Aufgabe: Umkreismittelpunkte und Kreise ~ Darij Grinberg

Sei ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt. Seien A', B' und C' die Umkreismittelpunkte der Dreiecke PBC, PCA bzw. PAB. Man beweise:

a) Die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 1.)

b) Die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 2.)

Bemerkung: Die Abkürzung "Kreis $P_1P_2P_3$" bedeutet den Kreis durch drei Punkte P_1, P_2 und P_3.

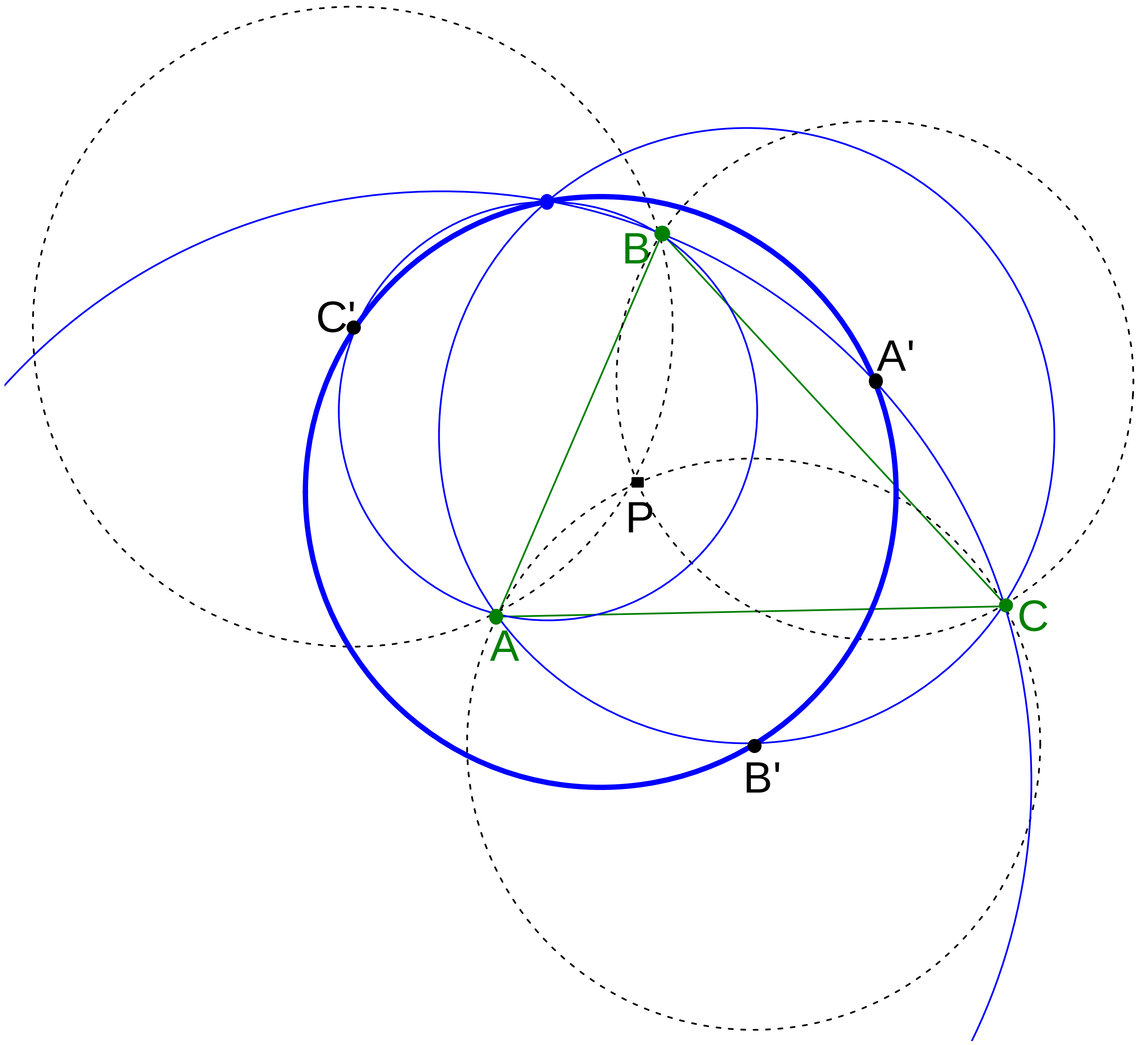

Fig. 1

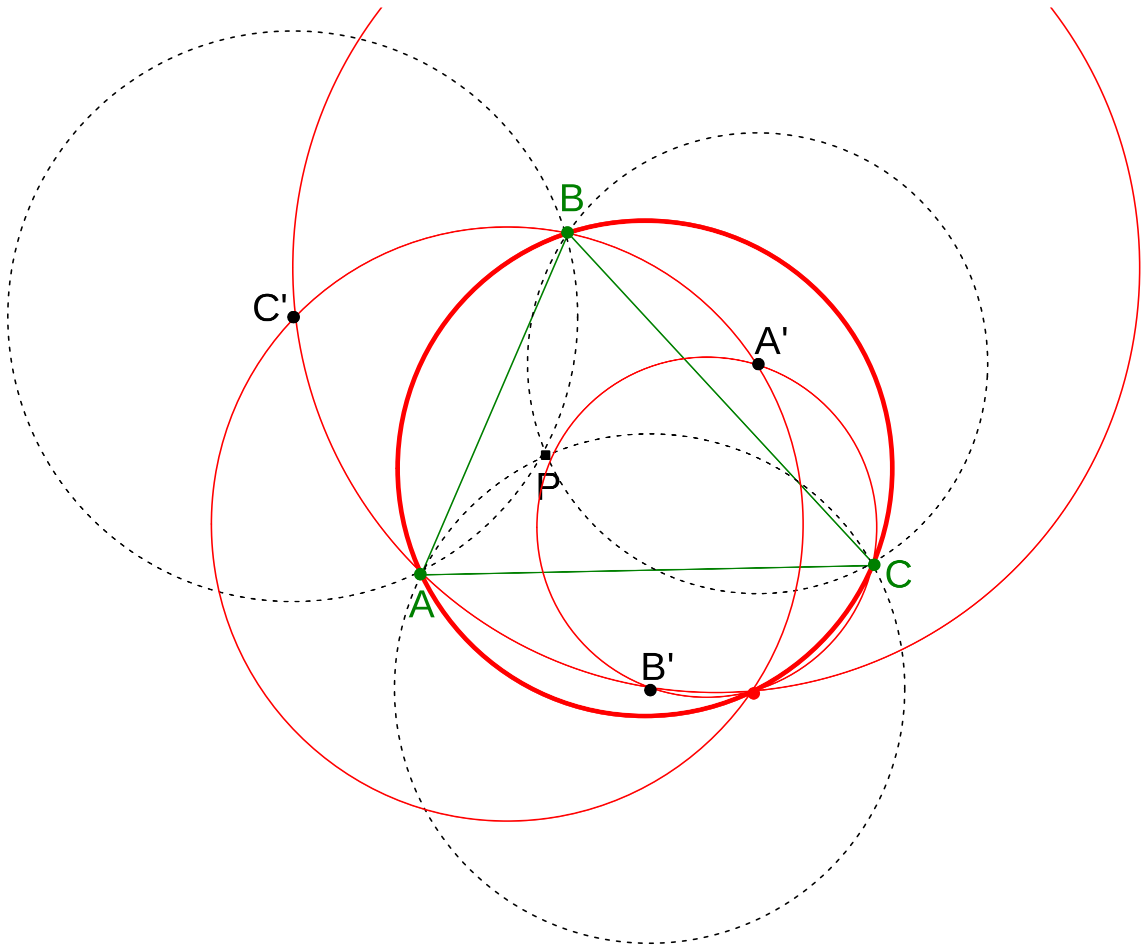

Fig. 2

Lösung:

a) Siehe Fig. 3. Sei Q der von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $A'BC$ und $A'B'C'$. (Falls sich diese beiden Kreise berühren, setze man $Q = A'$.) Nach dem Umfangswinkelsatz gilt dann $\measuredangle CQA' = \measuredangle CBA'$ und $\measuredangle B'QA' = \measuredangle B'C'A'$.

Damit ist $\measuredangle B'QC = \measuredangle B'QA' - \measuredangle CQA' = \measuredangle B'C'A' - \measuredangle CBA'$.

Da der Punkt B' der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PCA ist, liegt er auf der Mittelsenkrechten der Strecke AP. Analog liegt C' auf dieser Mittelsenkrechten. Folglich ist $B'C'$ die Mittelsenkrechte der Strecke AP. Das heißt: Der Mittelpunkt A'' der Strecke AP liegt auf $B'C'$, und $AP \perp B'C'$. Analog liegt der Mittelpunkt B'' der Strecke BP auf $C'A'$, und $BP \perp C'A'$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle B'C'A' &= \measuredangle A''C''B'' = 360^\circ - \measuredangle C'B''P - \measuredangle C'A''P - \measuredangle A''PB'' \\
&= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \measuredangle A''PB'' = 180^\circ - \measuredangle A''PB'' = 180^\circ - \measuredangle APB.
\end{aligned}$$

Das Dreieck $BA'C$ ist gleichschenklig ($BA' = CA'$, denn A' ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PBC); folglich ist

$$\measuredangle CBA' = \frac{180^\circ - \measuredangle BA'C}{2}.$$

Der Winkel $\measuredangle BA'C$ ist der Mittelpunktswinkel der Sehne BC in dem Umkreis des Dreiecks PBC. Bekanntlich ist der Mittelpunktswinkel einer Sehne stets doppelt so groß wie der spitze Umfangswinkel über dieser Sehne. Der spitze Umfangswinkel über der Sehne BC ist $180° - \measuredangle BPC$; also ist $\measuredangle BA'C = 2 \cdot (180° - \measuredangle BPC) = 360° - 2 \cdot \measuredangle BPC$, und daraus folgt

$$\measuredangle CBA' = \frac{180° - (360° - 2 \cdot \measuredangle BPC)}{2} = \frac{-180° + 2 \cdot \measuredangle BPC}{2} = -90° + \measuredangle BPC.$$

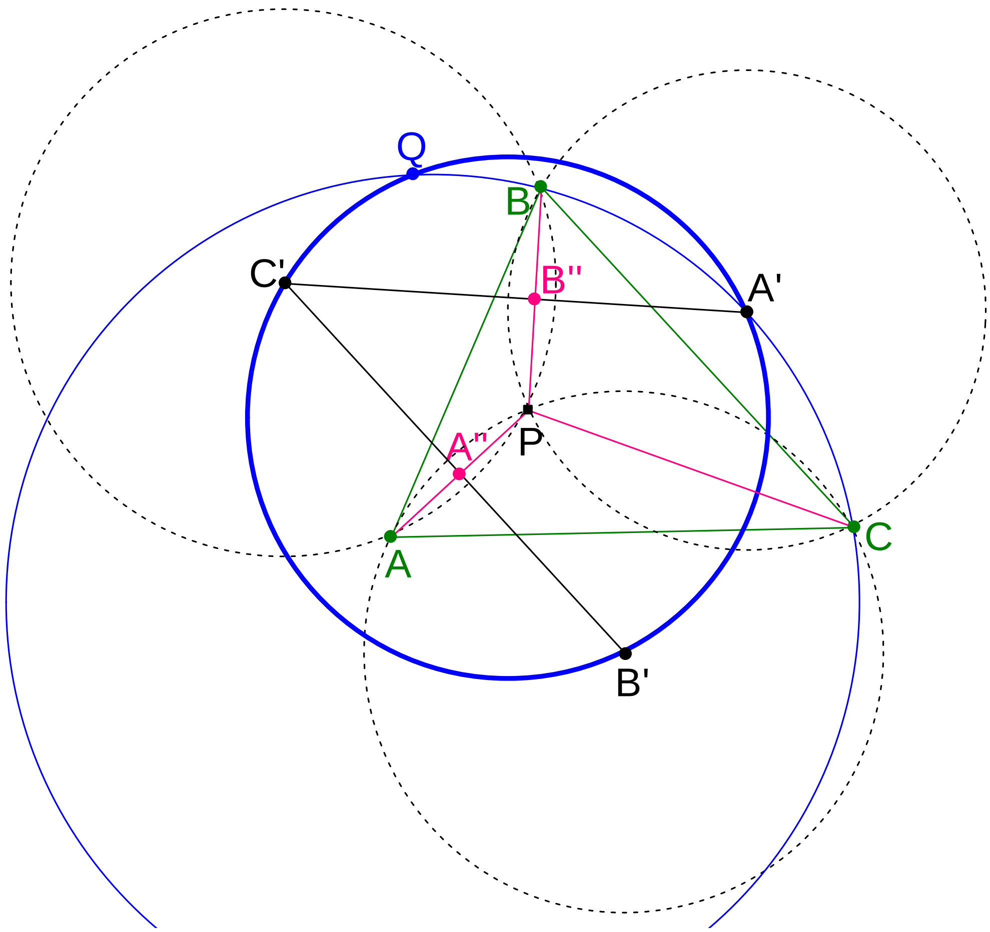

Fig. 3

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\measuredangle B'QC &= \measuredangle B'C'A' - \measuredangle CBA' = (180° - \measuredangle APB) - (-90° + \measuredangle BPC) \\
&= 180° - \measuredangle APB + 90° - \measuredangle BPC = 270° - (\measuredangle APB + \measuredangle BPC) \\
&= 270° - (360° - \measuredangle CPA) = -90° + \measuredangle CPA.
\end{aligned}$$

Das Dreieck $CB'A$ ist gleichschenklig ($CB' = AB'$, denn B' ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PCA); folglich ist

$$\measuredangle B'AC = \frac{180° - \measuredangle CB'A}{2}.$$

Der Winkel $\measuredangle CB'A$ ist der Mittelpunktswinkel der Sehne CA in dem Umkreis des Dreiecks PCA. Bekanntlich ist der Mittelpunktswinkel einer Sehne stets doppelt so groß wie der spitze Umfangswinkel über dieser Sehne. Der spitze Umfangswinkel über der Sehne CA ist $180° - \measuredangle CPA$; also ist $\measuredangle CB'A = 2 \cdot (180° - \measuredangle CPA) = 360° - 2 \cdot \measuredangle CPA$, und daraus folgt

$$\measuredangle B'AC = \frac{180° - (360° - 2 \cdot \measuredangle CPA)}{2} = \frac{-180° + 2 \cdot \measuredangle CPA}{2} = -90° + \measuredangle CPA.$$

Damit ist $\measuredangle B'AC = \measuredangle B'QC$. Also liegt der Punkt Q auf dem Kreis $B'CA$. Analog beweist man (nur mit kleinen Vorzeichenänderungen bei Winkeln), daß der Punkt Q auf dem Kreis $C'AB$ liegt. Also liegt der Punkt Q auf den vier Kreisen $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$. Damit ist Teil **a)** bewiesen.

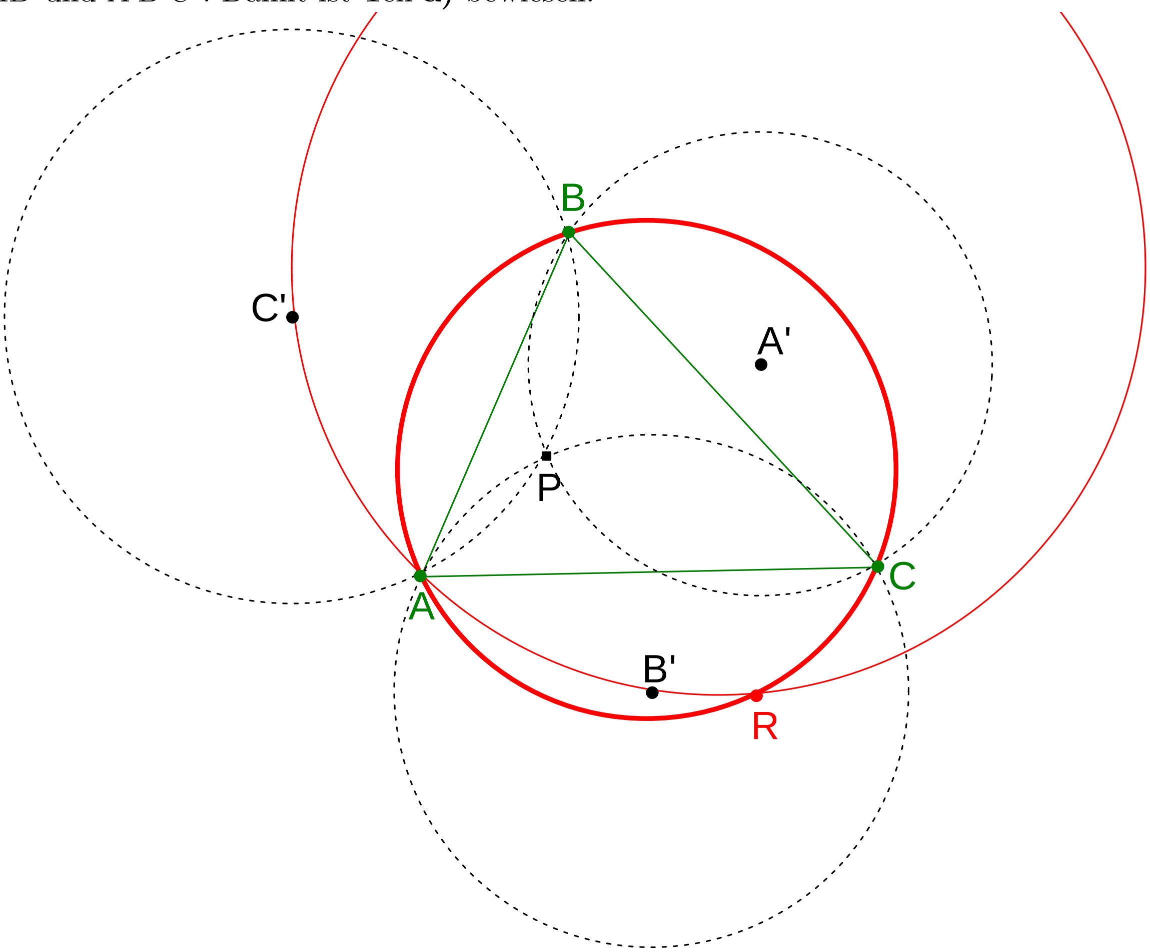

Fig. 4

b) Siehe Fig. 4. Sei R der von A verschiedene Schnittpunkt der Kreise $AB'C'$ und ABC. (Falls sich diese beiden Kreise berühren, setze man $R = A$.) Nach dem Umfangswinkelsatz gilt dann $\measuredangle C'RA = \measuredangle C'B'A$ und $\measuredangle BRA = \measuredangle BCA$.

Damit ist $\measuredangle BRC' = \measuredangle BRA - \measuredangle C'RA = \measuredangle BCA - \measuredangle C'B'A$.

Wir haben im Beweis zu Teil **a)** festgestellt, daß die Gerade $B'C'$ die Mittelsenkrechte der Strecke AP ist. Also ist $\measuredangle C'B'A = \measuredangle PB'C'$; daher ist $\measuredangle AB'P = \measuredangle C'B'A + \measuredangle PB'C' = 2 \cdot \measuredangle C'B'A$. Doch der Winkel $\measuredangle AB'P$ ist der Mittelpunktswinkel der Sehne AP in dem Umkreis des Dreiecks PCA. Bekanntlich ist der Mittelpunktswinkel einer Sehne stets doppelt so groß wie der spitze Umfangswinkel über dieser Sehne. Wir haben also $\measuredangle AB'P = 2 \cdot \measuredangle PCA$. Damit ist $2 \cdot \measuredangle C'B'A = 2 \cdot \measuredangle PCA$, und $\measuredangle C'B'A = \measuredangle PCA$.

Analog ist $\measuredangle C'A'B = \measuredangle PCB$.

Wegen $\measuredangle C'B'A = \measuredangle PCA$ ist $\measuredangle BRC' = \measuredangle BCA - \measuredangle PCA = \measuredangle PCB = \measuredangle C'A'B$, also $\measuredangle BRC' = \measuredangle BA'C'$. Also liegt der Punkt R auf dem Kreis $BC'A'$. Analog beweist man, daß der Punkt R auf dem Kreis $CA'B'$ liegt. Folglich liegt R auf den Kreisen $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC. Damit ist Teil **b)** bewiesen.

—— Einen anderen Beweis sowie für **a)** als auch für **b)** findet man in [1].

Literaturhinweise

[1] Darij Grinberg: *Konkurrente Kreise durch drei von sechs Punkten.*