Bundeswettbewerb Mathematik 2003, 1. Runde, Aufgabe 4

Man gebe alle positiven ganzen Zahlen an, die sich nicht in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen lassen, wobei a und b positive ganze Zahlen sind.

Lösung von Darij Grinberg:

Satz 1: Alle positiven ganzen Zahlen, die sich nicht in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen lassen, sind um 2 vergrößerte Zweierpotenzen[1] (d. h. Zahlen der Form 2^k+2, wobei $k\in\mathbb{Q}$ und $k>0$) und die Zahl 1.

Zum *Beweis von Satz 1* werden wir zuerst annehmen, daß sich eine Zahl n in der Form $n=\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen läßt, und dann zeigen, daß n weder eine um 2 vergrößerte Zweierpotenz, noch gleich 1 ist. Dann werden wir beweisen, daß jede Zahl n, die weder eine um 2 vergrößerte Zweierpotenz, noch gleich 1 ist, sich in der Form $n=\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen läßt.

Nehmen wir also an, daß sich eine Zahl n in der Form $n=\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen läßt. Wir beweisen zuerst den folgenden Hilfssatz:

Satz 2: Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+1}{b+1}$ sind beide ganze Zahlen.

Beweis: Wir haben

$$n=\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}=\frac{a\left(b+1\right)+b\left(a+1\right)}{b\left(b+1\right)}.$$

Also ist $a\left(b+1\right)+b\left(a+1\right)$ durch $b\left(b+1\right)$ teilbar. Die Zahlen b und $b+1$ sind teilerfremd (denn hätten sie einen gemeinsamen Teiler >1, dann wäre dieser auch Teiler der Zahl $\left(b+1\right)-b=1$, was unmöglich ist). Daher bedeutet dies, daß $a\left(b+1\right)+b\left(a+1\right)$ durch b und durch $b+1$ teilbar ist. Da die Zahlen $a\left(b+1\right)+b\left(a+1\right)$ und $b\left(a+1\right)$ beide durch b teilbar sind, ist auch ihre Differenz $a\left(b+1\right)$ durch b teilbar. Da $b+1$ und b teilerfremd sind, muß deshalb a durch b teilbar sein[2]. Daher ist $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl; dann muß auch $\frac{a+1}{b+1}$ als Differenz zweier ganzen Zahlen n und $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl sein. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Aus Satz 2 folgt sofort, daß die Zahl $n=1$ sich nicht in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen läßt (denn $\frac{a}{b}$ und $\frac{a+1}{b+1}$ sind beide positive ganze Zahlen, also ≥ 1, und ihre Summe muß mindestens 2 sein).

Die Zahl $n=2$ läßt sich in der Form $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$ darstellen (nämlich bei $a=b$).

Im weiteren werden wir nur den Fall $n>2$ betrachten.

Führen wir nun die Größe $\delta=\frac{a}{b}-\frac{a+1}{b+1}$ ein. Wegen Satz 2 ist δ eine ganze Zahl.

Sei $\alpha=\frac{a}{b}$ und $\beta=\frac{a+1}{b+1}$. Dann ist $\delta=\alpha-\beta$ und $n=\alpha+\beta$. Aus $\left(b+1\right)\beta=a+1$ folgt $b\beta+\beta=a+1$; wegen $b\alpha=a$ wird dies zu $b\beta+\beta=b\alpha+1$, also zu $\beta-1=b\alpha-b\beta=b\left(\alpha-\beta\right)=b\delta$, also $\beta=b\delta+1$. Aus $\alpha=\delta+\beta$ folgt $\alpha=\delta+b\delta+1=\left(b+1\right)\delta+1$. Und damit ist

$$\begin{aligned} n &= \alpha+\beta=\left(\left(b+1\right)\delta+1\right)+\left(b\delta+1\right) \\ &= \left(\left(b+1\right)+b\right)\delta+\left(1+1\right)=\left(2b+1\right)\delta+2. \end{aligned}$$

[1]Für uns gilt natürlich 0 nicht als Zweierpotenz, d. h. die Zahl 2 ist darstellbar (siehe unten).

[2]Diese Argumente versagen für $b\neq 1$; in diesem Falle ist aber offensichtlich a durch b teilbar.

Das bedeutet $n - 2 = (2b+1)\,\delta$.

Da $2b+1$ sicher eine ungerade Zahl ist, muß die Zahl $n-2$ also einen ungeraden Teiler haben[3]. Das bedeutet, daß $n-2$ keine Zweierpotenz ist (denn eine Zweierpotenz hat nur gerade Teiler[4]). Also darf die Zahl n keine um 2 vergrößerte Zweierpotenz sein.

Jetzt werden wir "umgekehrt" annehmen, daß n eine positive ganze Zahl ist, aber weder eine um 2 vergrößerte Zweierpotenz, noch gleich 1, und zeigen, daß eine Darstellung in der Form $n = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ existiert.

Zuerst bemerken wir, daß $n \neq 1$ ist; für $n = 2$ ergibt sich die Darstellung $n = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ mit $a = b = 1$. Daher nehmen wir im folgenden an, daß $n > 2$ ist.

Da n keine um 2 vergrößerte Zweierpotenz ist, kann $n-2$ keine Zweierpotenz sein[5]. Also muß die Zahl $n-2$ mindestens einen ungeraden Teiler > 1 haben; diesen bezeichnen wir mit $2b+1$ (man bemerke, daß $b > 0$ ist!). Wir setzen $\delta = (n-2) : (2b+1)$. Ferner definieren wir eine Zahl a durch $a = ((b+1)\,\delta + 1)\,b$ (auch eine positive ganze Zahl). Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} &= \frac{((b+1)\,\delta+1)\,b}{b} + \frac{((b+1)\,\delta+1)\,b+1}{b+1} \\
&= ((b+1)\,\delta+1) + \frac{(b\delta+\delta+1)\,b+1}{b+1} \\
&= (b\delta+\delta+1) + \frac{b^2\delta+b\delta+b+1}{b+1} \\
&= (b\delta+\delta+1) + \frac{(b+1)\,b\delta+(b+1)}{b+1} \\
&= (b\delta+\delta+1) + (b\delta+1) = 2b\delta+\delta+2 \\
&= (2b+1)\,\delta+2 = (n-2)+2 = n.
\end{aligned}$$

Damit ist die gewünschte Darstellung für n gefunden.

[3]Da wir $n > 2$ haben, ist $n-2$ eine positive ganze Zahl.

[4]außer der Zahl 1, die wir hier außer Acht lassen

[5]Wir haben ja $n > 2$, also $n - 2 > 0$.