Schließungssätze in der ebenen Geometrie

Darij Grinberg

Version 1, 2004

1. Einleitung

Wenn im Schulpensum gekürzt wird, ist die Elementargeometrie meist das erste Opfer. Wichtige Grundlagen verschwinden eine nach der anderen aus dem Lehrplan, und so kommt es, daß viele Schüler, unter ihnen auch erfahrene Teilnehmer von Mathematikolympiaden, keine klare Vorstellung davon haben, wie geometrische Resultate und Beweise aussehen. Dies ist sehr schade, weil gerade die Geometrie eine Reihe von Themengebieten enthält, die auch für Schüler mit den Mitteln der Elementarmathematik zugänglich sind. Mit diesem Vortrag soll exemplarisch ein solches Themengebiet vorgestellt werden, um sowohl einen Einblick in die Welt der Geometrie, als auch Beispiele für mathematische Beweise zu geben.

Wir werden mit zwei *Schließungssätzen* beginnen; das sind Sätze, in denen es um Streckenzüge geht, die nach bestimmten Regeln konstruiert werden, und von denen behauptet wird, daß sie sich stets nach einer bestimmten Anzahl von Strecken schließen. Wir werden einen solchen Schließungssatz für Dreiecke und einen für Kreise kennenlernen und jeweils auf zwei verschiedene Arten beweisen. Nachdem die Sätze bewiesen sind, heben wir ab und begeben uns in die projektive Geometrie. Nach einer Einführung der sogenannten Fernpunkte und der sogenannten Ferngeraden wird es uns möglich, den Schließungssatz für einen Kreis - in einer leicht abgewandelten Form - als Sonderfall eines viel stärkeren, allgemeineren Satzes zu erkennen. Dieser Satz ist der wohlbekannte *Satz von Pascal für Kreise* - den Beweis ersparen wir uns, da er auf schulgeometrischer Ebene nicht gerade leicht zu führen ist und keinen grundlegenden Einblick in den Hintergrund der Theorie gewährt.

Die wichtigsten Veröffentlichungen zu geometrischen Schließungssätzen sind [1], Kapitel 7, und [3]. Die folgende Darstellung wird insbesondere bezüglich der Schließungssätze auf [1], Abschnitte 7.1 und 7.3, [2] und [3], und bezüglich der Grundbegriffe der projektiven Geometrie auf [7], Kapitel IV, §4 zurückgreifen.

Drei einschränkende Bemerkungen vorneweg:

- Wir werden uns im Folgenden nur mit der *ebenen Geometrie* befassen, also nicht mit der Geometrie im Raum.
- Für viele der folgenden Sätze bieten sich weitreichende Verallgemeinerungen an; wir müssen jedoch auf die Thematisierung dieser Verallgemeinerungen verzichten, weil sie den Platz- und Zeitrahmen sprengen würden.
- Unser Schwerpunkt wird auf der Geometrie liegen und nicht auf ihrer Geschichte; das bedeutet, daß wir fast vollständig auf historische Anmerkungen verzichten.

2. Der Satz von Thomsen

Wir beginnen mit einem ersten und recht einfach zu beweisenden, aber doch überraschenden Schließungssatz aus der Dreiecksgeometrie, dem sogenannten **Satz von Thomsen**:

> **Satz 1, der Satz von Thomsen:** Sei ABC ein Dreieck, und P ein beliebiger Punkt auf seiner Seite CA.
>
> Wir beginnen nun, ausgehend von diesem Punkt P, einen Streckenzug nach der folgenden Vorschrift zu konstruieren:
>
> Die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt P schneide die Gerade AB in Q.
>
> Die Parallele zu der Geraden CA durch den Punkt Q schneide die Gerade BC in R.
>
> Die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt R schneide die Gerade CA in S.
>
> Die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt S schneide die Gerade AB in T.
>
> Die Parallele zu der Geraden CA durch den Punkt T schneide die Gerade BC in U.
>
> Dann geht die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt U wieder durch den Punkt P.
>
> Unser Streckenzug schließt sich also nach 6 Strecken. (Siehe Fig. 1.)

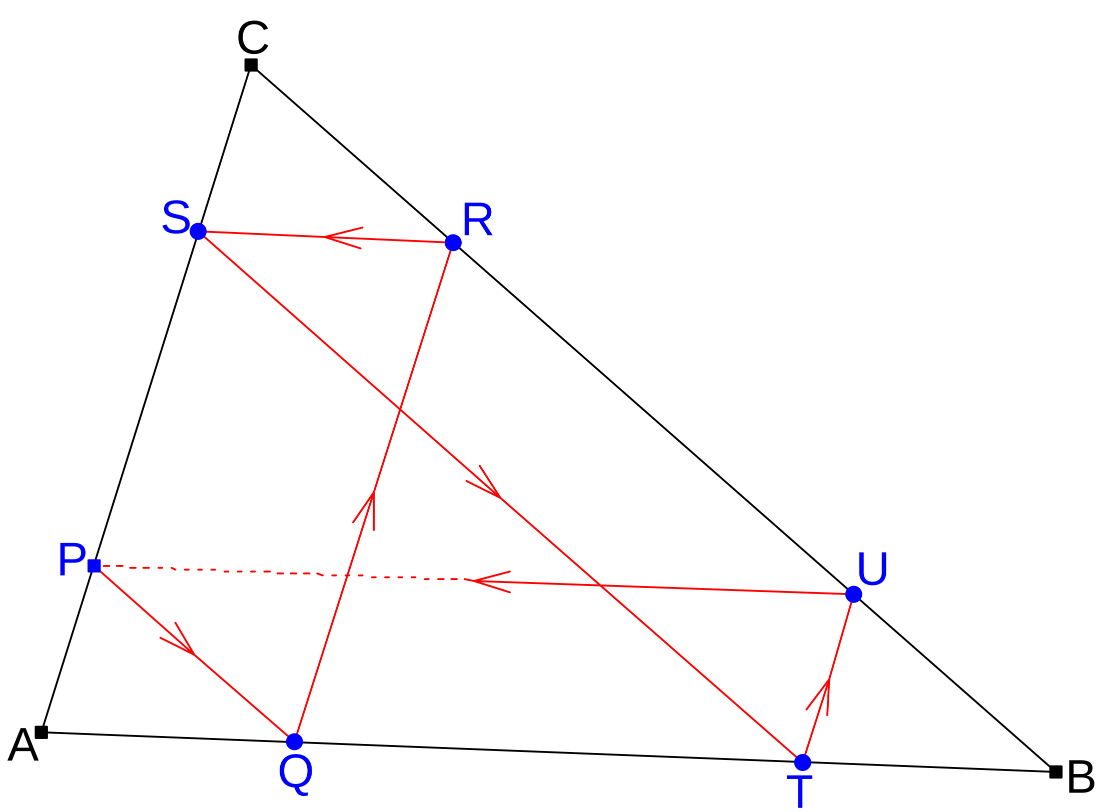

Fig. 1

Wir werden hier zwei verschiedene Beweise von Satz 1 vorstellen:

Erster Beweis von Satz 1: Die vielen Parallelen in der Figur bieten eine gute Gelegenheit, den Strahlensatz anzuwenden.

Nach dem 1. Strahlensatz gilt:

$$\begin{aligned} \frac{AP}{AC} &= \frac{AQ}{AB} && \text{(denn } PQ \parallel BC\text{);} \\ \frac{AQ}{AB} &= \frac{CR}{CB} && \text{(denn } QR \parallel CA\text{);} \\ \frac{CR}{CB} &= \frac{CS}{CA} && \text{(denn } RS \parallel AB\text{);} \\ \frac{CS}{CA} &= \frac{BT}{BA} && \text{(denn } ST \parallel BC\text{);} \\ \frac{BT}{BA} &= \frac{BU}{BC} && \text{(denn } TU \parallel CA\text{).} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{AP}{AC} = \frac{BU}{BC}.$$

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt daraus, daß die Gerade UP parallel zu der Geraden AB ist. Das heißt, die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt U geht durch den Punkt P. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Zweiter Beweis von Satz 1: In diesem Zweiten Beweis von Satz 1 werden wir anstelle des Strahlensatzes kongruente Dreiecke benutzen; diese liegen in Hülle und Fülle vor, weil wegen den parallelen Geraden viele gleiche Winkel (Stufenwinkel!) und viele gleiche Strecken (Parallelogramme!) vorliegen.

Nach dem Stufenwinkelsatz gilt $\measuredangle AQP = \measuredangle ABC$ wegen $PQ \parallel BC$ und $\measuredangle SRC = \measuredangle ABC$ wegen $RS \parallel AB$. Somit erhalten wir $\measuredangle AQP = \measuredangle SRC$.

Nun haben wir $PQ \parallel BC$ und $QR \parallel CA$; mit anderen Worten: $PQ \parallel RC$ und $QR \parallel CP$. Folglich ist das Viereck $PQRC$ ein Parallelogramm, und daraus ergibt sich $PQ = CR$. Genauso sieht man ein, daß das Viereck $QRSA$ ein Parallelogramm ist, und folglich gilt $AQ = SR$.

Aus $\measuredangle AQP = \measuredangle SRC$, $PQ = CR$ und $AQ = SR$ folgt aber, daß die Dreiecke AQP und SRC kongruent sind (sws). Dies ergibt $AP = SC$.

Nach dem Stufenwinkelsatz ist $\measuredangle CSR = \measuredangle CAB$ wegen $RS \parallel AB$ und $\measuredangle UTB = \measuredangle CAB$ wegen $TU \parallel CA$. Folglich haben wir $\measuredangle CSR = \measuredangle UTB$.

Nun ist $RS \parallel AB$ und $ST \parallel BC$; mit anderen Worten: $RS \parallel TB$ und $ST \parallel BR$. Daher ist das Viereck $RSTB$ ein Parallelogramm, und folglich gilt $RS = BT$. Analog erkennt man, daß das Viereck $STUC$ ein Parallelogramm ist, und erhält daraus $CS = UT$.

Aus $\measuredangle CSR = \measuredangle UTB$, $RS = BT$ und $CS = UT$ können wir nun schließen, daß die Dreiecke SRC und TBU kongruent sind (sws). Daraus folgt $SC = TU$.

Wir haben also festgestellt, daß $AP = SC$ und $SC = TU$ ist. Damit ist $AP = TU$. Ferner gilt $AP \parallel TU$ (denn $TU \parallel CA$). In dem Viereck $APUT$ sind also die zwei gegenüberliegenden Seiten AP und TU gleich lang und parallel; folglich ist dieses Viereck $APUT$ ein Parallelogramm, und wir erhalten $UP \parallel TA$, also $UP \parallel AB$. Mit anderen Worten: Die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt U geht durch den Punkt P. Damit ist Satz 1 erneut bewiesen.

Drei Sonderfälle von Satz 1 seien kurz angesprochen:

- Ein wenig interessanter Sonderfall tritt ein, wenn der Punkt P mit der Dreiecksecke A zusammenfällt. (Siehe Fig. 2.) Der dabei entstehende Streckenzug läßt sich leicht nachvollziehen: Der Punkt Q ist definiert als Schnittpunkt der Parallelen zu der Geraden BC durch den Punkt P mit der Geraden AB. Doch der Punkt P ist ja der Punkt A und liegt bereits auf der Geraden AB; also ist $Q = P = A$. Der Punkt R ist definiert als Schnittpunkt der Parallelen zu der Geraden CA durch den Punkt Q mit der Geraden BC. Da der Punkt $Q = A$ auf der Geraden CA liegt, ist die Parallele zu der Geraden CA durch den Punkt Q nichts anderes als die Gerade CA selber, und folglich ist der Schnittpunkt R dieser Parallelen mit der Geraden BC schlichtweg der Schnittpunkt der Geraden CA mit der Geraden BC, also der Punkt C. Wir haben also $R = C$. Entsprechend können wir den Streckenzug weiterverfolgen, und erhalten $S = C$, $T = B$ und $U = B$. Unser Streckenzug besteht also aus der einmal umlaufenen Peripherie des Dreiecks ABC.

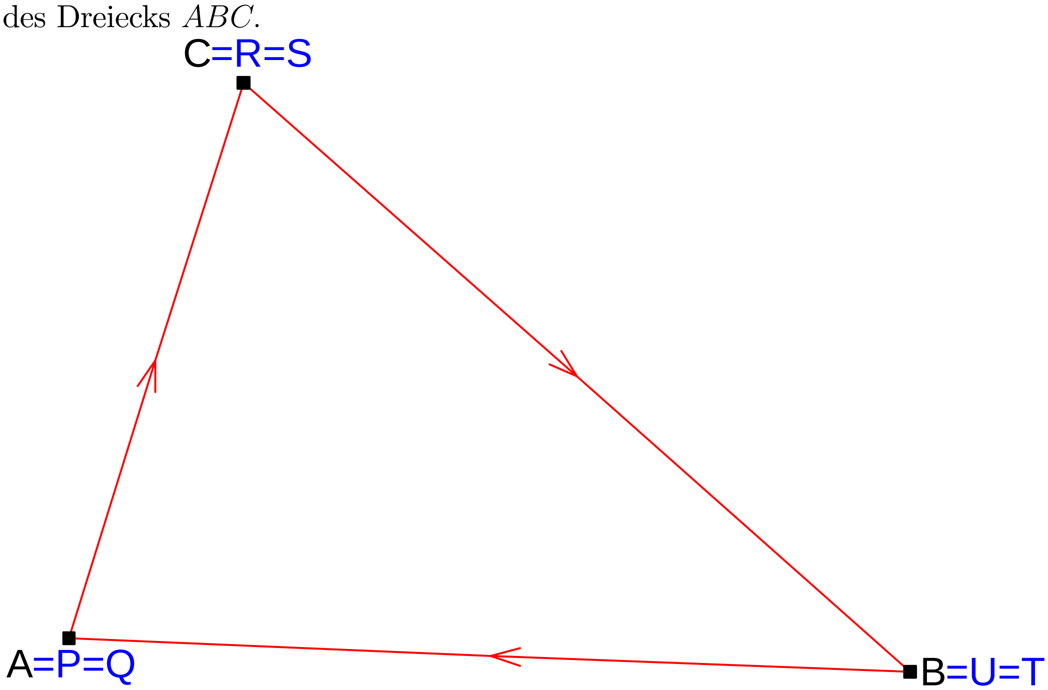

Fig. 2

- Völlig analog läßt sich die Situation analysieren, wenn der Punkt P mit der Dreiecksecke C zusammenfällt. Dann ist $Q = B$, $R = B$, $S = A$, $T = A$ und $U = C$. Wieder umläuft unser Streckenzug die Peripherie des Dreiecks ABC.

- Ein weniger trivialer Sonderfall tritt ein, wenn der Punkt P mit dem Mittelpunkt B' der Dreiecksseite CA übereinstimmt. (Siehe Fig. 3.) Um den von dem Punkt P ausgehenden Streckenzug zu studieren, führen wir zwei weitere Punkte ein: die Mittelpunkte C' und A' der Dreiecksseiten AB bzw. BC. Nach dem Satz von der Mittelparallelen im Dreieck gilt dann $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$ und $A'B' \parallel AB$ (denn die Strecken $B'C'$, $C'A'$ und $A'B'$ sind Mittelparallelen im Dreieck ABC). Nun ist der Punkt Q definiert als der Schnittpunkt der Parallelen zu der Geraden BC durch den Punkt P mit der Geraden AB; doch wegen $B'C' \parallel BC$ ist die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt $P = B'$ einfach die Gerade $B'C'$, und der Punkt Q ist somit der Schnittpunkt der Geraden $B'C'$ mit der

Geraden AB. Also ist $Q = C'$. Nach dem gleichen Verfahren können wir unseren Streckenzug weiterfolgen und erhalten nacheinander $R = A'$ und $S = B'$. Das heißt: $S = P$. Der von dem Punkt $P = B'$ ausgehende Streckenzug schließt sich also *bereits nach* 3 *Strecken*. Wenn wir die Konstruktionsvorschrift von Satz 1 weiter befolgen, erhalten wir $T = C'$ und $U = A'$. Unser Streckenzug ist somit das zweimal umlaufene Dreieck $A'B'C'$. Dieses Dreieck $A'B'C'$ wird übrigens als **Mittendreieck** des Dreiecks ABC bezeichnet; es ist zu dem Dreieck ABC zentrisch ähnlich.

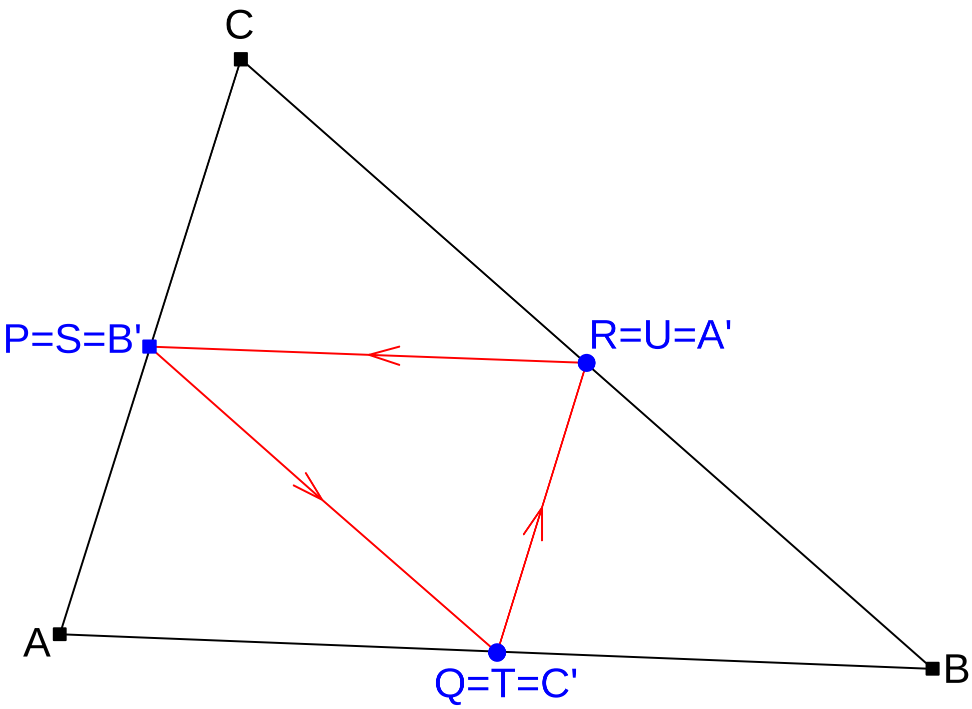

Fig. 3

Schließlich sei angemerkt, daß, obwohl wir im Satz 1 von einem Punkt P auf der *Seite* CA des Dreiecks ABC ausgegangen sind, der Satz 1 auch für Punkte P auf der *Verlängerung* der Seite CA gilt. (Ein Beispiel dafür zeigt Fig. 4.)

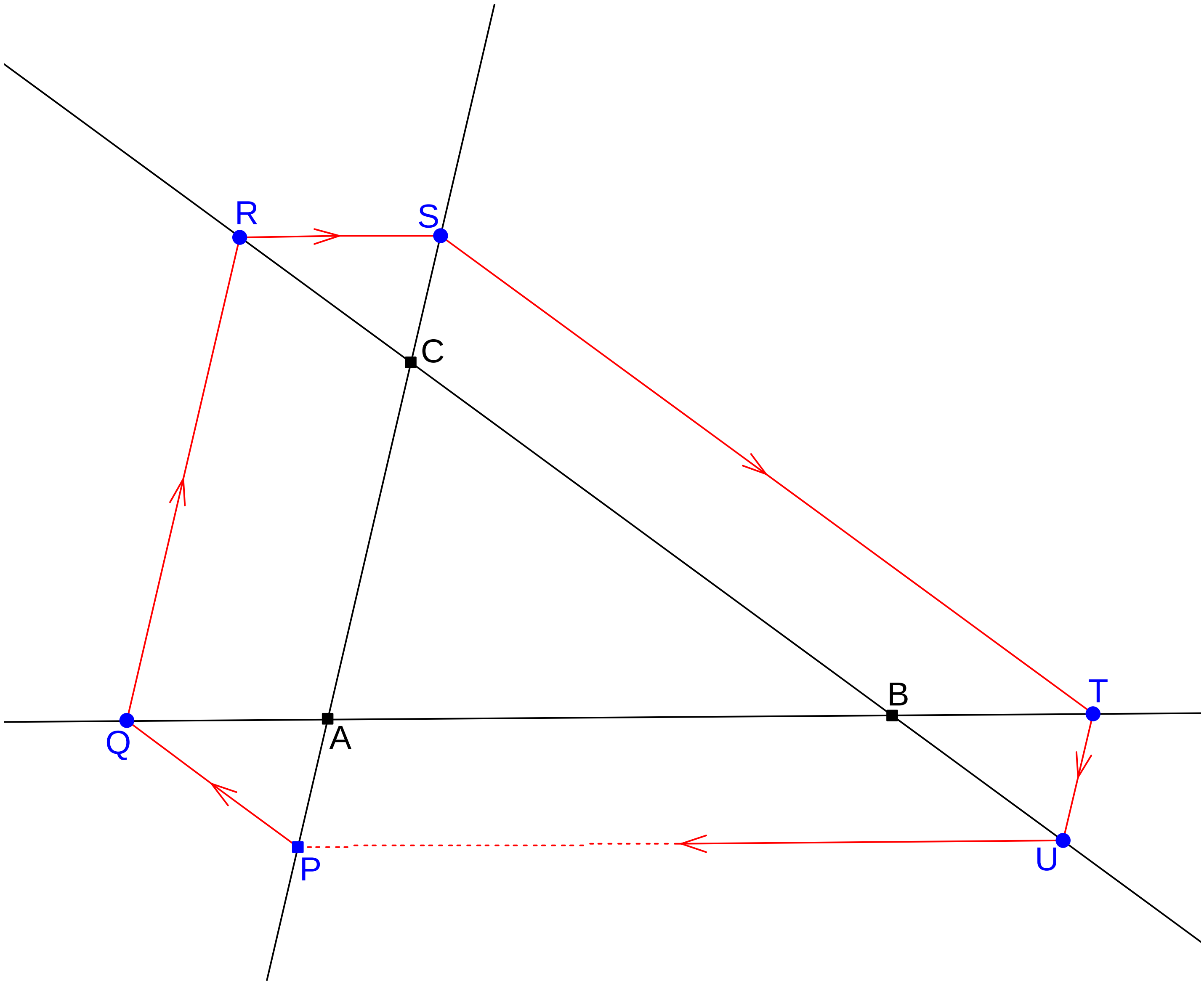

Fig. 4

Satz 1 und sein Umfeld wurden in [2] umfassend behandelt. Es gibt auch mehrere Verallgemeinerungen von Satz 1, in denen statt Parallelen zu den Geraden BC, CA und AB Geraden mit anderen vorgegebenen Richtungen gezeichnet werden, oder in denen das Dreieck durch ein Vieleck ersetzt wird. Bezüglich solcher Verallgemeinerungen sei auf [1], Abschnitt 7.3, [3], Abschnitt 3, und [4] verwiesen.

3. Die Ente im Kreis I

Kommen wir nun zu einem Satz, der eine Ähnlichkeit zu Satz 1 aufweist, aber vom Kreis statt von einem Dreieck handelt ([1], Abschnitt 7.1, und [3], Abschnitt 2):

> **Satz 2:** Seien k ein Kreis und g, h und i drei Geraden. Auf dem Kreis k sei ein Punkt P beliebig ausgewählt. Ausgehend von diesem Punkt P zeichnet man einen Streckenzug nach den folgenden Regeln:

Zieht man die Parallele zu der Geraden g durch den Punkt P, dann schneidet diese Parallele den Kreis k, außer in dem Punkt P, noch in einem weiteren Punkt Q. (Im Grenzfall, wenn diese Parallele den Kreis k in dem Punkt P berührt, setzen wir einfach $Q = P$.)

Die Parallele zu der Geraden h durch den Punkt Q schneide den Kreis k, außer in dem Punkt Q, noch in einem weiteren Punkt R. (Wieder werde in dem Fall, wenn diese Parallele den Kreis k in dem Punkt Q berührt, einfach $R = Q$ gesetzt; im Folgenden werde in entsprechenden Fällen genauso verfahren.)

Die Parallele zu der Geraden i durch den Punkt R schneide den Kreis k, außer in dem Punkt R, noch in einem weiteren Punkt S.

Die Parallele zu der Geraden g durch den Punkt S schneide den Kreis k, außer in dem Punkt S, noch in einem weiteren Punkt T.

Die Parallele zu der Geraden h durch den Punkt T schneide den Kreis k, außer in dem Punkt T, noch in einem weiteren Punkt U.

Dann geht die Parallele zu der Geraden i durch den Punkt U wieder durch den Punkt P.

Damit erhalten wir wieder einen Streckenzug, der sich nach 6 Strecken schließt. (Siehe Fig. 2.)

Satz 2 läßt sich wie folgt unterhaltsam einkleiden (vgl. [3], Abschnitt 2):

Neben einem kreisrunden Teich k verlaufen drei geradlinige Wege g, h und i. Eine Ente sitzt in einem Punkt P auf der Peripherie k des Teiches. Nun schwimmt die Ente los, und zwar erst parallel zu dem Weg g, bis sie wieder in einem Punkt Q auf der Teichperipherie k auftrifft; dann ändert sie ihre Richtung und schwimmt parallel zu dem Weg h weiter, bis sie wieder an der Teichperipherie ankommt; danach geht es parallel zu i weiter, und dann wieder parallel zu g, zu h und endlich wieder zu i. Satz 2 behauptet dann, daß die Ente nach dieser Tour wieder an ihrem Ausgangspunkt ankommt, und zwar unabhängig davon, wie die Wege g, h und i verlaufen, und in welchem Kreispunkt P sich die Ente anfangs befunden hat.[1]

Satz 2 kann wiederum verallgemeinert werden, beispielsweise auf den Fall von mehreren Geraden; bezüglich dieser Verallgemeinerungen verweisen wir auf [1], Abschnitt 7.1, und [3], Abschnitt 2.

[1] Dem aufmerksamen Leser mag aufgefallen sein, daß diese Einkleidung den Inhalt von Satz 2 nicht vollständig wiedergibt. Es heißt ja: "*Neben* einem kreisrunden Teich k verlaufen drei geradlinige Wege g, h und i." Dadurch wird aber der Fall nicht berücksichtigt, wenn die Geraden g, h und i nicht *neben* dem Kreis k verlaufen, sondern diesen Kreis schneiden. Doch in diesem Fall kann man entweder seine Fantasie bemühen und die Wege, die den Teich k schneiden, auf Brücken über dem Teich verlaufen lassen, oder man verschiebt sie einfach so lange parallel, bis sie den Teich nicht mehr schneiden (es ist klar, daß eine Parallelverschiebung der Geraden g, h und i an dem Streckenzug $PQRSTU$ nichts ändert, weil für die Konstruktion dieses Streckenzugs nur die Richtungen der Geraden g, h und i von Bedeutung sind, nicht aber die genaue Lage dieser Geraden g, h und i - es werden ja nur Parallelen zu diesen Geraden g, h und i konstruiert).

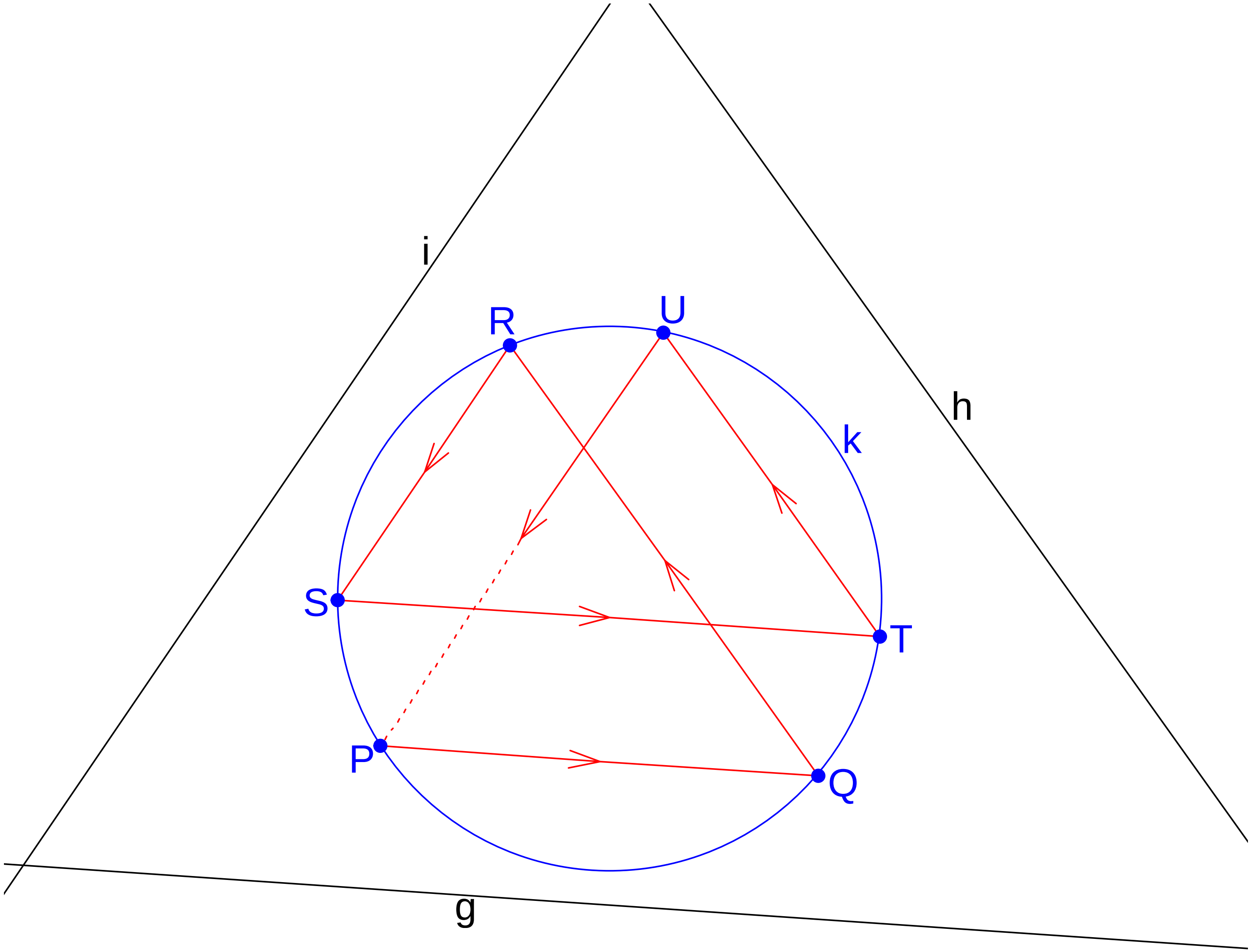

Fig. 5

Hier werden wir zwei Beweise von Satz 2 zeigen:

Erster Beweis von Satz 2: Die grundlegende Idee dieses Beweises besteht darin, durch Anwendung des Wechselwinkelsatzes (dank der vielen parallelen Geraden) und des Umfangswinkelsatzes (mithilfe der Punkte P, Q, R, S, T und U, die alle auf einem Kreis liegen) eine Reihe von Winkelgleichheiten zu zeigen und sie konsequent auszunutzen.

Der folgende Beweis hat leider die unangenehme Eigenschaft, daß er von der Zeichnung und von den auf ihr herrschenden Anordnungsbeziehungen abhängig ist. Das heißt für uns: Wir werden uns beim Beweis auf die Zeichnung Fig. 6 beziehen, die den Fall darstellt, daß die Punkte P, S, R, U, T und Q in dieser Reihenfolge auf dem Kreis k liegen; es kann aber auch Fälle geben, wo sie in einer anderen Reihenfolge angeordnet sind, und in diesen Fällen müssen unsere Überlegungen geringfügig modifiziert werden (einige der auftretenden Winkel müssen durch ihre Nebenwinkel ersetzt werden und stellenweise muß statt dem Umfangswinkelsatz der Sehnenvierecksatz verwendet werden). Man kann diese Schwierigkeiten vermeiden, indem man orientierte Winkel modulo 180° verwendet (eine Einführung in die Anwendungen dieser Winkel habe ich in [6] gegeben); dadurch erhält man einen Beweis, der unabhängig von der Anordnung der Punkte gilt. Doch hier werden wir keine orientierten Winkel verwenden, weil wir bei unserem Beweis keine Vorkenntnisse verlangen wollen.

Betrachten wir also Fig. 6. Da die Punkte P, S, U und Q alle auf dem Kreis k liegen, gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle PUS = \measuredangle PQS$. Wegen $PQ \parallel g$ und $ST \parallel g$ ist $PQ \parallel ST$; nach dem Wechselwinkelsatz gilt also $\measuredangle PQS = \measuredangle TSQ$. Da die Punkte T, Q, S und U alle auf dem Kreis k liegen, gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle TSQ = \measuredangle TUQ$. Wegen $TU \parallel h$ und $QR \parallel h$ ist $TU \parallel QR$; somit ist nach dem Wechselwinkelsatz $\measuredangle TUQ = \measuredangle RQU$. Da die Punkte R, U, Q und S alle auf dem Kreis k liegen, gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle RQU = \measuredangle RSU$. Fassen wir alle diese Winkelgleichungen zusammen, erhalten wir:

$$\measuredangle PUS = \measuredangle PQS = \measuredangle TSQ = \measuredangle TUQ = \measuredangle RQU = \measuredangle RSU.$$

Nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt daraus, daß $UP \parallel RS$ gilt. Wegen $RS \parallel i$ ist also $UP \parallel i$. Mit anderen Worten: Die Parallele zu der Geraden i durch den Punkt U geht durch den Punkt P. Damit ist Satz 2 bewiesen.

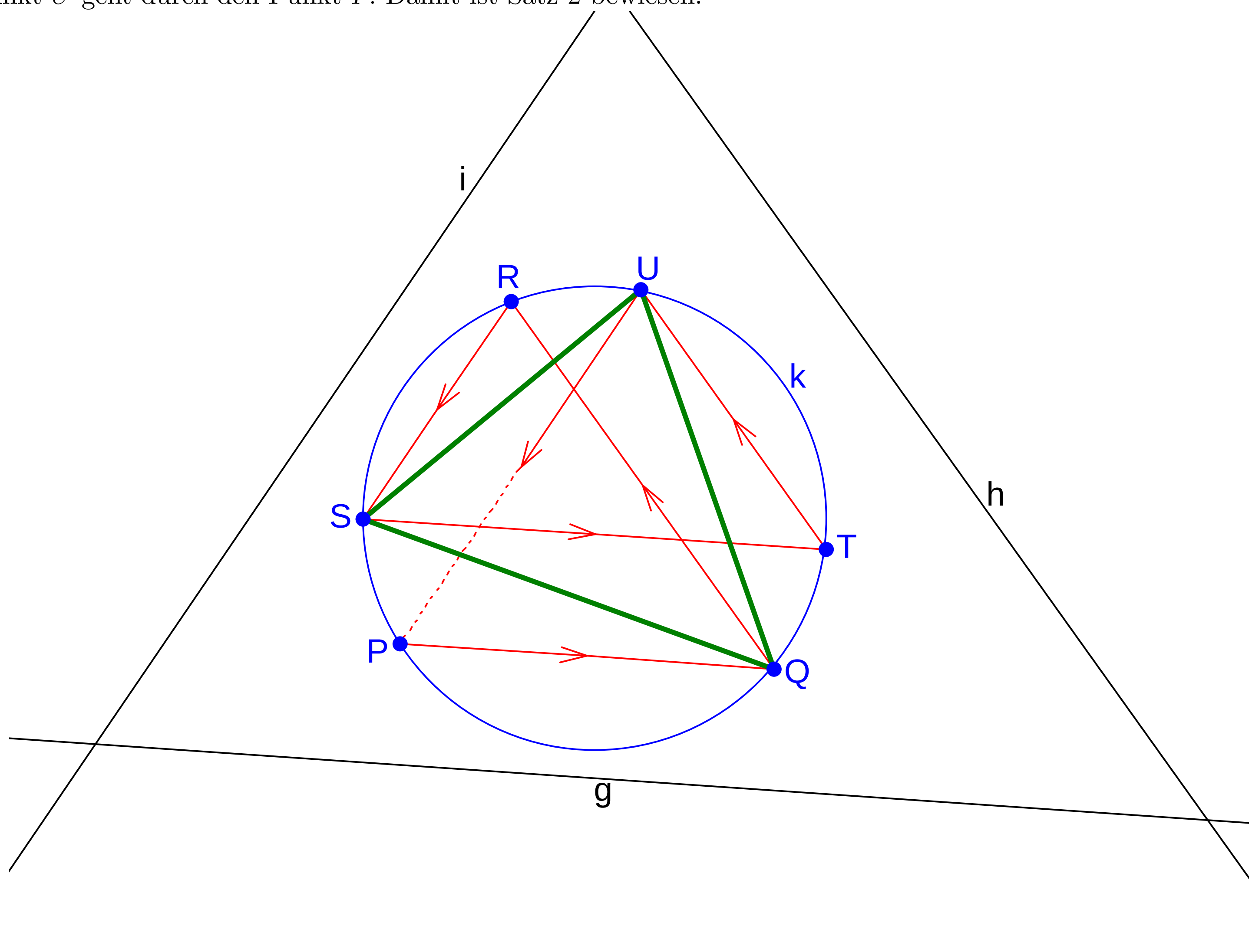

Fig. 6

Zweiter Beweis von Satz 2: Dieser Zweite Beweis von Satz 2 wird sich auf ein Resultat aus der Abbildungsgeometrie stützen, und, im Gegensatz zum Ersten Beweis, nicht von der Zeichnung abhängig sein.

Für jede Gerade l bezeichnen wir mit s_l die Spiegelung an der Geraden l.

Nun werden wir die folgende Eigenschaft von Geradenspiegelungen benutzen:

Satz 3: Schneiden sich drei Geraden x, y und z in einem gemeinsamen Punkt, dann ist die Verkettung $s_z \circ s_y \circ s_x$ der Geradenspiegelungen s_x, s_y und s_z wieder eine Geradenspiegelung.

Da eine Geradenspiegelung, mit sich selbst verkettet, die Identitätsabbildung ergibt, haben wir also

$$(s_z \circ s_y \circ s_x) \circ (s_z \circ s_y \circ s_x) = \mathrm{id}$$

(wobei id die Identitätsabbildung bezeichnet).

(Siehe Fig. 7.) Kommen wir jetzt zum eigentlichen Beweis von Satz 2:

Bezeichnen wir mit O den Mittelpunkt des Kreises k, und mit g', h' und i' die Senkrechten zu den Geraden g, h bzw. i durch diesen Punkt O.

Da $PQ \parallel g$ und $g' \perp g$ ist, haben wir $g' \perp PQ$. Nun geht die Mittelsenkrechte einer Kreissehne stets durch den Kreismittelpunkt; für die Sehne PQ im Kreis k bedeutet dies, daß die Mittelsenkrechte dieser Sehne PQ durch den Mittelpunkt O des Kreises k geht. Doch die Mittelsenkrechte der Sehne PQ ist orthogonal zu der Sehne PQ; andererseits wissen wir, daß auch die Gerade g' orthogonal zu der Sehne PQ ist ($g' \perp PQ$). Somit ist die Mittelsenkrechte der Sehne PQ parallel zu der Geraden g'. Ferner hat die Mittelsenkrechte der Sehne PQ mit der Geraden g' einen gemeinsamen Punkt: den Punkt O. Doch zwei zueinander parallele Geraden können nur dann einen gemeinsamen Punkt haben, wenn sie zusammenfallen. Also fällt die Mittelsenkrechte der Sehne PQ mit der Geraden g' zusammen. Somit ist der Punkt Q das Spiegelbild des Punktes P an der Geraden g'. Mit anderen Worten: $Q = s_{g'}(P)$. Analog ist $R = s_{h'}(Q)$, $S = s_{i'}(R)$, $T = s_{g'}(S)$ und $U = s_{h'}(T)$. Damit ist

$$\begin{aligned}
s_{i'}(U) &= s_{i'}(s_{h'}(T)) = s_{i'}(s_{h'}(s_{g'}(S))) = s_{i'}(s_{h'}(s_{g'}(s_{i'}(R)))) = s_{i'}(s_{h'}(s_{g'}(s_{i'}(s_{h'}(Q))))) \\
&= s_{i'}(s_{h'}(s_{g'}(s_{i'}(s_{h'}(s_{g'}(P)))))) = s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'} \circ s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'}(P) \\
&= (s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'}) \circ (s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'})(P).
\end{aligned}$$

Da die Geraden g', h' und i' sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden (nämlich in dem Punkt O), ist nach Satz 3 aber $(s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'}) \circ (s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'}) = \mathrm{id}$, und damit

$$s_{i'}(U) = (s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'}) \circ (s_{i'} \circ s_{h'} \circ s_{g'})(P) = P.$$

Das heißt, der Punkt P ist das Spiegelbild des Punktes U an der Geraden i'. Somit ist $UP \perp i'$. Wegen $i' \perp i$ ist also $UP \parallel i$. Das heißt, die Parallele zu der Geraden i durch den Punkt U geht durch den Punkt P. Damit ist Satz 2 erneut bewiesen.

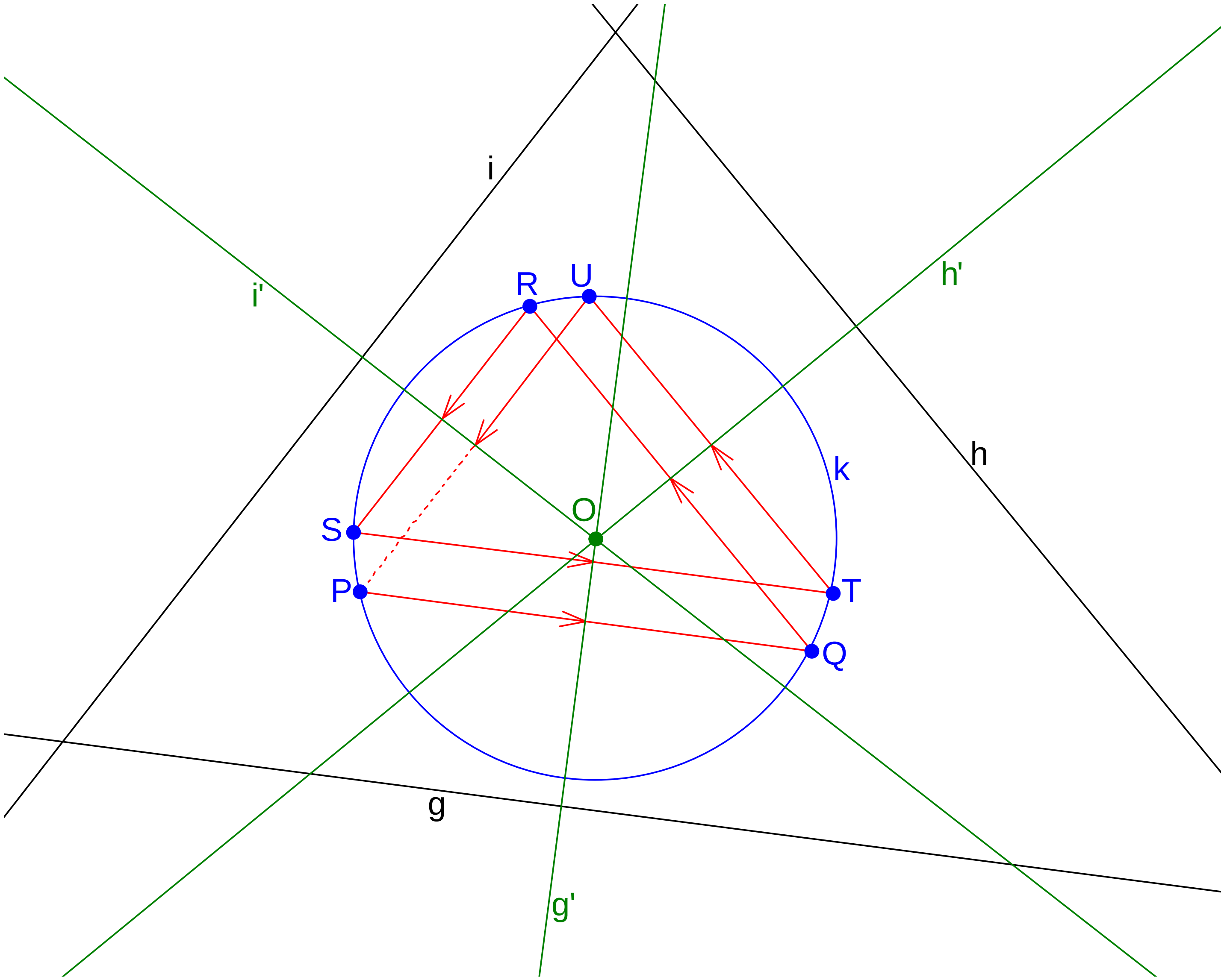

Fig. 7

Es gilt auch ein bemerkenswerter Zusatz zu Satz 2 (Fig. 8):

Satz 4: In der Konfiguration von Satz 2 sind die Strecken PS, QT und RU gleich lang.

Beweis: Im Ersten Beweis von Satz 2 hatten wir gezeigt, daß $\measuredangle PUS = \measuredangle PQS = \measuredangle TSQ = \measuredangle TUQ = \measuredangle RQU = \measuredangle RSU$ gilt. Insbesondere sind also die Winkel $\measuredangle PUS$, $\measuredangle TUQ$ und $\measuredangle RSU$ alle einander gleich. Doch die Strecken PS, QT und RU sind Sehnen im Kreis k, und die Winkel $\measuredangle PUS$, $\measuredangle TUQ$ und $\measuredangle RSU$ sind die Umfangswinkel dieser Sehnen. Gleiche Umfangswinkel in einem Kreis gehören immer zu gleichen Sehnen. Da die Umfangswinkel $\measuredangle PUS$, $\measuredangle TUQ$ und $\measuredangle RSU$ gleich sind, sind also auch die dazugehörigen Sehnen PS, QT und RU gleich. Damit ist Satz 4 bewiesen.

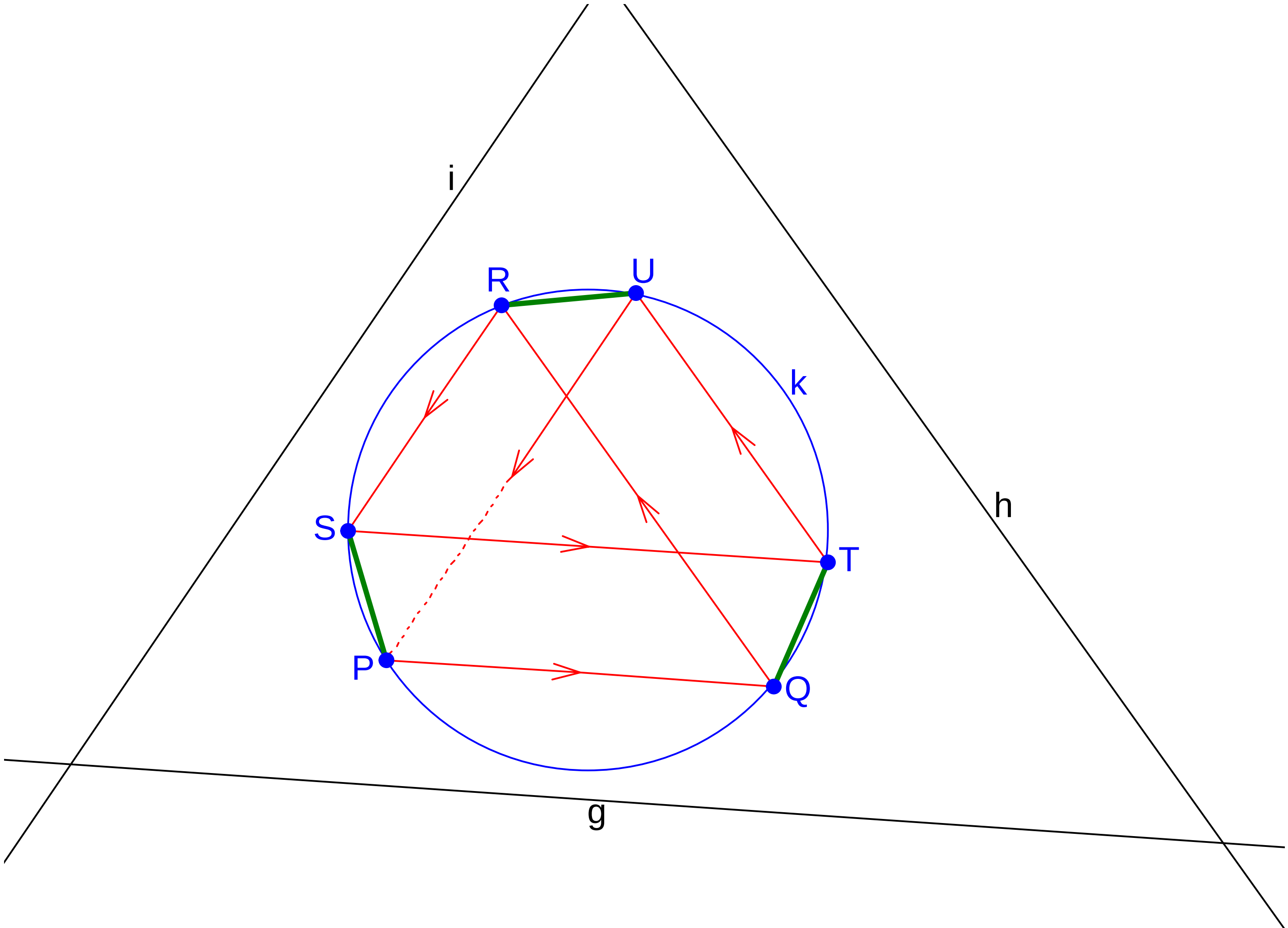

Fig. 8

Übrigens nimmt der Streckenzug $PQRSTU$ eine Vielfalt verschiedener Formen an, wenn man die Lage des Startpunktes P sowie die Position des Kreises k und der Geraden g, h und i variiert. Verschiedene Lagen des Startpunktes P erzeugen unterschiedliche interessante Figuren. (Siehe beispielsweise Fig. 9 und Fig. 10.)

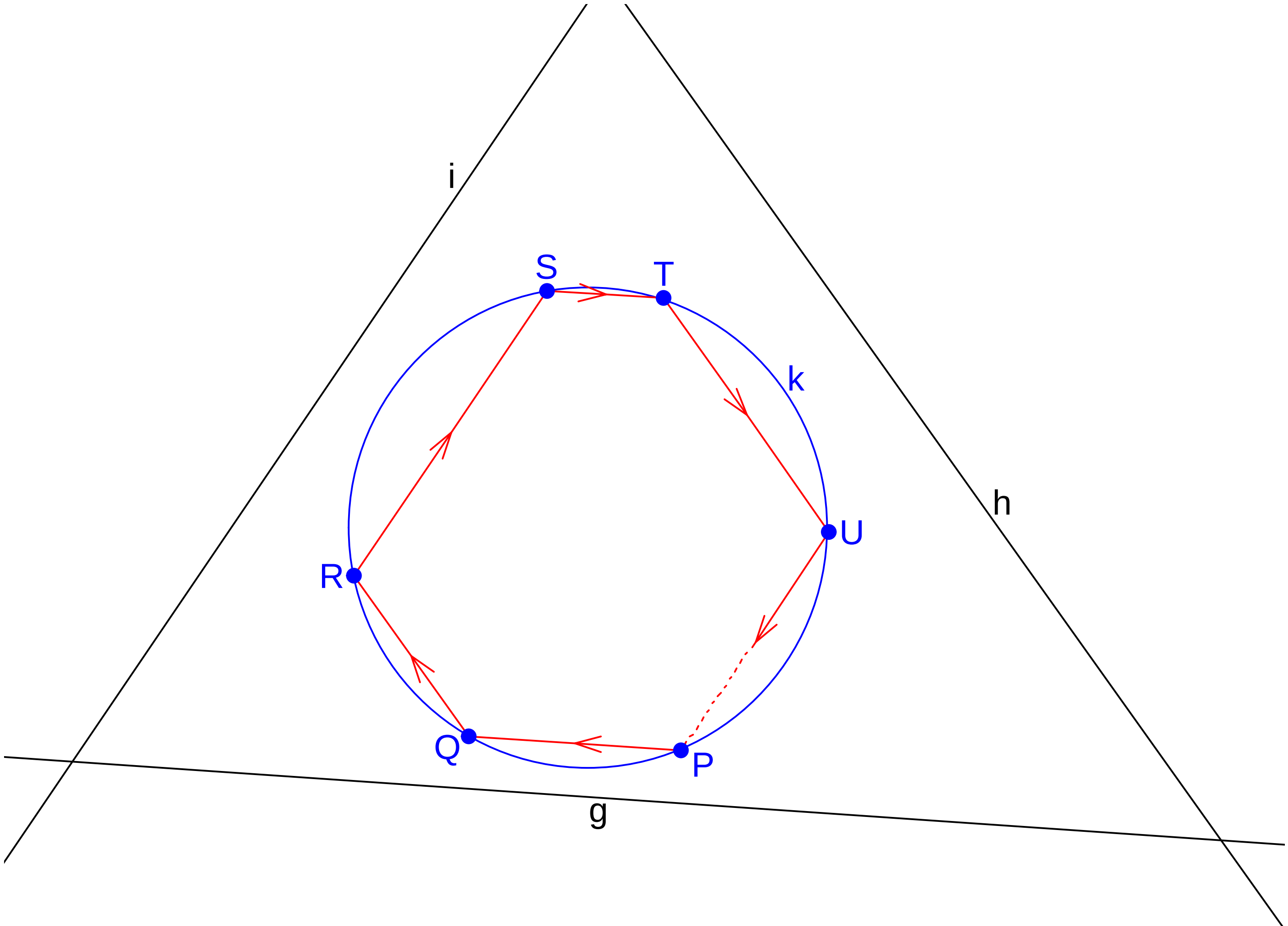

Fig. 9

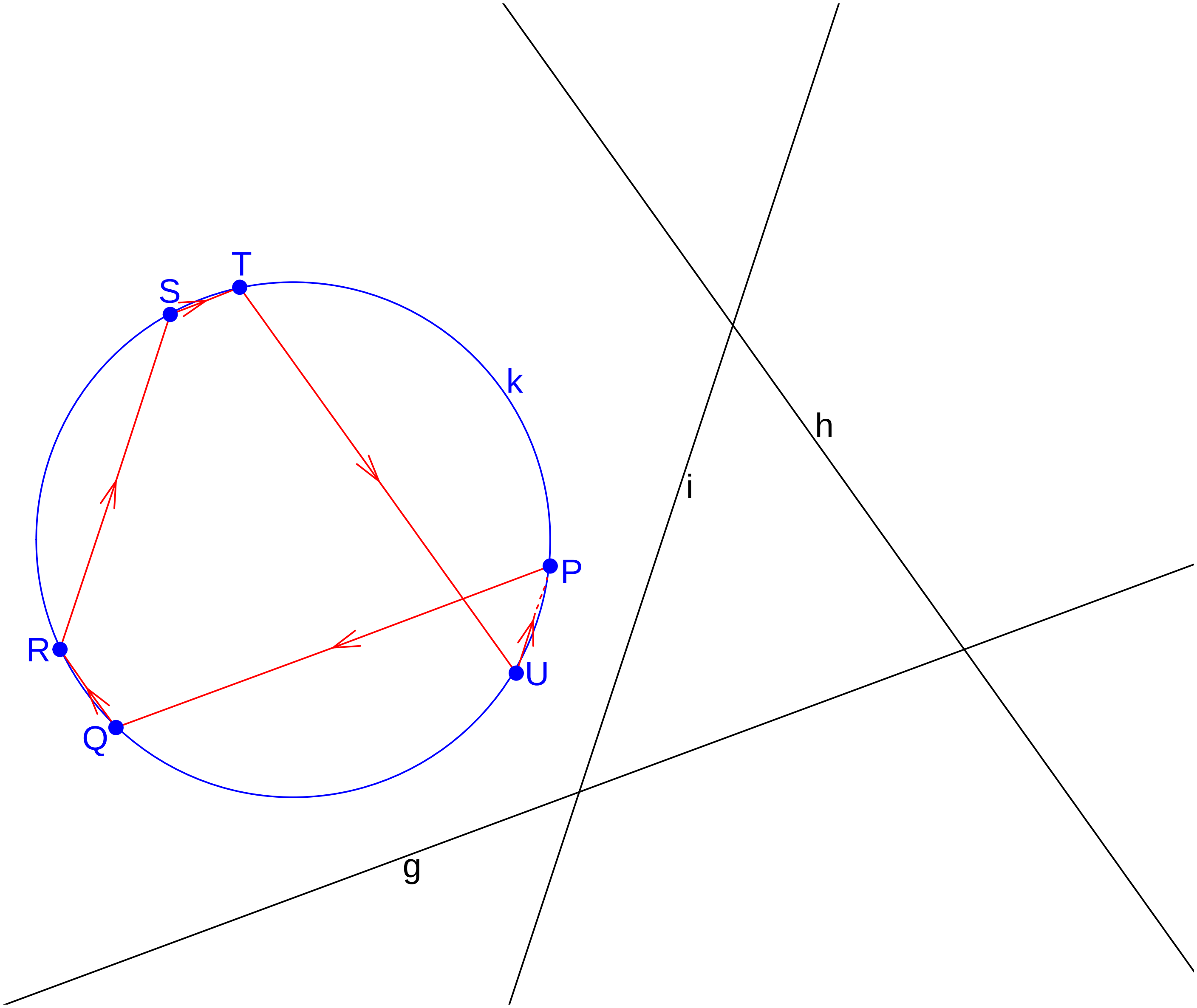

Fig. 10

4. Die Ente im Kreis II

Der folgende Satz sieht nach etwas grundlegend Neuem aus, ist aber nur eine Umformulierung von Satz 2:

Satz 5: Seien A, B, C, D, E und F sechs Punkte auf einem Kreis. Wenn $AB \parallel DE$ und $BC \parallel EF$ gilt, dann ist auch $CD \parallel FA$. (Siehe Fig. 11 und Fig. 12.)

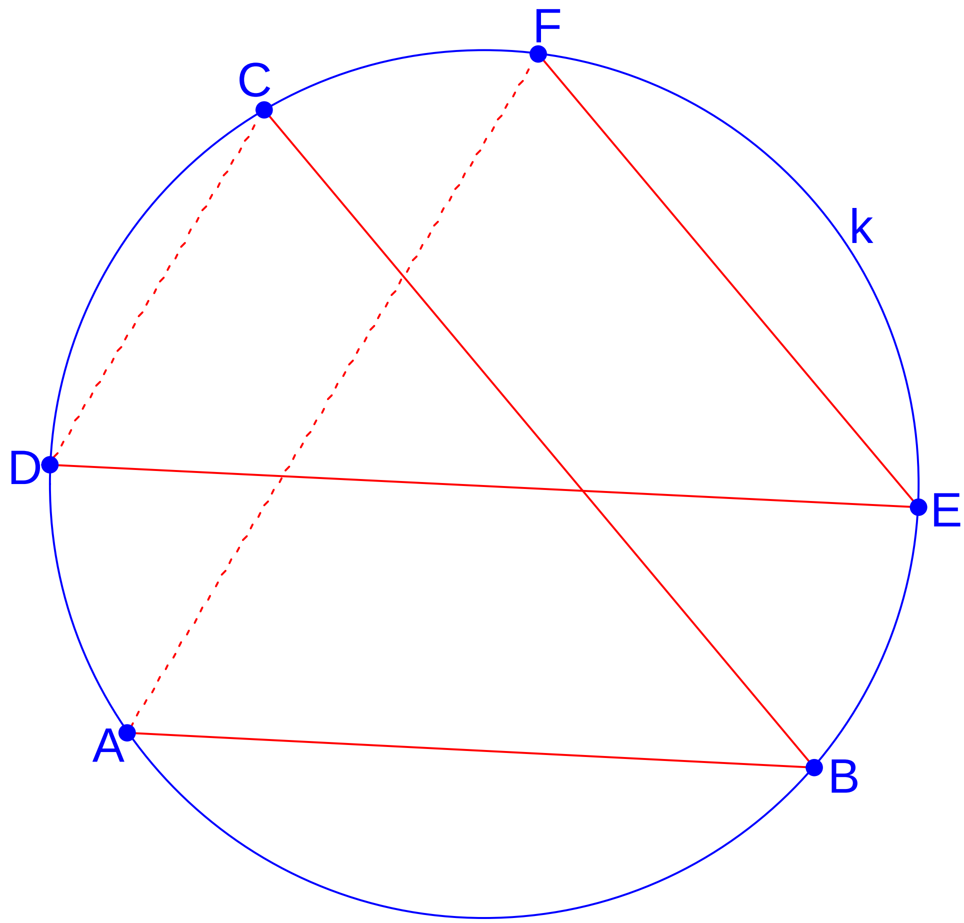

Fig. 11

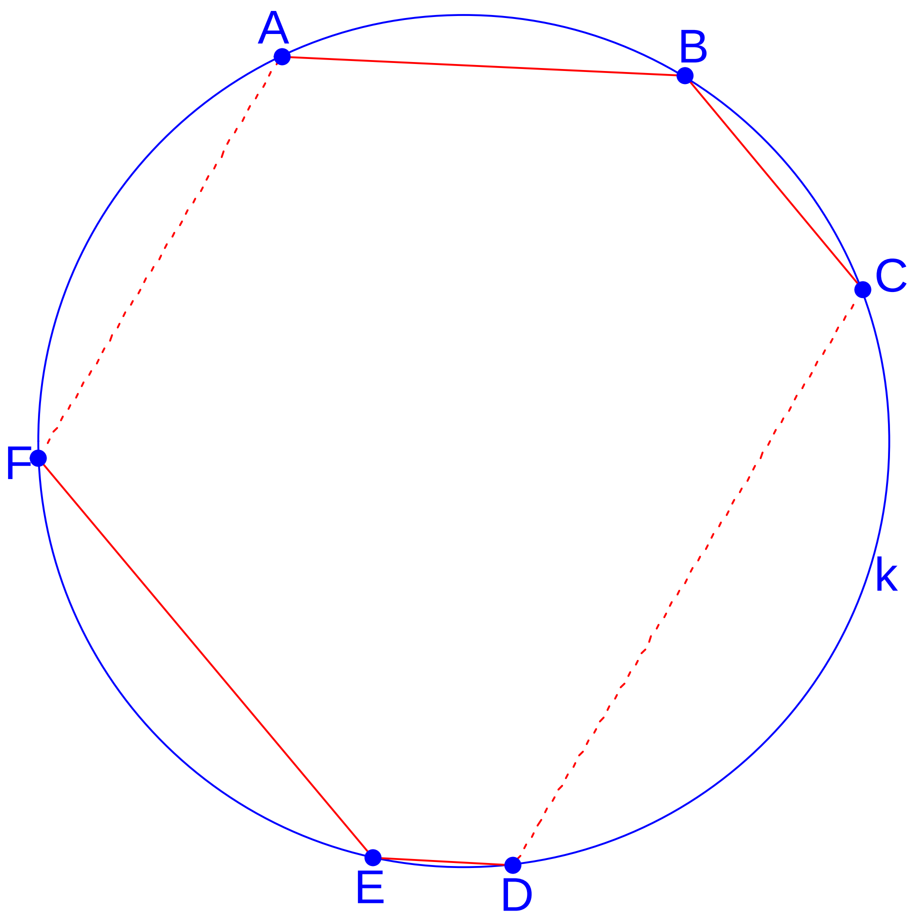

Fig. 12

Beweis: Die Grundidee dieses Beweises besteht darin, den Streckenzug $ABCDEF$ aufzufassen als ein von dem Punkt A ausgehender und gemäß den Regeln von Satz 2 verlaufender Streckenzug.

Dazu bezeichnen wir den Kreis durch unsere sechs Punkte A, B, C, D, E und F mit k, und wenden Satz 2 auf die Geraden $g = AB$, $h = BC$ und $i = CD$ und den Punkt $P = A$ auf dem Kreis k an und konstruieren gemäß der Vorschrift von Satz 2 die Punkte Q, R, S, T und U.

(Siehe Fig. 13.) Der Punkt Q ist gemäß seiner Konstruktion der von dem Punkt P verschiedene Schnittpunkt der Parallelen zu der Geraden g durch den Punkt P mit dem Kreis k. Doch da die Gerade g nichts anderes ist als die Gerade AB und der Punkt P nichts anderes als der Punkt A, ist die Parallele zu der Geraden g durch den Punkt P die Gerade AB, und ihr von P verschiedener Schnittpunkt mit dem Kreis k ist der Punkt B. Wir haben also $Q = B$.

Der Punkt R ist laut Konstruktion der von dem Punkt Q verschiedene Schnittpunkt der Parallelen zu der Geraden h durch den Punkt Q mit dem Kreis k. Da aber die Gerade h nichts anderes ist als die Gerade BC und der Punkt Q nichts anderes als der Punkt B, ist die Parallele zu der Geraden h durch den Punkt Q die Gerade BC, und ihr von Q verschiedener Schnittpunkt mit dem Kreis k ist der Punkt C. Somit ist $R = C$.

Nach dem gleichen Argumentationsmuster erhalten wir aus $i = CD$ und $R = C$, daß $S = D$ ist.

Der Punkt T ist laut Konstruktion der von dem Punkt S verschiedene Schnittpunkt der Parallelen zu der Geraden g durch den Punkt S mit dem Kreis k. Doch der Punkt

S ist der Punkt D, und die Gerade g ist die Gerade AB; die Parallele zu der Geraden g durch den Punkt S ist somit die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt D. Wegen $AB \parallel DE$ liegt der Punkt E auf dieser Parallelen; folglich ist der Punkt E der von dem Punkt S verschiedene Schnittpunkt dieser Parallelen mit dem Kreis k. Wir haben also $T = E$.

Analog erhalten wir $U = F$, indem wir $BC \parallel EF$ anwenden.

Nach Satz 2 können wir nun festhalten, daß die Parallele zu der Geraden i durch den Punkt U wieder durch den Punkt P geht. Mit anderen Worten: $UP \parallel i$. Doch wegen $U = F$, $P = A$ und $i = CD$ können wir dies umschreiben in der Form $FA \parallel CD$, also $CD \parallel FA$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

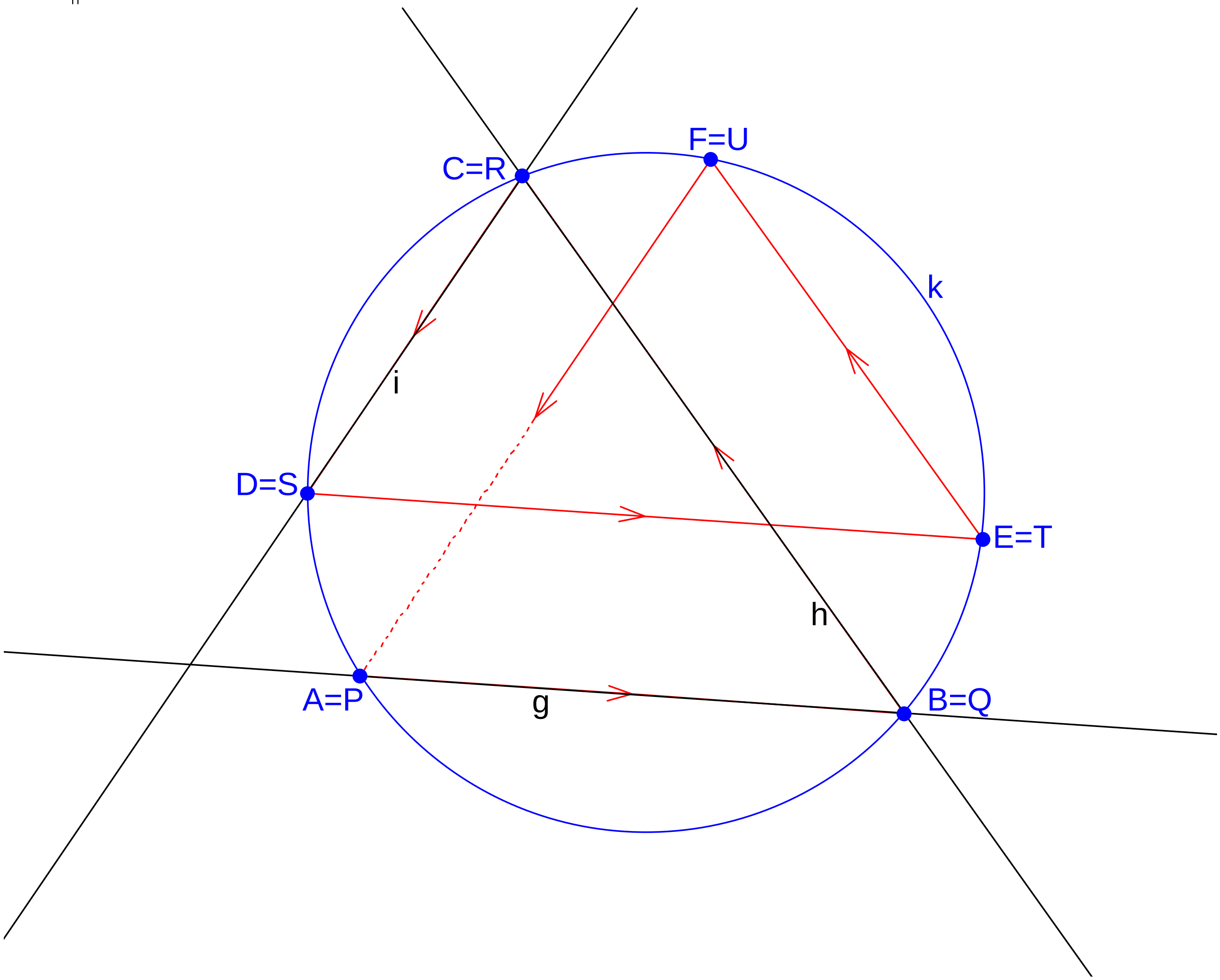

Fig. 13

5. Etwas projektive Geometrie

Nun haben wir mehrere geometrische Sätze kennengelernt und bewiesen. Dabei sind wir stets auf dem Niveau der elementaren ebenen Geometrie geblieben. Nun werden wir einen Ausflug in die sogenannte **projektive Geometrie** machen; dazu führen wir die Begriffe der *Fernpunkte* und der *Ferngeraden* ein.

Diesen Begriffen liegt die Vorstellung zu Grunde, daß nicht nur zwei nichtparallele Geraden sich in einem Punkt schneiden, sondern auch zwei parallele Geraden einen Schnittpunkt haben. Der Schnittpunkt zweier nichtparalleler Geraden ist ein eigentlicher Punkt, während der Schnittpunkt zweier paralleler Geraden ein uneigentlicher Punkt, auch Fernpunkt genannt, ist. Dies ist nun eine wachsweiche und höchst unpräzise Formulierung; mathematisch korrekt führt man die Begriffe wie folgt ein:

Zuerst wollen wir uns darauf einigen, daß wir im folgenden die uns von der Elementargeometrie her vertraute Ebene - also die Ebene, in der wir auch bislang gearbeitet haben - als die **Euklidische Ebene** bezeichnen. Alle Punkte und Geraden auf dieser Euklidischen Ebene werden wir im Folgenden als **eigentliche Punkte** und **eigentliche Geraden** bezeichnen. Nun werden wir eine neue, zusätzliche Art von Objekten definieren, nämlich die sogenannten *uneigentlichen Punkte* und die *uneigentliche Gerade*, auch *Fernpunkte* bzw. *Ferngerade* genannt. Diese uneigentlichen Punkte und Geraden bilden, zusammen mit den eigentlichen Punkten und Geraden, die sogenannte *projektive Ebene*, eine Erweiterung der Euklidischen Ebene.

Um uneigentliche Punkte und Geraden einzuführen, definieren wir erstmal den Begriff einer *Richtungsklasse*:

Für jede (eigentliche) Gerade g bezeichnen wir mit R_g die Menge aller Geraden, die zu dieser Geraden g parallel sind (natürlich einschließlich der Geraden g selber). Diese Menge R_g wird im folgenden als **Richtungsklasse** der Geraden g bezeichnet. Eine solche Richtungsklasse können wir für jede Gerade g in der Ebene konstruieren.

Die auf diese Weise definierten Richtungsklassen haben folgende Eigenschaften:

Satz 6: a) Sind zwei Geraden g und h zueinander parallel, dann sind ihre Richtungsklassen R_g und R_h einander gleich.

b) Sind zwei Geraden g und h zueinander nicht parallel, dann sind ihre Richtungsklassen R_g und R_h disjunkt.

c) Die Richtungsklasse R_g einer Geraden g ist gleichzeitig die Richtungsklasse von jeder Geraden, die in R_g enthalten ist.

d) Für jede Gerade t existiert genau eine Richtungsklasse, die diese Gerade t enthält. (Das bedeutet natürlich nicht, daß es nur eine Gerade g gibt, deren Richtungsklasse R_g die Gerade t enthält; es gibt in der Tat unendlich viele verschiedene Geraden, deren Richtungsklassen die Gerade t enthalten, aber diese Richtungsklassen sind *als Mengen* gleich.)

Beweis von Satz 6: **a)** Da die zwei Geraden g und h zueinander parallel sind, ist jede andere Gerade i genau dann parallel zu der Geraden g, wenn sie parallel zu der Geraden h ist. Folglich stimmt die Menge R_g aller zu der Geraden g parallelen Geraden überein mit der Menge R_h aller zu der Geraden h parallelen Geraden; das heißt, die Richtungsklassen R_g und R_h der Geraden g und h stimmen überein.

b) Da die zwei Geraden g und h zueinander nicht parallel sind, gibt es keine Gerade i, die zu beiden Geraden g und h parallel ist (denn aus $i \parallel g$ und $i \parallel h$ würde $g \parallel h$ folgen, aber die Geraden g und h sind zueinander nicht parallel). Das heißt, die Menge R_g aller Geraden, die zu der Geraden g parallel sind, und die Menge R_h aller Geraden, die zu der Geraden h parallel sind, haben kein gemeinsames Element, d. h. sie sind disjunkt.

c) Wir müssen zeigen, daß die Richtungsklasse R_g einer Geraden g gleichzeitig die

Richtungsklasse R_h einer beliebigen Geraden $h \in R_g$ ist. Dies ist jedoch klar: Da die Gerade h in der Richtungsklasse R_g der Geraden g enthalten ist, ist sie parallel zu der Geraden g; nach Satz 6 **a)** sind also die Richtungsklassen R_g und R_h der Geraden g und h einander gleich, d. h. die Richtungsklasse R_g ist gleichzeitig die Richtungsklasse R_h.

d) Daß es überhaupt eine Richtungsklasse gibt, die die Gerade t enthält, ist klar: Man nehme einfach die Richtungsklasse R_t der Geraden t selber; diese Richtungsklasse enthält alle zu der Geraden t parallelen Geraden, also auch die Gerade t selber. Es bleibt also zu zeigen, daß es nicht zwei verschiedene Richtungsklassen gibt, die die Gerade t enthalten. In der Tat: Gäbe es zwei verschiedene Richtungsklassen R_g und R_h, die die Gerade t enthalten, dann dürften die Geraden g und h nicht zueinander parallel sein (wären sie zueinander parallel, dann wären nach Satz 6 **a)** die Richtungsklassen R_g und R_h gleich); folglich müssten nach Satz 6 **b)** die Richtungsklassen R_g und R_h dieser Geraden g bzw. h disjunkt sein, d. h. sie hätten kein gemeinsames Element, was aber der Annahme widerspricht, daß beide Richtungsklassen die Gerade t enthalten. Somit kann es keine zwei verschiedene Richtungsklassen R_g und R_h geben, die beide die Gerade t enthalten. Damit ist Satz 6 **d)** bewiesen.

Somit ist der Beweis von Satz 6 abgeschlossen.

Wir sehen also: Jeder Geraden g in der Ebene entspricht genau eine Richtungsklasse; jedoch ist die Richtungsklasse einer Geraden gleichzeitig die Richtungsklasse jeder anderen Geraden, die in dieser Richtungsklasse enthalten ist. Die Richtungsklassen können als *Äquivalenzklassen* auf der Menge der Geraden angesehen werden, wobei die Äquivalenzrelation die Parallelität zweier Geraden ist.

Nun bezeichnen wir jede Richtungsklasse als **Fernpunkt**, auch **uneigentlicher Punkt** oder **unendlich ferner Punkt** genannt. Auf den ersten Blick mag es nun dem Leser seltsam vorkommen, daß wir eine Klasse von parallelen Geraden als Punkt bezeichnen. Im Folgenden werden wir jedoch sehen, daß eine solche Bezeichnung ganz und gar nicht unbegründet ist, weil die Fernpunkte viele Eigenschaften aufweisen, die uns von eigentlichen Punkten her bekannt sind. Allerdings dürfen wir nicht blind übertragen: Viele Begriffe, die sich auf eigentliche Punkte beziehen, ergeben bei Anwendung auf Fernpunkte keinen Sinn; zum Beispiel kann man keinen "Abstand" zweier Fernpunkte definieren. Wir dürfen ja nicht vergessen, daß für uns "Fernpunkt" nur ein Synonym für "Richtungsklasse" ist.

Im Zusammenhang mit der Bezeichnung von Richtungsklassen als Fernpunkte steht auch eine gewisse Terminologie, die die fundamentalen Begriffe "ein Punkt liegt auf einer Geraden" bzw. "eine Gerade geht durch einen Punkt" auf Fernpunkte überträgt: Statt zu sagen, eine Gerade g sei in einer Richtungsklasse R_g enthalten, werden wir oft sagen, *die Gerade g gehe durch den Fernpunkt R_g*, oder auch, *der Fernpunkt R_g liege auf der Geraden g*. Die Aussage von Satz 6 **d)**, daß für jede Gerade t genau eine Richtungsklasse existiert, die diese Gerade t enthält, können wir nun wie folgt umformulieren: *Auf jeder Geraden t liegt genau ein Fernpunkt.*

Nach Satz 6 **a)** gilt: Wenn zwei Geraden g und h zueinander parallel sind, dann stimmen ihre Richtungsklassen R_g und R_h überein. Dies können wir nun wie folgt ausdrücken: *Wenn zwei Geraden g und h zueinander parallel sind, dann stimmen die auf ihnen liegenden Fernpunkte R_g und R_h überein.* Mit anderen Worten: *Zwei zueinander parallele Geraden haben einen gemeinsamen Fernpunkt.* Ferner gilt nach Satz 6 **b)**: Wenn zwei Geraden g und h zueinander nicht parallel sind, dann sind ihre Richtungsklassen R_g und R_h disjunkt, und damit voneinander verschieden. In die Sprache der Fernpunkte übersetzt bedeutet dies: *Wenn zwei Geraden g und h zueinander nicht parallel sind, dann sind die auf ihnen liegenden Fernpunkte R_g und R_h voneinander verschieden.* Mit anderen Worten: *Zwei zueinander nicht parallele Geraden haben keinen gemeinsamen Fernpunkt.* Zusammengefasst erhalten wir also: *Zwei Geraden haben genau dann einen gemeinsamen Fernpunkt, wenn sie zueinander parallel sind.*

Weiterhin bezeichnen wir die Menge aller Fernpunkte als **Ferngerade**, auch **uneigentliche Gerade** oder **unendlich ferne Gerade** genannt. Wiederum dürfen wir uns unter der Ferngeraden keine wirkliche Gerade im Sinne der euklidischen Geometrie vorstellen; auch macht es wieder keinen Sinn, beispielsweise von dem Abstand eines Punktes zu der Ferngeraden zu sprechen. Auch der Begriff von *parallelen Geraden* läßt sich nur auf eigentliche Geraden anwenden. Alle Fernpunkte liegen auf der Ferngeraden, und die Ferngerade geht durch alle Fernpunkte.

Ab jetzt werden wir zur Vermeidung von Mißverständnissen eigentliche Punkte und eigentliche Geraden stets als solche kennzeichnen; wenn wir dagegen einfach nur von einem "Punkt" sprechen, kann damit sowohl ein eigentlicher, als auch ein uneigentlicher Punkt gemeint sein, und genauso werden wir unter "Geraden" sowohl eigentliche, als auch uneigentliche Geraden verstehen.

Damit haben wir unsere von der Anschauung her bekannte Ebene, die *Euklidische Ebene*, um eine Menge von Fernpunkten und um eine Ferngerade erweitert. Die somit entstandene Ebene heißt **projektive Ebene**. Diese projektive Ebene hat die folgende wichtige Eigenschaft:

Satz 7: a) Sind g und h zwei beliebige verschiedene Geraden in der projektiven Ebene (es können sowohl eigentliche, als auch uneigentliche Geraden sein), dann gibt es genau einen Punkt (der ebenfalls eigentlich oder uneigentlich sein kann), der auf beiden Geraden g und h liegt.

b) Sind P und Q zwei beliebige verschiedene Punkte in der projektiven Ebene (es können sowohl eigentliche, als auch uneigentliche Punkte sein), dann gibt es genau eine Gerade (die auch eigentlich oder uneigentlich sein kann), die durch beide Punkte P und Q geht.

In Kürze:

a) Zwei verschiedene Geraden haben in der projektiven Ebene stets genau einen Schnittpunkt.

b) Zwei verschiedene Punkte haben in der projektiven Ebene stets genau eine Verbindungsgerade.

Die Eigenschaft **a)** ist es, die die Besonderheit der projektiven Ebene ausmacht: Während auf der Euklidischen Ebene zwei verschiedene Geraden nicht immer einen Schnittpunkt haben (und zwar nur wenn sie nicht parallel sind), haben auf der projektiven Ebene zwei verschiedene Geraden immer einen Schnittpunkt.

Der *Beweis von Satz 7* ist von dem Gedanken her einfach, erfordert aber Fallunterscheidungen:

a) Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

Fall 1: Die Geraden g und h sind beide eigentliche Geraden und nicht zueinander parallel.

Fall 2: Die Geraden g und h sind beide eigentliche Geraden und zueinander parallel.

Fall 3: Eine der Geraden g und h ist eigentlich, die andere ist die uneigentliche Gerade (also die Ferngerade).

Der Fall, daß beide Geraden g und h uneigentlich sind, kann nicht vorkommen, denn es gibt nur eine uneigentliche Gerade, und die Geraden g und h müssen verschieden sein.

Im Fall 1 ist der Beweis von Satz 7 **a)** klar: Da die Geraden g und h nicht zueinander parallel sind, haben sie einen eigentlichen Schnittpunkt und keinen uneigentlichen Schnittpunkt (denn wie wir schon vorhin festgestellt haben, haben zwei nicht zueinander parallele Geraden keinen gemeinsamen Fernpunkt).

Im Fall 2 ist der Beweis von Satz 7 **a)** genauso einfach: Da die Geraden g und h zueinander parallel sind, haben sie keinen eigentlichen Schnittpunkt, dafür aber einen uneigentlichen Schnittpunkt (wie vorhin gezeigt, haben ja zwei zueinander parallele Geraden einen gemeinsamen Fernpunkt).

Im Fall 3 behauptet Satz 7 **a)**, daß jede eigentliche Gerade genau einen Schnittpunkt mit der Ferngeraden hat; das folgt daraus, daß auf jeder eigentlichen Geraden genau ein Fernpunkt liegt.

Damit ist Satz 7 **a)** bewiesen.

b) Wir unterscheiden wieder drei Fälle:

Fall 1: Die Punkte P und Q sind beide eigentliche Punkte.

Fall 2: Einer der Punkte P und Q ist eigentlich, der andere ist uneigentlich (also ein Fernpunkt).

Fall 3: Beide Punkte P und Q sind Fernpunkte.

Im Fall 1 ist der Beweis von Satz 7 **b)** trivial, weil zwei verschiedene eigentliche Punkte genau eine eigentliche Verbindungsgerade haben und keine uneigentliche (denn die uneigentliche Gerade geht nur durch Fernpunkte, aber P und Q sind keine Fernpunkte).

Im Fall 2 ist der Beweis von Satz 7 **b)** etwas schwieriger:

Erstmal dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Punkt P ein eigentlicher Punkt ist, und der Punkt Q ein Fernpunkt.

Wir müssen zeigen, daß es genau eine Gerade gibt, die durch beide Punkte P und Q geht. Wir beschränken uns auf die Betrachtung von *eigentlichen* Geraden, denn eine Gerade, die durch beide Punkte P und Q geht, kann nur eine eigentliche Gerade sein (denn wäre sie die Ferngerade, könnte sie nicht durch den Punkt P gehen, weil die Ferngerade nur durch Fernpunkte geht, während der Punkt P ein eigentlicher Punkt und kein Fernpunkt ist).

Es reicht uns also aus zu zeigen, daß es genau eine *eigentliche* Gerade gibt, die durch beide Punkte P und Q geht.

Als Fernpunkt ist der Punkt Q eine Richtungsklasse; es gibt also eine eigentliche Gerade g, deren Richtungsklasse R_g mit dem Fernpunkt Q übereinstimmt. Eine beliebige Gerade geht daher genau dann durch den Fernpunkt Q, wenn sie zu der Richtungsklasse R_g gehört. Jedoch ist die Richtungsklasse R_g die Menge aller Geraden, die zu der Geraden g parallel sind; somit geht eine Gerade genau dann durch den Fernpunkt Q, wenn sie zu der Geraden g parallel ist. Nun müssen wir zeigen, daß es genau eine eigentliche Gerade gibt, die durch die beiden Punkte P und Q geht; das heißt, wir müssen zeigen, daß es genau eine eigentliche Gerade gibt, die durch den Punkt P geht und zu der Geraden g parallel ist. Dies ist aber nichts anderes als die bekannte Tatsache aus der euklidischen Geometrie, daß man durch einen Punkt zu einer Geraden genau eine Parallele zeichnen kann. Damit ist Satz 7 **b)** auch im Fall 2 bewiesen.

Im Fall 3 ist Satz 7 **b)** wieder einfach: Da die Punkte P und Q Fernpunkte sind, liegen sie beide auf der Ferngeraden; andererseits gibt es keine eigentliche Gerade, die durch beide Punkte P und Q geht, denn auf jeder eigentlichen Geraden liegt genau ein Fernpunkt, und somit kann eine eigentliche Gerade nicht durch zwei verschiedene Fernpunkte wie P und Q gleichzeitig gehen. Daher gibt es genau eine Gerade - nämlich die Ferngerade -, die durch die Punkte P und Q geht.

Damit ist auch Satz 7 **b)** vollständig bewiesen.

Schließlich halten wir noch einmal die am häufigsten benutzte Eigenschaft von Fernpunkten fest:

Satz 8: Der Schnittpunkt zweier verschiedener eigentlicher Geraden ist genau dann ein Fernpunkt, wenn diese Geraden zueinander parallel sind.

Dies folgt eigentlich schon aus der vorhin hergeleiteten Tatsache, daß zwei Geraden genau dann einen gemeinsamen Fernpunkt haben, wenn sie zueinander parallel sind; bloß können wir erst jetzt, nachdem wir gezeigt haben, daß zwei verschiedene Geraden in der projektiven Ebene genau einen gemeinsamen Punkt haben, von "dem Schnittpunkt" zweier Geraden sprechen.

Soviel zu den axiomatischen Grundlagen der projektiven Ebene. Je weiter man in die Tiefe der projektiven Geometrie geht, desto deutlicher sieht man die Analogien zwischen eigentlichen und uneigentlichen Geraden und Punkten; wir wollen hier jedoch die projektive Ebene rein als Anschauungshilfe benutzen und verzichten daher auf eine weitergehende Behandlung der Theorie.

6. Der Satz von Pascal

Mit Hilfe der projektiven Ebene können wir nun einen Satz formulieren, der 1640 von Blaise Pascal (1623-1662) entdeckt wurde und als "erster großer Fortschritt" in der Geometrie seit der Antike gilt. Dies ist der **Satz von Pascal für den Kreis**:

Satz 9, der Satz von Pascal für den Kreis: Seien A, B, C, D, E und F sechs beliebige Punkte auf einem Kreis[2]. Dann liegen die Punkte $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ auf einer Geraden.

Dabei wird mit $g \cap h$ der Schnittpunkt zweier Geraden g und h bezeichnet. (Ist $g \parallel h$, dann ist dieser Schnittpunkt natürlich ein Fernpunkt.)

Wir werden uns nun nicht mit dem Beweis von Satz 9 beschäftigen (der Beweis ist in der Tat relativ schwierig und kann u. a. in [1], Abschnitt 6.3, Beweis von Satz 6.3.1, und in [5], Kapitel 3 §8, Beweis von Satz 3.81 gefunden werden). Stattdessen werden wir einige Sonderfälle von Satz 9 betrachten, nämlich die Fälle, in denen einer oder mehrere von den Punkten $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ ein Fernpunkt ist. An der Untersuchung dieser Sonderfälle werden wir exemplarisch die Analogien zwischen eigentlichen Punkten und Fernpunkten demonstrieren - und schließlich wieder die Brücke zu unserem Anfangsthema, nämlich den Schließungssätzen, schlagen, indem wir Satz 5 als einen Sonderfall von Satz 9 erkennen.

In der Tat fordert zwar Satz 9, daß die Punkte A, B, C, D, E und F eigentliche Punkte sind, doch die drei Punkte $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ können sowohl

[2] Natürlich sind diese Punkte A, B, C, D, E und F eigentliche Punkte (für uneigentliche Punkte haben wir ja das Liegen auf einem Kreis nicht definiert).

eigentliche Punkte, als auch Fernpunkte sein, und die Gerade, auf der diese drei Punkte liegen, kann auch sowohl eine eigentliche Gerade, als auch die Ferngerade sein (und zwar ist sie genau dann die Ferngerade, wenn alle drei Punkte $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ Fernpunkte sind - zu diesem Fall kommen wir später). Wir werden nun untersuchen, was der Satz 9 ergibt, je nachdem, wieviele von den Punkten $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ eigentliche Punkte und wieviele Fernpunkte sind.

Nach Satz 8 ist der Schnittpunkt zweier Geraden genau dann ein Fernpunkt, wenn diese zwei Geraden zueinander parallel sind. Somit ist der Punkt $AB \cap DE$, als Schnittpunkt der Geraden AB und DE, genau dann ein Fernpunkt, wenn $AB \parallel DE$ ist; analog ist der Punkt $BC \cap EF$ genau dann ein Fernpunkt, wenn $BC \parallel EF$ ist, und genauso ist der Punkt $CD \cap FA$ genau dann ein Fernpunkt, wenn $CD \parallel FA$ ist. Daher ist die Frage, wieviele von den Punkten $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ Fernpunkte sind, äquivalent zu der Frage, wieviele von den Beziehungen $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$ gelten.

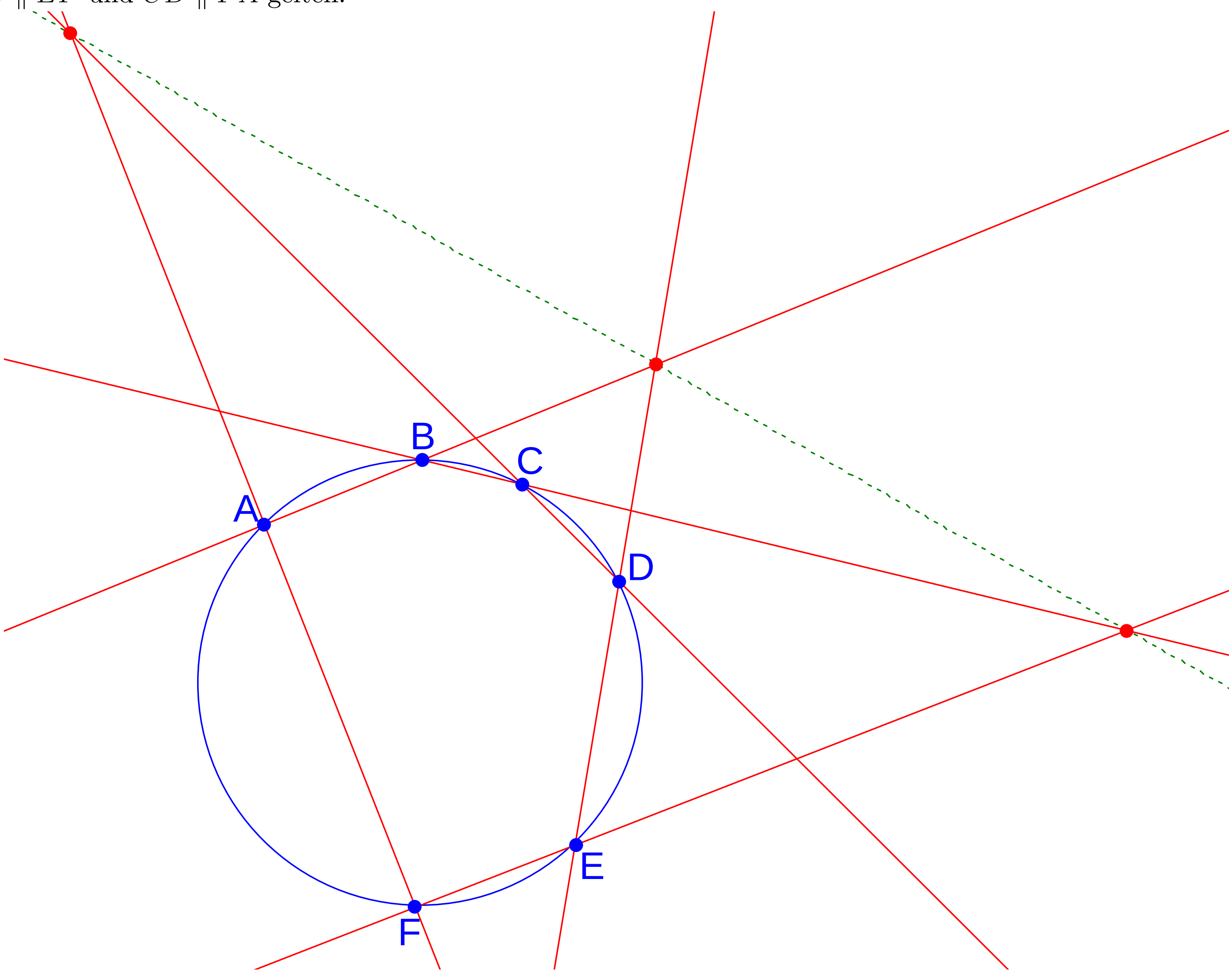

Fig. 14

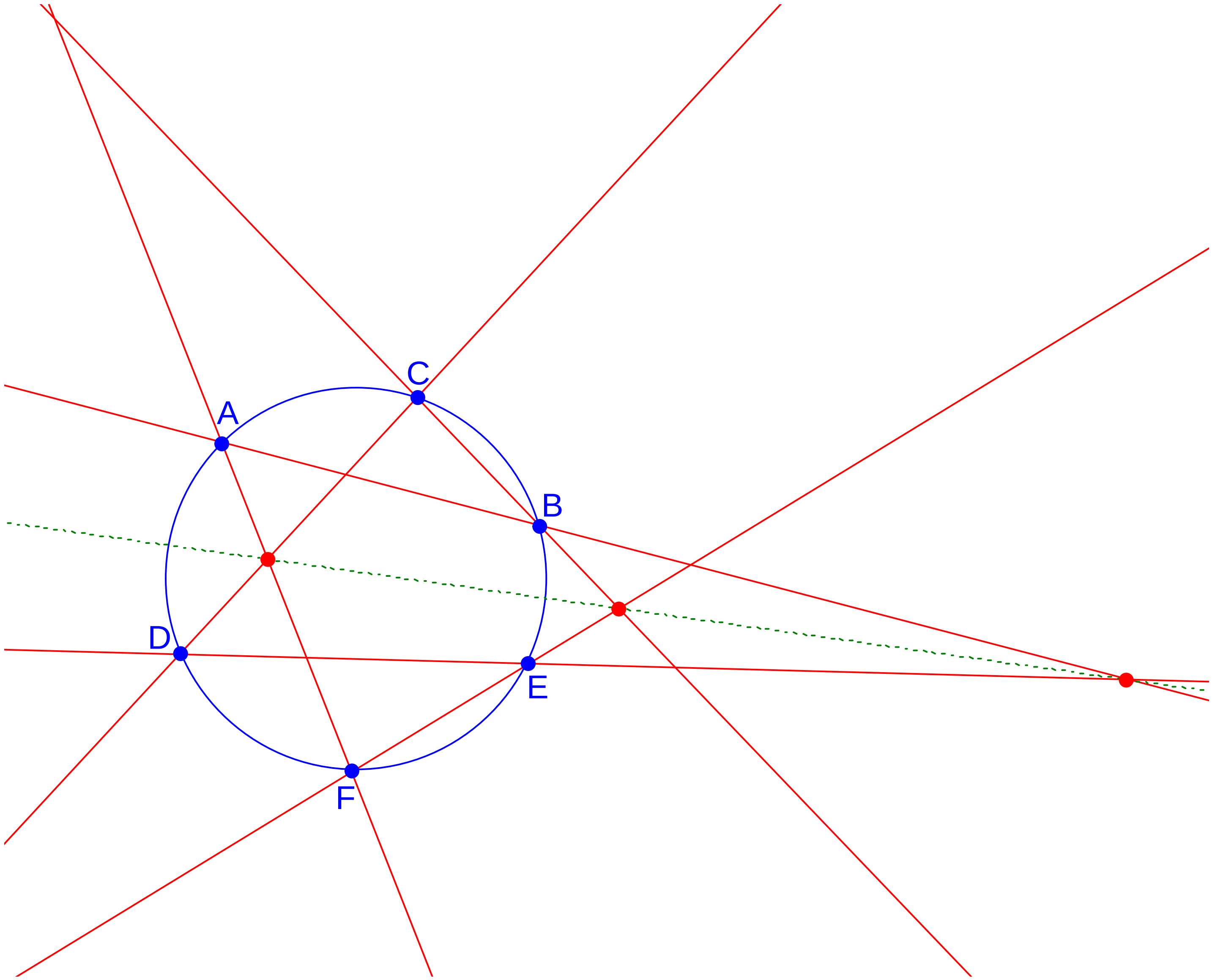

Fig. 15

Betrachten wir zuerst den allgemeinsten Fall, nämlich den Fall, wenn keine der Beziehungen $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$ gilt. Dann ist keiner von den drei Punkten $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ ein Fernpunkt; das heißt, alle diese drei Punkte sind eigentliche Punkte. Nach Satz 9 liegen diese Punkte auf einer Geraden; diese Gerade ist natürlich eine eigentliche Gerade (weil die Punkte $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ eigentliche Punkte sind, und die Ferngerade keine eigentlichen Punkte enthält). (Diesen Fall veranschaulichen die Zeichnungen Fig. 14 und Fig. 15.)

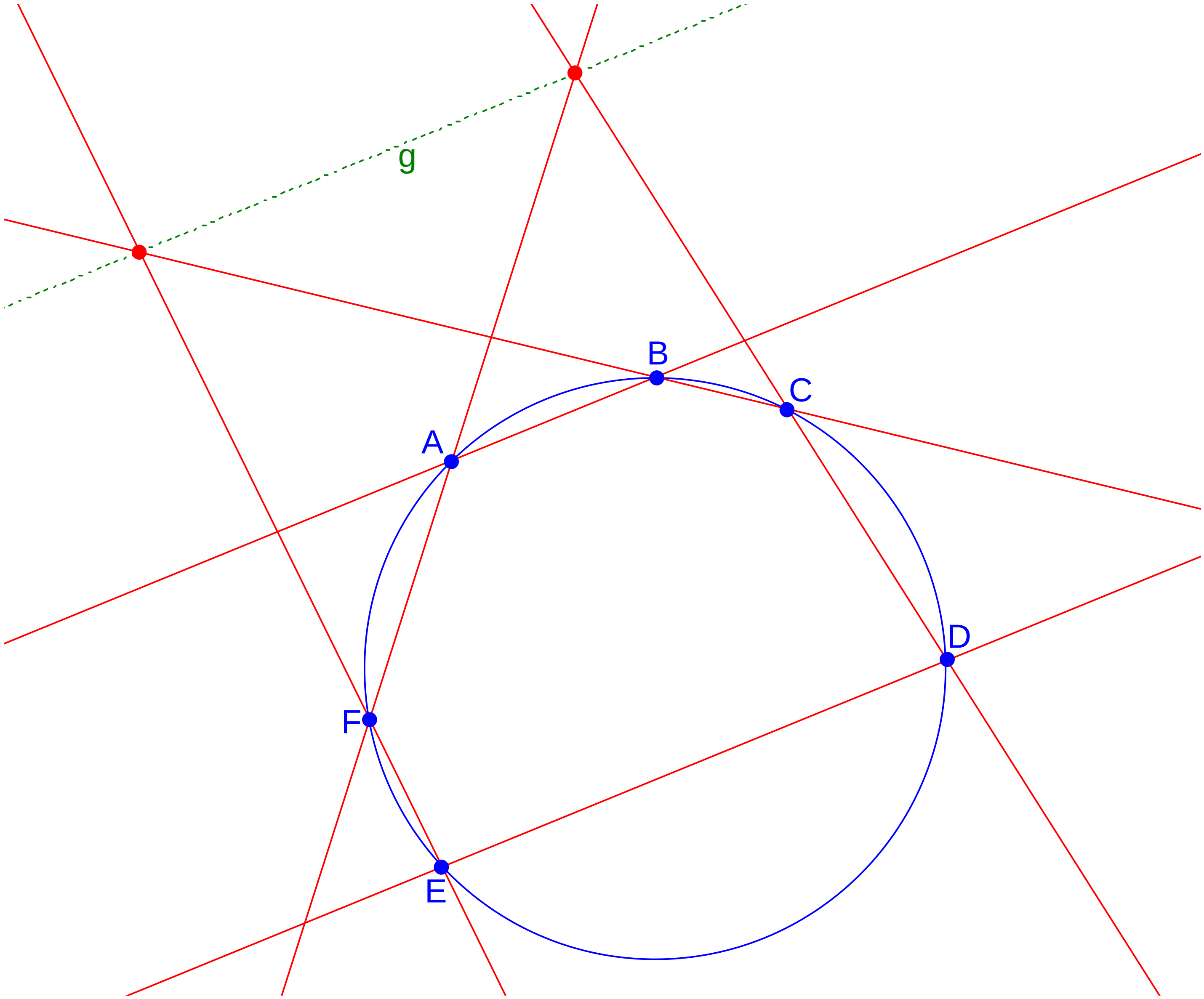

Fig. 16

Kommen wir nun zum Fall, wenn *genau eine* von den drei Beziehungen $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$ gilt. Sei zum Beispiel die Beziehung $AB \parallel DE$ erfüllt, während die Beziehungen $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$ nicht erfüllt sein sollen. Dann ist der Punkt $AB \cap DE$ ein Fernpunkt, während die Punkte $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ keine Fernpunkte, also eigentliche Punkte sind. Satz 9 sagt aus, daß die Punkte $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ auf einer Geraden liegen; diese Gerade ist eine eigentliche Gerade (weil sie durch den eigentlichen Punkt $BC \cap EF$ geht, während die Ferngerade nur durch Fernpunkte geht). Bezeichnen wir diese Gerade mit g. Diese Gerade g hat nun mit der Geraden AB einen gemeinsamen Fernpunkt - nämlich den Punkt $AB \cap DE$. Somit ist sie parallel zu der Geraden AB. Genauso sehen wir, daß diese Gerade g parallel zu der Geraden DE ist. Da nun die Gerade g nichts anderes ist als die Verbindungsgerade der Punkte $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$, können wir also zusammenfassend feststellen: Ist $AB \parallel DE$, dann ist die Verbindungsgerade g der Punkte $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ parallel zu den Geraden AB und DE. (Eine Zeichnung dazu bietet Fig. 16.)

Schließlich betrachten wir den Fall, wenn *mindestens zwei* von den drei Beziehungen $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$ gelten. Beispielsweise sei $AB \parallel DE$ und $BC \parallel EF$. Das heißt, die Punkte $AB \cap DE$ und $BC \cap EF$ sind Fernpunkte. Nun liegen nach Satz 9 die drei Punkte $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ und $CD \cap FA$ auf einer Geraden; diese Gerade muß die Ferngerade sein, denn sie geht durch mindestens zwei verschiedene Fernpunkte (nämlich die Punkte $AB \cap DE$ und $BC \cap EF$), während eine eigentliche Gerade immer nur durch einen Fernpunkt geht. Doch jeder Punkt auf der Ferngeraden ist ein Fernpunkt; somit ist auch der Punkt $CD \cap FA$ ein Fernpunkt. Folglich gilt $CD \parallel FA$.

Wir haben damit gezeigt: Gilt $AB \parallel DE$ und $BC \parallel EF$, dann gilt auch $CD \parallel FA$. Doch dies ist genau die Aussage von Satz 5 ! Somit ist Satz 5 ein Sonderfall von Satz 9.

Damit haben wir eingesehen, daß unser Satz 5, den wir aus einem Schließungssatz (nämlich dem Satz 2) erhalten haben, sich als Sonderfall des berühmten Sazes von Pascal für den Kreis (Satz 9) auffassen läßt. Dies ist nur eine der vielen Anwendungen des Satzes von Pascal. Es sei ferner angemerkt, daß wir mit Satz 9 nur den Satz von Pascal für den Kreis kennengelernt haben; der Satz von Pascal läßt sich jedoch auch auf Kegelschnitte ausdehnen und ermöglicht den Beweis weiterer grundlegender Sätze wie dem Satz von Brianchon. Dies alles würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Literaturhinweise

[1] Wilfried Haag: *Wege zu geometrischen Sätzen*, 1. Auflage Stuttgart 2003.

[2] Hartmut Wellstein: *Heuristische Aktivitäten an der Thomsen-Figur*, Didaktik der Mathematik 4/1976, S. 318-326.

[3] Wolfgang Kroll: *Rundwege und Kreuzfahrten*, Praxis der Mathematik 1/1990 (32), S. 1-9.

[4] Wolfgang Kroll: *Ein problemorientierter Zugang zu den Sätzen von Ceva und Menelaos*, Praxis der Mathematik 5/1991 (33) S. 198-204.

[5] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Geometry Revisited*, Toronto - New York 1967; deutsche Übersetzung: H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*, 1983.

[6] Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo* 180° *und eine Lösung der* $\sqrt{WURZEL}$*-Aufgabe* κ *22 von Wilfried Haag.*
`http://de.geocities.com/darij_grinberg/Dreigeom/Inhalt.html`
teilweise veröffentlicht in: $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 8/2004, S. 170-176, und $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 9+10/2004, S. 226-229.

[7] Richard Courant, Herbert Robbins: *Was ist Mathematik?*, 4. Auflage Berlin - Heidelberg 2000.