Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 1. Runde, Aufgabe 1

Gegeben seien 6 aufeinander folgende positive ganze Zahlen.

Man beweise, dass es eine Primzahl gibt, die Teiler von genau einer dieser Zahlen ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir führen den Beweis *indirekt*: Sei

$$\mathcal{N} = \{n;\ n+1;\ n+2;\ n+3;\ n+4;\ n+5\}$$

eine Menge von 6 aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen, für die gilt:

$$\text{es gibt keine Primzahl, die Teiler von genau einer dieser Zahlen ist.} \tag{1}$$

Das heißt: Jeder Primteiler einer von den 6 Zahlen ist auch Teiler einer anderen von ihnen.

Wir werden dann versuchen, unter der Annahme (1) einen Widerspruch herzustellen, mit dem wir dann die Annahme (1) widerlegen können werden.

Hilfsatz 1: Die einzigen Primteiler der Zahlen aus $\mathcal{N}$ können die Primzahlen 2, 3 und 5 sein.

Beweis von Hilfssatz 1: Sei $p \geq 7$ eine Primzahl, die Teiler einer Zahl $x \in \mathcal{N}$ ist. Gäbe es noch eine andere Zahl $y \in \mathcal{N}$, die durch p teilbar sein würde, dann würde $y - x = kp$ gelten mit einem ganzen k. Dann wäre $|y-x| = |k|\,p \geq p > 6$, was offensichtlich unmöglich ist für $x, y \in \mathcal{N}$, weil $|x-y| \leq 5$ ist. Also kann es keine solche Zahl y geben; daher ist x die einzige durch p teilbare Zahl in $\mathcal{N}$. Dies widerspricht der Annahme (1).

Ferner gilt:

Hilfssatz 2: Für jedes $x \in \mathcal{N}$ gilt: Ist $x = 6k \pm 1$ mit einem ganzen k, so ist x eine Fünferpotenz.

Beweis von Hilfssatz 2: Die Zahl $x = 6k \pm 1$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar; also darf sie keine weiteren Primteiler außer 5 haben, und ist daher eine Fünferpotenz.

Hilfssatz 3: Die Menge $\mathcal{N}$ enthält zwei Fünferpotenzen.

Beweis von Hilfssatz 3: Sei $R = \left\{n';\ (n+1)';\ ...;\ (n+5)'\right\}$ die Menge der Reste von $\{n;\ n+1;\ ...;\ n+5\}$ bei Division durch 6. Jeder Rest 0, 1, 2, 3, 4, 5 kommt in R offensichtlich genau einmal vor. Die Reste 1 und 5 entsprechen nach dem Hilfssatz 2 den Fünferpotenzen.

Hilfssatz 4: Seien x und y zwei Fünferpotenzen aus $\mathcal{N}$ mit $x < y$. Dann ist $y - x = 4$ und dabei ist $x = 1$ und $y = 5$.

Beweis von Hilfssatz 4: Wir bemerken erst, daß die Differenz zweier ungerader Zahlen stets gerade ist; also kommt nur $y - x = 2$ oder $y - x = 4$ in Frage, da $0 < y - x < 6$ ist.

Seien $x = 5^a$ und $y = 5^b$. Dann ist

$$y - x = 5^b - 5^a = 5^a \left(5^{b-a} - 1\right).$$

Wegen $x < y$ ist $b > a$, also 5^{b-a} eine natürliche Zahl. Da $y - x = 2^c$ ist mit $c = 2$ oder $c = 1$, darf diese Zahl keine ungeraden Teiler haben; also ist $x = 5^a = 1$. Folglich ist $a = 0$, und deswegen $5^{b-a} - 1 = 5^b - 1 = 2^c$. Da aber $5^b \geq 5$ ist, kommt nur noch $c = 2$ in Frage; also ist $b = 1$, und deshalb gilt $y - 1 = 5^b - 1 = 4$. Also ist $x = 1$ und $y = 5$.

Wenn $x = 1$ zu der Menge $\mathcal{N}$ gehört, dann muß $\mathcal{N} = \{1;\ 2;\ ...;\ 6\}$ sein. Diese Menge erfüllt aber die Annahme (1) nicht, da nämlich $p = 5$ **die** Primzahl ist, die Teiler nur einer von diesen 6 Zahlen ist.

Das ergibt einen Widerspruch. Also muß die Annahme (1) falsch gewesen sein. Das bedeutet, daß es stets eine Primzahl gibt, die Teiler von genau einer der 6 Zahlen ist, was zu beweisen war.