Über Parallelen zu Dreiecksseiten ~ Darij Grinberg

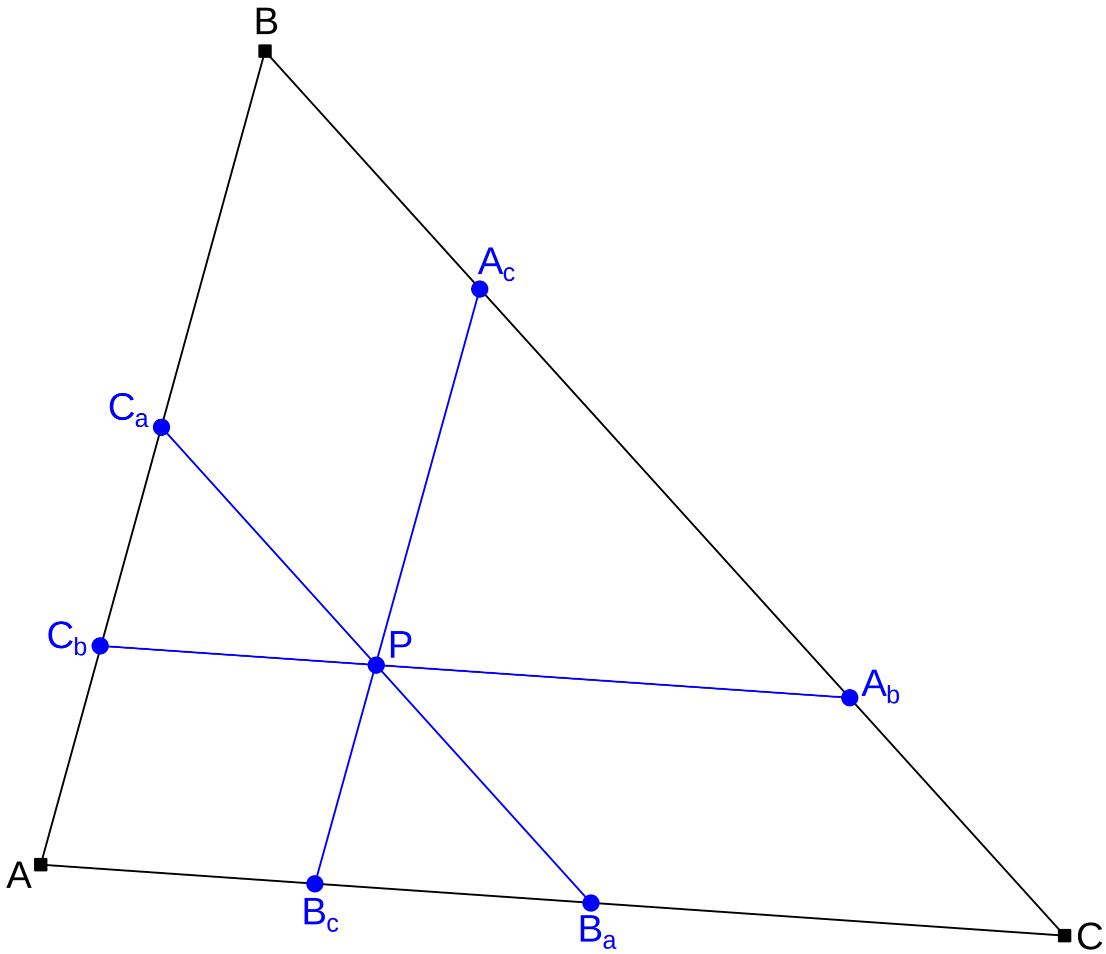

Fig. 1

Wir werden zuerst zeigen (Fig. 1):

Satz 1: Sei P ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC.

Die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt P schneide die Geraden CA und AB in den Punkten B_a bzw. C_a.

Die Parallele zu der Geraden CA durch den Punkt P schneide die Geraden AB und BC in den Punkten C_b bzw. A_b.

Die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt P schneide die Geraden BC und CA in den Punkten A_c bzw. B_c.

Wir verwenden im folgenden orientierte Strecken, wobei die Geraden BC, CA und AB beliebig orientiert werden, und die Geraden B_aC_a, C_bA_b und A_cB_c jeweils so orientiert werden wir die zu ihnen parallelen Geraden BC, CA bzw. AB. Dann gilt

$$\frac{BA_c}{BC} + \frac{CB_a}{CA} + \frac{AC_b}{AB} = 1; \tag{1}$$

$$\frac{A_cA_b}{BC} + \frac{B_aB_c}{CA} + \frac{C_bC_a}{AB} = 1; \tag{2}$$

$$\frac{A_bC}{BC} + \frac{B_cA}{CA} + \frac{C_aB}{AB} = 1; \tag{3}$$

$$\frac{C_aB_a}{BC} + \frac{A_bC_b}{CA} + \frac{B_cA_c}{AB} = 2. \tag{4}$$

Beweis: Wegen $A_cB_c \parallel AB$ gilt nach dem Strahlensatz $\frac{A_bP}{A_bC_b} = \frac{A_bA_c}{A_bB}$. Mit anderen Worten: $\frac{A_bP}{A_bC_b} = \frac{A_cA_b}{BA_b}$. Wegen $A_bP \parallel CB_a$ und $PB_a \parallel A_bC$ ist das Viereck A_bPB_aC ein Parallelogramm, und folglich ist $A_bP = CB_a$. Aus $\frac{A_bP}{A_bC_b} = \frac{A_cA_b}{BA_b}$ wird damit

$$\frac{CB_a}{A_bC_b} = \frac{A_cA_b}{BA_b}. \tag{5}$$

Wegen $C_bA_b \parallel CA$ gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{A_bC_b}{CA} = \frac{BA_b}{BC}. \tag{6}$$

Damit ist

$$\frac{CB_a}{A_bC_b} \cdot \frac{A_bC_b}{CA} = \frac{A_cA_b}{BA_b} \cdot \frac{BA_b}{BC},$$

also

$$\frac{CB_a}{CA} = \frac{A_cA_b}{BC}. \tag{7}$$

Ferner gilt wegen $C_bA_b \parallel CA$ nach dem Strahlensatz $\frac{AC_b}{AB} = \frac{CA_b}{CB}$, also

$$\frac{AC_b}{AB} = \frac{A_bC}{BC}. \tag{8}$$

Damit ist

$$\frac{BA_c}{BC} + \frac{CB_a}{CA} + \frac{AC_b}{AB} = \frac{BA_c}{BC} + \frac{A_cA_b}{BC} + \frac{A_bC}{BC} = \frac{BA_c + A_cA_b + A_bC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

Somit ist die Formel (1) bewiesen.

Nach (7) gilt $\frac{A_cA_b}{BC} = \frac{CB_a}{CA}$. Analog ist $\frac{B_aB_c}{CA} = \frac{AC_b}{AB}$ und $\frac{C_bC_a}{AB} = \frac{BA_c}{BC}$. Somit wird

$$\begin{aligned} \frac{A_cA_b}{BC} + \frac{B_aB_c}{CA} + \frac{C_bC_a}{AB} &= \frac{CB_a}{CA} + \frac{AC_b}{AB} + \frac{BA_c}{BC} \\ &= \frac{BA_c}{BC} + \frac{CB_a}{CA} + \frac{AC_b}{AB} = 1 \end{aligned}$$

nach (1). Damit ist die Formel (2) bewiesen.

Nach (8) ist $\frac{A_bC}{BC} = \frac{AC_b}{AB}$. Analog haben wir $\frac{B_cA}{CA} = \frac{BA_c}{BC}$ und $\frac{C_aB}{AB} = \frac{CB_a}{CA}$. Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{A_bC}{BC} + \frac{B_cA}{CA} + \frac{C_aB}{AB} &= \frac{AC_b}{AB} + \frac{BA_c}{BC} + \frac{CB_a}{CA} \\ &= \frac{BA_c}{BC} + \frac{CB_a}{CA} + \frac{AC_b}{AB} = 1 \end{aligned}$$

nach (1). Damit ist auch die Formel (3) bewiesen.

Schließlich können wir mit Verwendung von (6) rechnen:

$$\frac{A_bC_b}{CA} = \frac{BA_b}{BC} = \frac{BC - A_bC}{BC} = 1 - \frac{A_bC}{BC}.$$

Analog ist $\frac{B_cA_c}{AB} = 1 - \frac{B_cA}{CA}$ und $\frac{C_aB_a}{BC} = 1 - \frac{C_aB}{AB}$. Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{C_aB_a}{BC} + \frac{A_bC_b}{CA} + \frac{B_cA_c}{AB} &= \left(1 - \frac{C_aB}{AB}\right) + \left(1 - \frac{A_bC}{BC}\right) + \left(1 - \frac{B_cA}{CA}\right) \\
&= 3 - \left(\frac{A_bC}{BC} + \frac{B_cA}{CA} + \frac{C_aB}{AB}\right) \\
&= 3 - 1 \qquad \left(\text{denn } \frac{A_bC}{BC} + \frac{B_cA}{CA} + \frac{C_aB}{AB} = 1 \text{ nach (3)}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel (4) bewiesen. Der Beweis von Satz 1 ist somit komplett.

Übrigens sind die Formeln (1), (2) und (3) Bestandteile von Satz 3.4.9 aus [1].

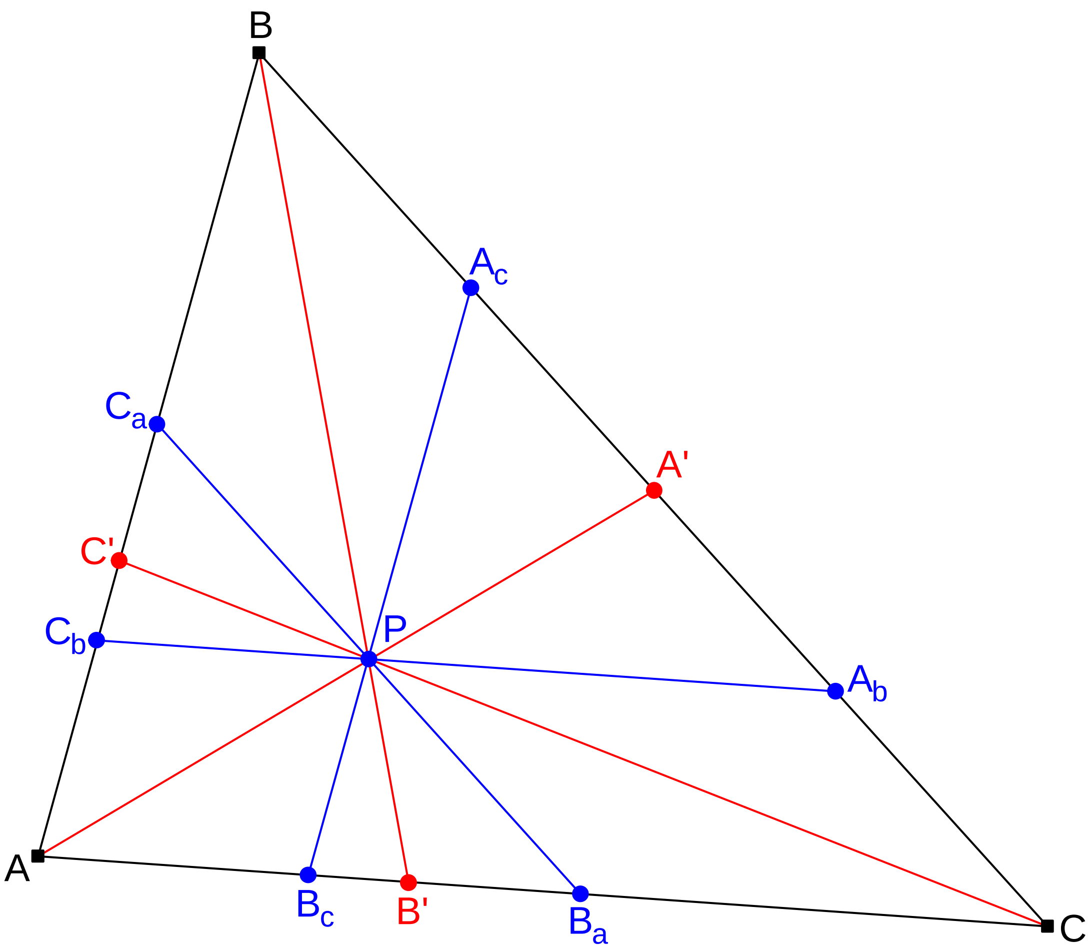

Fig. 2

(Siehe Fig. 2.) Seien nun A', B' und C' die Schnittpunkte der Geraden AP, BP bzw. CP mit den Geraden BC, CA bzw. AB. Wegen $B_aC_a \parallel BC$ gilt nach dem Strahlensatz $\frac{PA'}{AA'} = \frac{C_aB}{AB}$, und analog ist $\frac{PB'}{BB'} = \frac{A_bC}{BC}$ und $\frac{PC'}{CC'} = \frac{B_cA}{CA}$. Damit ist

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = \frac{C_aB}{AB} + \frac{A_bC}{BC} + \frac{B_cA}{CA} = \frac{A_bC}{BC} + \frac{B_cA}{CA} + \frac{C_aB}{AB} = 1$$

nach (3). Aus dieser Formel folgt

$$\begin{aligned}\frac{AP}{AA'}+\frac{BP}{BB'}+\frac{CP}{CC'} &= \frac{AA'-PA'}{AA'}+\frac{BB'-PB'}{BB'}+\frac{CC'-PC'}{CC'}\\ &= \left(1-\frac{PA'}{AA'}\right)+\left(1-\frac{PB'}{BB'}\right)+\left(1-\frac{PC'}{CC'}\right)\\ &= 3-\left(\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}\right)=3-1=2.\end{aligned}$$

Wegen $B_aC_a \parallel BC$ gilt nach dem Strahlensatz $\frac{C_aP}{BC}=\frac{C'P}{C'C}$ und $\frac{BC}{PB_a}=\frac{B'B}{B'P}$, und nach dem 3. Strahlensatz $\frac{BA'}{A'C}=\frac{C_aP}{PB_a}$. Damit ist

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{C_aP}{PB_a}=\frac{C_aP}{BC}\cdot\frac{BC}{PB_a}=\frac{C'P}{C'C}\cdot\frac{B'B}{B'P}=\frac{C'P\cdot B'B}{C'C\cdot B'P}.$$

Analog ist $\frac{CB'}{B'A}=\frac{A'P\cdot C'C}{A'A\cdot C'P}$ und $\frac{AC'}{C'B}=\frac{B'P\cdot A'A}{B'B\cdot A'P}$. Damit ist

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{C'P\cdot B'B}{C'C\cdot B'P}\cdot\frac{A'P\cdot C'C}{A'A\cdot C'P}\cdot\frac{B'P\cdot A'A}{B'B\cdot A'P}=1.$$

Schließlich gilt wegen $B_aC_a \parallel BC$ nach dem Strahlensatz $\frac{AP}{PA'}=\frac{AB_a}{B_aC}$. Wir haben also

$$\frac{AP}{PA'}=\frac{AB_a}{B_aC}=\frac{AB_c+B_cB_a}{B_aC}=\frac{AB_c}{B_aC}+\frac{B_cB_a}{B_aC}. \tag{9}$$

Doch wie wir wissen, ist das Viereck A_bPB_aC ein Parallelogramm; somit ist $B_aC = PA_b$. Analog ist das Viereck B_cPC_bA ein Parallelogramm, und somit ist $AB_c = C_bP$. Damit ist

$$\frac{AB_c}{B_aC}=\frac{C_bP}{PA_b}.$$

Wegen $C_bA_b \parallel CA$ gilt nach dem 3. Strahlensatz $\frac{C_bP}{PA_b}=\frac{AB'}{B'C}$; also ist

$$\frac{AB_c}{B_aC}=\frac{AB'}{B'C}.$$

Wegen $B_aC_a \parallel BC$ ist nach dem Strahlensatz $\frac{B_cB_a}{B_aC}=\frac{B_cP}{PA_c}$. Wegen $A_cB_c \parallel AB$ ist nach dem 3. Strahlensatz $\frac{B_cP}{PA_c}=\frac{AC'}{C'B}$. Also ist

$$\frac{B_cB_a}{B_aC}=\frac{AC'}{C'B}.$$

Damit wird die Gleichung (9) zu

$$\frac{AP}{PA'}=\frac{AB_c}{B_aC}+\frac{B_cB_a}{B_aC}=\frac{AB'}{B'C}+\frac{AC'}{C'B}.$$

Analog gilt

$$\frac{BP}{PB'} = \frac{BC'}{C'A} + \frac{BA'}{A'C} \qquad \text{und} \qquad \frac{CP}{PC'} = \frac{CA'}{A'B} + \frac{CB'}{B'A}.$$

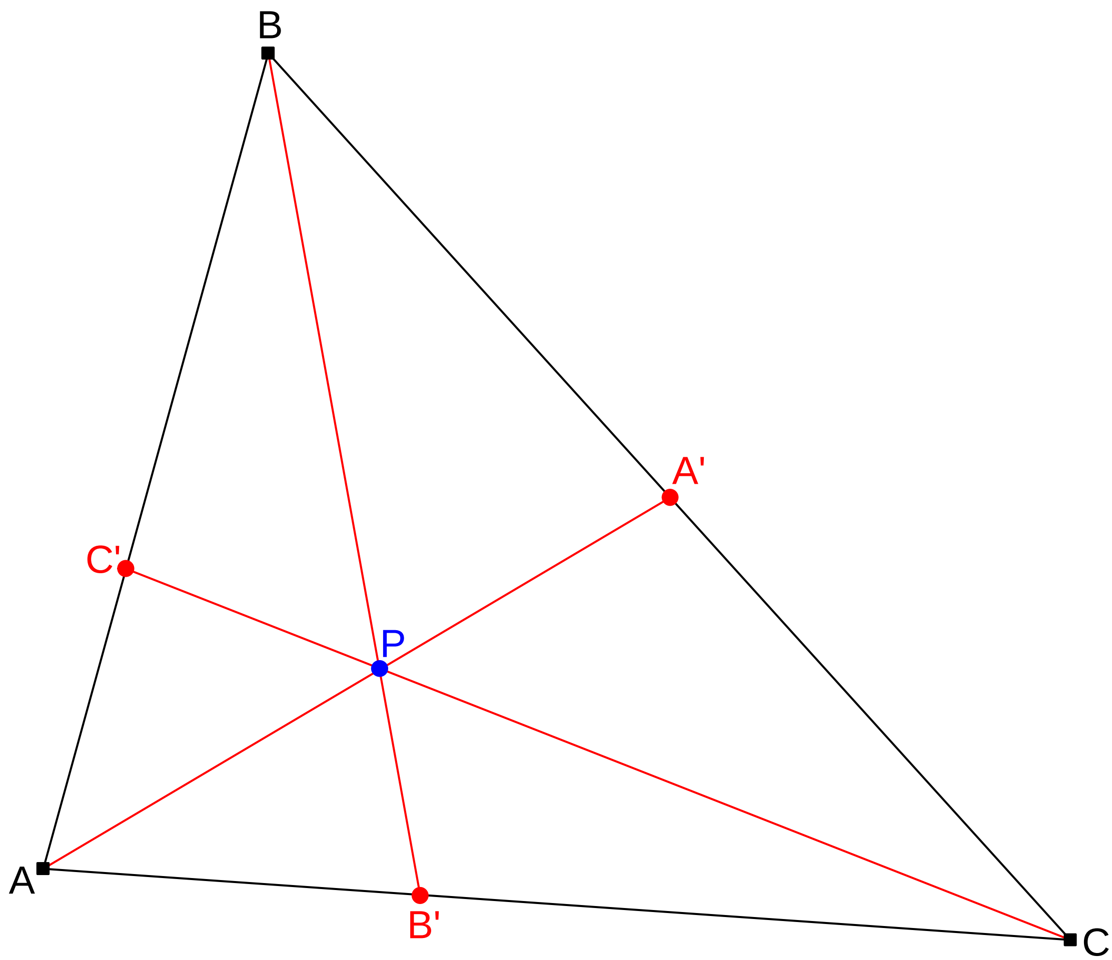

Fig. 3

Wir fassen zusammen:

Satz 2: Sei P ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC. Die Geraden AP, BP und CP schneiden die Geraden BC, CA bzw. AB in A', B' bzw. C'. Dann gilt:

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = 1; \tag{10}$$

$$\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 2; \tag{11}$$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1; \tag{12}$$

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}; \tag{13}$$

$$\frac{BP}{PB'} = \frac{BC'}{C'A} + \frac{BA'}{A'C}; \tag{14}$$

$$\frac{CP}{PC'} = \frac{CA'}{A'B} + \frac{CB'}{B'A}, \tag{15}$$

wobei orientierte Strecken verwendet werden. (Siehe Fig. 3.)

Damit haben wir eine Fülle von wichtigen Sätzen über Dreiecke gezeigt! Die Formel (12) heißt **Satz von Ceva** (ohne Umkehrung) und wurde z. B. in [1], Satz 3.4.1 auf eine andere Weise gezeigt. Die Formeln (10) und (11) heißen **Satz von Gergonne**. Schließlich heißen die Formeln (13), (14) und (15) **Satz von van Aubel**.

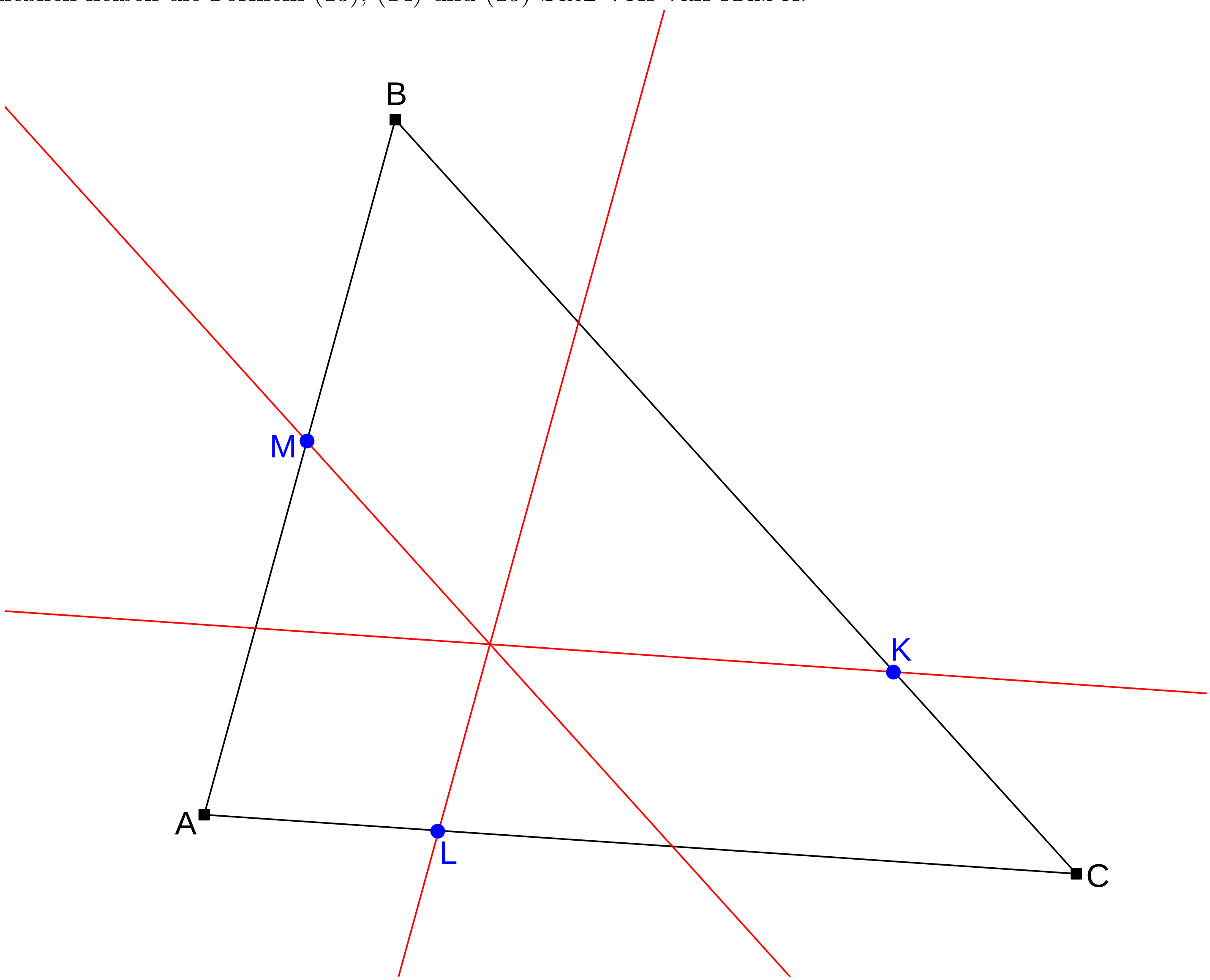

Fig. 4

Schließlich zeigen wir ein Kriterium für die Konpunktalität dreier Parallelen (Fig. 4):

Satz 3: Seien K, L und M drei Punkte auf den Seiten BC, CA bzw. AB des Dreiecks ABC.

Die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn

$$\frac{BK}{BC} + \frac{CL}{CA} + \frac{AM}{AB} = 2$$

gilt.

Beweis: Wir müssen zwei Behauptungen nachweisen:

Behauptung 1: Schneiden sich die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M in einem Punkt, dann gilt

$$\frac{BK}{BC} + \frac{CL}{CA} + \frac{AM}{AB} = 2.$$

Behauptung 2: Gilt

$$\frac{BK}{BC} + \frac{CL}{CA} + \frac{AM}{AB} = 2,$$

dann schneiden sich die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M in einem Punkt.

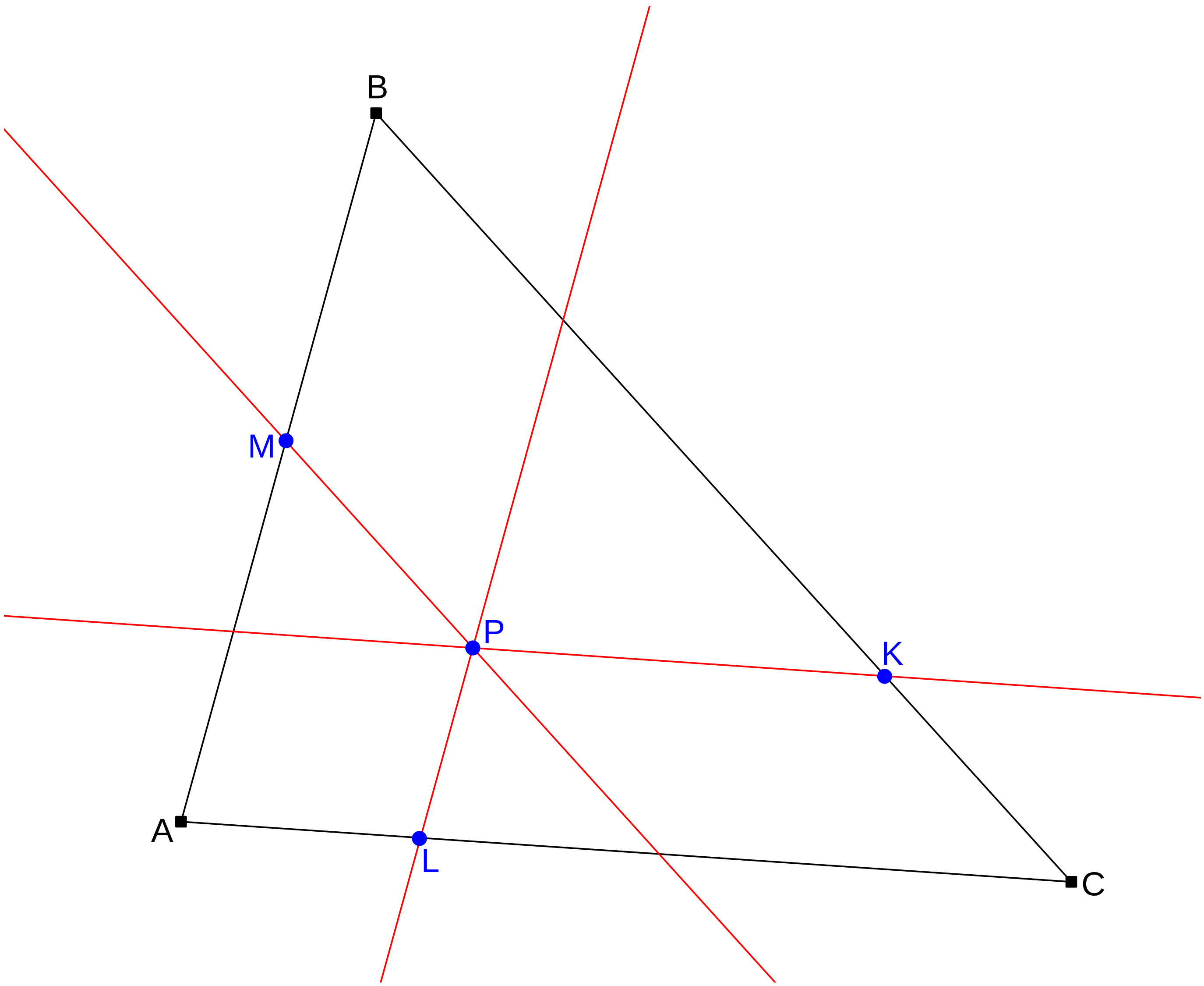

Fig. 5

Beweis von Behauptung 1: (Siehe Fig. 5.) Wir nehmen an, die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M schneiden sich in einem Punkt. Bezeichnen wir diesen Punkt mit P. Dann sind die Punkte K, L und M die Schnittpunkte der Parallelen zu den Geraden CA, AB bzw. BC durch den Punkt P mit den Geraden BC, CA bzw. AB. Folglich können wir die Formel (3) anwenden mit $K = A_b$, $L = B_c$ und $M = C_a$, und erhalten

$$\frac{KC}{BC} + \frac{LA}{CA} + \frac{MB}{AB} = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{BK}{BC}+\frac{CL}{CA}+\frac{AM}{AB} &= \frac{BC-KC}{BC}+\frac{CA-LA}{CA}+\frac{AB-MB}{AB} \\
&= \left(1-\frac{KC}{BC}\right)+\left(1-\frac{LA}{CA}\right)+\left(1-\frac{MB}{AB}\right) \\
&= 3-\left(\frac{KC}{BC}+\frac{LA}{CA}+\frac{MB}{AB}\right)=3-1=2,
\end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

Beweis von Behauptung 2: Wir nehmen an, daß

$$\frac{BK}{BC}+\frac{CL}{CA}+\frac{AM}{AB}=2$$

gilt. Sei P der Schnittpunkt der Parallelen zu den Geraden CA und AB durch die Punkte K bzw. L. Die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt P schneide die Gerade AB in einem Punkt M'. Wir wollen zeigen, daß $M'=M$ ist.

Nun haben die Punkte K, L und M' nach ihrer Konstruktion die Eigenschaft, daß die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M' sich in einem Punkt schneiden, nämlich in dem Punkt P. Nach Behauptung 1 gilt also

$$\frac{BK}{BC}+\frac{CL}{CA}+\frac{AM'}{AB}=2.$$

Vergleich dieser Gleichung mit

$$\frac{BK}{BC}+\frac{CL}{CA}+\frac{AM}{AB}=2$$

liefert $AM'=AM$. Da unsere Strecken orientierte Strecken sind, und da die Punkte M und M' beide auf der Geraden AB liegen, müssen also die Punkte M und M' zusammenfallen. Da wir nun wissen, daß die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M' sich in einem Punkt schneiden, können wir also feststellen: Die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M schneiden sich in einem Punkt. Damit ist die Behauptung 2 bewiesen.

Somit ist der Beweis von Satz 3 fertig.

Übrigens sieht man leicht ein, daß unser Satz 3 zu dem Satz 3.4.10 aus [1] äquivalent ist.

Literaturhinweise

[1] Wilfried Haag: *Wege zu geometrischen Sätzen*, 1. Auflage Stuttgart 2003.