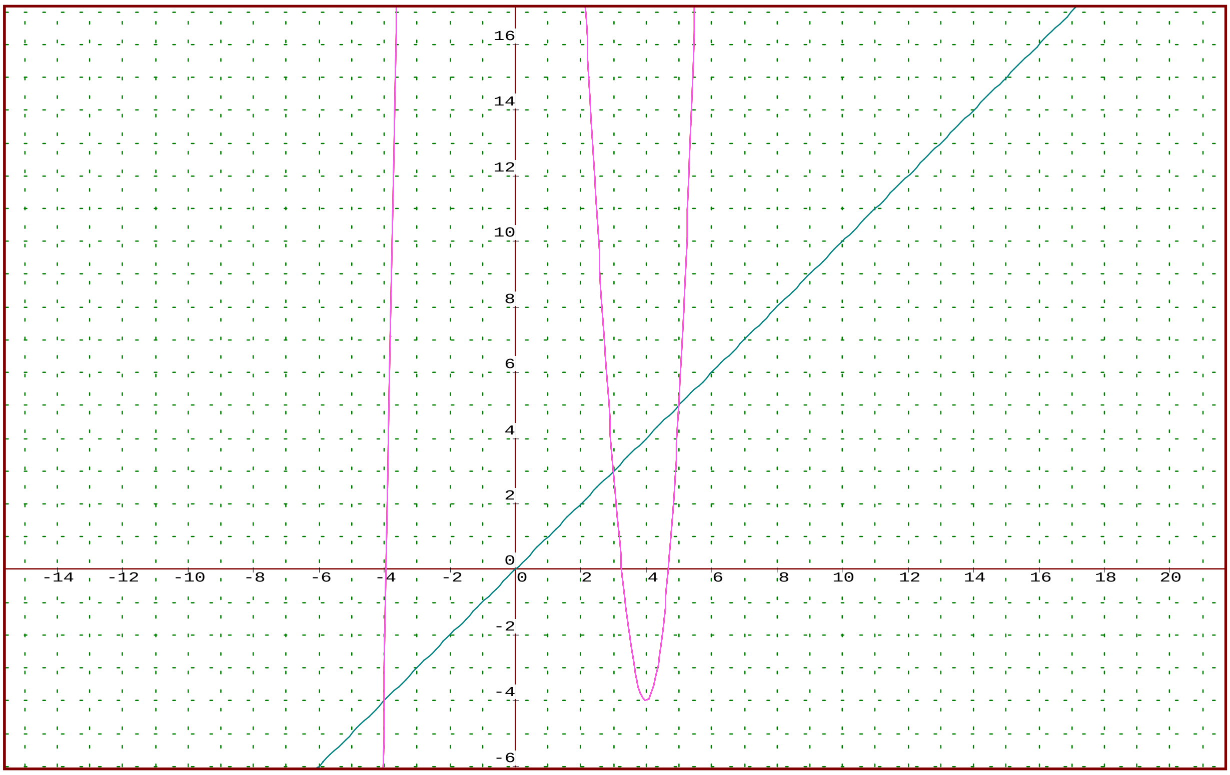

Fig. 1