6te QEDMO 2009, Aufgabe 4 (die Cauchy-Identität)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Man beweise

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+k)^k (y-k)^{n-k} = \sum_{t=0}^{n} \frac{n!}{t!} (x+y)^t . \tag{1}$$

Bemerkung: Hier bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$ die Menge $\{0, 1, 2, ...\}$ (und nicht die Menge $\{1, 2, 3, ...\}$, wie es einige Autoren tun).

Lösung (Darij Grinberg)

[*Heuristische Vorüberlegung:* Bei der zu beweisenden Identität (1) handelt es sich um eine Gleichheit zwischen den Werten von zwei Polynomen in x und y. Die Werte von zwei Polynomen sind überall gleich, wenn alle ihre entsprechenden Koeffizienten gleich sind, und umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Werte zweier Polynome an allen reellen (oder sogar nur natürlichen) Stellen, daß ihre entsprechenden Koeffizienten gleich sind. Um die Gleichheit (1) für alle x und y zu beweisen, müssen wir also nur nachweisen, daß die entsprechenden Koeffizienten der beiden Polynome auf der linken und auf der rechten Seite identisch sind; und dies ist auch kein Holzweg, denn wenn die Aufgabe richtig ist (d. h. wenn (1) wirklich gilt), dann müssen die Koeffizienten auch gleich sein. Deshalb werden wir nun die linke und die rechte Seite der Gleichung (1) ausmultiplizieren, damit wir die Koeffizienten der Polynome vor uns haben und vergleichen können.]

Wir haben

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+k)^k (y-k)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i k^{k-i} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{(n-k)-j} \binom{n-k}{j} y^j k^{(n-k)-j}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{denn nach der binomischen Formel ist } (x+k)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i k^{k-i} \text{ und} \\ (y-k)^{n-k} = \sum\limits_{j=0}^{n-k} (-1)^{(n-k)-j} \binom{n-k}{j} y^j k^{(n-k)-j} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{i} \cdot \binom{n-k}{j} (-1)^{(n-k)-j} k^{k-i} k^{(n-k)-j} x^i y^j$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{i} \cdot \binom{n-k}{j} (-1)^{(n-k)-j} k^{n-(i+j)} x^i y^j$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=i}^{n-j} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{i} \cdot \binom{n-k}{j} (-1)^{(n-k)-j} k^{n-(i+j)} x^i y^j$$

(denn die Summation $\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{i=0}^{k} \sum\limits_{j=0}^{n-k}$ läßt sich auch als $\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n-i} \sum\limits_{k=i}^{n-j}$ schreiben, weil die Mengen

$$\left\{ (k, i, j) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \leq k \leq n \text{ und } 0 \leq i \leq k \text{ und } 0 \leq j \leq n-k \right\} \text{ und}$$
$$\left\{ (k, i, j) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \leq i \leq n \text{ und } 0 \leq j \leq n-i \text{ und } i \leq k \leq n-j \right\}$$

gleich sind) und

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{n!}{t!} \underbrace{(x+y)^t}_{\substack{=\sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} x^i y^{t-i} \\ \text{nach der binomischen Formel}}} = \sum_{t=0}^{n} \frac{n!}{t!} \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} x^i y^{t-i} = \sum_{t=0}^{n} \frac{n!}{t!} \sum_{i=0}^{t} \frac{t!}{i!\,(t-i)!} x^i y^{t-i}$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \sum_{i=0}^{t} \frac{n!}{i!\,(t-i)!} x^i y^{t-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{t=i}^{n} \frac{n!}{i!\,(t-i)!} x^i y^{t-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j$$

$$\text{(hier haben wir } j \text{ für } t-i \text{ substituiert)}.$$

Die zu beweisende Gleichheit (1) ist daher äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=i}^{n-j} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{i} \cdot \binom{n-k}{j} (-1)^{(n-k)-j} k^{n-(i+j)} x^i y^j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j.$$

Um diese Gleichheit zu beweisen, reicht es offensichtlich aus, wenn wir zeigen, daß für alle $i \in \{0, 1, ..., n\}$ und alle $j \in \{0, 1, ..., n-i\}$ die Identität

$$\sum_{k=i}^{n-j} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{i} \cdot \binom{n-k}{j} (-1)^{(n-k)-j} k^{n-(i+j)} = \frac{n!}{i!j!} \tag{2}$$

gilt.

[*Heuristische Anmerkung:* Wir haben also die Identität (1) auf die zu ihr äquivalente Identität (2) zurückgeführt. Dies ist schon deshalb ein Fortschritt, weil (2) weniger Variablen als (1) enthält (x und y sind weg). Jetzt ist es an der Zeit, in der linken Seite von (2) "aufzuräumen": Man kann die drei Binomialkoeffizienten nach der Formel $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!}$ (für $0 \leq b \leq a$) auflösen und hoffen, daß sich einige der Fakultäten gegenseitig kürzen und andere Fakultäten kein k enthalten und damit vor das Summenzeichen gestellt werden können.]

Für alle $i \in \{0, 1, ..., n\}$, alle $j \in \{0, 1, ..., n-i\}$ und alle $k \in \{i, i+1, ..., n-j\}$ ist nun

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{i} \cdot \binom{n-k}{j} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{k!}{i!\,(k-i)!} \cdot \frac{(n-k)!}{j!\,((n-j)-k)!}$$

$$= \frac{1}{(n-i-j)!} \cdot \frac{n!}{i!j!} \cdot \frac{(n-i-j)!}{((n-j)-k)!\,(k-i)!} = \frac{1}{(n-i-j)!} \cdot \frac{n!}{i!j!} \cdot \binom{n-i-j}{(n-j)-k}$$

(denn $\frac{(n-i-j)!}{((n-j)-k)!\,(k-i)!} = \frac{(n-i-j)!}{((n-j)-k)!\,((n-i-j)-((n-j)-k))!} = \binom{n-i-j}{(n-j)-k}$), und somit ist (2) äquivalent zu

$$\sum_{k=i}^{n-j} \frac{1}{(n-i-j)!} \cdot \frac{n!}{i!j!} \cdot \binom{n-i-j}{(n-j)-k} (-1)^{(n-k)-j} k^{n-(i+j)} = \frac{n!}{i!j!}.$$

Nach Multiplikation mit $\dfrac{(n-i-j)!i!j!}{n!}$ vereinfacht sich diese Gleichheit zu

$$\sum_{k=i}^{n-j} \binom{n-i-j}{(n-j)-k} (-1)^{(n-k)-j} k^{n-(i+j)} = (n-i-j)!. \tag{3}$$

Wir müssen also diese Gleichung (3) beweisen.

[*Heuristische Anmerkung:* Diese Gleichung (3) sieht so aus, als könnte man sie noch ein wenig weiter vereinfachen. Erstmal kommt das i fast nur im Kontext von $n-i-j$ vor; die einzige Ausnahme ist die untere Schranke in der Summe (aber Summenschranken sind nicht so wichtig; sie geben eh nur den Bereich an, in dem der Binomialkoeffizient $\binom{n-i-j}{(n-j)-k}$ einen von 0 verschiedenen Wert hat). Wir entscheiden uns also, $n-i-j$ durch eine neue Variable N abzukürzen.]

Sei $N = n-i-j = n-(i+j)$. Dann ist $i = n-j-N$, und die Gleichung (3) nimmt die äquivalente Form

$$\sum_{k=n-j-N}^{n-j} \binom{N}{(n-j)-k} (-1)^{(n-k)-j} k^N = N! \tag{4}$$

an. Wohlgemerkt ist $N \geq 0$ (denn $j \in \{0,1,...,n-i\}$ impliziert $i+j \leq n$, also $N = n-i-j \geq 0$).

[*Heuristische Anmerkung:* Auch die Gleichung (4) läßt sich noch ein Stück weiter vereinfachen: Der Summenindex k kommt fast nur im Kontext von $n-j-k$ vor (außer in k^N). Auch die Summenschranken sprechen dafür, daß man den Summenindex k durch $n-j-k$ substituieren sollte.]

Nun ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=n-j-N}^{n-j} \binom{N}{(n-j)-k} (-1)^{(n-k)-j} k^N &= \sum_{k=n-j-N}^{n-j} \binom{N}{n-j-k} (-1)^{n-j-k} k^N \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k (n-j-k)^N\end{aligned}$$

(hier haben wir den Summenindex k durch $n-j-k$ substituiert). Die zu beweisende Gleichung (4) ist folglich äquivalent zu

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k (n-j-k)^N = N!. \tag{5}$$

[*Heuristische Anmerkung:* Jetzt stellen wir fest, daß j in der Gleichung (5) nur einmal vorkommt, und zwar im Kontext von $n-j$. Es wird uns also nicht schaden, $n-j$ mit U abzukürzen.]

Sei $U = n - j$. Dann ist die Gleichung (5) äquivalent zu

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k (U-k)^N = N!. \tag{6}$$

Diese Gleichung (6) müssen wir also beweisen.

Unsere Relationen $i \in \{0, 1, ..., n\}$ und $j \in \{0, 1, ..., n-i\}$ führen auf $U \geq N \geq 0$.

[*Heuristische Anmerkung:* Eine Relation wie (6) *muss* einfach bekannt sein, wenn sie gilt. Und natürlich ist sie auch bekannt, mit verschiedenen Beweisen. Wir führen im Folgenden verschiedene Beweise vor.]

Erster Beweis von (6) *(durch doppeltes Abzählen mithilfe der Sylvesterschen Siebformel):*

Folgender Beweis von (6) verwendet $U \geq N \geq 0$ und $U \in \mathbb{N}$.

Für jede natürliche Zahl n bezeichne $\underline{n}$ die Menge $\{1, 2, ..., n\}$.

Eine Abbildung $f : \underline{N} \to \underline{U}$ heiße *pseudosurjektiv*, wenn $\underline{N} \subseteq f(\underline{N})$ ist. Wieviele pseudosurjektive Abbildungen $f : \underline{N} \to \underline{U}$ gibt es?[1]

Einerseits eine Abbildung $f : \underline{N} \to \underline{U}$ ist genau dann pseudosurjektiv, wenn $\underline{N} = f(\underline{N})$ ist (denn $\underline{N} \subseteq f(\underline{N})$ ist äquivalent zu $\underline{N} = f(\underline{N})$, weil $|\underline{N}| \geq |f(\underline{N})|$ ist). Doch Abbildungen $f : \underline{N} \to \underline{U}$, die $\underline{N} = f(\underline{N})$ erfüllen, sind einfach surjektive Abbildungen $\underline{N} \to \underline{N}$, deren Bildbereich "künstlich" zu $\underline{U}$ erweitert wurde. Es gibt genau $N!$ surjektive Abbildungen $\underline{N} \to \underline{N}$ (denn eine Abbildung $\underline{N} \to \underline{N}$ ist genau dann surjektiv, wenn sie bijektiv ist, also wenn sie eine Permutation ist, und es gibt genau $N!$ Permutationen von $\underline{N}$). Somit gibt es genau $N!$ Abbildungen $f : \underline{N} \to \underline{U}$, die $\underline{N} = f(\underline{N})$ erfüllen, also genau $N!$ pseudosurjektive Abbildungen $f : \underline{N} \to \underline{U}$.

Andererseits ist eine Abbildung $f : \underline{N} \to \underline{U}$ genau dann pseudosurjektiv, wenn für kein einziges $i \in \underline{N}$ die Beziehung $i \notin f(\underline{N})$ gilt. Für jede k-elementige Teilmenge I von $\underline{N}$ ist die Anzahl aller Abbildungen $f : \underline{N} \to \underline{U}$, die $i \notin f(\underline{N})$ für alle $i \in I$ erfüllen, gleich $(U-k)^N$ (denn eine Abbildung $f : \underline{N} \to \underline{U}$ erfüllt genau dann $i \notin f(\underline{N})$ für alle $i \in I$, wenn $f(\underline{N}) \subseteq \underline{U} \setminus I$ ist, d. h. wenn sie eine Abbildung von $\underline{N}$ nach $\underline{U} \setminus I$ ist, deren Bildbereich "künstlich" zu $\underline{U}$ erweitert wurde; folglich gibt es genau $|\underline{U} \setminus I|^N$ solcher Abbildungen, also genau $(U-k)^N$, weil $|I| = k$ und damit $|\underline{U} \setminus I| = U - k$ ist). Nach der Sylvesterschen Siebformel (auch Prinzip der Inklusion und Exklusion genannt) ist die Anzahl aller pseudosurjektiver Abbildungen $f : \underline{N} \to \underline{U}$ also gleich $\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (U-k)^N$.

Diese Anzahl ist somit einerseits gleich $\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (U-k)^N$, andererseits gleich

[1] Dieselbe Fragestellung, anders formuliert:

Wir wollen die N Zahlen 1, 2, ..., N färben, und haben U verschiedene Farben F_1, F_2, ..., F_U zur Auswahl. Eine Färbung heiße *pseudosurjektiv*, wenn die N Farben F_1, F_2, ..., F_N jeweils mindestens einmal in ihr vorkommen. Wieviele pseudosurjektive Färbungen gibt es?

Wer lieber mit Färbungen als mit Abbildungen arbeitet, kann den folgenden Beweis gerne in eine farbenfrohe Sprache übersetzen (die Farben entsprechen den Elementen von $\underline{U}$, die N Zahlen sind die Elemente von $\underline{N}$, und die Abbildung f bildet jede Zahl auf ihre Farbe ab), aber mit Abbildungen lassen sich Argumente kürzer formulieren.

$N!$. Daher ist

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (U-k)^N = N!,$$

und (6) ist bewiesen.

Zweiter Beweis von (6) *(durch Verallgemeinerung und Induktion):*
Wir zeigen (6) und mehr (denn mehr zu beweisen ist oftmals einfacher):

Satz 1: Seien $N \in \mathbb{N}$ und $U \in \mathbb{R}$. [2] Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (U-k)^\ell = 0 \qquad \text{für jedes } \ell \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{7}$$

und

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (U-k)^N = N!. \tag{8}$$

Beweis von Satz 1: Wir werden Satz 1 durch vollständige Induktion nach N bewiesen. Für $N = 0$ ist Satz 1 trivial (die Gleichung (7) macht in diesem Fall überhaupt keine Aussage, und (8) wird zu $(-1)^0 \binom{0}{0} (U-0)^0 = 0!$, was eine Übung im sehr kleinen Einmaleins ist). Damit ist der Induktionsanfang schon erledigt. Der Induktionsschritt verläuft folgendermaßen:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, Satz 1 gelte für $N = n$. Um den Induktionsschritt abzuschließen, müssen wir nun nachweisen, daß Satz 1 auch für $N = n+1$ gültig ist.

Laut unserer Annahme gilt Satz 1 für $N = n$; das heißt, es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^\ell = 0 \qquad \text{für jedes } \ell \in \{0, 1, ..., n-1\} \tag{9}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^n = n!. \tag{10}$$

[2]Statt $\mathbb{R}$ könnte hier ein beliebiger kommutativer Ring mit Eins stehen, aber wir brauchen die Aussage nur für $\mathbb{R}$ (sogar nur für $\mathbb{Z}$). Man beachte insbesondere, daß wir $U \geq N$ und $U \in \mathbb{N}$ nicht mehr benötigen!

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (U-k)^m = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) (U-k)^m$$

$$\left(\text{denn } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \text{ nach der Rekursionsgleichung der Binomialkoeffizienten} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^m + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} (U-k)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^m + \sum_{k=-1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (U-(k+1))^m$$

(hier haben wir $k+1$ für k in der zweiten Summe substituiert)

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^m + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^{k+1}}_{=-(-1)^k} \binom{n}{k} \underbrace{(U-(k+1))^m}_{=((U-k)-1)^m}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{hier haben wir } \sum\limits_{k=0}^{n+1} \text{ und } \sum\limits_{k=-1}^{n} \text{ jeweils durch } \sum\limits_{k=0}^{n} \text{ ersetzt; damit sind zwei} \\ \text{Terme aus den Summen herausgefallen, die aber beide 0 waren,} \\ \text{da } \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k=-1 \text{ und für } k=n+1 \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^m - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} ((U-k)-1)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} ((U-k)^m - ((U-k)-1)^m)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(- \sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} (U-k)^\ell \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{denn nach der binomischen Formel ist} \\ ((U-k)-1)^m = \sum\limits_{\ell=0}^{m} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} (U-k)^\ell = \sum\limits_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} (U-k)^\ell + (U-k)^m \\ \text{und damit } (U-k)^m - ((U-k)-1)^m = - \sum\limits_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} (U-k)^\ell \end{array} \right)$$

$$= - \sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^\ell . \qquad (11)$$

Für jedes $m \in \{0, 1, ..., n\}$ folgt hieraus

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (U-k)^m = -\sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^\ell}_{\substack{=0 \text{ nach (9), denn aus} \\ 0 \leq \ell \leq m-1 \text{ und } m \in \{0,1,...,n\} \\ \text{folgt } \ell \in \{0,1,...,n-1\}}}$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} 0 = 0.$$

Wir haben also gezeigt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (U-k)^m = 0 \qquad \text{für jedes } m \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Das heißt, (7) gilt für $N = n + 1$.

Andererseits liefert (11) (angewandt auf $m = n + 1$) folgendes:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (U-k)^{n+1} = -\sum_{\ell=0}^{(n+1)-1} (-1)^{(n+1)-\ell} \binom{n+1}{\ell} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^\ell$$
$$= -\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{(n+1)-\ell} \binom{n+1}{\ell} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^\ell. \tag{12}$$

In der Summe

$$\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{(n+1)-\ell} \binom{n+1}{\ell} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^\ell$$

sind die Summanden für $\ell < n$ alle gleich 0 (denn für $\ell < n$ ist $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^\ell = 0$ nach (9), weil $\ell \in \{0, 1, ..., n-1\}$). Diese Summe ist deshalb gleich ihrem Summanden für $\ell = n$, also gleich

$$\underbrace{(-1)^{(n+1)-n}}_{=-1} \underbrace{\binom{n+1}{n}}_{=n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (U-k)^n}_{=n! \text{ nach (10)}} = -(n+1)\, n! = -(n+1)!.$$

Damit wird (12) zu

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (U-k)^{n+1} = -(-(n+1)!) = (n+1)!.$$

Mit anderen Worten: (8) gilt für $N = n + 1$.

Somit sind (7) und (8) beide für $N = n+1$ bewiesen. Daher gilt Satz 1 für $N = n+1$, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen. Satz 1 ist also bewiesen.

Dritter Beweis von (6) *(mithilfe endlicher Differenzen; skizziert):*

Wir wollen zuerst kurz erläutern, was endliche Differenzen sind:

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$g(x) = f(x) - f(x-1) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

definiert wird, heißt die *erste endliche Differenz* (oder auch *erste finite Differenz*) der Funktion f und wird oft $\Delta(f)$ genannt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *n-te endliche Differenz* (oder auch *n-te finite Differenz*) der Funktion f als $\underbrace{\Delta(\Delta(\ldots(\Delta(f))))}_{n \text{ mal } \Delta}$, und bezeichnen sie mit $\Delta^n(f)$. Zum Beispiel ist $\Delta^0(f) = f$, $\Delta^1(f) = \Delta(f)$ und $\Delta^4(f) = \Delta(\Delta(\Delta(\Delta(f))))$.

Folgende zwei Eigenschaften endlicher Differenzen sind leicht durch vollständige Induktion zu beweisen:

Satz 2 (explizite Beschreibung der n-ten endlichen Differenz): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $N \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\Delta^N(f)\right)(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} f(x-k).$$

Satz 3 (endliche Differenzen von Polynomen): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, die aus einem Polynom von Grad d und mit Leitkoeffizient a entsteht. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $\Delta^N(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, die aus einem Polynom von Grad $d - N$ und mit Leitkoeffizient $d \cdot (d-1) \cdot \ldots \cdot (d-N+1) \cdot a$ entsteht. (Ausnahme ist dabei der Fall $d < N$; in diesem Fall ist der Grad nicht $d - N$, sondern undefiniert, und $\Delta^N(f)$ ist identisch 0.)

Satz 3 zeigt, daß die N-te endliche Differenz sich ähnlich zur N-ten Ableitung verhält. In der Tat ist die N-te endliche Differenz eine Art diskretes Analogon der N-ten Ableitung; wir wollen aber nicht darauf eingehen.

Wendet man Satz 3 auf die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^N$ an, so erhält man, daß $\Delta^N(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion ist, die aus einem Polynom von Grad $N-N$ und mit Leitkoeffizient $N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-N+1) \cdot 1$ entsteht. Grad $N - N = 0$ bedeutet eine konstante Polynomfunktion, und der Leitkoeffizient ist $N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-N+1) \cdot 1 = N!$; somit ist die Funktion $\Delta^N(f)$ identisch gleich $N!$, und nach Satz 2 ergibt sich hieraus (6), was zu beweisen war.

Vierter Beweis von (6) *(wieder durch Verallgemeinerung, diesmal auch mit Polynom-Beschwörung; skizziert):*

Unser nächster Beweis von (6) wird wieder verallgemeinern:

Satz 4: Sei $N \in \mathbb{N}$, und sei P ein Polynom in einer Variablen X über $\mathbb{R}$. Angenommen, $\deg P \leq N$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} P(-k) = N! p_N,$$

wobei p_N der Koeffizient des Polynoms P vor X^N ist (insbesondere setzen wir $p_N = 0$, wenn $\deg P < N$ ist).

Dieser Satz 4 (angewandt auf das Polynom $P(X) = (U+X)^\ell$ bzw. $P(X) = (U+X)^N$) ergibt sofort Satz 1, und, wie wir wissen, ergibt Satz 1 die zu beweisende Formel (6). Somit reicht es uns aus, Satz 4 zu beweisen.

Wir benötigen folgendes Lemma:

Satz 5: Sei $N \in \mathbb{N}$, und sei P ein Polynom in einer Variablen X über $\mathbb{R}$. Angenommen, $\deg P \leq N$. Dann gibt es $N+1$ reelle Zahlen $a_0, a_1, ..., a_N$ so, daß $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{N} a_i \binom{X}{i}$ ist.

Hierbei ist das Polynom $\binom{X}{k}$ definiert als $\dfrac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Außerdem ist $a_N = N! p_N$, wobei p_N der Koeffizient des Polynoms P vor X^N ist (insbesondere setzen wir $p_N = 0$, wenn $\deg P < N$ ist).

Hinweis zum Beweis von Satz 5: Das Polynom $P(X) - N! p_N \binom{X}{N}$ hat einen Grad von höchstens $N-1$ (denn die Terme mit X^N in $P(X)$ und $N! p_N \binom{X}{N}$ kürzen sich gerade heraus). Auf diese Weise können wir Satz 5 durch Induktion nach N beweisen.

Hinweis zum Beweis von Satz 4: Wir müssen beweisen, daß

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} P(-k) = N! p_N$$

ist. Wir werden allgemeiner zeigen, daß das Polynom

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} P(X-k)$$

gleich dem konstanten Polynom $N! p_N$ ist. Gleichheit von Polynomen ist bereits gezeigt, wenn sie an einer Stelle gleich sind, und ihre Ableitungen identisch sind. Die Gleichheit der Ableitungen ist genau die Aussage von Satz 4 für das Polynom P' statt P; da $\deg P' < \deg P$ ist, können wir also diese Gleichheit als gegeben annehmen, indem wir eine Induktion nach $\deg P$ durchführen. Es bleibt also zu zeigen, daß die Polynome $\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} P(X-k)$ und $N! p_N$ an einer Stelle gleich sind. Wir betrachten die Stelle $X = N$; wir müssen dann also beweisen, daß

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} P(N-k) = N! p_N$$

ist. Nach Satz 5 gibt es $N+1$ reelle Zahlen $a_0, a_1, ..., a_N$ so, daß $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{N} a_i \binom{X}{i}$ ist, und es gilt $a_N = N! p_N$. Damit ist

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} P(N-k) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N} a_i \binom{N-k}{i} = \sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \binom{N-k}{i}.$$

Wegen

$$\binom{N}{k}\binom{N-k}{i} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\cdot\frac{(N-k)!}{i!\,(N-k-i)!} = \frac{N!}{i!\,(N-i)!}\frac{(N-i)!}{k!\,(N-k-i)!} = \binom{N}{i}\binom{N-i}{k}$$

wird dies zu

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}P(N-k) &= \sum_{i=0}^{N}a_i\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N}{i}\binom{N-i}{k} \\ &= \sum_{i=0}^{N}a_i\binom{N}{i}\qquad\underbrace{\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N-i}{k}}_{\substack{\text{dies ist die alternierende Summe der } (N-i)\text{-ten} \\ \text{Zeile des Pascalschen Dreiecks; sie ist } =0 \text{ für} \\ N-i>0 \text{ (also für } i<N) \text{ und } =1 \text{ für } N-i=0 \text{ (also für } i=N)}} \\ &= \underbrace{a_N}_{=N!p_N}\underbrace{\binom{N}{N}}_{=1}\cdot 1 = N!p_N,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. Damit ist (6) erneut bewiesen.

Bemerkung: Die Identität (1) ist nicht neu; sie stammt von Cauchy und wurde in [1], section 1.5 behandelt.

Eine ähnliche (aber bekanntere) Identität stammt von Abel (siehe dazu auch [1], section 1.5 sowie [2], Theorem 5 in section 3.1):

Satz 6: Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Ist $x \neq 0$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x\,(x+k)^{k-1}\,(y-k)^{n-k} = (x+y)^n\,.$$

(Dies gilt sogar für $x = 0$, wenn man im Falle von $k = 0$ den Term $x\,(x+k)^{k-1}$ als 1 auffasst, was für $x \neq 0$ ja auch stimmt.)

Beweis von Satz 6: Wenden wir (1) auf $n-1$, $x+1$ und $y-1$ statt n, x bzw. y an, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left((x+1)+k\right)^k\left((y-1)-k\right)^{(n-1)-k} = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{t!}\left((x+1)+(y-1)\right)^t\,. \tag{13}$$

Nun ist

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\left(x+k\right)^{k-1}\left(y-k\right)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\left(x+k\right)^{k-1}\left(y-k\right)^{n-k}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{hier haben wir das Zeichen } \sum\limits_{k=0}^{n} \text{ durch } \sum\limits_{k=1}^{n} \text{ ausgetauscht, denn für } k=0 \text{ steht} \\ \text{in der Summe ein 0}\end{array}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n\left(\underbrace{x+k}_{=(x+1)+(k-1)}\right)^{k-1}\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{y-k}_{=(y-1)-(k-1)}\right)^{n-k}}_{=((y-1)-(k-1))^{n-k}}}_{=((y-1)-(k-1))^{(n-1)-(k-1)}}$$

$$\left(\text{denn } \binom{n}{k}k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}k=\frac{n\cdot(n-1)!}{(k\cdot(k-1)!)\cdot(n-k)!}k=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}n=\binom{n-1}{k-1}n\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n\left((x+1)+(k-1)\right)^{k-1}\left((y-1)-(k-1)\right)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}n\left((x+1)+k\right)^{k}\left((y-1)-k\right)^{(n-1)-k}$$

(hier haben wir $k-1$ für k substituiert)

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left((x+1)+k\right)^{k}\left((y-1)-k\right)^{(n-1)-k}$$

$$=n\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{t!}\left((x+1)+(y-1)\right)^{t} \qquad \text{(nach (13))}$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1}\underbrace{\frac{n\,(n-1)!}{t!}}_{=\frac{n!}{t!}}\left(\underbrace{(x+1)+(y-1)}_{=x+y}\right)^{t}=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{n!}{t!}\left(x+y\right)^{t}. \tag{14}$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{x}_{=(x+k)-k}(x+k)^{k-1}(y-k)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{((x+k)-k)(x+k)^{k-1}}_{=(x+k)^{k}-k(x+k)^{k-1}}(y-k)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((x+k)^{k}-k(x+k)^{k-1}\right)(y-k)^{n-k}$$
$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+k)^{k}(y-k)^{n-k}}_{=\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!}(x+y)^{t}\text{ nach (1)}}-\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(x+k)^{k-1}(y-k)^{n-k}}_{=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{n!}{t!}(x+y)^{t}\text{ nach (13)}}$$
$$=\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!}(x+y)^{t}-\sum_{t=0}^{n-1}\frac{n!}{t!}(x+y)^{t}=\underbrace{\frac{n!}{n!}}_{=1}(x+y)^{n}=(x+y)^{n}.$$

Damit ist Satz 6 bewiesen.

Man kann weitergehen und sowohl die Aufgabe, als auch Satz 6 auf mehrere Variablen verallgemeinern. Man erhält die ersten zwei der sogenannten *Hurwitzidentitäten*:

Satz 7: Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Seien x_1, x_2, ..., x_m reelle Zahlen. Dann ist

$$\sum_{\substack{(k_1,k_2,...,k_m)\in\mathbb{N}^m;\\ k_1+k_2+...+k_m=n}}\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}\prod_{j=1}^{m}(x_j+k_j)^{k_j}$$
$$=\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!}\binom{m+n-t-2}{n-t}(n+(x_1+x_2+...+x_m))^{t}.$$

Satz 8: Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Seien x_1, x_2, ..., x_m reelle Zahlen, von denen die ersten $m-1$ von 0 verschieden sind (was, wie in Satz 6, eigentlich überflüssig ist, wenn man $x_i\,(x_i+k_i)^{k_i-1}$ als 1 auffasst für $k_i = 0$). Dann ist

$$\sum_{\substack{(k_1,k_2,...,k_m)\in\mathbb{N}^m;\\ k_1+k_2+...+k_m=n}}\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}\prod_{j=1}^{m-1}(x_j+k_j)^{k_j-1}\cdot(x_m+k_m)^{k_m}=(n+(x_1+x_2+...+x_m))^{n}.$$

Wir wollen die (langwierigen) Induktionsbeweise dieser beiden Sätze nicht anführen, und verweisen den Leser stattdessen auf [1], section 1.6. (Oder [3], welches ich aber nur geschrieben habe, um mich selber von den Beweisen zu überzeugen.)

Literaturhinweise

[1] John Riordan, *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, 1968.

[2] Louis Comtet, *Advanced Combinatorics*, Revised and enlarged edition, D. Reidel, 1974.

[3] Darij Grinberg, *6th QEDMO 2009, Problem 4 (the Cauchy identity).*
`http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/QEDMO6P4long.pdf`