Freie algebraische Strukturen
Hartmut Laue
`http://www.math.uni-kiel.de/algebra/laue/vorlesungen/frei/freiealgstr.pdf`
Version vom 16. September 2013
Errata und Kommentare von Darij Grinberg

Errata

Die Seitenzahlen, die in den folgenden Errata referenziert werden, entsprechen den auf jeweiligen Seiten des Skriptes gedruckten Seitenzahlen (nicht der Nummerierung in der PDF-Datei).

- **Allgemein:** In diesem Skript werden einige Konventionen verwendet, die etwas unüblich sind. Zum einen werden Funktionen hier rechts von ihren Argumenten geschrieben (d.h., das Bild eines Elementes $a \in A$ unter einer Funktion $f : A \to B$ wird mit af bezeichnet statt mit $f(a)$), und dementsprechend verkettet (d.h., die Verkettung fg bedeutet die Funktion, die jedes a auf $(af)g$ abbildet, also zuerst f und dann g anwendet). In den meisten Büchern wird dies heutzutage genau umgekehrt gemacht.

  Zum anderen wird hier die Kuratowski-Definition von Funktionen als Mengen von Paaren benutzt. (Und zwar: Wenn A und B zwei Mengen sind, dann wird eine Funktion von A nach B definiert als eine Teilmenge S von $A \times B$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in S$. Dieses b heißt das Bild von a unter der Funktion.) Auch dies ist heutzutage ein wenig antiquiert.

  Die Notation "$\{(1, 1f), \ldots, (n, nf)\}$" in der letzten Zeile von Seite 3 ist mit Hinsicht auf diese Konventionen zu deuten.

- **Seite 3:** Ich würde "das letztere Element" durch "das Element x_j" ersetzen; sonst entsteht der falsche Eindruck, es ginge um das letzte Element des Tupels.

- **Seite 4, Beweis von Proposition 1.2:** Im Beweis von (3) sollte "$(x'_n)\varphi$" durch "$(x'_m)\varphi$" ersetzt werden.

- **Seite 5, Definition 1.3:** Ersetze "$X^n \leq N$" durch "$X^n \subseteq N$". (Denn X^n ist ja kein Untermonoid von N.)

- **Seite 5, Beweis von 1.3.2:** Ersetze "von N" durch "von N".

- **Seite 6:** "tiefiegenden" $\to$ "tiefliegenden".

- **Seite 9, Beweis von 1.7.1:** Hier sollte oBdA angenommen werden, daß alle y_i von 1 verschieden sind. (Sonst ist "$l(y_i) \geq 1$" falsch.)

- **Seite 13, Definition 1.11:** Nach "paarweise verschieden sind" füge ein: "und w nichtleer ist".

- **Seite 14, Satz 1.12:** In Aussage (4) fehlt unter dem Summenzeichen ein Komma. (Das heißt, "$d \mid k_1, \ldots k_r$" sollte durch "$d \mid k_1, \ldots, k_r$" ersetzt werden.)

- **Seite 16, Beweis von Satz 1.12:** Am Ende des Beweises von Aussage (2) heißt es: "Damit gilt: $\underline{w'} = w_k \cdots w_d w_1 \cdots w_{k-1} \sim \underline{w}$". Dies sollte durch "Damit gilt: $\underline{w'} = x_k \cdots x_d x_1 \cdots x_{k-1} \sim \underline{w}$" ersetzt werden.

- **Seite 16, Beweis von Satz 1.12:** Am Anfang des Beweises von Aussage (3) ersezte "und bildet nach (1)" durch "und bildet nach (1) und (2)".

- **Seite 16, Beweis von Satz 1.12:** "deren Länge" $\rightarrow$ "dessen Länge".

- **Seite 16, Beweis von Satz 1.12:** Der Beweis von $|X|^n = \sum\limits_{d|n} \sum\limits_{K_d} |K_d|$, der hier gegeben wird, ist unnötig kompliziert. Stattdessen würde ich anders argumentieren (ohne Konjugiertenklassen von Wörtern in X^n zu betrachten):

  Die Abbildung π ist injektiv und surjektiv, wenn man ihre Zielmenge auf die Menge aller primitiven Worte mit Länge $\mid n$ einschränkt. Folglich ist

$$\begin{aligned} |X^n| &= (\text{Anzahl aller primitiven Worte mit Länge } \mid n) \\ &= \sum_{d|n} (\text{Anzahl aller primitiven Worte mit Länge } d) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{K_d} |K_d| \,. \end{aligned}$$

- **Seite 16, Beweis von Satz 1.12:** Nach "enthalten" würde ich einfügen: "(und sonst keine anderen Buchstaben)".

- **Seite 20, Beweis von Lemma 1.17:** "einen echten Rechtsfaktor t von sv" $\rightarrow$ "einen echten Rechtsfaktor $t \neq$ ß von sv".

- **Seite 21, Beweis von Proposition 1.18:** "einen echten Rechtsfaktor s von u" $\rightarrow$ "einen echten Rechtsfaktor $s \neq \imath$ von u".

- **Seite 21, Beweis von Proposition 1.19:** "gehörige Rechtsfaktor" $\rightarrow$ "gehörige echte Rechtsfaktor".

- **Seite 39, Beweis von 2.7.6:** In "$m = r_1 x_1 + \cdots r_k x_k$" fehlt ein Pluszeichen vor "r_k".

- **Seite 40, Proposition 2.8:** Die Definition von J^k in der Fussnote ist nicht ganz richtig. Für $k = 0$ führt sie nämlich zu $J^0 = \mathbb{Z} \cdot 1_R$, während die Behauptung von Proposition 2.8 Aussage (1) (und auch die späteren Anwendungen der Notation in Kapitel 4) jedoch $J^0 = R$ benötigen würde.

  Ich schlage also vor, die Fussnote durch folgende Definition zu ersetzen: "J^k ist definiert als $\langle J(k) \rangle_{R_{\mathfrak{M}}}$ und ist offensichtlich ein Linksideal von R. Für $k > 0$ stimmt J^k ferner überein mit dem additiven Abschluss von $J(k)$.".

- **Seite 44, kurz vor Korollar 2.13:** "statt $rk_Z(M)$" $\to$ "statt $rk_{\mathbb{Z}}(M)$".

- **Seite 45, Beweis von Satz 2.14:** Im Ausdruck

  $$\min \{n \mid n \in \mathbb{N}, \text{es gibt eine } \mathfrak{M}\text{-Basis } X \text{ von } A \text{ und } x, x_1, \ldots, x_k \in X, \\ l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{Z} \text{ mit } nx + l_1x_1 + \cdots + l_kx_k \in B\}$$

  sollten die Elemente $x, x_1, \ldots, x_k$ als verschieden vorausgesetzt werden (oder zumindest $x_i \neq x$).

- **Seite 45, Beweis von Satz 2.14:** "eine $\mathfrak{M}$-Basis X von A" $\to$ "eine $\mathfrak{M}$-Basis X von A".

- **Seite 48, 2.15.2:** Die "$\Longrightarrow$"-Richtung von diesem "$\Longleftrightarrow$"-Zeichen gilt nur, wenn $K \neq 0$ ist.

- **Seite 49, Beweis zu 2.16:** "${}^K\mathfrak{A}_1$-Homomorphismus von $KX^{(+)}$ in M" $\to$ "${}^K\mathfrak{A}_1$-Homomorphismus von $KX^{(*)}$ in M".

- **Seite 50:** Das Wort "konstanten" (in "der konstanten Abbildungen von X^* in K") ist zweideutig. Gemeint sind hier wohl die Abbildungen, die den konstanten Potenzreihen entsprechen (also die alle nichtleeren Wörter auf 0 senden). Als Abbildungen gesehen sind sie natürlich alles andere als konstant.

- **Seite 50:** Muss die Abbildung wirklich ι genannt werden? Der Unterschied zwischen den Symbolen ι (für diese Abbildung) und $\imath$ (für das leere Wort) ist wirklich schwer zu erkennen...

- **Seite 50:** "(die o.B.d.A. das Element ι nicht enthält)" $\to$ "(die o.B.d.A. das Element $\imath$ nicht enthält)".

- **Seite 50:** In "wobei der wegen $\iota \notin K\langle\langle X \rangle\rangle$ in $K\langle\langle X \rangle\rangle$ undefinierte Term $r_\iota \iota$ zu r_ι definiert wird" sollten die "ι"s wohl allesamt "$\imath$"s sein.

- **Seite 51, Beweis von 2.17.3:** Ersetze "$(1_K + w) \sum_{j=0}^{n-1} (-w)^j + (1_K + w) \sum_{j \geq n} (-w)^j$" durch "$(1_K + w) \sum_{j=0}^{n} (-w)^j + (1_K + w) \sum_{j > n} (-w)^j$".

- **Seite 52, Beweis von 2.17.4:** Das Pluszeichen in "$1_K - nw + nw^2$" sollte wohl ein Minus sein.

- **Seite 54, Beweis von Satz 2.19:** Im Beweis von Aussage (4) verstehe ich nicht, wie auf "Daher gibt es erst recht keine nichttriviale Y-Darstellung von 1_F" geschlossen wird. Woraus folgt dies genau? Eine nichttriviale Y-Darstellung von 1_F könnte sich ja auf eine triviale $\overline{Y}$-Darstellung von $1_{F/F'}$ herunterprojizieren.

- **Seite 57, Definition 3.3:** "von von" $\to$ "von".

- **Seite 78, Proposition 4.2:** Haarspalterei, aber: Ideale von nichtassoziativen Algebren wurden noch gar nicht definiert (und ihre Abgeschlossenheit unter Durchschnittsbildungen auch nicht gezeigt).

- **Seite 82, Beweis von Proposition 4.6:** Ich würde "$\overline{r^{(i)}} \circ \overline{s^{(j)}} \in \left\langle \overline{H} \right\rangle_K$" durch "$\overline{r^{(i)}} \circ \overline{s^{(j)}} \in \left\langle \overline{H_{(w\mu)}} \right\rangle_K$" ersetzen.

- **Seite 83, Beweis von Proposition 4.7:** Im Beweis von Aussage (2) ersetze "$L + L^{\dot{2}} \cdots + L^{n \dot{-} 1}$" durch "$L + L^{\dot{2}} + \cdots + L^{n \dot{-} 1}$".

- **Seite 85, Diagramm am Anfang der Seite:** Ersetze "$\mathfrak{L}^X$" durch "$\mathcal{L}^X$".

- **Seite 85, 4.8.2:** $\mathcal{L}_\nu^X$ wurde noch nicht definiert. (Vermutlich sollte es als $\mathcal{L}^X \cap X^\nu$ definiert werden.)

- **Seite 86, Hauptsatz 4.10:** In Aussage (1) sollte nach "Die Abbildung [.]" hinzugefügt werden: "(durch Linearität erweitert auf KX^*)".

- **Seite 87, Beweis von Hauptsatz 4.10:** Ich würde "$\langle [\mathcal{L}^X] \rangle_{K\mathfrak{A}} = KX^*$" durch "$\langle [\mathcal{L}^X] \rangle_{K\mathfrak{R}} = KX^*$" ersetzen, damit die Liealgebrastruktur auf KX^* nicht irrtümlicherweise für die hier gemeinte ${}^K\mathfrak{A}$-Struktur gehalten wird.

- **Seite 88:** "Epimomorphismus" $\to$ "Epimorphismus".