

Mathesis, 1931, pp.384-386

Note 37. *Sur une propriété du quadrilatère.*

J. Neuberg a démontré comme conséquence d'un problème plus général, que les quatre points qui divisent extérieurement les cotés d'un quadrangle dans les rapports des carrés des cotés adjacents sont concycliques (Neuberg, *Un problème sur les quadrilatères articulés*, BB.1921-583)

Nous retrouvons cette propriété dans l'énoncé de la question, non encore résolue, proposée, sans nom de l'auteur, en 1897, dans le *Journal des Mathématiques Élémentaires* de Vuibert.

Il serait intéressant d'en établir une démonstration directe.

(V.Thébault)

Réponse de Adolphe Mineur:

La diagonale AC partage le quadrilatère ABCD en deux triangles auxquels nous associons les sens de circulation ABC, ADC dans la détermination des signes à donner aux longueurs des segments situés sur les cotés et sur la diagonale AC du quadrilatère.

Ayant posé

$$a = AB, b = BC, d = AD, c = DC, m = CA,$$

il s'agit de démontrer que les quatre points E;F;G;H définies par les relations

$$\frac{AE}{d^2} = \frac{EB}{-b^2} = \frac{a}{d^2 - b^2}, \quad \frac{BE}{a^2} = \frac{EC}{-c^2} = \frac{b}{a^2 - c^2} \quad (1)$$

y

$$\frac{AG}{a^2} = \frac{GD}{-c^2} = \frac{d}{a^2 - c^2}; \quad \frac{DH}{d^2} = \frac{HC}{-b^2} = \frac{c}{d^2 - b^2} \quad (2)$$

sont concycliques.

Trois cas sont à distinguer:

$$(a = c, b = d), \quad (a = c, b \neq d); \quad (a \neq c, b \neq d).$$

Dans le premier cas, les points E,F,G,H sont à l'infini et la circonference répondant à la question est la circonference dégénérée formée de deux fois la droite de l'infini.

Dans le second cas, les points F,G sont à l'infini et les points E,H sont à distance finie, les quatre points sont sur la circonférence dégénérée composée de la droite de l'infini et d'une droite à distance finie passant par les points E,H et pouvant être indéterminée.

Dans le troisième cas, il résulte du théorème de Menelaus appliqué aux triangles ABC,ADC, en tenant compte des relations (1) et (2), que les droites EF,GH coupent la droite AC en un même point K tel que

$$\frac{CK}{b^2 c^2} = \frac{KA}{-a^2 d^2} = \frac{m}{b^2 c^2 - a^2 d^2} \quad (3).$$

Or on peut supposer

$$ad \neq bc \quad (4);$$

car si on avait, à la fois,

$$ad = bc \quad \text{et} \quad ab = cd,$$

on aurait aussi

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d.$$

Mais les relations (3) et (4) expriment que le point K est à distance finie et la question revient, ainsi, à démontrer que l'on a, en grandeur et en signe,

$$KE \cdot KF = KG \cdot KH \quad (5).$$

À cet effet, soit L le point où la parallèle menée par le point B à la droite EF rencontre la droite AC. Plaçant des axes équipollents sur les droites EF, AL, on a, en grandeur et en signe, en vertu des relations (1)

$$\frac{KE}{LB} = \frac{AE}{AB} = \frac{d^2}{d^2 - b^2}; \quad \frac{KF}{LB} = \frac{FC}{BC} = \frac{c^2}{c^2 - a^2};$$

d'où

$$KE \cdot KF = \frac{c^2 d^2 \cdot LB^2}{(d^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \quad (6).$$

D'autre part, le théorème de Stewart appliqué au triangle ABC fournit la relation

$$LB^2 \cdot CA + CB^2 \cdot AL + CA \cdot AL \cdot LC = 0,$$

tandis que les proportions

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AK}{AE}, \quad \frac{LC}{BC} = \frac{KC}{FC},$$

combinées avec les formules (1) et (3), donnent

$$AL = \frac{ma^2 (d^2 - b^2)}{a^2 d^2 - b^2 c^2} \quad \text{et} \quad LC = \frac{mb^2 (c^2 - a^2)}{a^2 d^2 - b^2 c^2}.$$

On peut donc calculer LB^2 et on trouve ainsie que la valeur (6) de $KE \cdot KF$ devient

$$\frac{a^2 b^2 c^2 d^2 (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{(a^2 d^2 - b^2 c^2)(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)} = \frac{a^2 b^2 c^2 d^2 m^2}{(a^2 d^2 - b^2 c^2)^2},$$

et la propriété à démontrer résulte de ce que cette valeur n'est pas altérée quand on permute a avec d et b avec c . ■