Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 1. Runde, Aufgabe 3

In einem Parallelogramm $ABCD$ werden auf den Seiten AB und BC die Punkte M und N so gewählt, dass sie mit keinem Eckpunkt zusammenfallen und die Strecken AM und NC gleich lang sind. Der Schnittpunkt der Strecken AN und CM wird mit Q bezeichnet.

Man beweise, dass DQ den Winkel ADC halbiert.

Lösung von Darij Grinberg:

Vorbemerkung: Ich formuliere (und beweise) diese Aufgabe "vom Dreieck ABC aus":

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Die Parallele zu BC durch A schneide die Parallele zu AB durch C in D.

Seien nun M und N Punkte auf den Seiten AB bzw. BC, für die $AM = CN$ gilt.

Man beweise: Der Schnittpunkt Q von AN und CM liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels ADC.

Nun zur **Lösung**:

Nach dem Sinussatz in den Dreiecken ADQ und CDQ gilt:

$$\frac{\sin\measuredangle ADQ}{\sin\measuredangle CDQ} = \frac{AQ\cdot\sin\measuredangle QAD : DQ}{CQ\cdot\sin\measuredangle QCD : DQ} = \frac{AQ}{CQ}\cdot\frac{\sin\measuredangle QAD}{\sin\measuredangle QCD}.$$

Aber als Winkel an Parallelen gilt $\measuredangle QAD = 180^\circ - \measuredangle QNC$ (denn $AD \parallel BC$); also $\sin\measuredangle QAD = \sin\measuredangle QNC$, und analog $\sin\measuredangle QCD = \sin\measuredangle QMA$, und daher

$$\frac{\sin\measuredangle ADQ}{\sin\measuredangle CDQ} = \frac{AQ}{CQ}\cdot\frac{\sin\measuredangle QNC}{\sin\measuredangle QMA} = \frac{AQ}{\sin\measuredangle QMA} : \frac{CQ}{\sin\measuredangle QNC}.$$

Nach dem Sinussatz in den Dreiecken AMQ und CNQ wird dies zu

$$\frac{\sin\measuredangle ADQ}{\sin\measuredangle CDQ} = \frac{AM}{\sin\measuredangle AQM} : \frac{CN}{\sin\measuredangle CQN} = \frac{AM}{CN}\cdot\frac{\sin\measuredangle CQN}{\sin\measuredangle AQM}.$$

Aber nach Voraussetzung ist $AM = CN$; ferner sind $\measuredangle CQN$ und $\measuredangle AQM$ Scheitelwinkel, also $\measuredangle CQN = \measuredangle AQM$, und $\sin\measuredangle CQN = \sin\measuredangle AQM$. Daher ist

$$\frac{\sin\measuredangle ADQ}{\sin\measuredangle CDQ} = 1\cdot 1 = 1,$$

also $\sin\measuredangle ADQ = \sin\measuredangle CDQ$. Daraus folgt, daß entweder $\measuredangle ADQ = \measuredangle CDQ$, oder $\measuredangle ADQ + \measuredangle CDQ = 180^\circ$ ist. Da aber $\measuredangle ADQ + \measuredangle CDQ = \measuredangle ADC \neq 180^\circ$ ist (denn $ABCD$ ist ein nicht entartetes Parallelogramm), muß $\measuredangle ADQ = \measuredangle CDQ$ sein. Also liegt der Punkt Q auf der Winkelhalbierenden des Winkels ADC, was zu beweisen war.

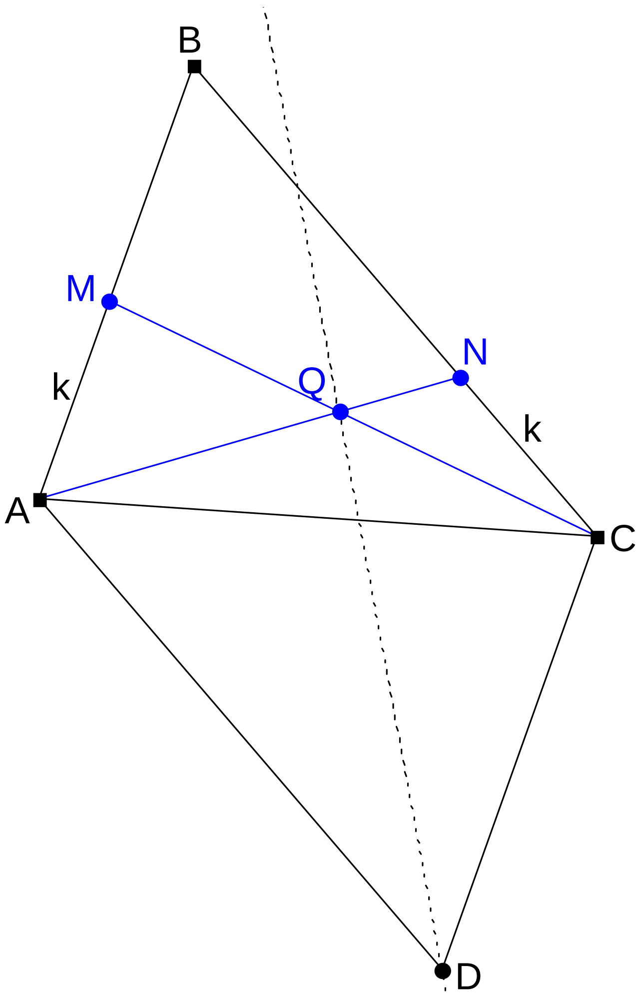

Fig. 1

Anhang:

Die gerade gelöste Aufgabe gestattet einen Beweis des folgenden Satzes ([2], Seite 12; [3], Seite 55):

> **Satz von Nagel:** Der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC ist der Nagelpunkt des Mittendreiecks von ΔABC.

Ich beginne mit einigen Erläuterungen. Das Mittendreieck eines Dreiecks ABC ist das Dreieck aus den Mittelpunkten der Seiten des ΔABC, also aus den Mittelpunkten der Strecken BC, CA und AB. Schwieriger ist die Definition des Nagelpunktes (Fig. 2):

Der Ankreis des Dreiecks ABC, der die Seite BC im Inneren berührt, heißt der **Ankreis an** BC des Dreiecks ABC. Sein Berührpunkt mit BC sei N; entsprechend sei P der Berührpunkt des Ankreises an CA mit CA, und M der Berührpunkt des Ankreises an AB mit AB.

Dann schneiden sich die Geraden AN, BP und CM in einem Punkt, dem sogenannten **Nagelpunkt** des ΔABC.

Der bekannteste Beweis des Satzes, daß sich die Geraden AN, BP und CM in einem Punkt schneiden, benutzt folgende Streckenlängen, die wir auch im folgenden verwenden werden:

$$\begin{aligned} AM &= s-b; \qquad BM = s-a; \\ BN &= s-c; \qquad CN = s-b; \\ CP &= s-a; \qquad AP = s-c, \end{aligned}$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang des ΔABC ist. Diese Streckenlängen wurden in [2], Seite 6, in [3], Seite 29, und in [4], Kapitel 1 §4 bewiesen.[1]

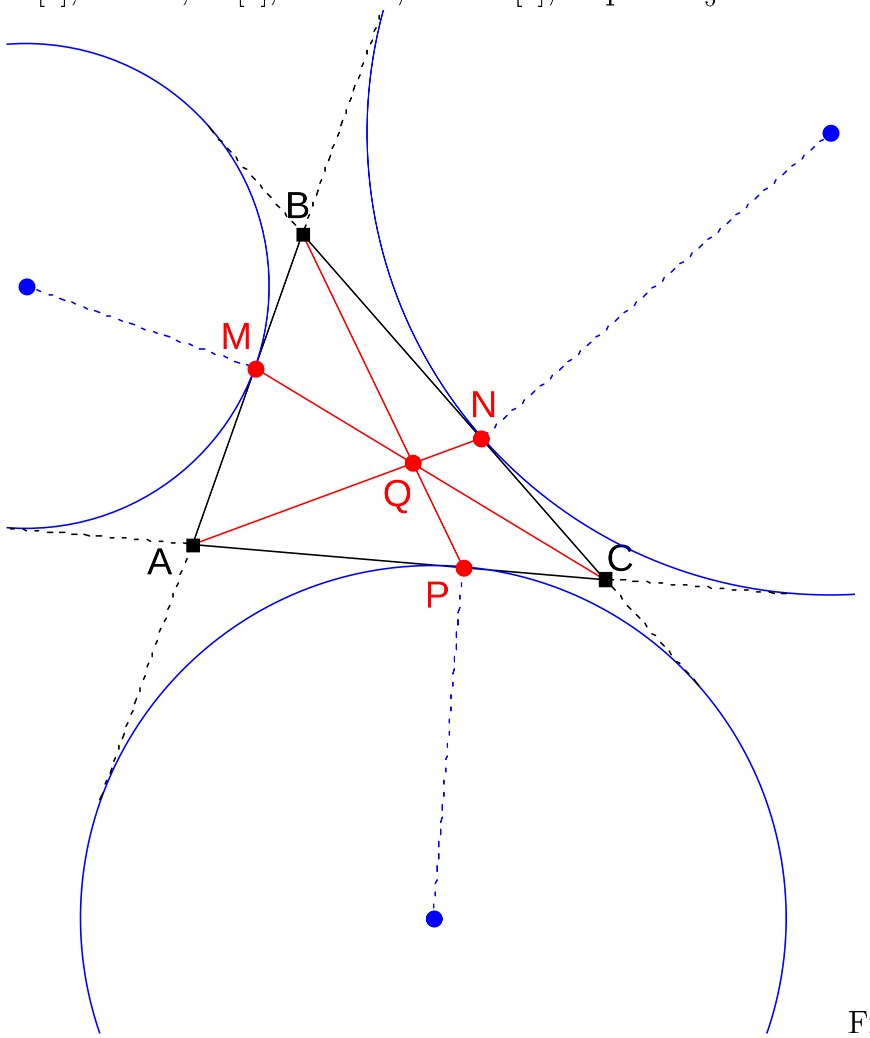

Fig. 2

Daraus folgt

$$AM = CN; \qquad CP = BM; \qquad BN = AP. \tag{1}$$

Dann ist

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = \frac{CN}{BM} \cdot \frac{AP}{CN} \cdot \frac{BM}{AP} = 1,$$

[1]Man merke an, daß deswegen $BA + AP = c + (s-c) = s$ ist, und analog $BC + CP = s$, also $BA + AP = BC + CP$. Die Gerade BP halbiert also den Umfang des Dreiecks ABC. Entsprechendes gilt für die Geraden AN und CM; deshalb ist der Nagelpunkt des ΔABC gleichzeitig der Schnittpunkt der Geraden durch die Dreiecksecken, die den Umfang des Dreiecks halbieren.

Siehe dazu auch [1], Seiten 86-87.

also mit orientierten Strecken

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1.$$

Nach dem Satz von Ceva schneiden sich deshalb die Geraden AN, BP und CM in einem Punkt. Die Existenz des Nagelpunktes ist damit bewiesen.

Dieser Beweis liefert allerdings nicht direkt den Satz von Nagel. Daher überlegen wir uns eine Hilfskonstruktion:

Die Parallelen zu BC durch A, zu CA durch B, und zu AB durch C umschließen ein Dreieck GDE, das das **Antimedialdreieck** des ΔABC genannt wird. Dabei sei G der Schnittpunkt der Parallelen zu CA durch B und zu AB durch C, und analog definiert man D und E nach Fig. 3. Dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm, und D ist der Schnittpunkt der Parallele zu BC durch A und der Parallele zu AB durch C; also stimmt D überein mit dem Punkt D aus der Aufgabe. Ist nun Q der Nagelpunkt des ΔABC, also der Schnittpunkt der Geraden AN, BP und CM, dann kann, wegen $AM = CN$ nach (1), die Aufgabe angewandt werden, also: Der Punkt Q liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels ADC.

Da aber diese Winkelhalbierende eine der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks GDE ist, und da wir analog beweisen können, daß Q auf den anderen zwei Winkelhalbierenden des Dreiecks GDE liegt, ist Q der Inkreismittelpunkt des Dreiecks GDE. Wir haben also bewiesen:

Hilfssatz: Der Nagelpunkt Q eines Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt des Antimedialdreiecks.

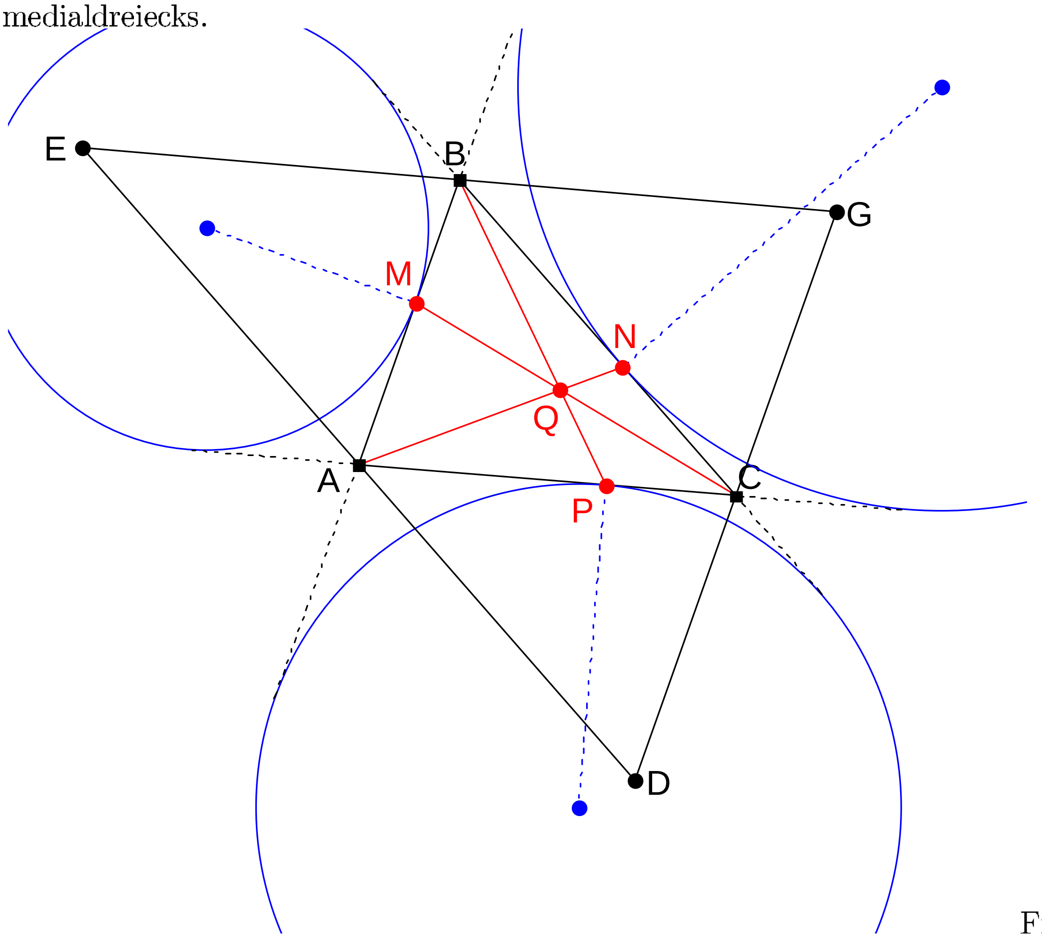

Fig. 3

Jetzt sind wir schon ganz nahe am Ziel: Betrachten wir ein Dreieck ABC und sein Mittendreieck (Fig. 4), und erinnern wir uns daran, daß die Seiten des Mittendreiecks jeweils parallel zu entsprechenden Seiten des ursprünglichen Dreiecks verlaufen (Mittelparallelen), dann sehen wir, daß jedes Dreieck das Antimedialdreieck seines Mittendreiecks ist. Wenden wir jetzt den Hilfssatz auf das Mittendreieck an, dann erhalten wir:

Der Nagelpunkt des Mittendreiecks eines Dreiecks ABC ist der Inkreismittelpunkt des ΔABC.

Dies ist gerade der Satz von Nagel.

– Der gerade vorgestellte Beweis des Satzes von Nagel scheint neu zu sein.

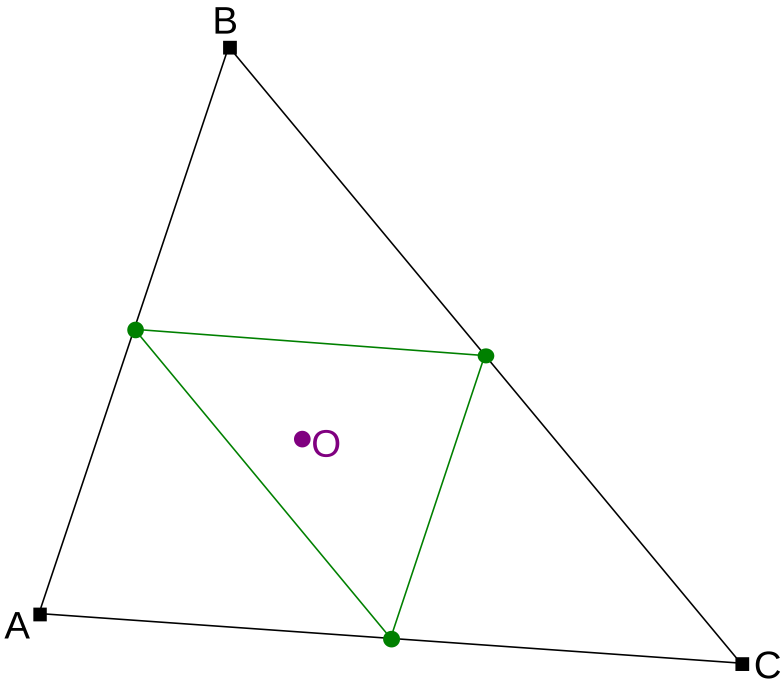

Fig. 4

Literaturhinweise

[1] P. Baptist: *Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie*, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich 1992.

[2] R. Honsberger: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, USA 1995.

[3] E. Donath: *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks*, Berlin 1976.

[4] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*, Stuttgart 1983.