

QED-Mathematikolympiade 4: Aufgaben und Lösungen

Geometrie (Version 1)

Darij Grinberg

Vorbemerkung: Für die nachfolgenden Aufgaben und Lösungen gelten folgende Konventionen:

- Im Folgenden wird bei allen Beweisen auf Anordnungsüberlegungen und Fallunterscheidungen hinsichtlich der verschiedenen möglichen Anordnungen der Punkte verzichtet. Es wird nur der Anordnungsfall behandelt, der auf den zur Aufgabe gehörenden Zeichnungen abgebildet ist. Die anderen Fälle lassen sich analog behandeln.
- Wir werden uns nur mit ebener Geometrie beschäftigen, d. h. alle im Folgenden erwähnten Punkte liegen auf einer Ebene.
- Wir bezeichnen mit $|P_1P_2\dots P_n|$ den (nicht-gerichteten) Flächeninhalt eines beliebigen n -Ecks $P_1P_2\dots P_n$.
- Soweit nicht anders gesagt, werden wir *nicht-orientierte Strecken*, *Winkel* und *Flächeninhalte* benutzen. Jedoch werden in der Lösung der Aufgabe G2 auch *orientierte Flächeninhalte* verwendet. Daher geben wir am Anfang dieser Lösung eine Definition dieses Konzeptes und zeigen seine wichtigsten Eigenschaften auf. Ferner werden in einigen der Bemerkungen zu Aufgabe G2 auch orientierte Strecken verwendet.

Aufgabe G1

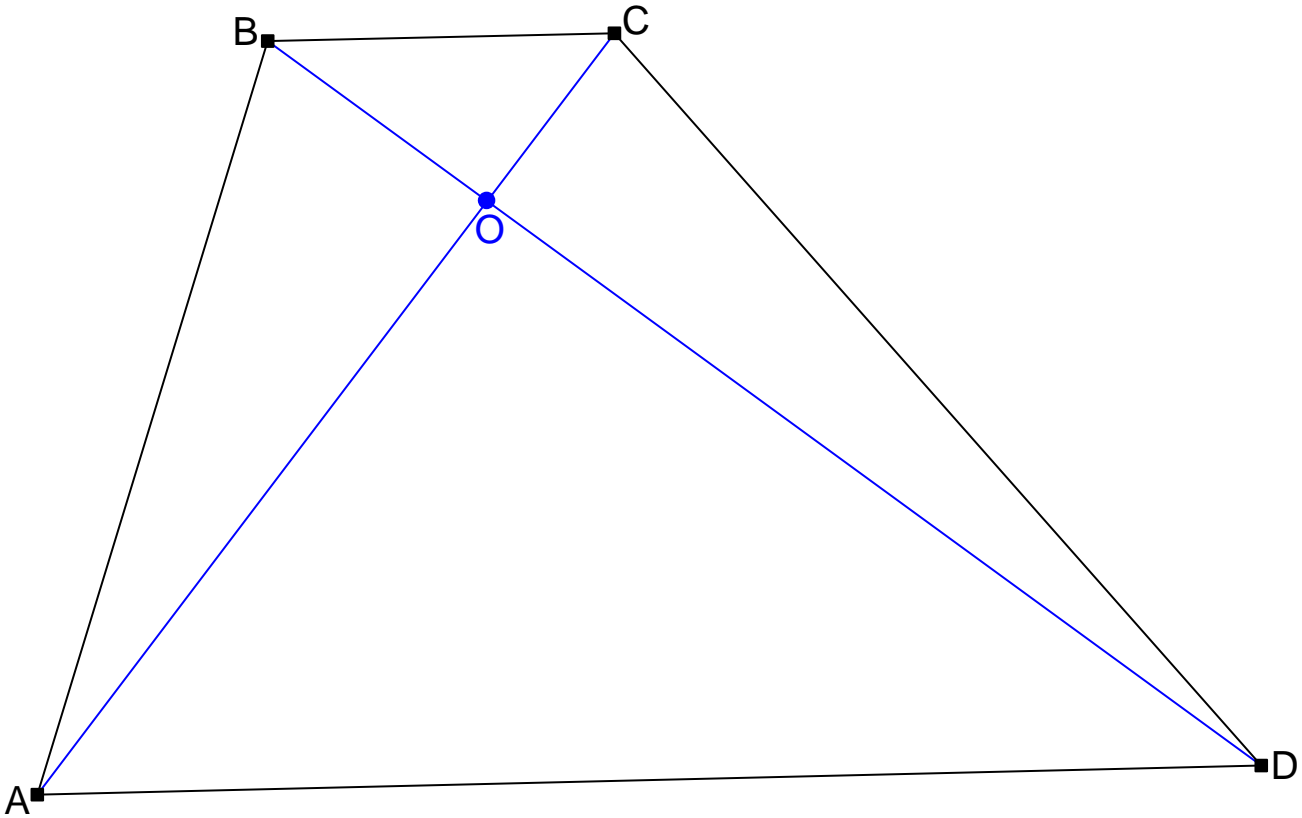


Fig. G1.1

Sei $ABCD$ ein Trapez mit $BC \parallel AD$, und sei O der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD dieses Trapezes. Man beweise: $|ABCD| = \left(\sqrt{|BOC|} + \sqrt{|DOA|} \right)^2$. (Siehe Fig. G1.1.)

Lösung der Aufgabe G1

Bevor wir die Aufgabe lösen, zeigen wir einige Hilfssätze.

Ein aus der Schule bekannter Sachverhalt über Flächeninhalte ist der sogenannte **Scherungssatz**. Er besagt folgendes: Sind P_1, P_2, P_3 und P_4 vier Punkte mit $P_3P_4 \parallel P_1P_2$, dann gilt $|P_1P_2P_3| = |P_1P_2P_4|$.

Nun zeigen wir unseren allerersten Hilfssatz (Fig. G1.1):

Satz G1.1: Sei $ABCD$ ein Trapez mit $BC \parallel AD$, und sei O der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD dieses Trapezes. Dann ist $|AOB| = |COD|$.

Beweis von Satz G1.1: Wegen $BC \parallel AD$ gilt nach dem Scherungssatz $|ADB| = |ADC|$, also $|AOB| = |ADB| - |AOD| = |ADC| - |AOD| = |COD|$. Damit ist Satz G1.1 bewiesen.

Ferner gilt (Fig. G1.2):

Satz G1.2: Seien P, U, U', V und V' fünf Punkte, sodaß die Punkte P, U und U' auf einer Geraden liegen, und die Punkte P, V und V' auf einer Geraden liegen. Dann gilt $\frac{|UPV|}{|U'PV'|} = \frac{PU \cdot PV}{PU' \cdot PV'}$.

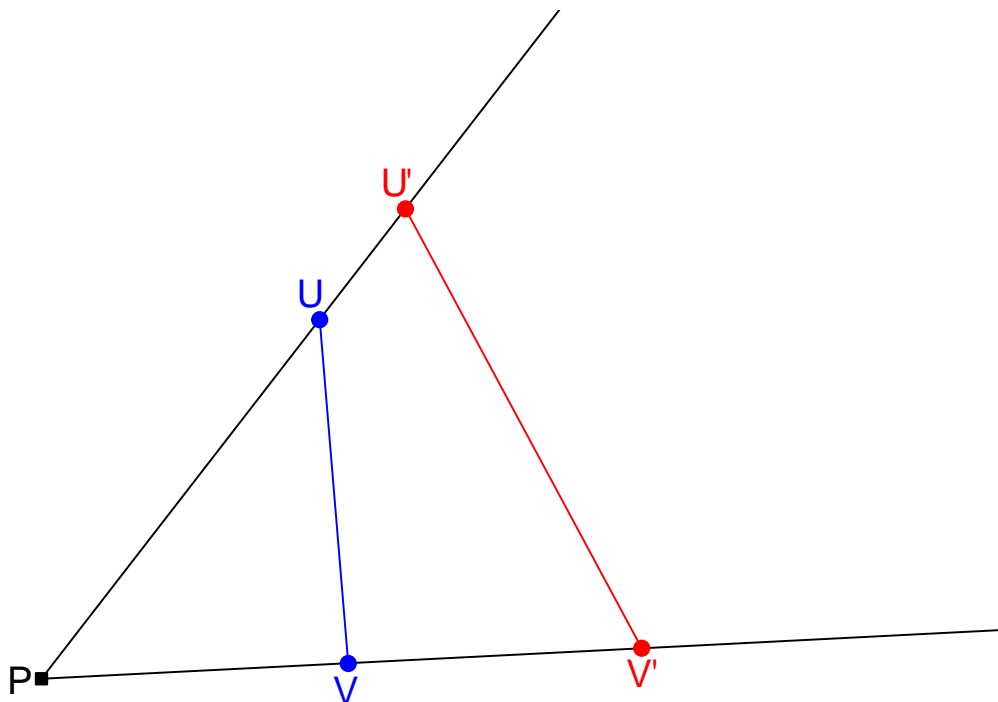


Fig. G1.2

Beweis von Satz G1.2: (Siehe Fig. G1.3.) Sei u die Gerade durch die Punkte P, U und U' , und seien R und R' die Fußpunkte der Lote von den Punkten V bzw. V' auf die Gerade u . Dann ist $VR \perp u$ und $V'R' \perp u$, also $VR \parallel V'R'$. Nach dem 2. Strahlensatz gilt also $\frac{VR}{V'R'} = \frac{PV}{PV'}$.

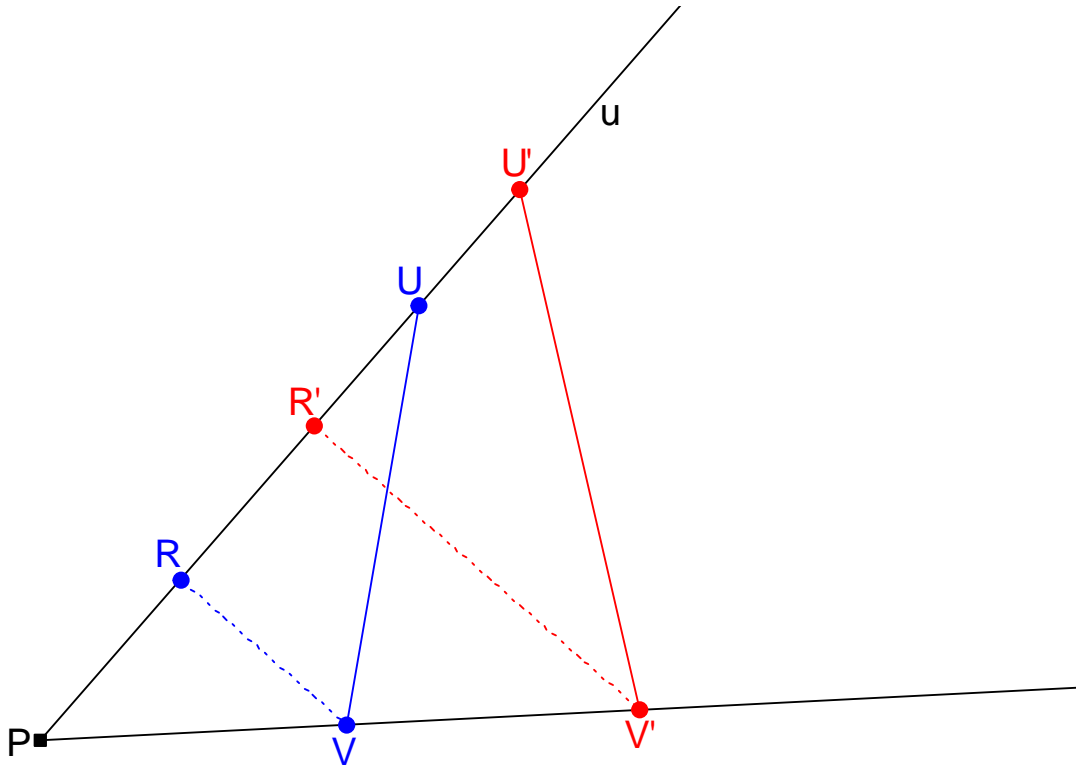


Fig. G1.3

Nun ist der Flächeninhalt eines Dreiecks bekanntlich gleich dem halben Produkt einer Seite des Dreiecks mit der entsprechenden Höhe. Angewandt auf das Dreieck UPV (mit der Seite PU und der entsprechenden Höhe VR) ergibt dies $|UPV| = \frac{1}{2} \cdot PU \cdot VR$. Analog ist $|U'PV'| = \frac{1}{2} \cdot PU' \cdot V'R'$. Damit ist

$$\frac{|UPV|}{|U'PV'|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot PU \cdot VR}{\frac{1}{2} \cdot PU' \cdot V'R'} = \frac{PU}{PU'} \cdot \frac{VR}{V'R'} = \frac{PU}{PU'} \cdot \frac{PV}{PV'} = \frac{PU \cdot PV}{PU' \cdot PV'},$$

und Satz G1.2 ist bewiesen.

Aus Satz G1.2 folgt schnell (Fig. G1.4):

Satz G1.3: Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck¹. Sei O der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD dieses Vierecks. Dann ist $|AOB| \cdot |COD| = |BOC| \cdot |DOA|$.

¹Also insbesondere nicht notwendigerweise ein Trapez.

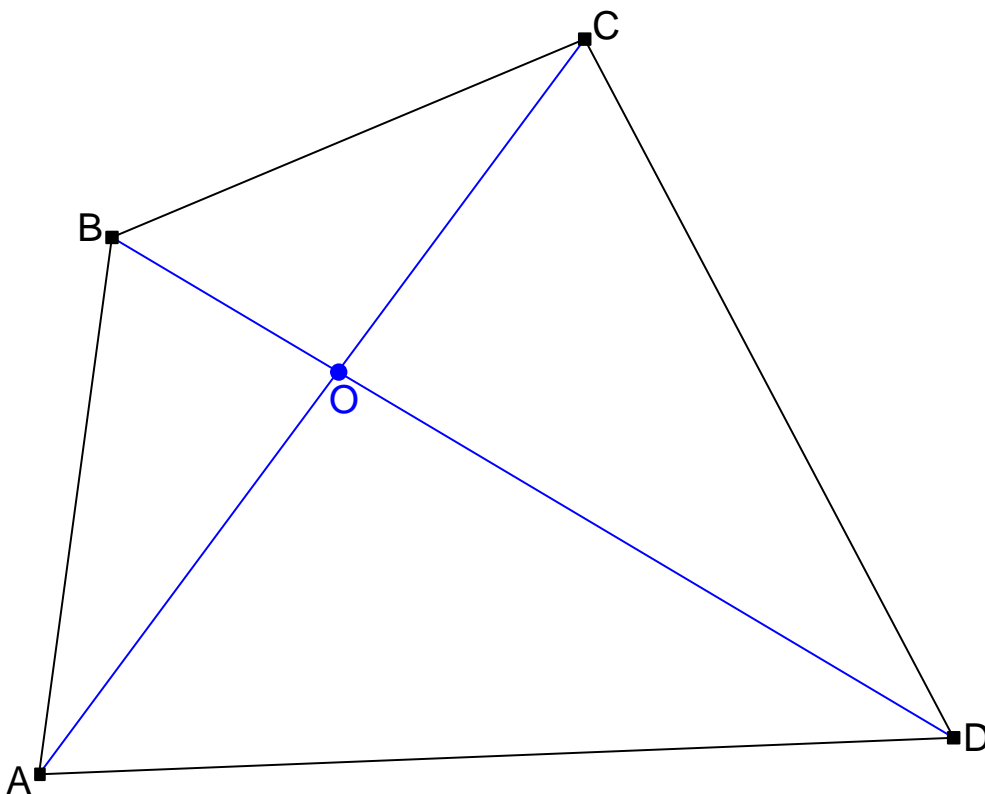


Fig. G1.4

Beweis von Satz G1.3: Die Punkte O , A und C liegen auf einer Geraden, und die Punkte O , B und D liegen auf einer Geraden. Nach Satz G1.2, angewandt auf die fünf Punkte O , A , C , B und D , gilt also $\frac{|AOB|}{|COB|} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OB}$. Das heißt, $\frac{|AOB|}{|COB|} = \frac{OA}{OC}$. Analog ist $\frac{|AOD|}{|COD|} = \frac{OA}{OC}$. Damit ist $\frac{|AOB|}{|COB|} = \frac{|AOD|}{|COD|}$, also $|AOB| \cdot |COD| = |COB| \cdot |AOD|$. Mit anderen Worten: $|AOB| \cdot |COD| = |BOC| \cdot |DOA|$. Damit ist Satz G1.3 bewiesen.

Kommen wir nun zur Lösung der Aufgabe G1:

Nach Satz G1.3 gilt $|AOB| \cdot |COD| = |BOC| \cdot |DOA|$. Doch nach Satz G1.1 gilt für das Trapez $ABCD$ die Gleichung $|AOB| = |COD|$. Wir setzen $k = |AOB| = |COD|$. Dann wird die Gleichung $|AOB| \cdot |COD| = |BOC| \cdot |DOA|$ zu $k^2 = |BOC| \cdot |DOA|$, also zu $k = \sqrt{|BOC| \cdot |DOA|}$. Damit ist

$$\begin{aligned} |ABCD| &= |AOB| + |BOC| + |COD| + |DOA| = k + |BOC| + k + |DOA| \\ &= |BOC| + |DOA| + 2k = |BOC| + |DOA| + 2\sqrt{|BOC| \cdot |DOA|} = \left(\sqrt{|BOC|} + \sqrt{|DOA|} \right)^2, \end{aligned}$$

und die Aufgabe ist gelöst.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist Aufgabe 8 in folgendem russischsprachigen Artikel:
V. Alekseev, V. Galkin, V. Panferov, V. Tarasov: *Zadachi o trapezijah*, Kvant 6/2000, Seiten 37-41.

Aufgabe G2

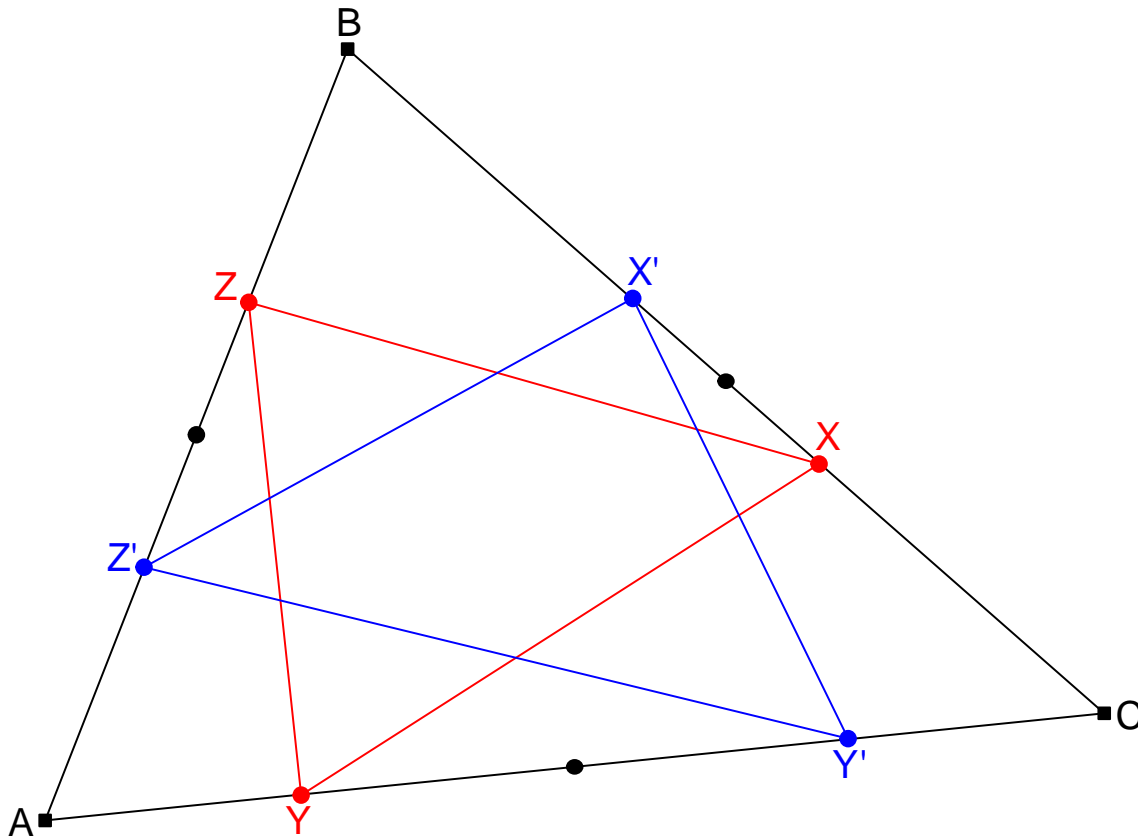


Fig. G2.1

Sei ABC ein Dreieck, und seien X , Y und Z drei Punkte auf den Strecken BC , CA bzw. AB . Seien X' , Y' und Z' die Spiegelbilder dieser Punkte X , Y bzw. Z an den Mittelpunkten der Strecken BC , CA bzw. AB . Beweise, daß $|XYZ| = |X'Y'Z'|$ ist. (Siehe Fig. G2.1.)

Lösung der Aufgabe G2

Vorbemerkungen:

1. Orientierte Flächeninhalte

Wir werden im Folgenden drei Lösungen der Aufgabe G2 geben. Zwei davon (die Zweite und die Dritte Lösung) werden den Begriff des *orientierten Flächeninhaltes eines Dreiecks* verwenden - zwar könnte man sie auch mithilfe gewöhnlicher Flächeninhalte formulieren, aber orientierte Flächeninhalte sind wesentlich handlicher und ermöglichen es, Fallunterscheidungen hinsichtlich der Anordnung der Punkte zu vermeiden.

Ist ABC ein nicht-entartetes Dreieck, dann sagen wir, das Tripel $(A; B; C)$ *geht gegen den Uhrzeigersinn*, wenn folgendes gilt: Läuft man, vom Punkt A ausgehend, den Umkreis des Dreiecks ABC gegen den Uhrzeigersinn entlang, dann begegnet man zuerst dem Punkt B und dann dem Punkt C . Entsprechend sagen wir, das Tripel $(A; B; C)$ *geht im Uhrzeigersinn*, wenn folgendes gilt: Läuft man, vom Punkt A ausgehend, den

Umkreis des Dreiecks ABC im Uhrzeigersinn entlang, dann begegnet man zuerst dem Punkt B und dann dem Punkt C .

Für drei beliebige Punkte A , B und C setzen wir

$$[ABC] = \begin{cases} |ABC|, & \text{wenn das Tripel } (A; B; C) \text{ gegen den Uhrzeigersinn geht;} \\ -|ABC|, & \text{wenn das Tripel } (A; B; C) \text{ im Uhrzeigersinn geht;} \\ 0, & \text{wenn die Punkte } A, B \text{ und } C \text{ auf einer Geraden liegen} \end{cases}.$$

Diesen Wert $[ABC]$ bezeichnen wir dann als *orientierten Flächeninhalt des Dreiecks ABC* .

Für jedes Dreieck ABC ist damit $|ABC| = |[ABC]|$. Hieraus folgt: Der orientierte Flächeninhalt $[ABC]$ des Dreiecks ABC trägt mehr Information über das Dreieck ABC in sich als der gewöhnliche Flächeninhalt $|ABC|$, denn aus $[ABC]$ kann man immer $|ABC|$ berechnen, aber umgekehrt kann man $[ABC]$ aus $|ABC|$ nur berechnen, wenn man weiß, ob das Tripel $(A; B; C)$ im oder gegen den Uhrzeigersinn geht.

Es gilt der sogenannte **orientierte Scherungssatz**: Für vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 mit $P_1 \neq P_2$ und $P_3 \neq P_4$ gilt: Genau dann ist $P_3P_4 \parallel P_1P_2$, wenn $[P_1P_2P_3] = [P_1P_2P_4]$ ist.

Wie man leicht einsieht, gilt für beliebige drei Punkte A, B und C folgendes:

$$[ABC] = [BCA] = [CAB] = -[ACB] = -[BAC] = -[CBA].$$

Außerdem gilt der sogenannte **Dreieckssummensatz**: Sind A, B, C und D vier Punkte, dann ist

$$[ABC] = [DBC] + [DCA] + [DAB].$$

Ferner gilt: Sind A, B und C drei Punkte auf einer Geraden, und D ein Punkt, dann gilt: $[DAC] = [DAB] + [DBC]$.

2. Eine stärkere Version der Aufgabe

In der zweiten und der dritten von den drei nachfolgenden Lösungen der Aufgabe G2 werden wir folgenden Satz beweisen:

Satz G2.1: Sei ABC ein Dreieck, und seien X, Y und Z drei Punkte auf den Geraden BC, CA bzw. AB . Seien X', Y' und Z' die Spiegelbilder dieser Punkte X, Y bzw. Z an den Mittelpunkten der Strecken BC, CA bzw. AB . Dann ist $[XYZ] = [X'Y'Z']$. (Siehe Fig. G2.1.)

Dieser Satz impliziert sofort die Aufgabe G2 (denn aus $[XYZ] = [X'Y'Z']$ folgt sofort $|XYZ| = |X'Y'Z'|$, weil $|XYZ| = |[XYZ]|$ und $|X'Y'Z'| = |[X'Y'Z']|$ ist). Daher reicht es zur Lösung der Aufgabe G2 aus, Satz G2.1 zu beweisen.

Nun kommen wir zur Lösung der Aufgabe.

Erste Lösung: Wir zeigen zuerst (Fig. G2.2):

Satz G2.2: Sei ABC ein Dreieck, und seien X, Y und Z drei Punkte auf den Strecken BC, CA bzw. AB . Dann ist

$$\frac{|XYZ|}{|ABC|} = \frac{BZ \cdot CX \cdot AY + BX \cdot CY \cdot AZ}{BC \cdot CA \cdot AB}.$$

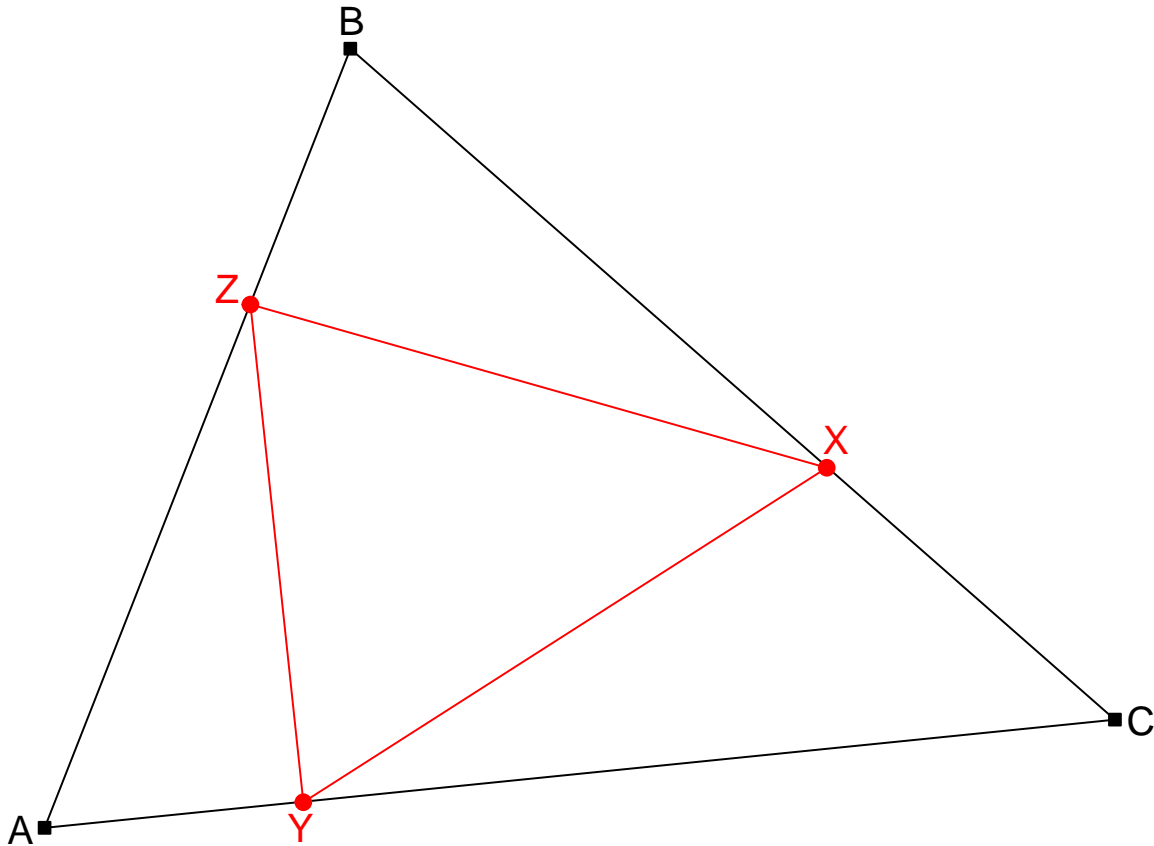


Fig. G2.2

Beweis von Satz G2.2: Wir bezeichnen $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $x = CX$, $y = AY$ und $z = BZ$. Dann ist $a - x = BC - CX = BX$, $b - y = CA - AY = CY$ und $c - z = AB - BZ = AZ$.

Nun werden wir einen Satz aus der Lösung von Aufgabe G1 wiederverwenden:

Satz G1.2: Seien P, U, U', V und V' fünf Punkte, sodaß die Punkte P, U und U' auf einer Geraden liegen, und die Punkte P, V und V' auf einer Geraden liegen. Dann gilt $\frac{|UPV|}{|U'PV'|} = \frac{PU \cdot PV}{PU' \cdot PV'}$.

Die Punkte A, Y und C liegen auf einer Geraden, und die Punkte A, Z und B liegen auf einer Geraden. Nach Satz G1.2 ist also $\frac{|YAZ|}{|CAB|} = \frac{AY \cdot AZ}{AC \cdot AB}$. Mit anderen Worten:
 $\frac{|AYZ|}{|ABC|} = \frac{y \cdot (c - z)}{b \cdot c}$. Analog ist $\frac{|BZX|}{|ABC|} = \frac{z \cdot (a - x)}{c \cdot a}$ und $\frac{|CXY|}{|ABC|} = \frac{x \cdot (b - y)}{a \cdot b}$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{|XYZ|}{|ABC|} &= \frac{|ABC| - |AYZ| - |BZX| - |CXY|}{|ABC|} = 1 - \frac{|AYZ|}{|ABC|} - \frac{|BZX|}{|ABC|} - \frac{|CXY|}{|ABC|} \\
&= 1 - \frac{y \cdot (c - z)}{b \cdot c} - \frac{z \cdot (a - x)}{c \cdot a} - \frac{x \cdot (b - y)}{a \cdot b} = \frac{abc}{abc} - \frac{ay(c - z)}{abc} - \frac{bz(a - x)}{abc} - \frac{cx(b - y)}{abc} \\
&= \frac{abc - ay(c - z) - bz(a - x) - cx(b - y)}{abc} = \frac{abc - (cay - ayz) - (abz - bzx) - (bcx - cxy)}{abc} \\
&= \frac{abc - (bcx + cay + abz) + (ayz + bzx + cxy)}{abc} \\
&= \frac{xyz + (abc - (bcx + cay + abz) + (ayz + bzx + cxy) - xyz)}{abc} \\
&= \frac{xyz + (a - x)(b - y)(c - z)}{abc} = \frac{z \cdot x \cdot y + (a - x) \cdot (b - y) \cdot (c - z)}{a \cdot b \cdot c} \\
&= \frac{BZ \cdot CX \cdot AY + BX \cdot CY \cdot AZ}{BC \cdot CA \cdot AB}.
\end{aligned}$$

Damit ist Satz G2.2 bewiesen.

Nun kommen wir zur Lösung der Aufgabe:

Nach Satz G2.2, angewandt auf das Dreieck ABC und die Punkte X , Y und Z auf den Strecken BC , CA bzw. AB , gilt

$$\frac{|XYZ|}{|ABC|} = \frac{BZ \cdot CX \cdot AY + BX \cdot CY \cdot AZ}{BC \cdot CA \cdot AB}. \quad (\text{G2.1})$$

Die Spiegelung an dem Mittelpunkt der Strecke BC überführt den Punkt B in den Punkt C , den Punkt C in den Punkt B , und den Punkt X in den Punkt X' . Da der Punkt X auf der Strecke BC liegt, liegt also der Punkt X' auf der Strecke CB (denn Punktspiegelungen überführen Strecken in Strecken). Das heißt, der Punkt X' liegt auf der Strecke BC . Analog liegen die Punkte Y' und Z' auf den Strecken CA bzw. AB .

Ferner ist $BX' = CX$, denn die Spiegelung an dem Mittelpunkt der Strecke BC überführt die Punkte C und X in die Punkte B bzw. X' (und Punktspiegelungen sind Kongruenzabbildungen). Analog ist $CX' = BX$, $CY' = AY$, $AY' = CY$, $AZ' = BZ$ und $BZ' = AZ$. Nach Satz G2.2, angewandt auf die Punkte X' , Y' und Z' auf den Strecken BC , CA bzw. AB , gilt nun

$$\begin{aligned}
\frac{|X'Y'Z'|}{|ABC|} &= \frac{BZ' \cdot CX' \cdot AY' + BX' \cdot CY' \cdot AZ'}{BC \cdot CA \cdot AB} = \frac{AZ \cdot BX \cdot CY + CX \cdot AY \cdot BZ}{BC \cdot CA \cdot AB} \\
&= \frac{BZ \cdot CX \cdot AY + BX \cdot CY \cdot AZ}{BC \cdot CA \cdot AB} = \frac{|XYZ|}{|ABC|} \quad (\text{nach (G2.1)}).
\end{aligned}$$

Daher ist $|X'Y'Z'| = |XYZ|$, und die Aufgabe G2 ist gelöst.

Bemerkung zur Ersten Lösung: In dieser Bemerkung werden wir mit orientierten Strecken arbeiten. Dabei verwenden wir die Bezeichnung $\overline{P_1P_2}$ für den orientierten Abstand von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 (diese Bezeichnung ergibt natürlich nur dann Sinn, wenn die Punkte P_1 und P_2 auf einer gerichteten Geraden liegen).

Mithilfe von orientierten Strecken und Flächeninhalten läßt sich Satz G2.2 allgemeiner formulieren:

Satz G2.3, der Erste Satz von Routh: Sei ABC ein Dreieck, und seien X, Y und Z drei Punkte auf den Geraden BC, CA bzw. AB . Dann ist

$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{\overline{ZB} \cdot \overline{XC} \cdot \overline{YA} + \overline{BX} \cdot \overline{CY} \cdot \overline{AZ}}{\overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}},$$

wenn die Geraden BC, CA und AB gerichtet sind.

Aus diesem Satz folgt:

Satz G2.4, der Satz von Menelaos: Sei ABC ein Dreieck, und seien X, Y und Z drei Punkte auf den Geraden BC, CA bzw. AB . Wir richten die Geraden BC, CA und AB . Dann gilt:

Die Punkte X, Y und Z liegen genau dann auf einer Geraden, wenn

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$$

gilt. (Siehe Fig. G2.2a.)

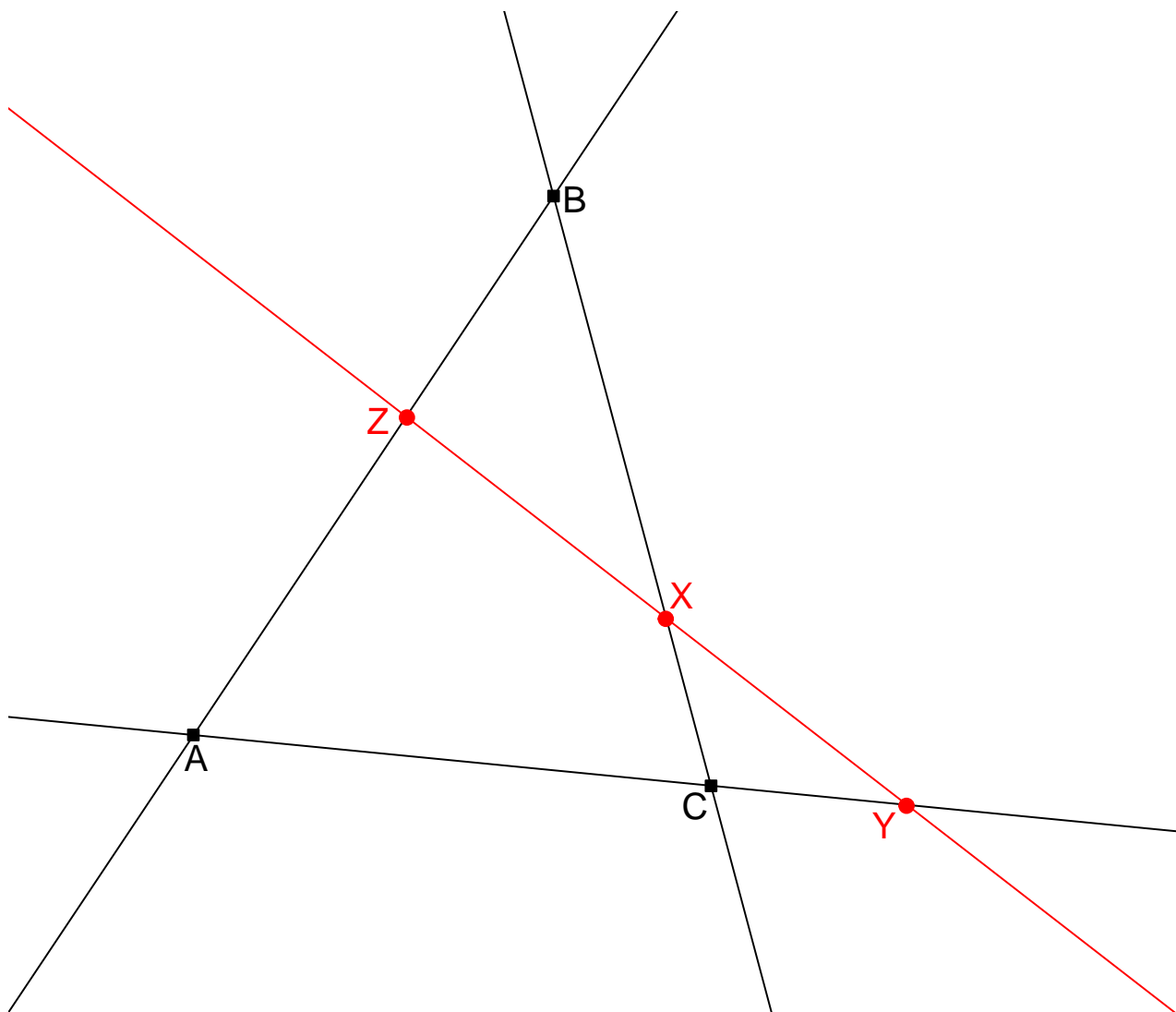


Fig. G2.2a

Beweis von Satz G2.4: Die Punkte X, Y und Z liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $[XYZ] = 0$ ist. Nach Satz G2.3 ist aber $\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{\overline{ZB} \cdot \overline{XC} \cdot \overline{YA} + \overline{BX} \cdot \overline{CY} \cdot \overline{AZ}}{\overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}}$. Folglich gilt $[XYZ] = 0$ genau dann, wenn $\overline{ZB} \cdot \overline{XC} \cdot \overline{YA} + \overline{BX} \cdot \overline{CY} \cdot \overline{AZ} = 0$ ist. Doch $\overline{ZB} \cdot \overline{XC} \cdot \overline{YA} + \overline{BX} \cdot \overline{CY} \cdot \overline{AZ} = 0$ ist äquivalent zu $\overline{BX} \cdot \overline{CY} \cdot \overline{AZ} = -\overline{ZB} \cdot \overline{XC} \cdot \overline{YA}$, also zu $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$.

Alles in allem haben wir also gezeigt: Die Punkte X, Y und Z liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$ ist. Damit ist Satz G2.4 nachgewiesen.

Zweite Lösung: Wir zeigen zuerst folgendes Theorem (Aufgabe 76 in Abschnitt 12.3.2 von: Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, New York 1998):

Satz G2.5: Sei $ABCDEF$ ein Sechseck mit $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ und $CD \parallel FA$. Dann ist $[ACE] = [BDF]$. (Siehe Fig. G2.3.)

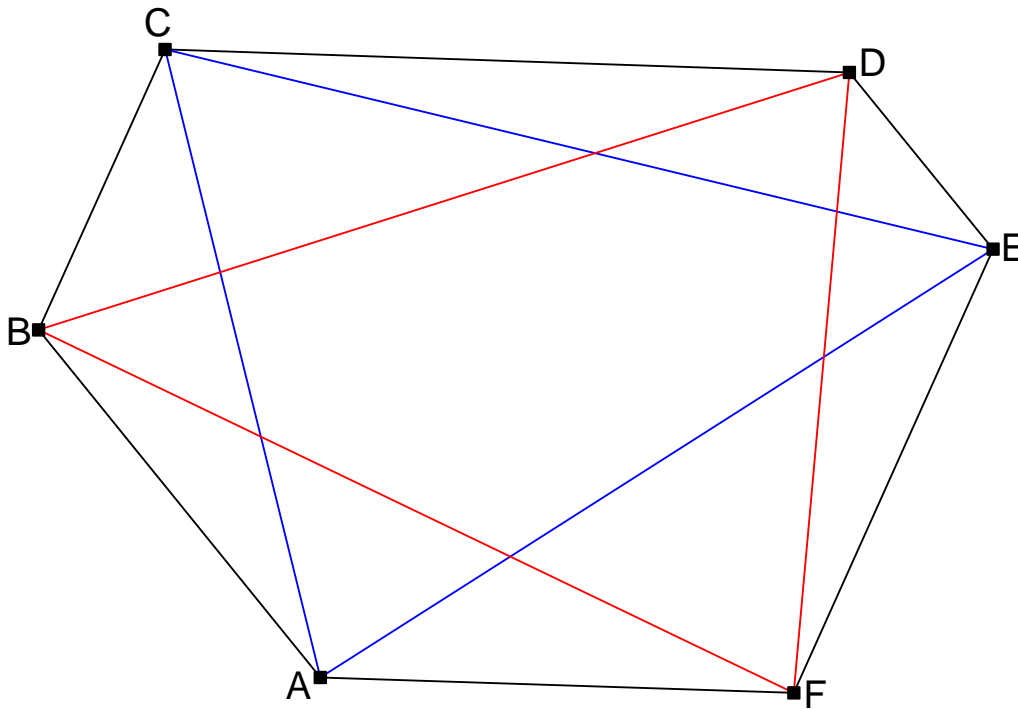


Fig. G2.3

Beweis von Satz G2.5: Nach dem orientierten Scherungssatz gilt $[EFC] = [EFB]$ (denn $CB \parallel EF$), ferner $[FAC] = [FAD]$ (denn $CD \parallel FA$), und schließlich $[ABE] =$

$[ABD]$ (denn $ED \parallel AB$). Somit ist

$$\begin{aligned}
 [ACE] &= [FCE] + [FEA] + [FAC] && \text{(nach dem Dreieckssummensatz)} \\
 &= [EFC] + [EAF] + [FAC] = [EFB] + [EAF] + [FAD] \\
 &= [FAD] + ([EAF] + [EFB] + [EBA]) - [EBA] \\
 &= [FAD] + [BAF] - [EBA] \\
 &\quad \text{(denn } [BAF] = [EAF] + [EFB] + [EBA] \text{ nach dem Dreieckssummensatz)} \\
 &= [ADF] + [AFB] - (-[ABE]) = [ADF] + [AFB] + [ABE] \\
 &= [ADF] + [AFB] + [ABD] = [BDF] && \text{(nach dem Dreieckssummensatz),}
 \end{aligned}$$

und Satz G2.5 ist bewiesen.

Nun beweisen wir Satz G2.1:

Die Spiegelung an dem Mittelpunkt der Strecke BC überführt den Punkt B in den Punkt C , den Punkt C in den Punkt B , und den Punkt X in den Punkt X' . Da der Punkt X auf der Geraden BC liegt, liegt also der Punkt X' auf der Geraden CB (denn Punktspiegelungen überführen Geraden in Geraden). Das heißt, der Punkt X' liegt auf der Geraden BC .

Von nun an verwenden wir folgende Bezeichnungen: Den Schnittpunkt zweier Geraden g und h bezeichnen wir mit $g \cap h$. Die Parallele zu einer Geraden g durch einen Punkt P bezeichnen wir mit $\text{para}(P; g)$.

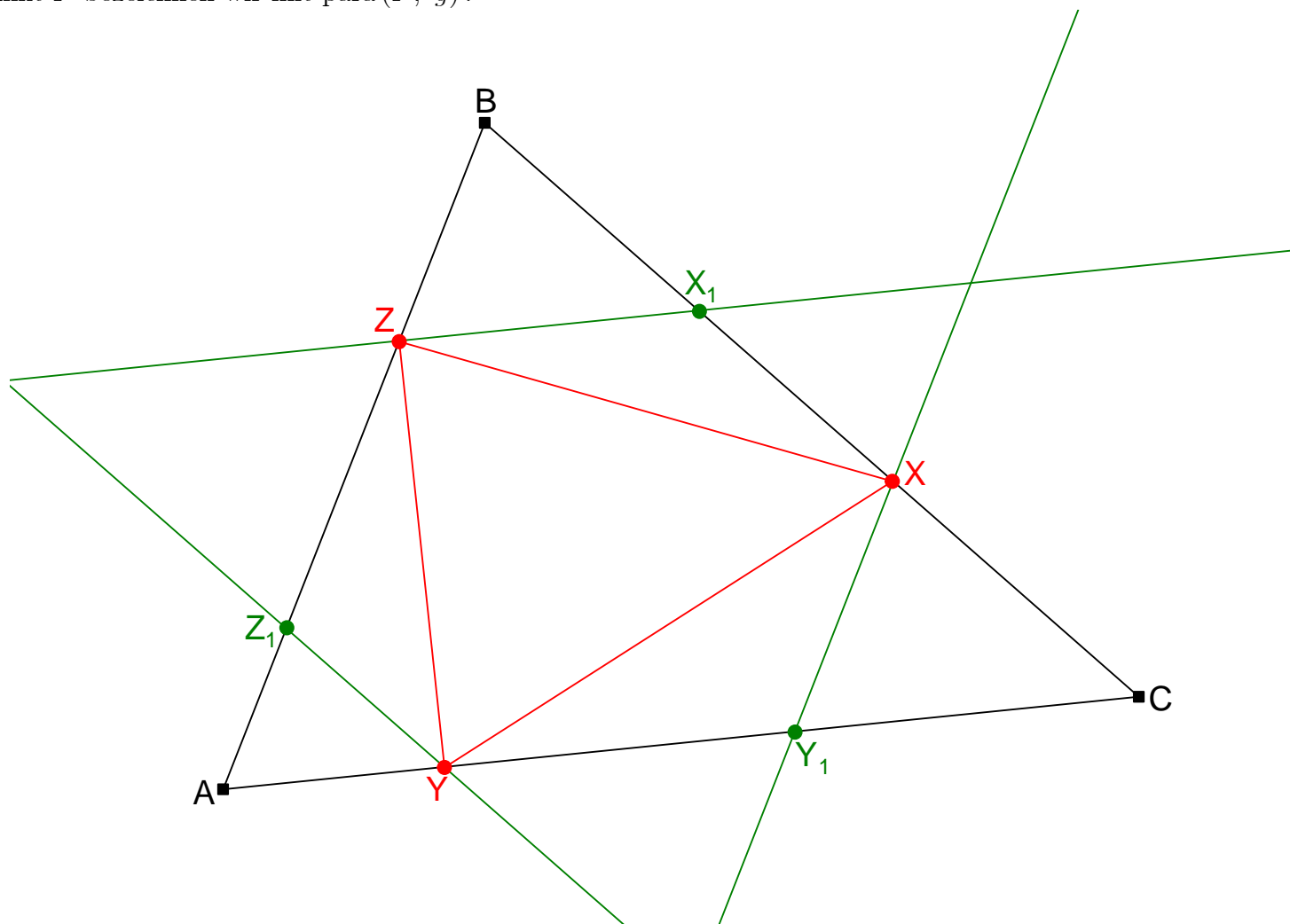


Fig. G2.4

Nun werden wir neun neue Punkte einführen (siehe Fig. G2.4 für die ersten drei davon, und Fig. G2.5 für drei andere, die wir in einem späteren Argument gebrauchen werden):

Seien $X_1 = \text{para}(Z; CA) \cap BC$, $Y_1 = \text{para}(X; AB) \cap CA$ und $Z_1 = \text{para}(Y; BC) \cap AB$.

Seien $X_2 = \text{para}(Z_1; CA) \cap BC$, $Y_2 = \text{para}(X_1; AB) \cap CA$ und $Z_2 = \text{para}(Y_1; BC) \cap AB$.

Seien $X_3 = \text{para}(Z_2; CA) \cap BC$, $Y_3 = \text{para}(X_2; AB) \cap CA$ und $Z_3 = \text{para}(Y_2; BC) \cap AB$.

Das Sechseck $X_1XY_1YZ_1Z$ erfüllt nun $X_1X \parallel YZ_1$ (dies ist nur eine Umschreibung von $BC \parallel YZ_1$, was aus $Z_1 \in \text{para}(Y; BC)$ folgt), $XY_1 \parallel Z_1Z$ (dies ist nur eine Umschreibung von $XY_1 \parallel AB$, was aus $Y_1 \in \text{para}(X; AB)$ folgt) und $Y_1Y \parallel ZX_1$ (dies ist nur eine Umschreibung von $CA \parallel ZX_1$, was aus $X_1 \in \text{para}(Z; CA)$ folgt). Anwendung von Satz G2.5 auf dieses Sechseck ergibt also $[X_1Y_1Z_1] = [XYZ]$.

Analog können wir Satz G2.5 auf das Sechseck $X_2X_1Y_2Y_1Z_2Z_1$ anwenden und erhalten $[X_2Y_2Z_2] = [X_1Y_1Z_1]$, und genauso können wir Satz G2.5 auf das Sechseck $X_3X_2Y_3Y_2Z_3Z_2$ anwenden, und erhalten $[X_3Y_3Z_3] = [X_2Y_2Z_2]$. Somit ist $[X_3Y_3Z_3] = [X_2Y_2Z_2] = [X_1Y_1Z_1] = [XYZ]$.

Nun ist $BX' = CX$, denn die Spiegelung an dem Mittelpunkt der Strecke BC überführt die Punkte C und X in die Punkte B bzw. X' (und Punktspiegelungen sind Kongruenzabbildungen). Analog ist $CX' = BX$. Also ist $\frac{BX'}{CX'} = \frac{CX}{BX}$.

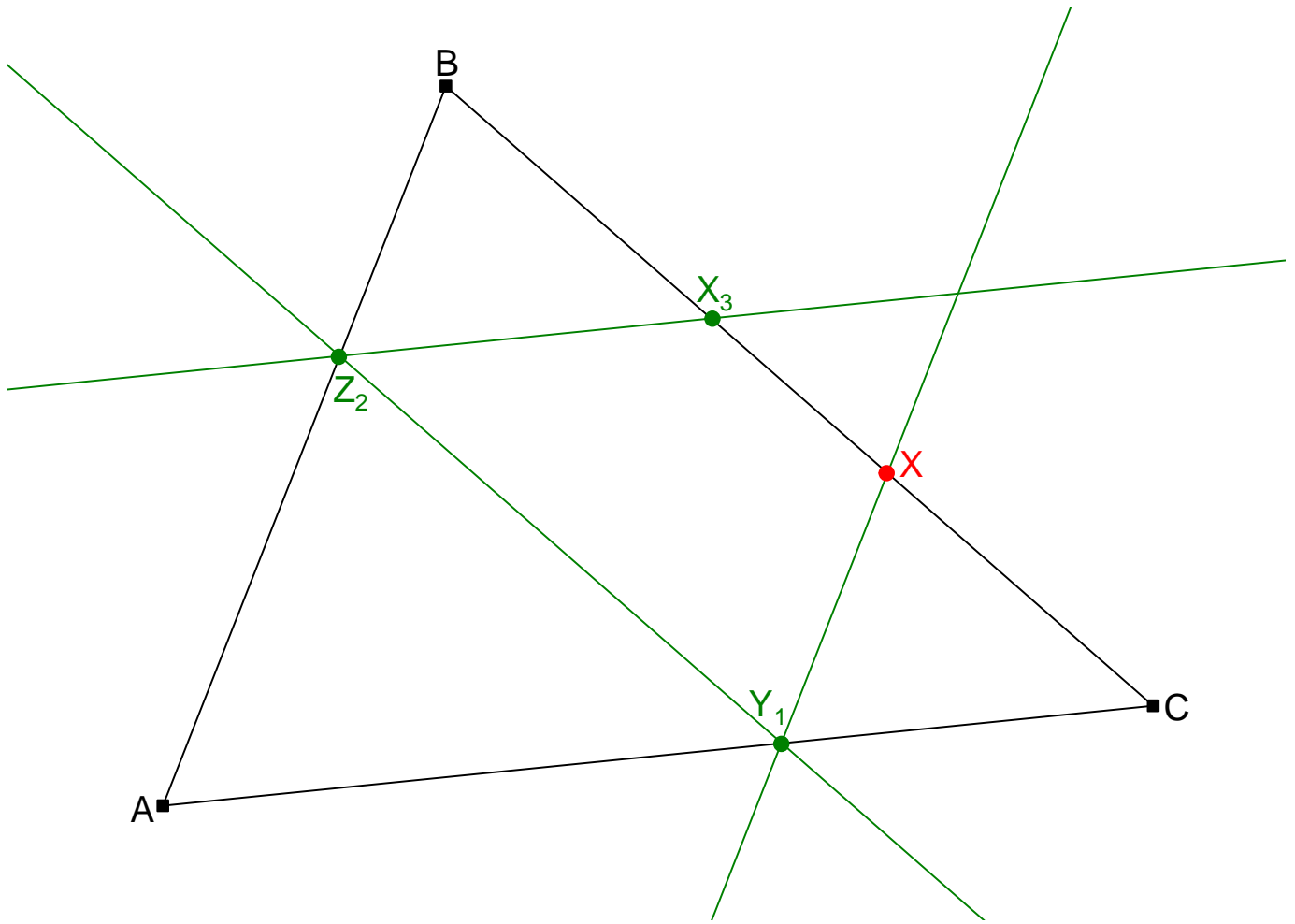


Fig. G2.5

(Siehe Fig. G2.5.) Aus $Y_1 \in \text{para}(X; AB)$ folgt $Y_1X \parallel AB$, also nach dem Strahlensatz $\frac{CY_1}{AY_1} = \frac{CX}{BX}$. Aus $Z_2 \in \text{para}(Y_1; BC)$ folgt $Z_2Y_1 \parallel BC$, also nach dem Strahlensatz $\frac{BZ_2}{AZ_2} = \frac{CY_1}{AY_1}$. Aus $X_3 \in \text{para}(Z_2; CA)$ folgt $X_3Z_2 \parallel CA$, also nach dem Strahlensatz $\frac{BX_3}{CX_3} = \frac{BZ_2}{AZ_2}$. Somit ist $\frac{BX_3}{CX_3} = \frac{BZ_2}{AZ_2} = \frac{CY_1}{AY_1} = \frac{CX}{BX} = \frac{BX'}{CX'}$. Das heißt, die Punkte X_3 und X' teilen die Strecke BC im gleichen Verhältnis. Daraus folgt $X_3 = X'$ (strenggenommen folgt dies nicht, aber es würde folgen, wenn wir noch Anordnungsüberlegungen durchgeführt hätten, oder im Obigen konsequent mit orientierten Strecken gerechnet hätten; der Leser darf diese Lücke gerne schließen). Analog ist $Y_3 = Y'$ und $Z_3 = Z'$. Somit wird die weiter oben bewiesene Gleichung $[X_3Y_3Z_3] = [XYZ]$ zu $[X'Y'Z'] = [XYZ]$. Damit ist Satz G2.1 bewiesen, und folglich ist die Aufgabe gelöst.

Bemerkung zur Zweiten Lösung: Satz G2.5 hat noch eine interessante Konsequenz (Fig. G2.6):

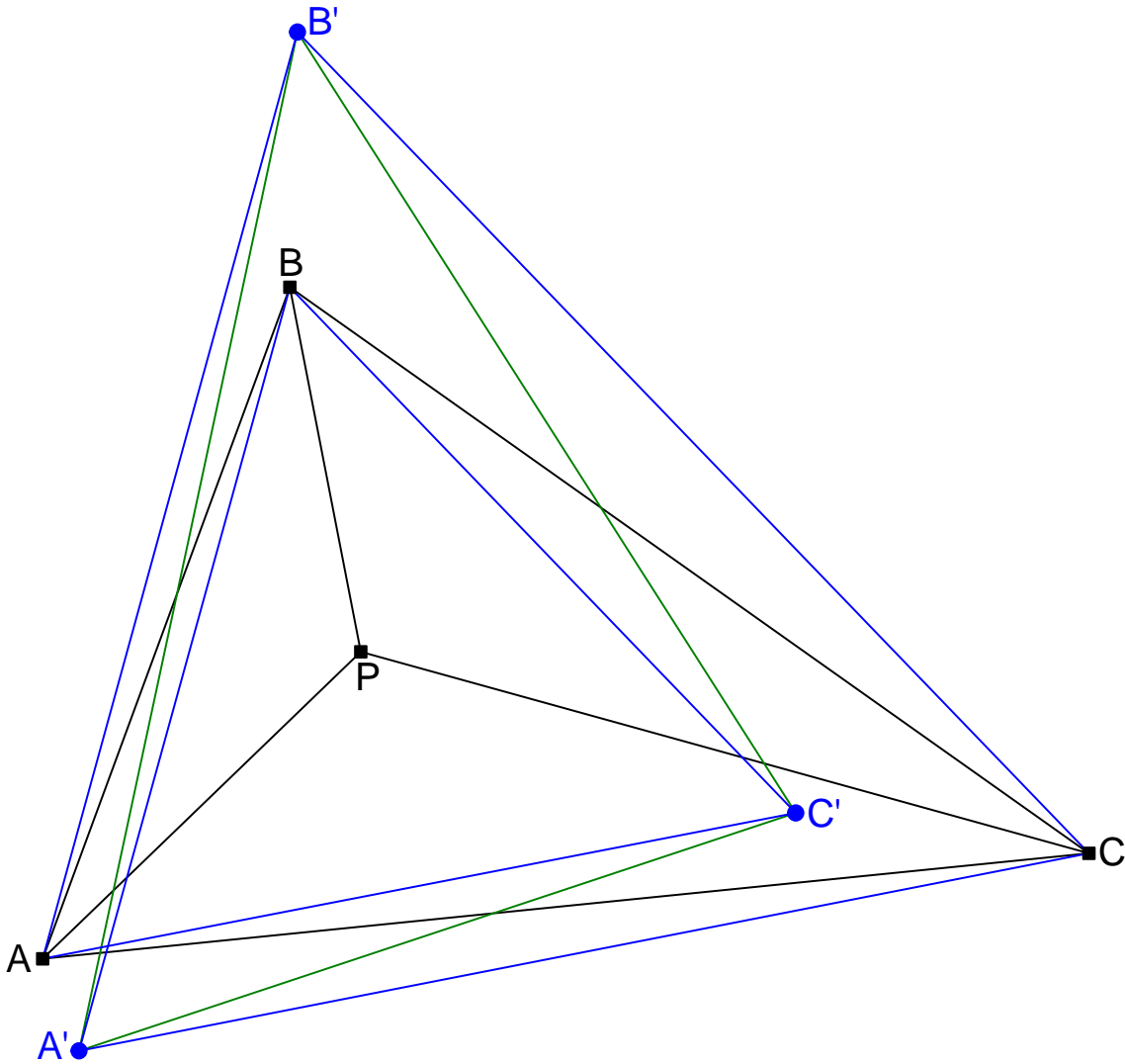


Fig. G2.6

Satz G2.6: Sei ABC ein Dreieck und P ein Punkt. Seien A' , B' und C' die Höhenschnittpunkte der Dreiecke BPC , CPA bzw. APB . Dann ist $[ABC] = [A'B'C']$.

Beweis von Satz G2.6: Da der Punkt A' der Höhenschnittpunkt des Dreiecks BPC ist, ist die Gerade BA' eine Höhe dieses Dreiecks. Somit ist $BA' \perp CP$. Analog ist $AB' \perp CP$. Daher ist $BA' \parallel AB'$. Analog ist $CB' \parallel BC'$ und $AC' \parallel CA'$. Das Sechseck $BA'CB'AC'$ erfüllt nun $BA' \parallel B'A$ (eine Umschreibung von $BA' \parallel AB'$), ferner $A'C \parallel AC'$ (eine Umschreibung von $AC' \parallel CA'$), und schließlich $CB' \parallel C'B$ (eine Umschreibung von $CB' \parallel BC'$). Anwendung von Satz G2.5 auf dieses Sechseck liefert also $[BCA] = [A'B'C']$. Mit anderen Worten: $[ABC] = [A'B'C']$. Damit ist Satz G2.6 bewiesen.

Dritte Lösung: Wir beginnen mit einem Hilfssatz (Fig. G2.7):

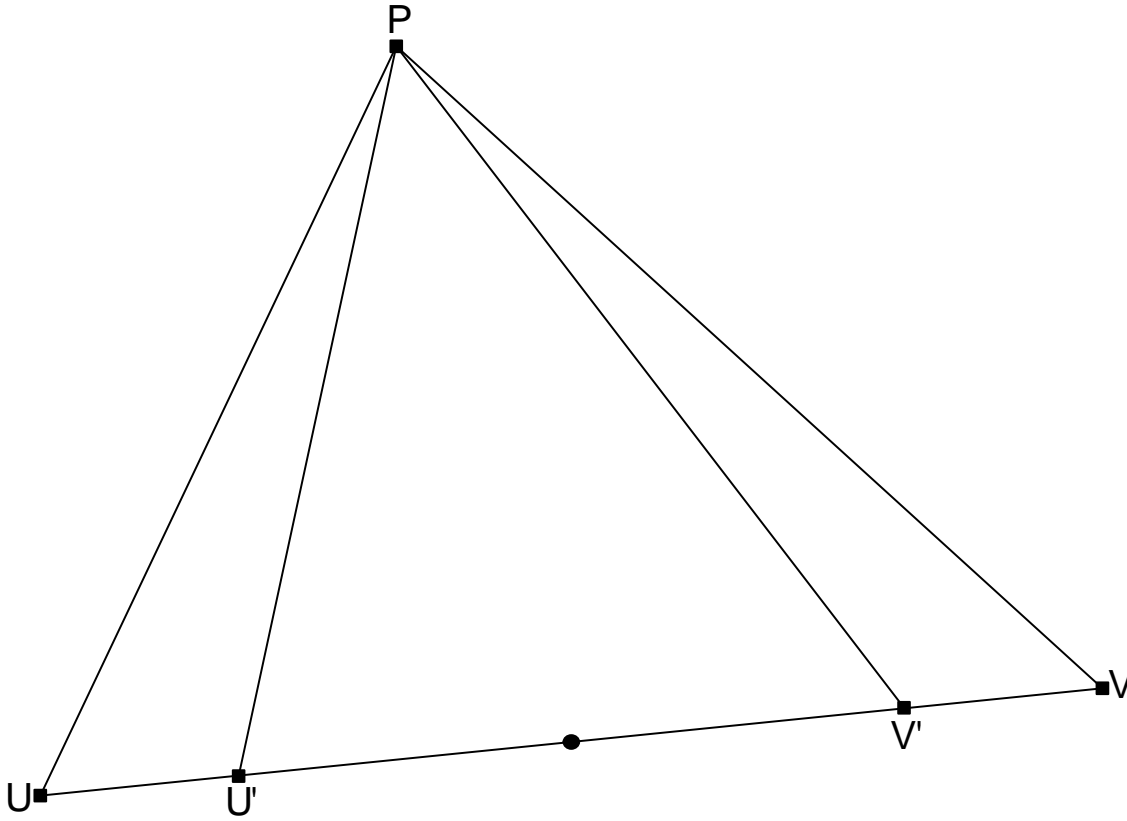


Fig. G2.7

Satz G2.7: Seien P, U, U', V und V' fünf Punkte, sodaß die Punkte U, U', V und V' auf einer Geraden liegen, und der Mittelpunkt der Strecke UV mit dem Mittelpunkt der Strecke $U'V'$ übereinstimmt. Dann gilt $[PV'V] = [PUU']$.

Beweis von Satz G2.7: Da der Mittelpunkt der Strecke UV mit dem Mittelpunkt der Strecke $U'V'$ übereinstimmt, ist der Punkt V' das Spiegelbild des Punktes U' an dem Mittelpunkt der Strecke UV . Daher bildet die Spiegelung an dem Mittelpunkt der Strecke UV den Punkt U' auf den Punkt V' ab. Andererseits bildet diese Spiegelung offensichtlich den Punkt U auf den Punkt V ab. Somit ist $VV' = UU'$ (denn Punktspiegelungen sind Kongruenzabbildungen).

(Siehe Fig. G2.8.) Sei g die Gerade durch die Punkte U, U', V und V' , und sei R der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt P auf die Gerade g .

Bekanntlich ist der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich dem halben Produkt aus einer Seite des Dreiecks mit der dazugehörigen Höhe. Angewandt auf das Dreieck PUU' (mit der Seite UU' und der dazugehörigen Höhe PR) ergibt dies $|PUU'| = \frac{1}{2} \cdot UU' \cdot PR$.

Wegen $|[PUU']| = |PUU'|$ ist also $|[PUU']| = \frac{1}{2} \cdot UU' \cdot PR$. Analog ist $|[PVV']| = \frac{1}{2} \cdot VV' \cdot PR$. Wegen $VV' = UU'$ ist also $|[PVV']| = \frac{1}{2} \cdot VV' \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot UU' \cdot PR = |[PUU']|$. Das heißt, die orientierten Flächeninhalte $[PVV']$ und $[PUU']$ haben den gleichen Betrag. Aus Anordnungsüberlegungen folgt schnell, daß diese orientierten Flächeninhalte entgegengesetztes Vorzeichen haben. Daher ist $-[PVV'] = [PUU']$. Mit anderen Worten: $[PV'V] = [PUU']$. Dadurch ist Satz G2.7 bewiesen.

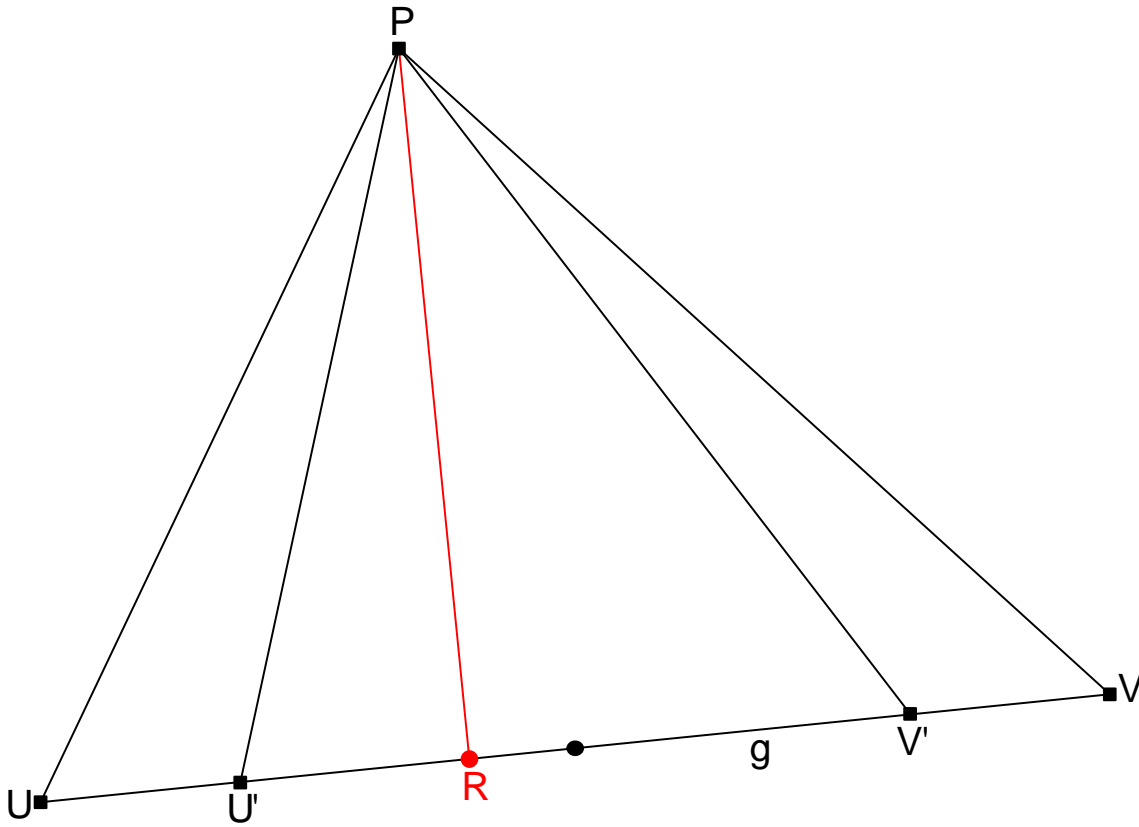


Fig. G2.8

Nun beweisen wir Satz G2.1:

Genauso wie in der Zweiten Lösung zeigen wir, daß der Punkt X' auf der Geraden BC liegt. Analog liegen die Punkte Y' und Z' auf den Geraden CA bzw. AB .

Nach dem Dreieckssummensatz ist

$$\begin{aligned}
 [XYZ] &= [AYZ] + [AZX] + [AXY] = [AYZ] + [XAZ] + [XYA] \\
 &= [AYZ] + ([XAB] + [XBZ]) + ([XYC] + [XCA]) \\
 &= ([XAB] + [XCA]) + [AYZ] + [XBZ] + [XYC] \\
 &= ([ABX] + [AXC]) + [YZA] + [ZXB] + [XYC] \\
 &= [ABC] + ([YZB] + [YBA]) + ([ZXC] + [ZCB]) + ([XYA] + [XAC]) \\
 &= [ABC] + ([YZB] + [ZXC] + [XYA]) \\
 &\quad + ([YBA] + [ZCB] + [XAC]).
 \end{aligned} \tag{G2.2}$$

Nach dem Dreieckssummensatz ist ferner

$$\begin{aligned}
 [X'Y'Z'] &= [AY'Z'] + [AZ'X'] + [AX'Y'] = [AY'Z'] + [X'AZ'] + [X'Y'A] \\
 &= [AY'Z'] + ([X'AB] + [X'BZ']) + ([X'Y'C] + [X'CA]) \\
 &= ([X'AB] + [X'CA]) + [AY'Z'] + [X'BZ'] + [X'Y'C] \\
 &= ([ABX'] + [AX'C]) + [Z'AY'] + [X'BZ'] + [Y'CX'] \\
 &= [ABC] + ([Z'AC] + [Z'CY']) + ([X'BA] + [X'AZ']) + ([Y'CB] + [Y'BX']) \\
 &= [ABC] + ([Z'CY'] + [X'AZ'] + [Y'BX']) \\
 &\quad + ([Y'CB] + [Z'AC] + [X'BA]).
 \end{aligned} \tag{G2.3}$$

Nun ist $[YZB] = [YAZ']$ nach Satz G2.7, denn der Mittelpunkt der Strecke AB ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Strecke $Z'Z$ (denn der Punkt Z' ist das Spiegelbild des Punktes Z an dem Mittelpunkt der Strecke AB). Ebenfalls nach Satz G2.7 ist $[Z'YA] = [Z'CY']$, denn der Mittelpunkt der Strecke CA ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Strecke $Y'Y$ (denn der Punkt Y' ist das Spiegelbild des Punktes Y an dem Mittelpunkt der Strecke CA). Somit ist $[YZB] = [YAZ'] = [Z'YA] = [Z'CY']$. Analog ist $[ZXC] = [X'AZ']$ und $[XYA] = [Y'BX']$.

Ferner ist $[BYA] = [BCY']$ nach Satz G2.7, denn der Mittelpunkt der Strecke CA ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Strecke $Y'Y$. Somit ist $[YBA] = -[BYA] = -[BCY'] = [Y'CB]$. Analog ist $[ZCB] = [Z'AC]$ und $[XAC] = [X'BA]$.

Wegen den Gleichungen

$$\begin{aligned} [YZB] &= [Z'CY']; & [ZXC] &= [X'AZ']; & [XYA] &= [Y'BX']; \\ [YBA] &= [Y'CB]; & [ZCB] &= [Z'AC]; & [XAC] &= [X'BA] \end{aligned}$$

stimmen die rechten Seiten der Gleichungen (G2.2) und (G2.3) überein. Daher stimmen auch die linken Seiten dieser Gleichungen überein, d. h. wir haben $[XYZ] = [X'Y'Z']$. Somit ist Satz G2.1 bewiesen, und die Aufgabe G2 dadurch gelöst.

Bemerkungen: 1. Die Aufgabe G2 ist alles andere als neu; zum Beispiel wurde sie als Aufgabe P144 in der "Praxis der Mathematik" veröffentlicht, eingesandt von einem gewissen "Engel" aus Stuttgart-Rohr (vermutlich Arthur Engel). Die Erste und die Dritte Lösung, die oben gezeigt wurden, stammen sinngemäß aus der Praxis der Mathematik.

2. Wir haben in der Vorbemerkung **1.** den orientierten Flächeninhalt eines Dreiecks definiert. Man kann auch den orientierten Flächeninhalt eines beliebigen n -Ecks definieren, und zwar wie folgt:

Seien P_1, P_2, \dots, P_n beliebige n Punkte, und sei Q ein beliebiger Punkt. Dann ist der Wert $[QP_1P_2] + [QP_2P_3] + \dots + [QP_{n-1}P_n] + [QP_nP_1]$ unabhängig von dem Punkt Q (wie man beweisen kann). Deshalb ist dieser Wert eine nur von den n Punkten P_1, P_2, \dots, P_n abhängige Größe; wir können ihn also mit $f(P_1; P_2; \dots; P_n)$ bezeichnen. Für $n = 3$ stimmt dieser Wert $f(P_1; P_2; P_3)$ mit dem orientierten Flächeninhalt $[P_1P_2P_3]$ des Dreiecks $P_1P_2P_3$ überein (dies folgt aus dem Dreieckssummensatz). Somit können wir für jedes natürliche $n \geq 3$ den Wert $f(P_1; P_2; \dots; P_n)$ mit $[P_1P_2\dots P_n]$ bezeichnen und als den *orientierten Flächeninhalt des n -Ecks $P_1P_2\dots P_n$* bezeichnen.

Es sei angemerkt, daß wir auf diese Weise einen orientierten Flächeninhalt des n -Ecks $P_1P_2\dots P_n$ für beliebige n Punkte P_1, P_2, \dots, P_n definiert haben; dabei muss das n -Eck $P_1P_2\dots P_n$ nicht konvex sein, sondern es kann auch konkav, überschlagen oder entartet sein. Dies ist ein wesentlicher Vorteil orientierter Flächeninhalte - denn mit nicht-orientierten Flächeninhalten kommt man schnell in Verwirrung, wenn man versucht, sie auf überschlagene Vielecke zu übertragen.

3. Aus Satz G2.1 folgt trivial eine recht merkwürdige Eigenschaft von Dreiecken (Fig. G2.9):

Satz G2.8, der Satz von der isotomischen Geraden: Sei ABC ein Dreieck. Eine Gerade schneide die Geraden BC, CA und AB in den Punkten X, Y bzw. Z . Seien X', Y' und Z' die Spiegelbilder dieser Punkte $X,$

Y bzw. Z an den Mittelpunkten der Strecken BC , CA bzw. AB . Dann liegen die Punkte X' , Y' und Z' auf einer Geraden. (Siehe Fig. G2.9.)

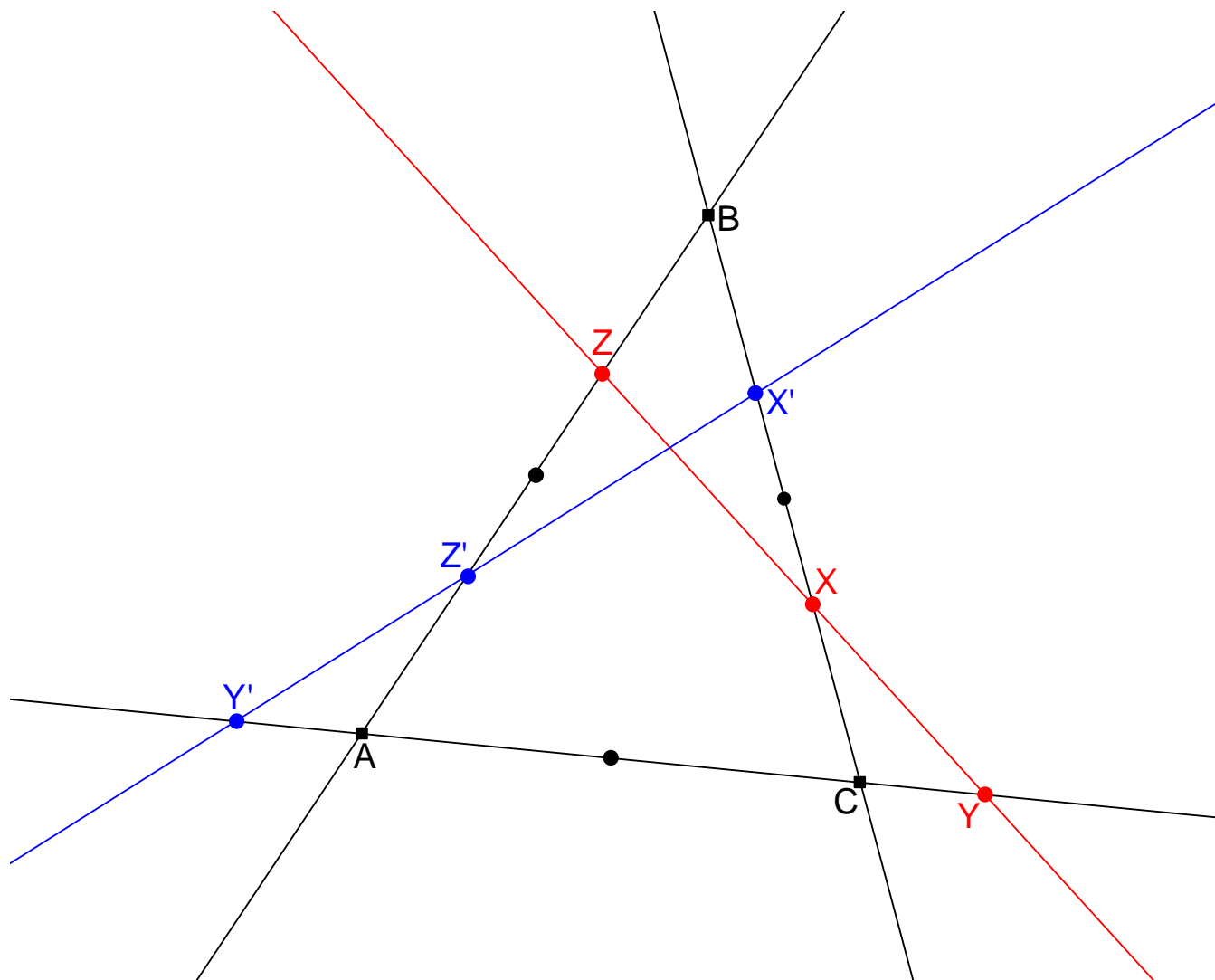


Fig. G2.9

Beweis von Satz G2.8: Da die Punkte X , Y und Z auf einer Geraden liegen, ist $[XYZ] = 0$. Nach Satz G2.1 ist aber $[XYZ] = [X'Y'Z']$. Somit ist $[X'Y'Z'] = 0$. Also liegen die Punkte X' , Y' und Z' auf einer Geraden. Damit ist Satz G2.8 bewiesen.

4. Eine weniger offensichtliche Folgerung aus Satz G2.1 ist:

Satz G2.9: Sei ABC ein Dreieck, und seien X , Y und Z drei Punkte auf den Geraden BC , CA bzw. AB . Seien X_1 , Y_1 und Z_1 die Mittelpunkte der Strecken AX , BY bzw. CZ . Dann ist $[X_1Y_1Z_1] = \frac{1}{4} \cdot [XYZ]$. (Siehe Fig. G2.10.)

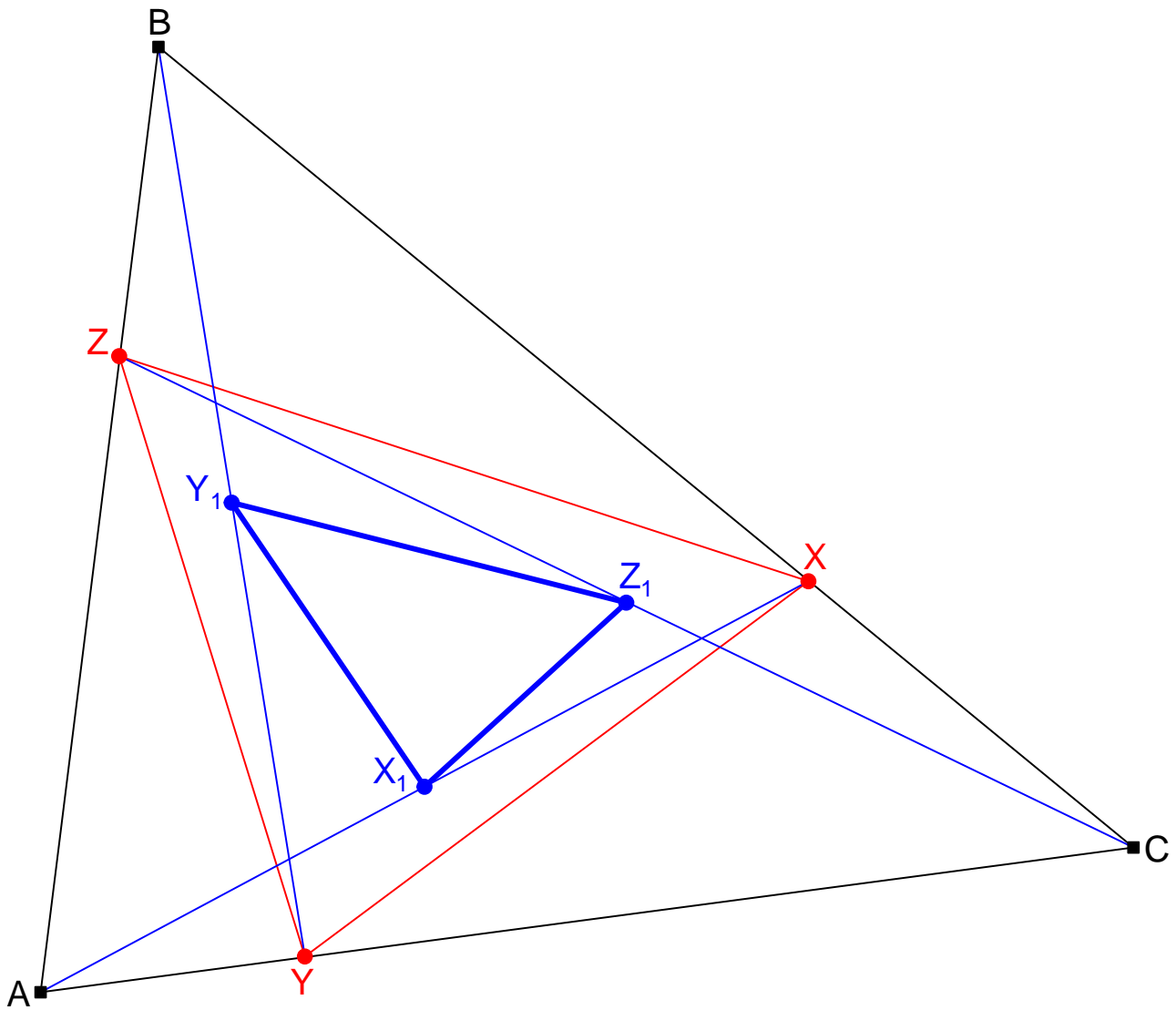


Fig. G2.10

Beweis von Satz G2.9: Seien X' , Y' und Z' die Spiegelbilder der Punkte X , Y bzw. Z an den Mittelpunkten der Strecken BC , CA bzw. AB . Laut Satz G2.1 ist dann $[XYZ] = [X'Y'Z']$.

(Siehe Fig. G2.11.) Sei M_a der Mittelpunkt der Strecke BC . Sei S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC . Da die Strecke AM_a eine Seitenhalbierende des Dreiecks ABC ist, liegt der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC auf dieser Strecke AM_a und teilt sie im Verhältnis $\frac{AS}{SM_a} = 2$.

Sei S_1 der Schwerpunkt des Dreiecks AXX' . Der Punkt X' ist das Spiegelbild des Punktes X an dem Mittelpunkt der Strecke BC , also an dem Punkt M_a . Somit ist der Punkt M_a der Mittelpunkt der Strecke XX' . Daher ist die Strecke AM_a eine Seitenhalbierende des Dreiecks AXX' . Folglich liegt der Schwerpunkt S_1 des Dreiecks AXX' auf dieser Strecke AM_a und teilt sie im Verhältnis $\frac{AS_1}{S_1M_a} = 2$.

Aus $\frac{AS}{SM_a} = 2$ und $\frac{AS_1}{S_1M_a} = 2$ folgt $\frac{AS}{SM_a} = \frac{AS_1}{S_1M_a}$. Also liegen beide Punkte S und S_1 auf der Strecke AM_a und teilen diese Strecke im gleichen Verhältnis. Folglich

ist $S = S_1$. Da wir den Punkt S_1 als den Schwerpunkt des Dreiecks AXX' definiert haben, ergibt sich also: Der Punkt S ist der Schwerpunkt des Dreiecks AXX' .

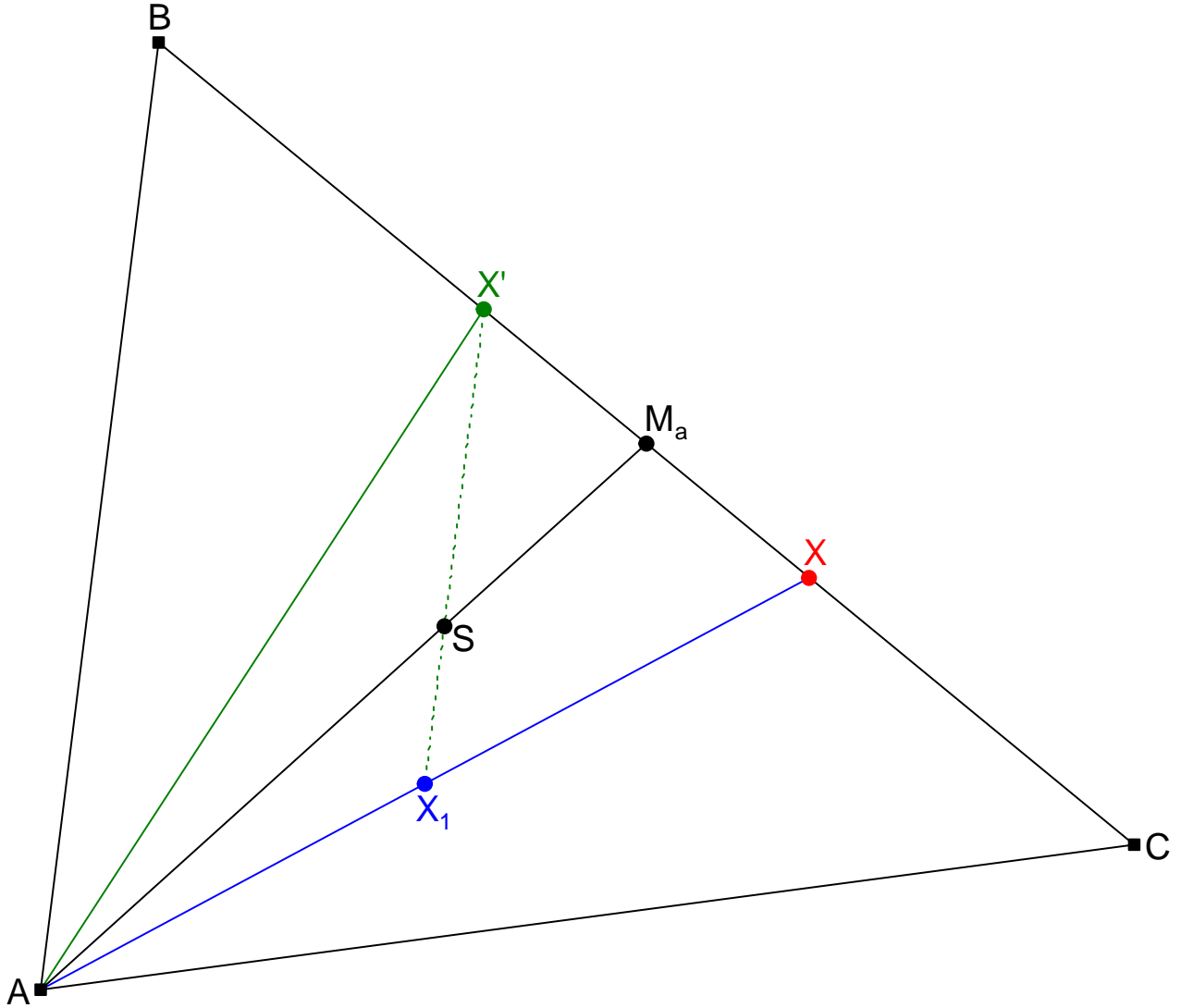


Fig. G2.11

Da X_1 der Mittelpunkt der Strecke AX ist, ist die Strecke $X'X_1$ eine Seitenhalbierende des Dreiecks AXX' . Daher liegt der Schwerpunkt S des Dreiecks AXX' auf dieser Strecke $X'X_1$ und teilt sie im Verhältnis $\frac{X'S}{SX_1} = 2$. Unter Verwendung ori-

entierter Strecken wird dies zu $\frac{\overline{X'S}}{\overline{SX_1}} = 2$, also zu $\overline{X'S} = 2 \cdot \overline{SX_1}$, und damit ist $\overline{SX_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{X'S} = \frac{1}{2} \cdot (-\overline{SX'}) = -\frac{1}{2} \cdot \overline{SX'}$.

Somit ist der Punkt X_1 das Bild des Punktes X' bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{2}$. Analog sind die Punkte Y_1 und Z_1 die Bilder der Punkte Y' bzw. Z' bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-\frac{1}{2}$. Da bei einer zentrischen Streckung mit einem Faktor λ orientierte Flächeninhalte

immer mit dem Faktor λ^2 multipliziert werden, ist also $[X_1Y_1Z_1] = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot [X'Y'Z']$.

Wegen $[XYZ] = [X'Y'Z']$ wird dies zu $[X_1Y_1Z_1] = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot [XYZ]$, also zu $[X_1Y_1Z_1] = \frac{1}{4} \cdot [XYZ]$. Damit ist Satz G2.9 bewiesen.

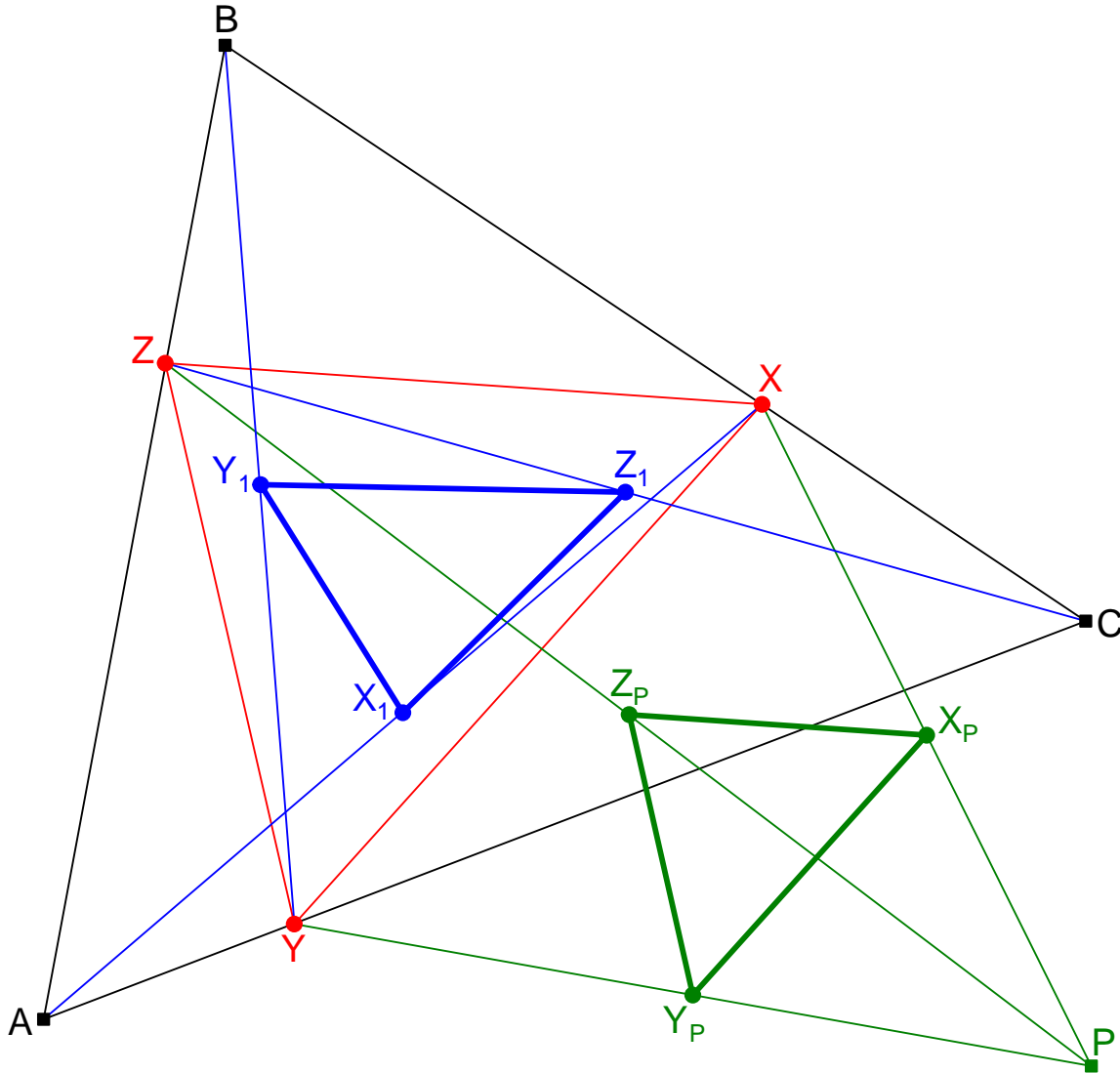


Fig. G2.12

Aus Satz G2.9 folgt die Behauptung der Aufgabe 3 der 1. Runde des Bundeswettbewerb Mathematik 1994:

Satz G2.10: Sei ABC ein Dreieck, und seien X , Y und Z drei Punkte auf den Geraden BC , CA bzw. AB . Seien X_1 , Y_1 und Z_1 die Mittelpunkte der Strecken AX , BY bzw. CZ . Sei P ein beliebiger Punkt, und seien X_P , Y_P und Z_P die Mittelpunkte der Strecken PX , PY bzw. PZ . Dann ist $[X_1Y_1Z_1] = [X_PY_PZ_P]$. (Siehe Fig. G2.12.)

Beweis von Satz G2.10: Die Punkte X_P , Y_P und Z_P sind die Mittelpunkte der Strecken PX , PY bzw. PZ , also die Bilder der Punkte X , Y bzw. Z bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum P und dem Faktor $\frac{1}{2}$. Da bei einer zentrischen Streckung mit einem Faktor λ orientierte Flächeninhalte immer mit dem Faktor λ^2 multipliziert

werden, ist also $[X_P Y_P Z_P] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot [XYZ]$. Das heißt, $[X_P Y_P Z_P] = \frac{1}{4} \cdot [XYZ]$. Nach Satz G2.9 ist aber $[X_1 Y_1 Z_1] = \frac{1}{4} \cdot [XYZ]$. Somit ist $[X_1 Y_1 Z_1] = [X_P Y_P Z_P]$, und Satz G2.10 ist bewiesen.

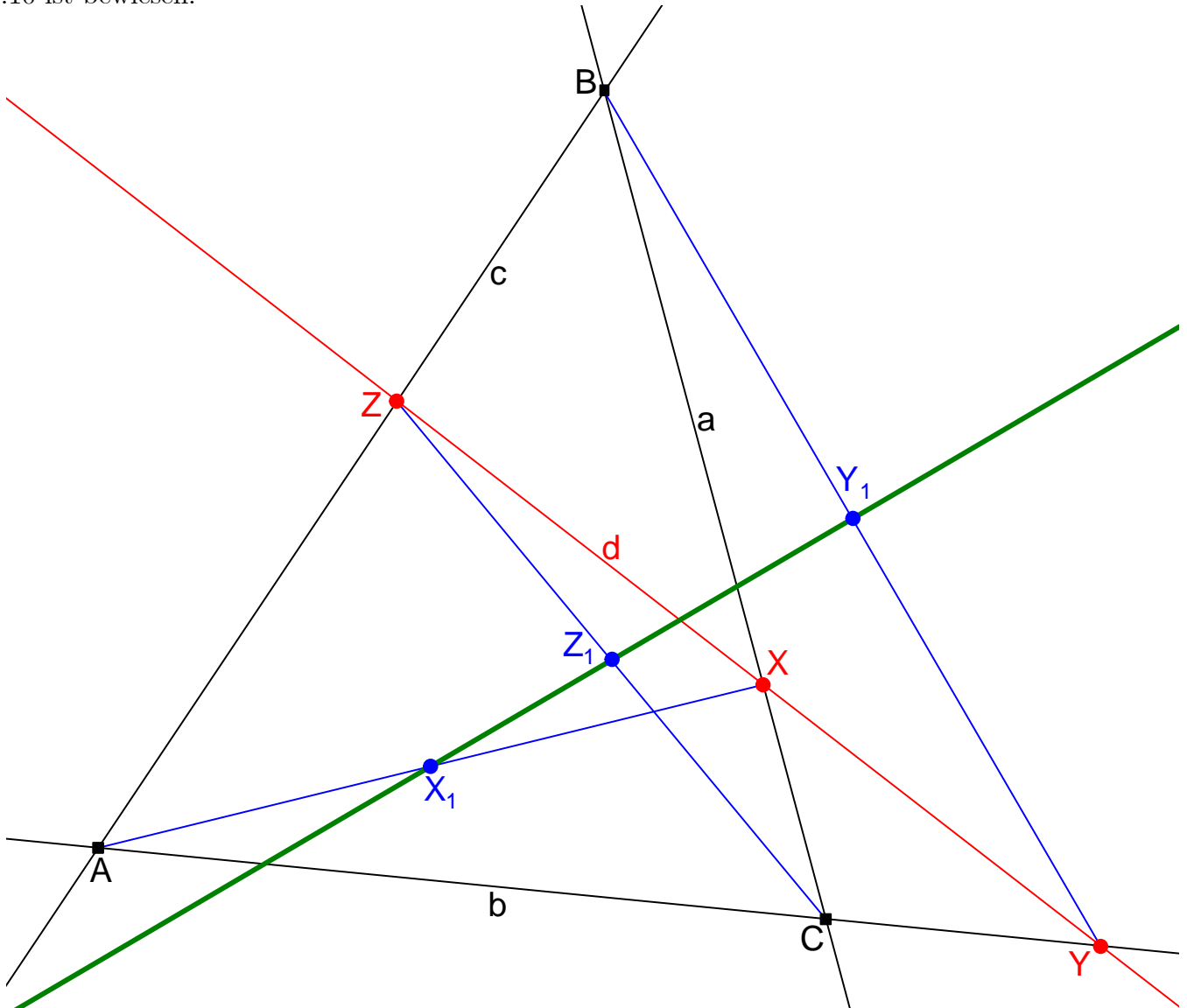


Fig. G2.13

Noch einfacher folgt aus Satz G2.9 ein berühmtes Theorem, der **Satz von der Gaussgeraden**:

Satz G2.11, der Satz von der Gaussgeraden: Wir bezeichnen im Folgenden mit $x \cap y$ den Schnittpunkt zweier Geraden x und y .

Seien a , b , c und d vier Geraden. Sei $A = b \cap c$, $B = c \cap a$, $C = a \cap b$, $X = a \cap d$, $Y = b \cap d$ und $Z = c \cap d$. Dann liegen die Mittelpunkte der Strecken AX , BY und CZ auf einer Geraden. (Siehe Fig. G2.13.)

Beweis von Satz G2.11: Bezeichnen wir die Mittelpunkte der Strecken AX , BY und CZ mit X_1 , Y_1 bzw. Z_1 . Dann müssen wir zum Beweis von Satz G2.11 zeigen, daß diese Punkte X_1 , Y_1 und Z_1 auf einer Geraden liegen.

Die Punkte X , Y und Z liegen auf den Geraden $a = BC$, $b = CA$ bzw. $c = AB$. Nach Satz G2.9 ist also $[X_1Y_1Z_1] = \frac{1}{4} \cdot [XYZ]$. Nun ist $[XYZ] = 0$, da die Punkte X , Y und Z auf einer Geraden liegen (nämlich auf der Geraden d). Somit ist $[X_1Y_1Z_1] = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$. Daher liegen die Punkte X_1 , Y_1 und Z_1 auf einer Geraden, und Satz G2.11 ist bewiesen.

Aufgabe G3

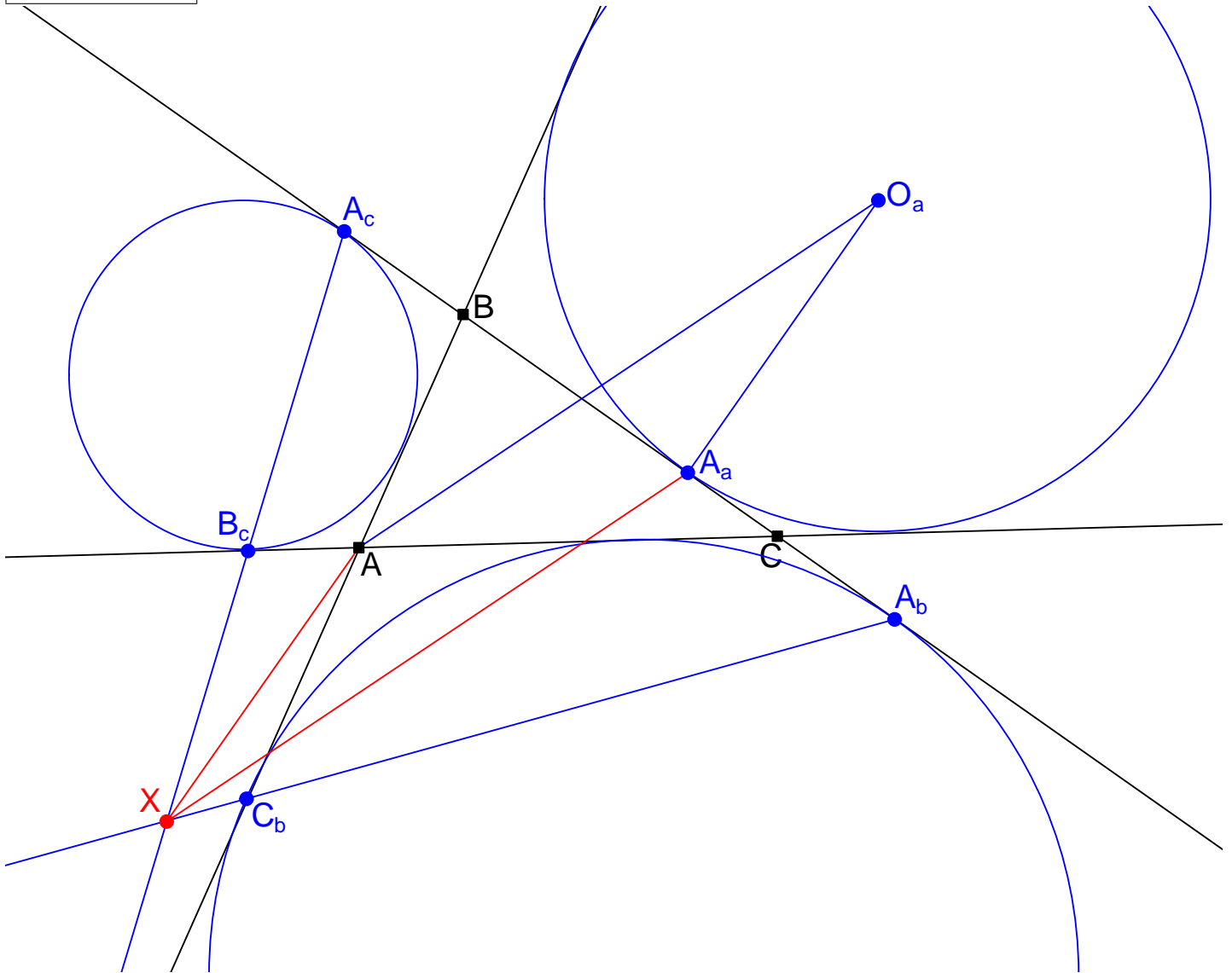


Fig. G3.1

Sei ABC ein Dreieck.

Der A -Ankreis des Dreiecks ABC habe den Mittelpunkt O_a und berühre die Seite BC in A_a .

Der B -Ankreis des Dreiecks ABC berühre die Seitengeraden AB und BC in C_b bzw. A_b .

Der C -Ankreis des Dreiecks ABC berühre die Seitengeraden BC und CA in A_c bzw. B_c .

Die Geraden C_bA_b und A_cB_c schneiden sich in einem Punkt X .

Man beweise: Das Viereck AO_aA_aX ist ein Parallelogramm.

Hinweis: Unter dem A -Ankreis eines Dreiecks ABC verstehen wir denjenigen Kreis, der die Strecke BC und die Verlängerungen der Strecken CA und AB über die Punkte C bzw. B hinaus berührt. Der Mittelpunkt dieses

Kreises ist der Schnittpunkt der Innenwinkelhalbierenden des Winkels CAB und der Außenwinkelhalbierenden der Winkel ABC und BCA .

Entsprechend sind der B -Ankreis und der C -Ankreis des Dreiecks ABC definiert. (Siehe Fig. G3.1.)

Lösung der Aufgabe G3

Erste Lösung: (Siehe Fig. G3.2.) Sei O_c der Mittelpunkt des C -Ankreises des Dreiecks ABC . Da dieser C -Ankreis die Gerade BC im Punkt A_c berührt, gilt dann $O_c A_c \perp BC$. Das heißt, $\angle C A_c O_c = 90^\circ$. Analog ist $\angle C B_c O_c = 90^\circ$. Somit liegen die Punkte A_c und B_c auf dem Thaleskreis über der Strecke CO_c . Daher gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\angle O_c A_c B_c = \angle O_c C B_c$.

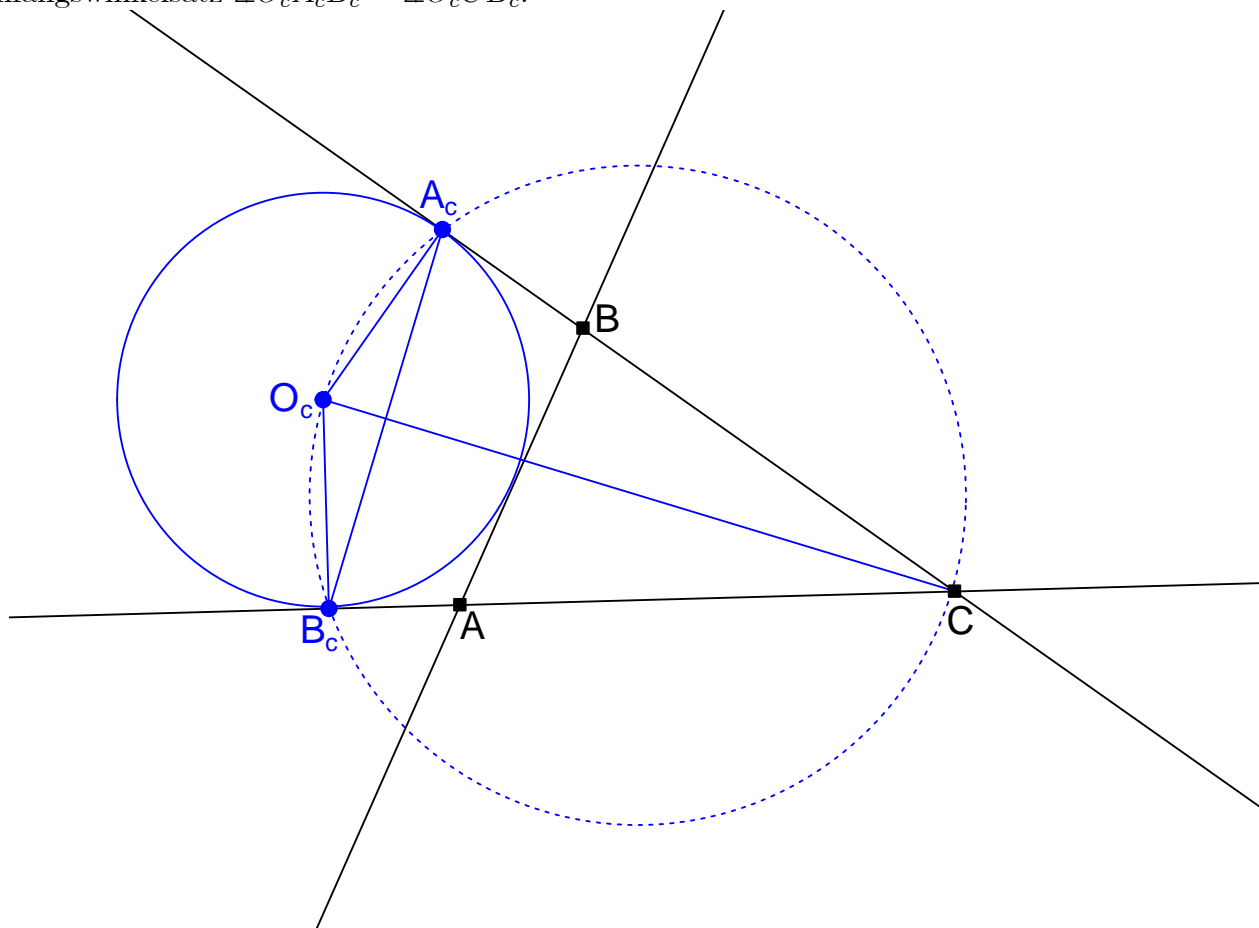


Fig. G3.2

(Siehe Fig. G3.3.) Die Gerade $O_c C$ ist die Innenwinkelhalbierende des Winkels BCA , und die Gerade $O_a C$ ist die Außenwinkelhalbierende dieses Winkels. Da die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende eines Winkels stets senkrecht aufeinander stehen, ist also $O_c C \perp O_a C$. Das heißt, $\angle O_c C O_a = 90^\circ$. Analog ist $O_c A \perp O_a A$ und damit $\angle O_c A O_a = 90^\circ$.

Sei M der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt O_a auf die Gerade $O_c A_c$. Dann ist $\angle O_c M O_a = 90^\circ$. Zusammen mit $\angle O_c C O_a = 90^\circ$ und $\angle O_c A O_a = 90^\circ$ ergibt dies, daß die Punkte M , C und A auf dem Thaleskreis über der Strecke $O_c O_a$ liegen. Hieraus folgt nach dem Umfangswinkelsatz $\angle O_c C A = \angle O_c M A$.

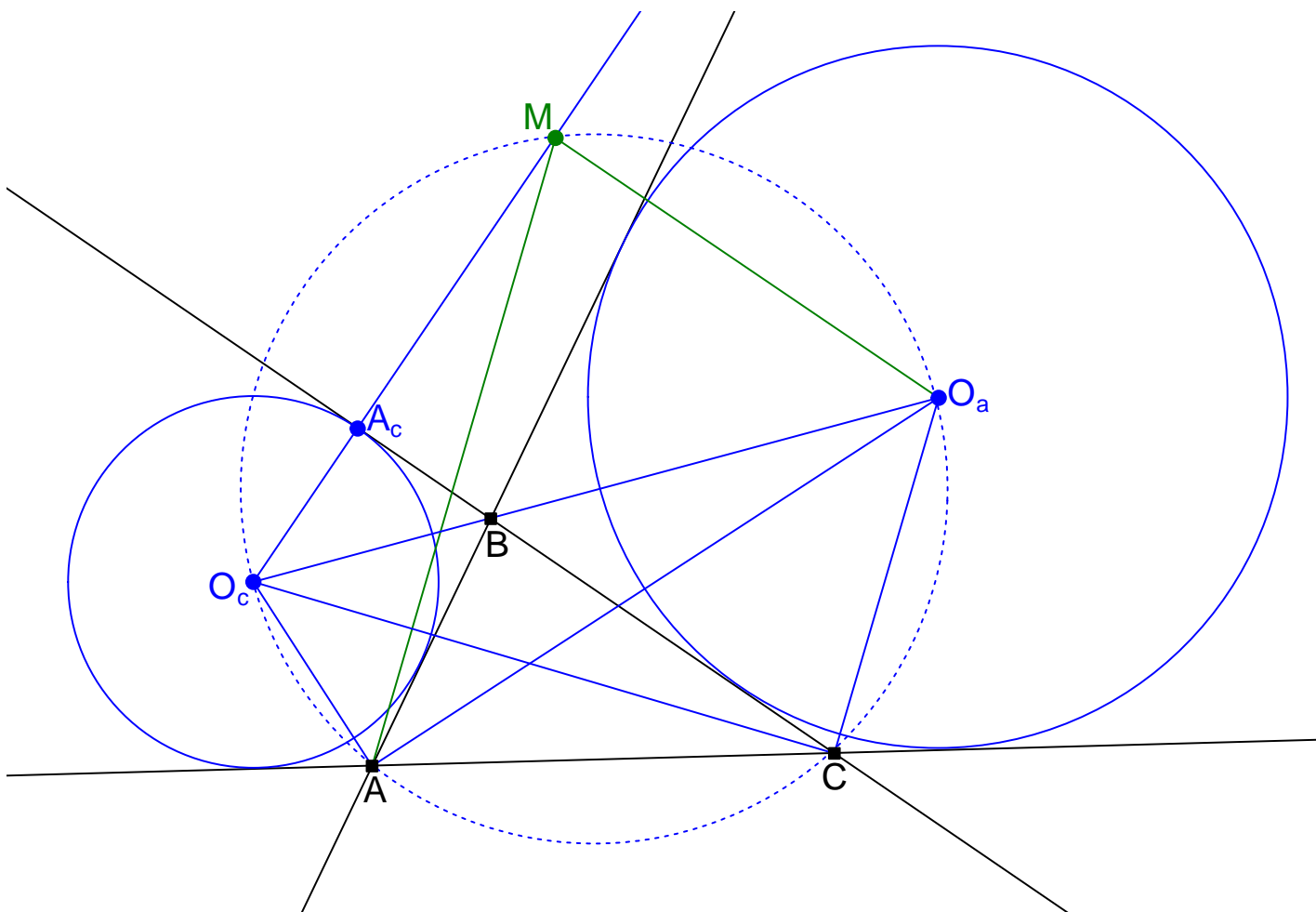


Fig. G3.3

(Siehe Fig. G3.4.) Wir haben also $\angle O_c A_c B_c = \angle O_c C B_c = \angle O_c C A = \angle O_c M A$. Hieraus folgt nach dem Stufenwinkelsatz $A_c B_c \parallel AM$.

Ab dieser Stelle werden wir einige grundlegende Eigenschaften von Vektoren verwenden. Wer mit der Vektorrechnung nicht vertraut ist, kann die folgende Argumentation genauso gut verstehen, indem er jede Gleichung der Form $\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_2 Q_2}$ für vier Punkte P_1, Q_1, P_2 und Q_2 als "es gibt eine Parallelverschiebung, die die Punkte P_1 und Q_1 in die Punkte P_2 bzw. Q_2 überführt" deutet. Wir werden folgende Eigenschaften von Vektoren verwenden:

Aussage V_1 : Seien P_1, P_2 und Q_2 drei Punkte. Dann gibt es genau einen Punkt Q_1 , der $\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_2 Q_2}$ erfüllt. (Dieser Punkt Q_1 ist nämlich das Bild des Punktes P_1 bei der Parallelverschiebung um den Vektor $\overrightarrow{P_2 Q_2}$.)

Aussage V_2 : Seien P_1, Q_1, P_2 und Q_2 vier Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Genau dann ist $\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_2 Q_2}$, wenn das Viereck $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ ein Parallelogramm ist.

Aussage V_3 : Seien P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3 und Q_3 sechs Punkte. Wenn $\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_2 Q_2}$ und $\overrightarrow{P_2 Q_2} = \overrightarrow{P_3 Q_3}$ gilt, dann gilt auch $\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_3 Q_3}$.

Nun können wir mit der Lösung der Aufgabe G3 fortfahren:

Nach Aussage V_1 gibt es genau einen Punkt Q , der $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{O_a A_a}$ erfüllt. Wir bezeichnen diesen Punkt Q mit X' . Es gilt also $\overrightarrow{AX'} = \overrightarrow{O_a A_a}$. Somit ist (laut Aussage V_2) das Viereck $AX' A_a O_a$ ein Parallelogramm; also ist $AX' \parallel O_a A_a$.

Nun hat der A -Ankreis des Dreiecks ABC den Mittelpunkt O_a und berührt die Seite BC im Punkt A_a . Also ist $O_a A_a \perp BC$. Das heißt, $\angle O_a A_a A_c = 90^\circ$. Andererseits ist $O_c A_c \perp BC$, also $\angle A_a A_c M = 90^\circ$. Schließlich ist $\angle O_a M A_c = 90^\circ$, denn M ist der Fußpunkt des Lotes von dem Punkt O_a auf die Gerade $O_c A_c$. Wegen $\angle O_a A_a A_c = 90^\circ$, $\angle A_a A_c M = 90^\circ$ und $\angle O_a M A_c = 90^\circ$ hat das Viereck $O_a A_a A_c M$ drei rechte Winkel; dieses Viereck ist also ein Rechteck, und somit insbesondere ein Parallelogramm. Hieraus folgt $\overrightarrow{O_a A_a} = \overrightarrow{M A_c}$ (laut Aussage V₂). Zusammen mit $\overrightarrow{A X'} = \overrightarrow{O_a A_a}$ ergibt dies $\overrightarrow{A X'} = \overrightarrow{M A_c}$ (wegen Aussage V₃). Also ist das Viereck $A X' A_c M$ ein Parallelogramm (nach Aussage V₂). Daraus folgt $A_c X' \parallel AM$. Zusammen mit $A_c B_c \parallel AM$ ergibt dies $A_c X' \parallel A_c B_c$. Doch die Geraden $A_c X'$ und $A_c B_c$ haben einen gemeinsamen Punkt (nämlich den Punkt A_c); somit können sie nur dann parallel sein, wenn sie zusammenfallen. Aus $A_c X' \parallel A_c B_c$ folgt also, daß die Geraden $A_c X'$ und $A_c B_c$ zusammenfallen. Das heißt, der Punkt X' liegt auf der Geraden $A_c B_c$. Analog liegt der Punkt X' auf der Geraden $C_b A_b$.

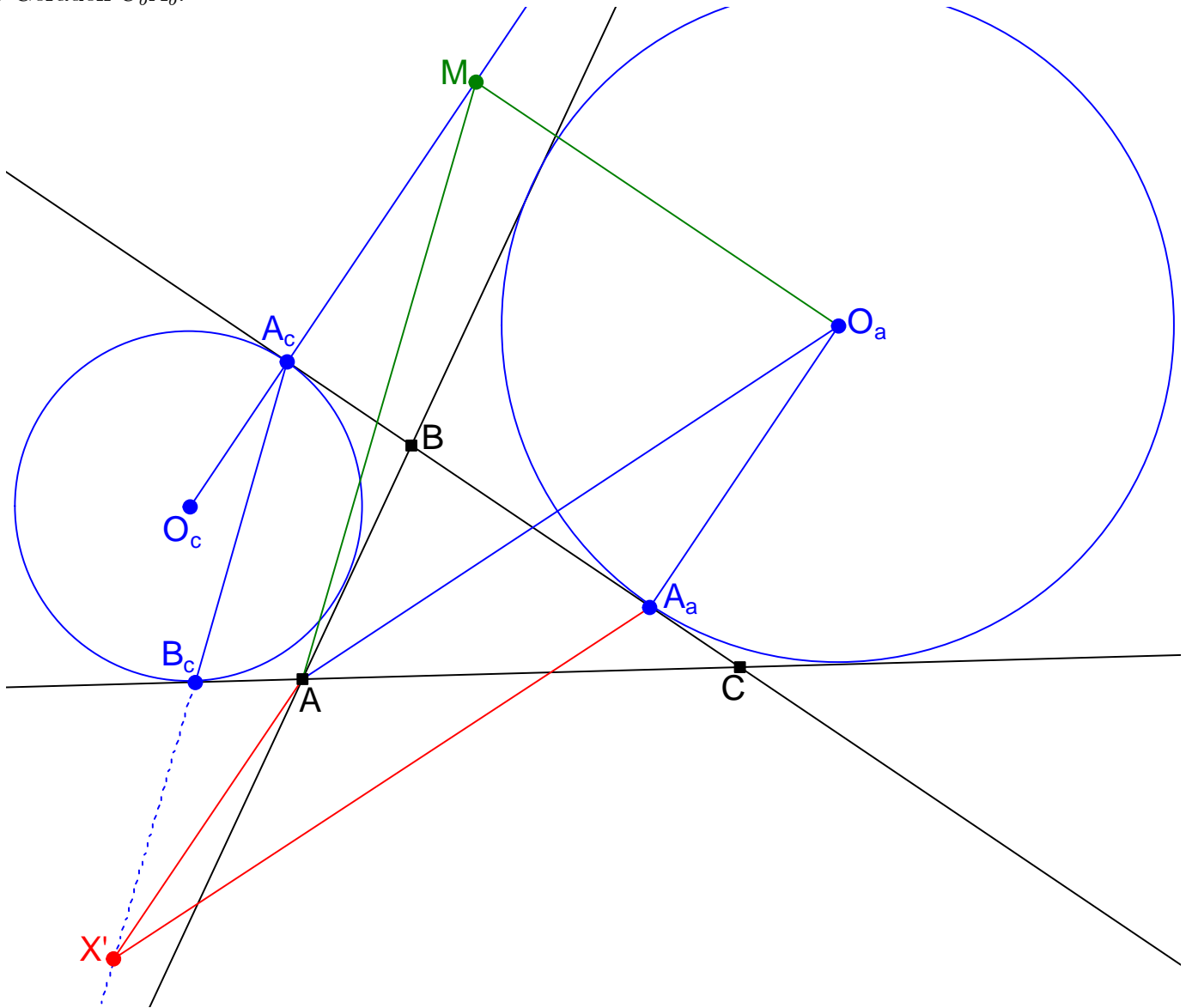


Fig. G3.4

Das heißt, der Punkt X' ist der Schnittpunkt der Geraden $C_b A_b$ und $A_c B_c$. Da wir

aber den Punkt X als den Schnittpunkt der Geraden C_bA_b und A_cB_c definiert haben, ist also $X' = X$. Da wir wissen, daß das Viereck $AX'A_aO_a$ ein Parallelogramm ist, erhalten wir also: Das Viereck AXA_aO_a ist ein Parallelogramm. Mit anderen Worten: Das Viereck AO_aA_aX ist ein Parallelogramm. Damit ist die Aufgabe G3 gelöst.

Zweite Lösung: Diese Lösung der Aufgabe G3 wird, wie auch die Erste Lösung, Vektoren verwenden; jedoch benötigen wir diesmal etwas mehr Eigenschaften von Vektoren als in der Ersten Lösung. Wir werden diese Eigenschaften auch nicht mehr, wie in der Ersten Lösung, explizit formulieren; daher wird vom Leser etwas Erfahrung mit Vektorrechnung erwartet.

Sei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der halbe Umfang des Dreiecks ABC . Dann ist $2s = a + b + c$. Nach den bekannten Formeln für die Abstände von den Ecken des Dreiecks ABC zu den Berührungspunkten der Ankreise mit den Seiten gilt $BA_a = s - c$ und $BA_c = s - a$, also

$$A_aA_c = BA_a + BA_c = (s - c) + (s - a) = 2s - (c + a) = (a + b + c) - (c + a) = b = CA.$$

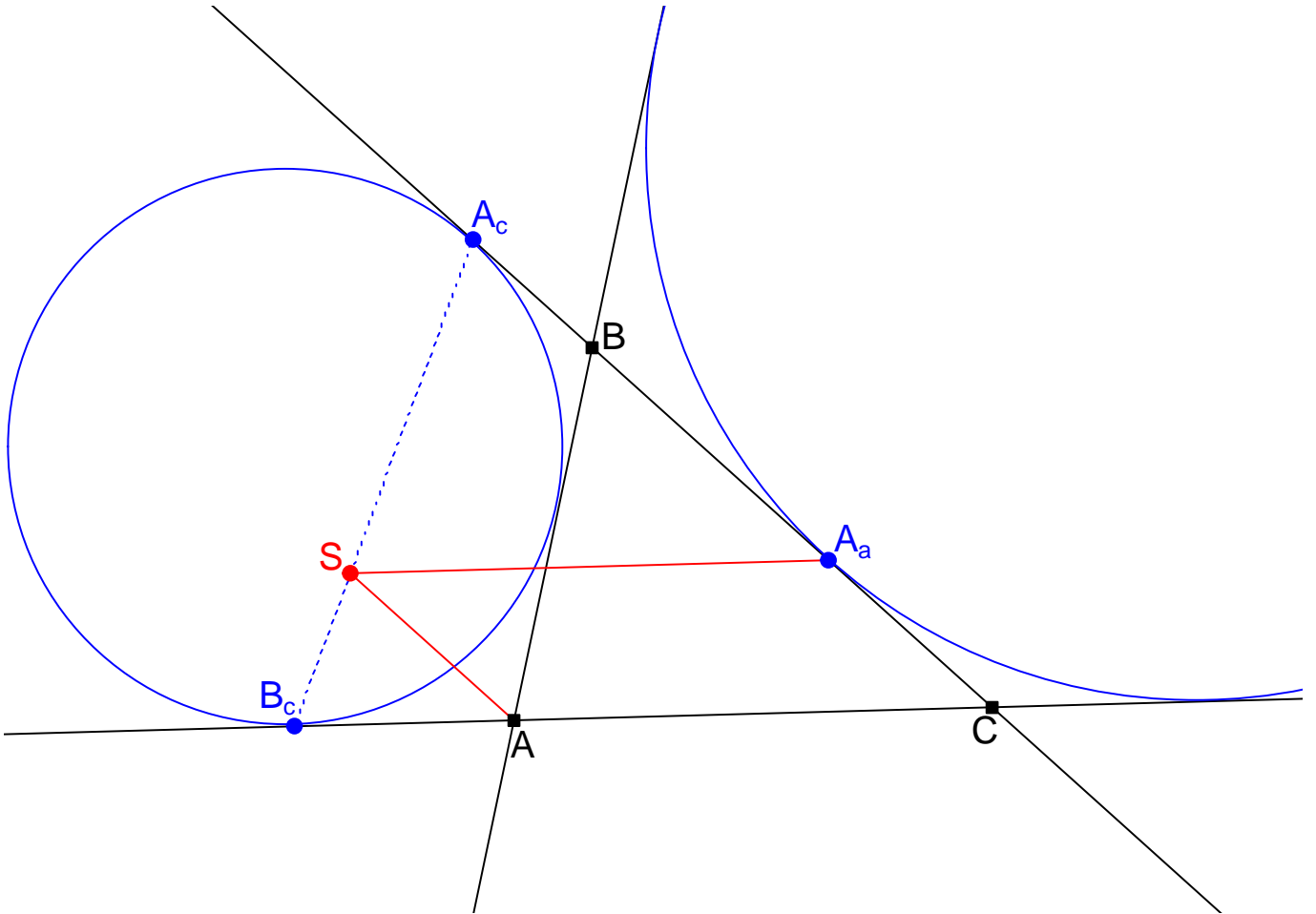
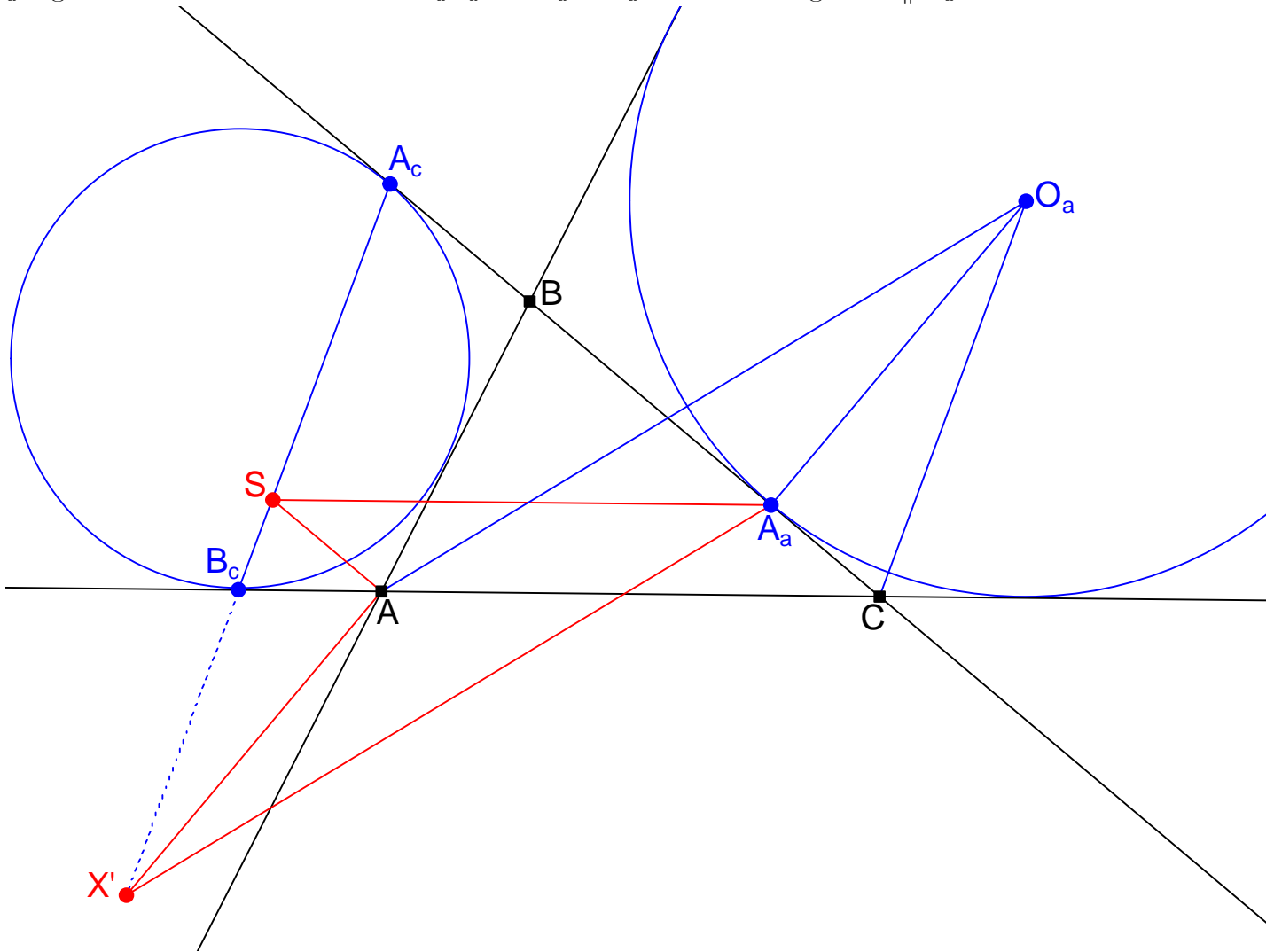


Fig. G3.5

(Siehe Fig. G3.5.) Sei nun S der Punkt, der $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{CA_a}$ erfüllt (es gibt genau einen solchen Punkt laut Aussage V_1 aus der Ersten Lösung). Dann ist das Viereck ASA_aC ein Parallelogramm, und somit gilt $SA_a = CA$. Zusammen mit $A_aA_c = CA$ ergibt dies $SA_a = A_aA_c$. Daher ist das Dreieck SA_aA_c gleichschenkelig, und für seinen Basiswinkel

(Siehe Fig. G3.6.) Sei nun X' der Punkt, der $\overrightarrow{AX'} = \overrightarrow{O_a A_a}$ erfüllt (es gibt genau einen solchen Punkt wegen Aussage V_1 aus der Ersten Lösung). Zusammen mit $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{CA_a}$ ergibt dies $\overrightarrow{SX'} = \overrightarrow{AX'} - \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{O_a A_a} - \overrightarrow{CA_a} = \overrightarrow{O_a C}$. Hieraus folgt $SX' \parallel O_a C$.



Doch die Gerade O_aC ist die Außenwinkelhalbierende des Winkels BCA , und daher ist $\angle BCO_a = 90^\circ - \frac{\angle BCA}{2}$, also $\angle BCO_a = 90^\circ - \frac{\angle A_cCB_c}{2}$. Zusammen mit $\angle B_cA_cC = 90^\circ - \frac{\angle A_cCB_c}{2}$ ergibt dies $\angle BCO_a = \angle B_cA_cC$. Hieraus folgt nach dem Wechselwinkelsatz, daß $O_aC \parallel A_cB_c$ ist. Daher wird $SX' \parallel O_aC$ zu $SX' \parallel A_cB_c$. Doch

die Geraden SX' und A_cB_c haben einen gemeinsamen Punkt (nämlich den Punkt S , denn wir wissen, daß dieser Punkt S auf A_cB_c liegt). Daher können diese Geraden nur dann parallel sein, wenn sie zusammenfallen. Aus $SX' \parallel A_cB_c$ folgt somit, daß die Geraden SX' und A_cB_c zusammenfallen. Daher liegt der Punkt X' auf der Geraden A_cB_c . Analog liegt der Punkt X' auf der Geraden C_bA_b . Somit ist der Punkt X' der Schnittpunkt der Geraden C_bA_b und A_cB_c . Da wir jedoch den Schnittpunkt der Geraden C_bA_b und A_cB_c mit X bezeichnet haben, ergibt dies $X' = X$. Somit wird $\overrightarrow{AX'} = \overrightarrow{O_aA_a}$ zu $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{O_aA_a}$. Also ist das Viereck AO_aA_aX ein Parallelogramm, und die Aufgabe G3 ist gelöst.

Bemerkungen: 1. Die Aufgabe G3 ist Satz (88) in folgender Arbeit:

John Sturgeon Mackay: *The Triangle and its Six Scribed Circles*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 1 (1883), Seiten 4-128 und Zeichnungen am Ende des Heftes.

Aus dieser Quelle entstammt auch unsere Zweite Lösung der Aufgabe.

2. Die Aufgabe G3 ist der Anfang einer Kette von Sätzen, die den Punkt X und zwei analog definierte Punkte Y und Z betreffen. Wir zeigen hier einige davon:

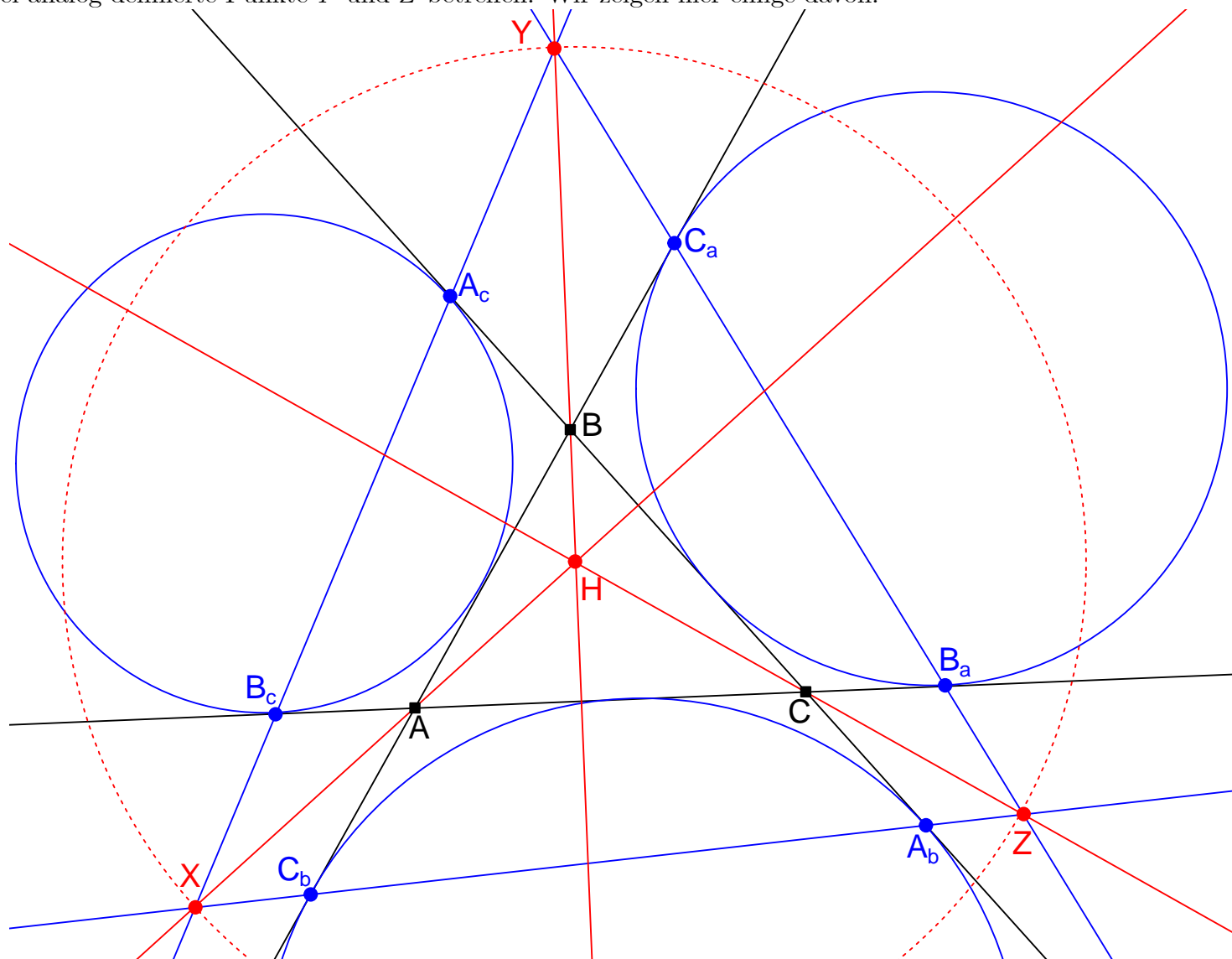


Fig. G3.7

Satz G3.1: Sei ABC ein Dreieck.

Der A -Ankreis des Dreiecks ABC berühre die Seitengeraden CA und AB in B_a bzw. C_a .

Der B -Ankreis des Dreiecks ABC berühre die Seitengeraden AB und BC in C_b bzw. A_b .

Der C -Ankreis des Dreiecks ABC berühre die Seitengeraden BC und CA in A_c bzw. B_c .

Die Geraden C_bA_b und A_cB_c schneiden sich in einem Punkt X .

Die Geraden A_cB_c und B_aC_a schneiden sich in einem Punkt Y .

Die Geraden B_aC_a und C_bA_b schneiden sich in einem Punkt Z .

Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC .

a) Die Punkte X , Y und Z liegen auf den Höhen AH , BH bzw. CH des Dreiecks ABC .

b) Der Abstand AX ist gleich dem Radius des A -Ankreises des Dreiecks ABC .

c) Der Punkt H ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks XYZ . (Siehe Fig. G3.7.)

d) Sei O_a der Mittelpunkt des A -Ankreises des Dreiecks ABC . Dann geht die Gerade XO_a durch den Mittelpunkt der Strecke BC . (Siehe Fig. G3.8.)

e) Seien O_b und O_c die Mittelpunkte des B -Ankreises bzw. des C -Ankreises des Dreiecks ABC . Die Dreiecke $O_aO_bO_c$ und XYZ sind zentrisch ähnlich.

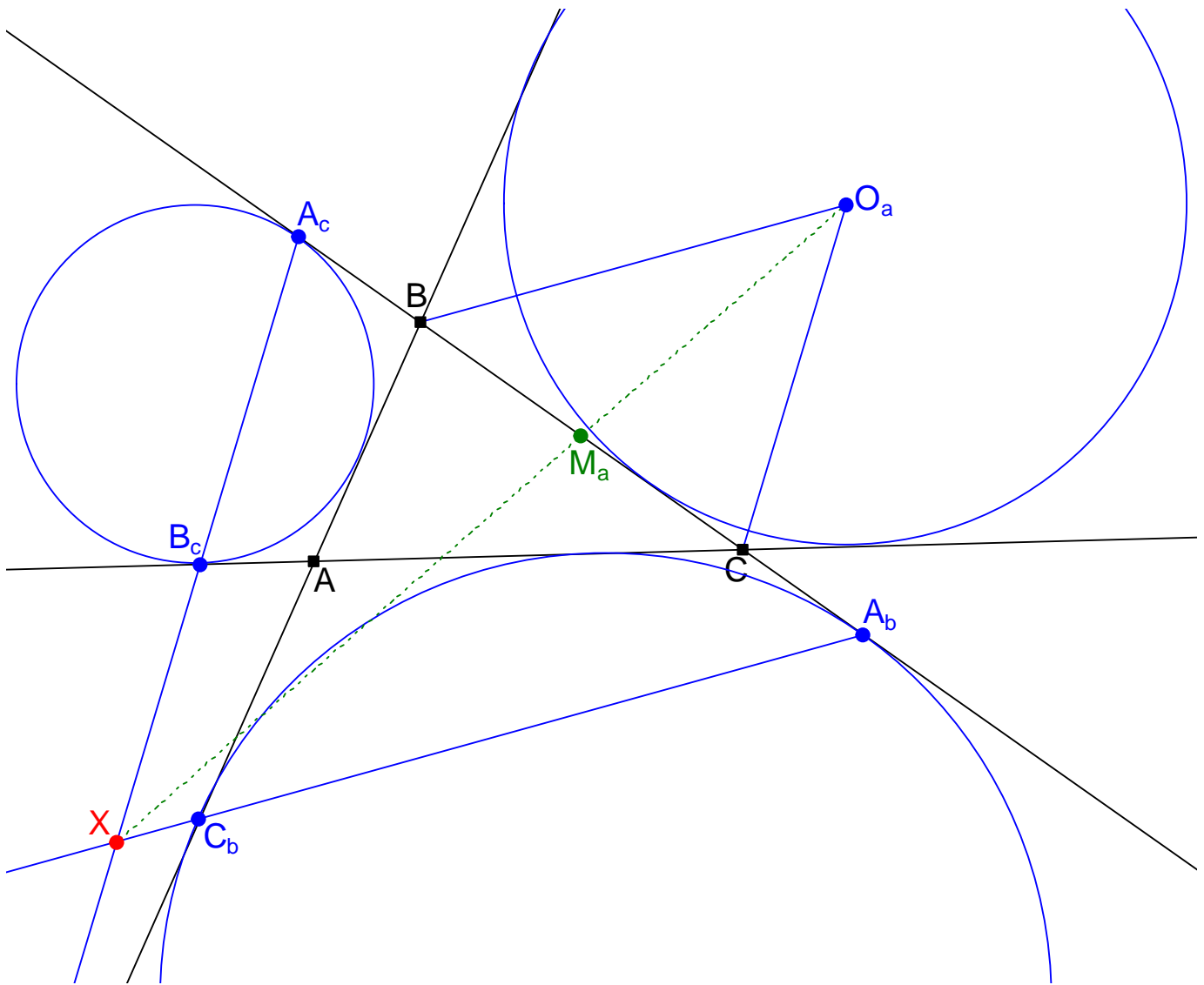


Fig. G3.8

Beweis von Satz G3.1: Der A -Ankreis des Dreiecks ABC habe den Mittelpunkt O_a und berühre die Seite BC in A_a . Dann ist $O_a A_a \perp BC$. Andererseits ist $AX \parallel O_a A_a$, denn laut der Aufgabe G3 ist das Viereck $AO_a A_a X$ ein Parallelogramm. Somit wird $O_a A_a \perp BC$ zu $AX \perp BC$. Doch da H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, ist die Gerade AH eine Höhe dieses Dreiecks, und somit ist $AH \perp BC$. Zusammen mit $AX \perp BC$ ergibt dies $AH \parallel AX$. Doch da die Geraden AH und AX einen gemeinsamen Punkt haben (nämlich den Punkt A), können sie nur dann parallel sein, wenn sie zusammenfallen. Aus $AH \parallel AX$ folgt also, daß die Geraden AH und AX zusammenfallen. Das heißt, der Punkt X liegt auf der Geraden AH . Analog liegen die Punkte Y und Z auf den Geraden BH bzw. CH . Also ist Satz G3.1 **a)** bewiesen.

Da das Viereck $AO_a A_a X$ ein Parallelogramm ist, gilt $AX = O_a A_a$. Doch O_a ist der Mittelpunkt des A -Ankreises des Dreiecks ABC , und A_a ist ein Punkt auf diesem A -Ankreis; daher ist der Abstand $O_a A_a$ der Radius des A -Ankreises des Dreiecks ABC . Aus $AX = O_a A_a$ folgt also: Der Abstand AX ist der Radius des A -Ankreises des Dreiecks ABC . Damit ist Satz G3.1 **b)** nachgewiesen.

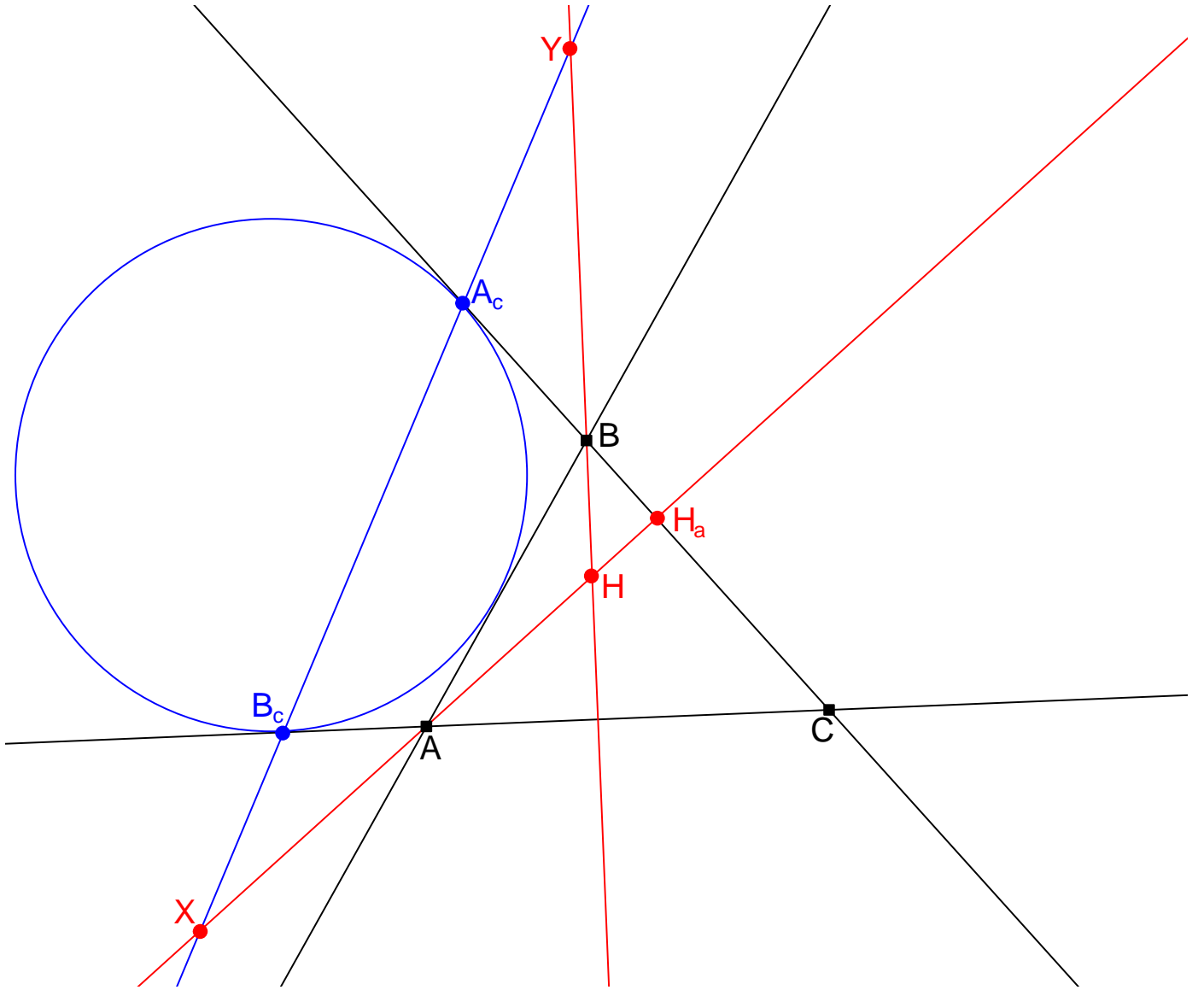


Fig. G3.9

(Siehe Fig. G3.9.) Sei H_a der Schnittpunkt der Geraden AH und BC . Aus $AH \perp BC$ folgt dann $\angle A_c H_a X = 90^\circ$; somit ist das Dreieck $A_c H_a X$ bei H_a rechtwinklig, und daraus folgt $\angle H_a X A_c = 90^\circ - \angle H_a A_c X$. Mit anderen Worten: $\angle HXY = 90^\circ - \angle C A_c B_c$. Analog ist $\angle HYZ = 90^\circ - \angle C B_c A_c$. Nun ist $CA_c = CB_c$ (denn die zwei Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang); somit ist das Dreieck $A_c C B_c$ gleichschenkelig, und hieraus folgt $\angle C A_c B_c = \angle C B_c A_c$. Daher ist $\angle HXY = 90^\circ - \angle C A_c B_c = 90^\circ - \angle C B_c A_c = \angle HYZ$. Also ist das Dreieck XHY gleichschenkelig, d. h. es gilt $HX = HY$. Analog ist $HY = HZ$. Somit ist $HX = HY = HZ$. Daher ist der Punkt H der Umkreismittelpunkt des Dreiecks XYZ . Dadurch ist Satz G3.1 c) gezeigt.

Sei M_a der Mittelpunkt der Strecke BC . Dann gilt $BM_a = CM_a$. Laut der Zweiten Lösung der Aufgabe G3 gilt aber $BA_c = s - a$, wobei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist. Analog ist $CA_b = s - a$. Daher ist

$$M_a A_c = BM_a + BA_c = BM_a + (s - a) = CM_a + (s - a) = CM_a + CA_b = M_a A_b.$$

Also ist der Punkt M_a der Mittelpunkt der Strecke $A_b A_c$.

Wie in der Zweiten Lösung der Aufgabe G3 gezeigt wurde, ist $O_aC \parallel A_cB_c$. Mit anderen Worten: $O_aC \parallel XA_c$. Analog ist $O_aB \parallel XA_b$.

Nun gilt $BO_a \parallel A_bX$ (dies ist nur eine Umschreibung von $O_aB \parallel XA_b$), ferner $O_aC \parallel XA_c$, und schließlich $CB \parallel A_cA_b$ (denn die Geraden CB und A_cA_b fallen zusammen). Also sind die Dreiecke BO_aC und A_bXA_c zentrisch ähnlich. Das heißt, es gibt eine zentrische Streckung z , die die Punkte B , O_a und C in die Punkte A_b , X bzw. A_c überführt. Daher muß diese zentrische Streckung z auch den Mittelpunkt der Strecke BC in den Mittelpunkt der Strecke A_bA_c überführen. Nun wissen wir, daß sowohl der Mittelpunkt der Strecke BC , als auch der Mittelpunkt der Strecke A_bA_c mit dem Punkt M_a übereinstimmen. Das heißt, die zentrische Streckung z überführt den Punkt M_a in den Punkt M_a . Andererseits überführt diese Streckung z den Punkt O_a in den Punkt X . Da bei einer zentrischen Streckung Geraden in zu ihnen parallele Geraden übergehen, gilt also $XM_a \parallel O_aM_a$.

Nun haben die Geraden XM_a und O_aM_a einen gemeinsamen Punkt (nämlich den Punkt M_a); folglich können sie nur dann zueinander parallel sein, wenn sie zusammenfallen. Aus $XM_a \parallel O_aM_a$ folgt also, daß die Geraden XM_a und O_aM_a zusammenfallen. Das heißt, die Punkte O_a , X und M_a liegen auf einer Geraden. Mit anderen Worten: Die Gerade XO_a geht durch den Punkt M_a , also durch den Mittelpunkt der Strecke BC . Dadurch ist Satz G3.1 **d)** bewiesen.

Die Gerade O_aC fällt mit der Geraden O_aO_b zusammen (denn die Punkte O_a , O_b und C liegen auf einer Geraden - nämlich auf der Außenwinkelhalbierenden des Winkels BCA). Somit wird $O_aC \parallel A_cB_c$ zu $O_aO_b \parallel A_cB_c$. Mit anderen Worten: $O_aO_b \parallel XY$. Analog ist $O_bO_c \parallel YZ$ und $O_cO_a \parallel ZX$. Also sind die Dreiecke $O_aO_bO_c$ und XYZ zentrisch ähnlich. Damit ist Satz G3.1 **e)** bewiesen, und der Beweis von Satz G3.1 ist vollständig.

Satz G3.1 **a)** ist übrigens Teil **a)** von [1], wo er anders bewiesen wurde.

Eine Konsequenz aus Satz G3.1 ist:

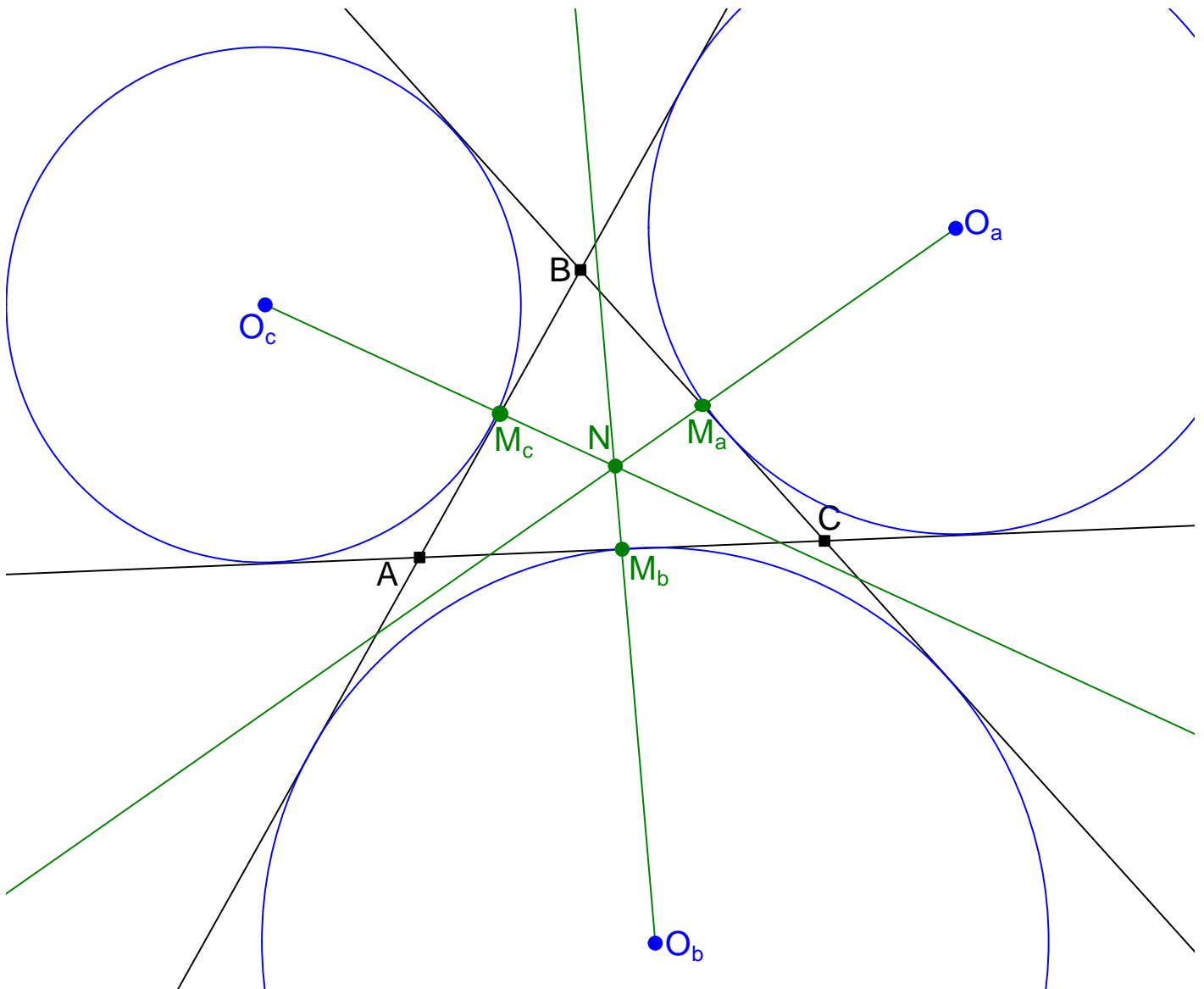


Fig. G3.10

Satz G3.2: Sei ABC ein Dreieck. Seien O_a , O_b und O_c die Mittelpunkte des A -Ankreises, des B -Ankreises bzw. des C -Ankreises des Dreiecks ABC . Seien M_a , M_b und M_c die Mittelpunkte der Strecken BC , CA bzw. AB .

a) Die Geraden $O_a M_a$, $O_b M_b$ und $O_c M_c$ schneiden sich in einem Punkt N . (Siehe Fig. G3.10.)

b) Seien die Punkte X , Y und Z so definiert wie in Satz G3.1. Dann ist der Punkt N das Ähnlichkeitszentrum der zwei zentrisch ähnlichen Dreiecke $O_a O_b O_c$ und XYZ . (Siehe Fig. G3.11.)

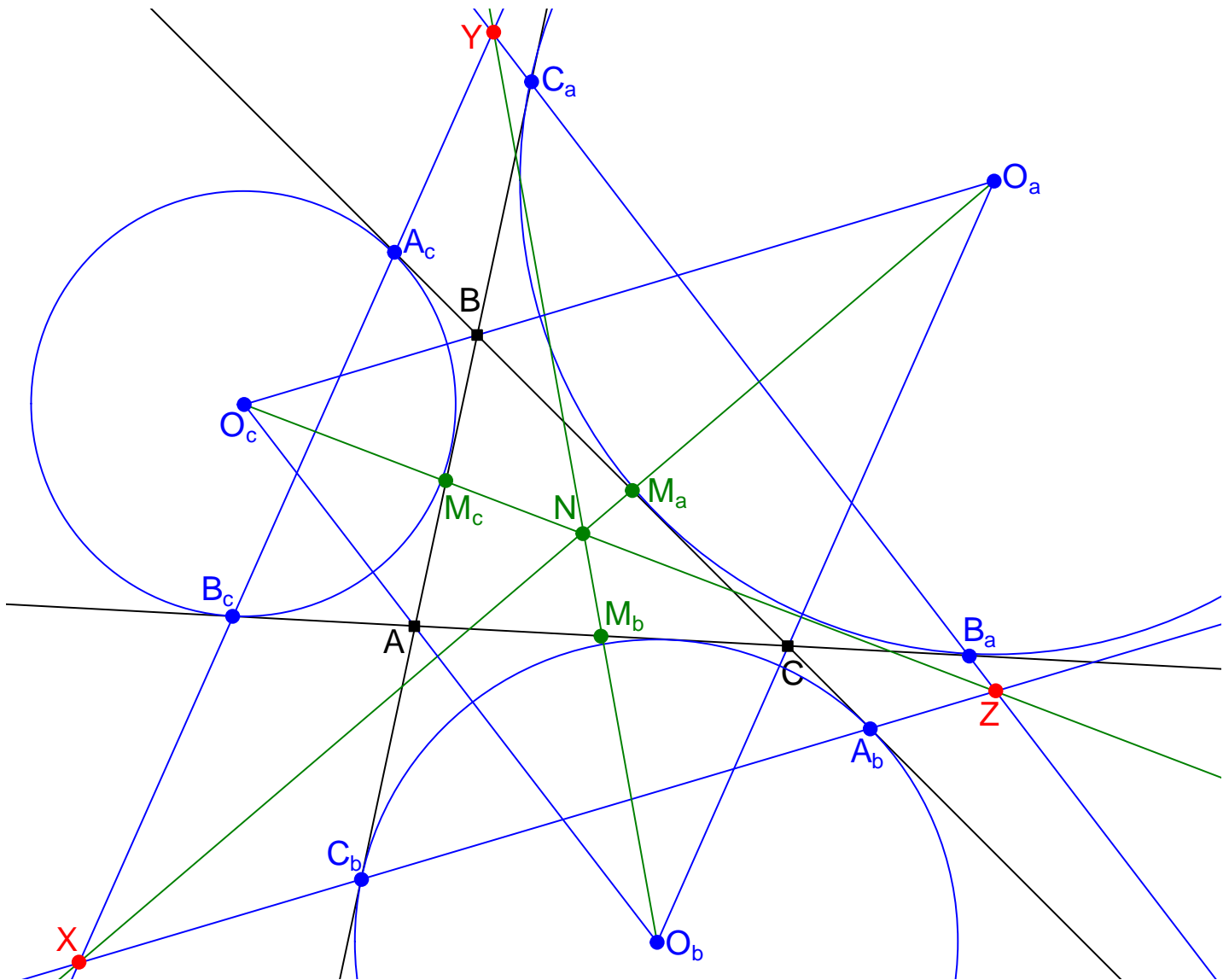


Fig. G3.11

Der Punkt N heißt der *Mittenpunkt* des Dreiecks ABC . ("Mittenpunkt", nicht "Mittelpunkt" - man beachte das "n" in der Mitte; diese Bezeichnung kommt von den Mitten, die zu der Konstruktion von N verwendet wurden - den Ankreismitten O_a , O_b und O_c , und den Seitenmitten M_a , M_b und M_c .)

Beweis von Satz G3.2: Laut Satz G3.1 d) geht die Gerade XO_a durch den Mittelpunkt M_a der Strecke BC . Das heißt, die Gerade XO_a fällt zusammen mit der Geraden O_aM_a . Analog fallen die Geraden YO_b und ZO_c zusammen mit den Geraden O_bM_b bzw. O_cM_c .

Laut Satz G3.1 e) sind die Dreiecke $O_aO_bO_c$ und XYZ zentrsch ähnlich. Folglich schneiden sich die Geraden XO_a , YO_b und ZO_c in einem Punkt, nämlich in dem hnlichkeitszentrum der Dreiecke $O_aO_bO_c$ und XYZ . Da die Geraden XO_a , YO_b und ZO_c mit den Geraden O_aM_a , O_bM_b bzw. O_cM_c zusammenfallen, erhalten wir also: Die Geraden O_aM_a , O_bM_b und O_cM_c schneiden sich in einem Punkt, nämlich in dem hnlichkeitszentrum der Dreiecke $O_aO_bO_c$ und XYZ . Somit sind beide Teile a) und b) von Satz G3.2 gleichzeitig bewiesen.

Literaturhinweise

[1] Darij Grinberg: *Synthetic proof of Paul Yiu's excircles theorem*.
<http://www.stud.uni-muenchen.de/~darij.grinberg/>

Aufgabe G4

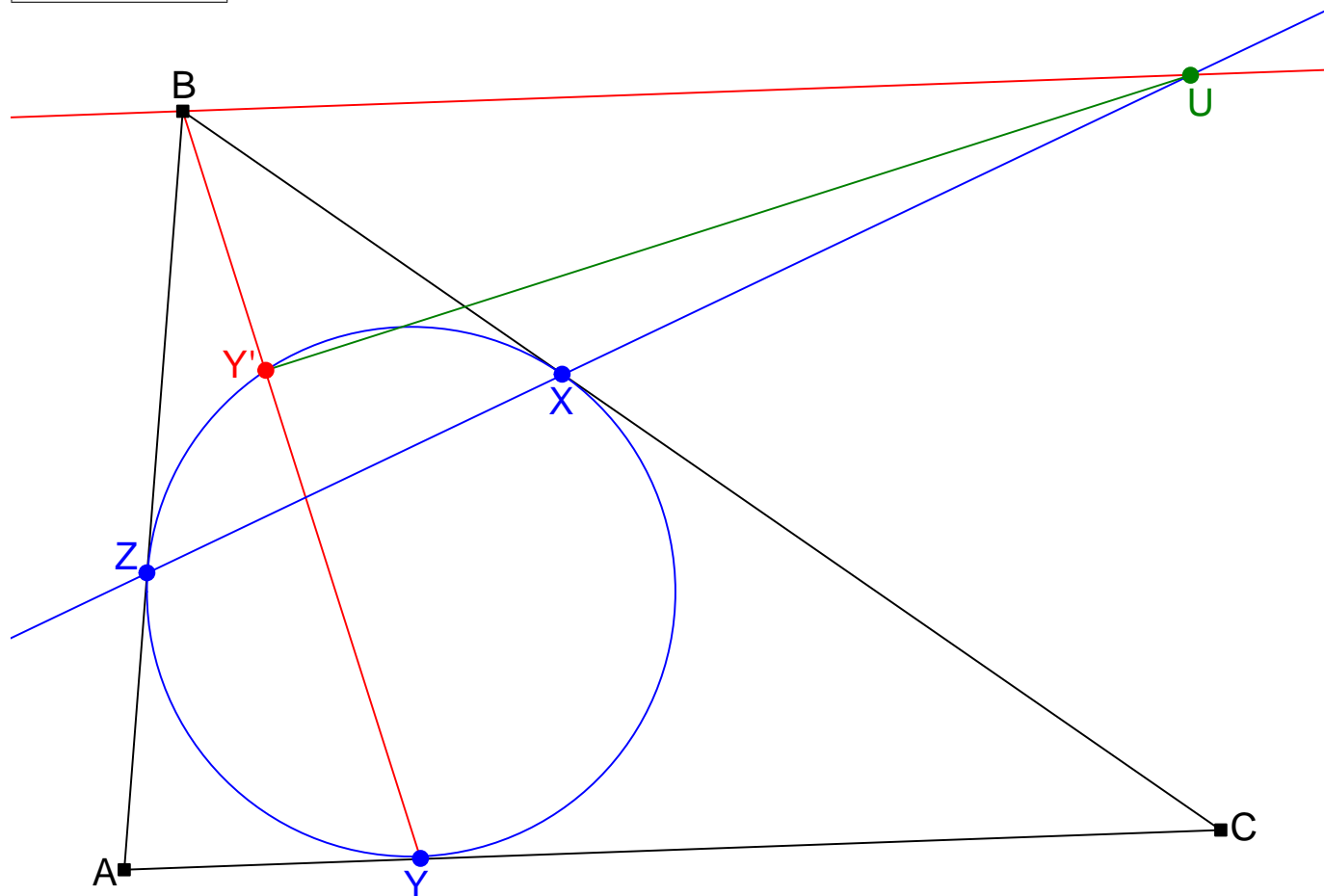


Fig. G4.1

Der Inkreis eines Dreiecks ABC berühre seine Seiten BC , CA und AB in den Punkten X , Y bzw. Z . Die Gerade BY schneide diesen Inkreis in einem (von Y verschiedenen) Punkt Y' . Die Parallele zur Geraden CA durch den Punkt B schneide die Gerade ZX in einem Punkt U . Man beweise: $Y'U \perp BY$. (Siehe Fig. G4.1.)

Lösung der Aufgabe G4

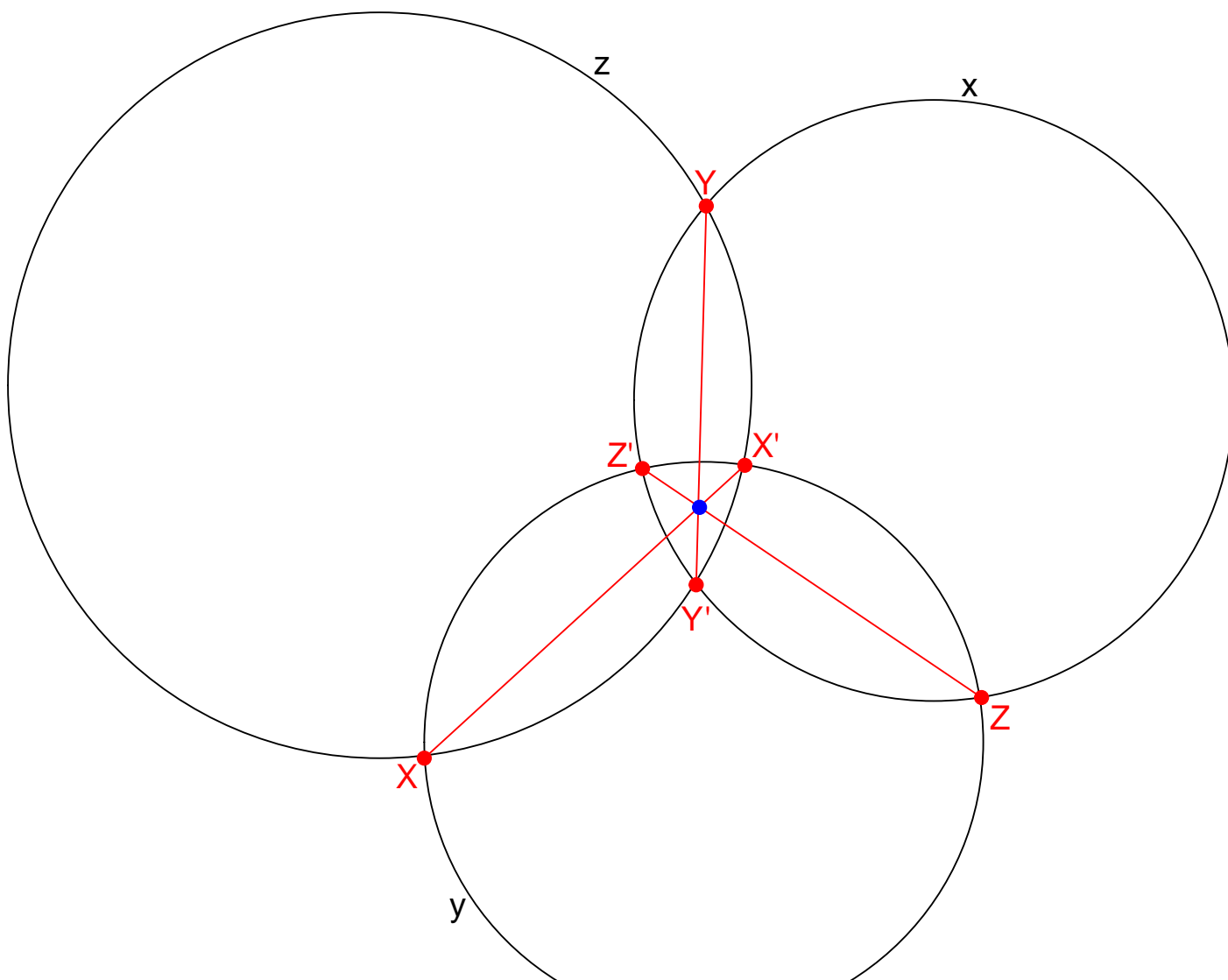


Fig. G4.2

Erstmal lassen wir die Aufgabe G4 außer Betracht und beweisen einen bekannten Sachverhalt aus der Kreisgeometrie (Fig. G4.2):

Satz G4.1: Seien x , y und z drei Kreise, die sich paarweise schneiden.

Seien X und X' die zwei Schnittpunkte der Kreise y und z .

Seien Y und Y' die zwei Schnittpunkte der Kreise z und x .

Seien Z und Z' die zwei Schnittpunkte der Kreise x und y .

Dann schneiden sich die Geraden XX' , YY' und ZZ' in einem Punkt.²

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei angemerkt: Die Punkte X , Y , Z und Y' aus dem Satz G4.1 haben nichts mit den Punkten X , Y , Z und Y' aus der Aufgabe G4 zu tun; es sind Punkte einer anderen Konfiguration.

²Hierbei bedienen wir uns einer Konvention aus der Dreiecksgeometrie:

Wenn wir sagen, mehrere Geraden *schneiden sich in einem Punkt*, meinen wir: Entweder haben diese Geraden einen gemeinsamen Punkt in der Euklidischen Ebene, oder diese Geraden sind alle zueinander parallel.

Erster Beweis von Satz G4.1: Dieser Beweis wird die Begriffe der Potenzgeraden zweier Kreise und des Potenzzentrums dreier Kreise verwenden; diese Begriffe können in Olympiadegeometriebüchern (wie auch im Internet z. B. unter <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/RadicalCenter.shtml> allerdings auf Englisch³) nachgeschlagen werden.

Die Potenzgerade zweier sich schneidender Kreise ist bekanntlich die Verbindungsgerade ihrer beiden Schnittpunkte. Somit gilt:

- Die Potenzgerade der Kreise y und z ist die Gerade XX' (denn die Schnittpunkte der Kreise y und z sind X und X').
- Die Potenzgerade der Kreise z und x ist die Gerade YY' (denn die Schnittpunkte der Kreise z und x sind Y und Y').
- Die Potenzgerade der Kreise x und y ist die Gerade ZZ' (denn die Schnittpunkte der Kreise x und y sind Z und Z').

Nun schneiden sich bekanntlich die drei paarweisen Potenzgeraden dreier beliebiger Kreise in einem Punkt, dem sogenannten Potenzzentrum dieser drei Kreise. Angewandt auf die drei Kreise x , y und z ergibt dies somit: Die Geraden XX' , YY' und ZZ' schneiden sich in einem Punkt, dem Potenzzentrum der drei Kreise x , y und z . Damit ist Satz G4.1 bewiesen.

³"Potenzgerade" heißt im Englischen "radical axis", und "Potenzzentrum" heißt "radical center".

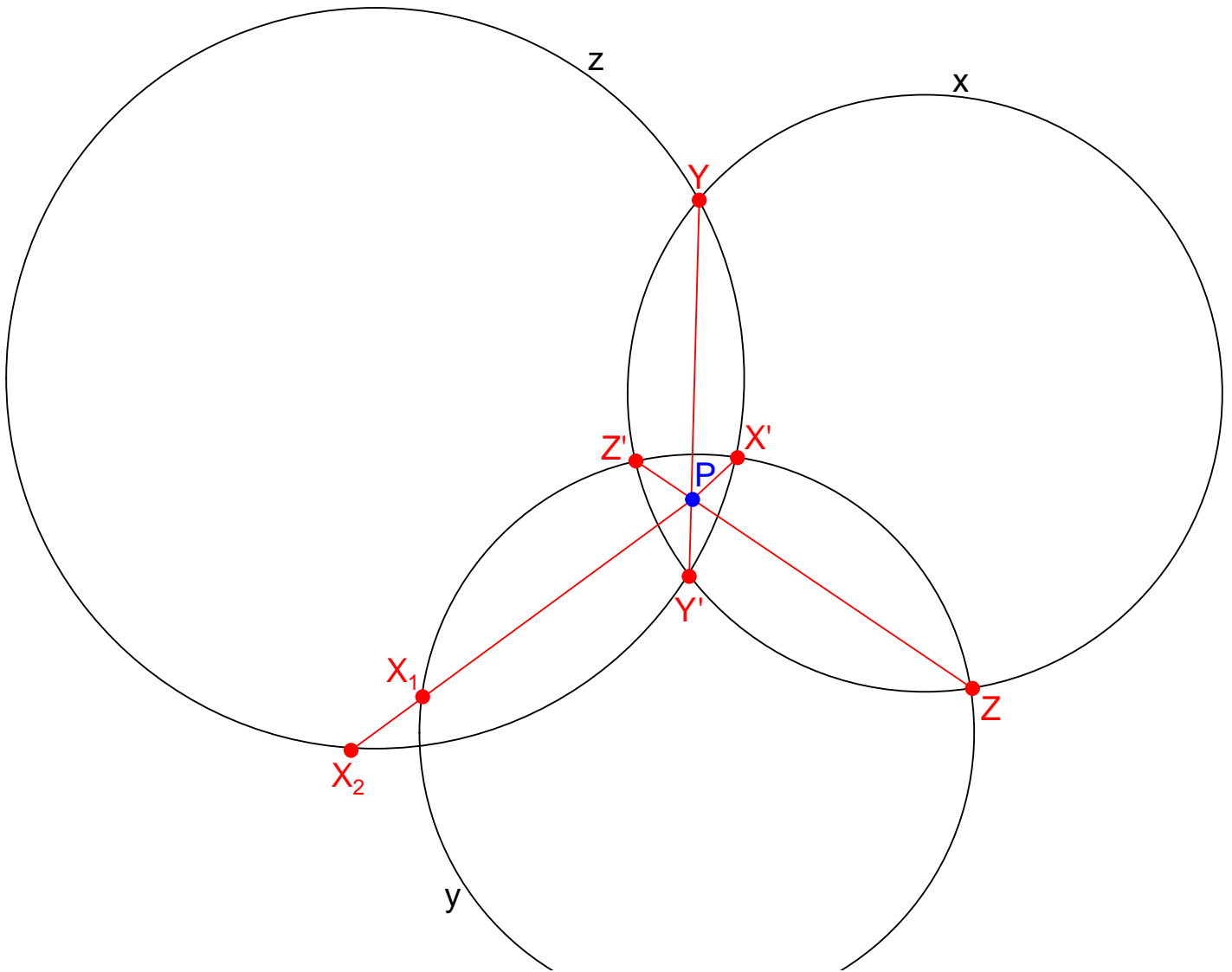


Fig. G4.3 (absichtlich falsch gezeichnet)

Zweiter Beweis von Satz G4.1: (Siehe die Zeichnung Fig. G4.3. Diese Zeichnung ist absichtlich verzerrt gezeichnet, weil man auf ihr sonst die Punkte X_1 und X_2 nicht voneinander unterscheiden könnte und damit verleitet wäre, von ihrer Gleichheit auszugehen - doch diese Gleichheit muß man erst beweisen!)

Wenn alle drei Geraden XX' , YY' und ZZ' zueinander parallel sind, dann schneiden sie sich in einem Punkt⁴, und damit ist Satz G4.1 erfüllt. Folglich brauchen wir zum Beweis von Satz G4.1 nur noch den Fall zu untersuchen, wenn nicht alle drei Geraden XX' , YY' und ZZ' zueinander parallel sind. Dann gibt es unter diesen drei Geraden XX' , YY' und ZZ' zwei, die nicht zueinander parallel sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, die Geraden YY' und ZZ' seien nicht zueinander parallel.

Sei P der Schnittpunkt der Geraden YY' und ZZ' . Gilt $P = X'$, dann ist Satz G4.1 trivial (denn dann schneiden sich die Geraden XX' , YY' und ZZ' in einem Punkt - nämlich in dem Punkt $P = X'$). Folglich reicht es aus, für den Rest unseres Beweises von Satz G4.1 nur den Fall zu betrachten, wenn $P \neq X'$ ist.

⁴laut der Konvention, daß parallele Geraden sich in einem Punkt schneiden

Die Gerade $X'P$ schneide den Kreis y in einem von X' verschiedenen Punkt X_1 . Die Gerade $X'P$ schneide den Kreis z in einem von X' verschiedenen Punkt X_2 .

Da die Punkte Y, Z, Y' und Z' auf einem Kreis liegen (nämlich auf dem Kreis x), und da sich die Geraden YY' und ZZ' im Punkt P schneiden, gilt nach dem Sehnensatz bzw. dem Sekantensatz $PY \cdot PY' = PZ \cdot PZ'$.

Da die Punkte Z, X_1, Z' und X' auf einem Kreis liegen (nämlich auf dem Kreis y), und da sich die Geraden ZZ' und X_1X' im Punkt P schneiden, gilt nach dem Sehnensatz bzw. dem Sekantensatz $PZ \cdot PZ' = PX_1 \cdot PX'$.

Da die Punkte X_2, Y, X' und Y' auf einem Kreis liegen (nämlich auf dem Kreis z), und da sich die Geraden X_2X' und YY' im Punkt P schneiden, gilt nach dem Sehnensatz bzw. dem Sekantensatz $PX_2 \cdot PX' = PY \cdot PY'$.

Somit ist

$$PX_2 \cdot PX' = PY \cdot PY' = PZ \cdot PZ' = PX_1 \cdot PX'.$$

Nun ist $P \neq X'$ und daher $PX' \neq 0$. Daher können wir die Gleichung $PX_2 \cdot PX' = PX_1 \cdot PX'$ durch PX' dividieren, und erhalten $PX_2 = PX_1$, also $PX_2 - PX_1 = 0$. Da beide Punkte X_1 und X_2 auf der Geraden $X'P$ liegen, und zwar (wie man einsehen kann, wenn man in der obigen Argumentation alle Strecken durch orientierte Strecken ersetzt) auf der gleichen Seite von dem Punkt P , ist also $X_1X_2 = |PX_2 - PX_1| = |0| = 0$. Daher stimmen die Punkte X_1 und X_2 überein.

Da der Punkt X_2 auf dem Kreis z liegt, erhalten wir also, daß der Punkt X_1 auf dem Kreis z liegt. Andererseits liegt der Punkt X_1 auf dem Kreis y . Somit ist der Punkt X_1 der von X' verschiedene Schnittpunkt der Kreise y und z . Doch der von X' verschiedene Schnittpunkt der Kreise y und z ist X . Folglich ist $X_1 = X$. Da wir wissen, daß der Punkt X_1 auf der Geraden $X'P$ liegt, erhalten wir hieraus: Der Punkt X liegt auf der Geraden $X'P$. Mit anderen Worten: Die Gerade XX' geht durch den Punkt P .

Da wir den Punkt P als Schnittpunkt der Geraden YY' und ZZ' definiert haben, gehen aber auch die Geraden YY' und ZZ' durch den Punkt P . Folglich schneiden sich die Geraden XX', YY' und ZZ' in einem Punkt, nämlich im Punkt P . Damit ist Satz G4.1 bewiesen.

Nun kommen wir zur eigentlichen Lösung von Aufgabe G4. Wenn wir im Folgenden von den Punkten A, B, C, X, Y, Z, Y' und U reden, sind also die in der Aufgabenstellung der Aufgabe G4 definierten Punkte gemeint (und nicht die in Satz G4.1 definierten Punkte X, Y, Z und Y').

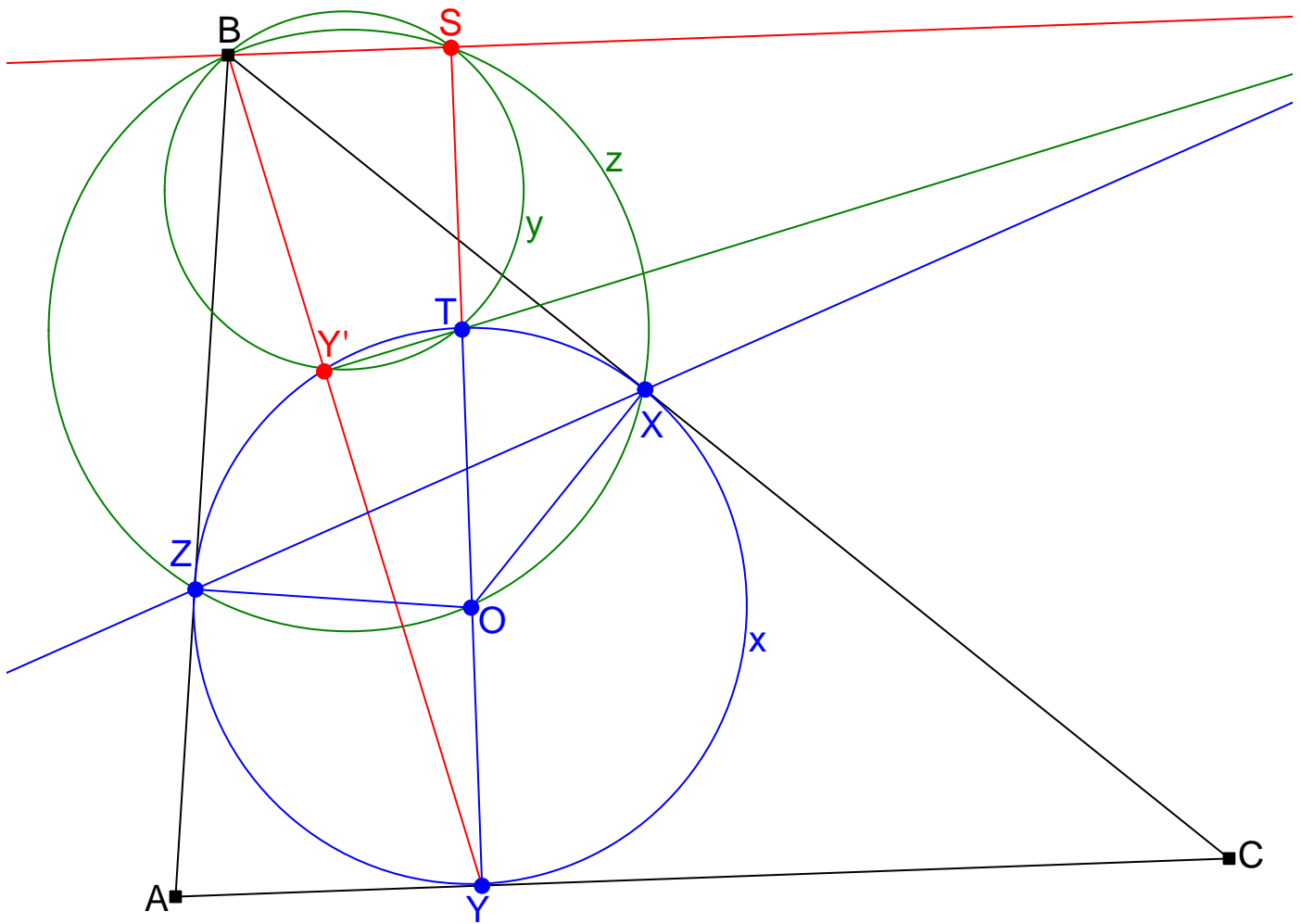


Fig. G4.4

Sei O der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC . Da dieser Inkreis die Seite BC im Punkt X berührt, ist also $OX \perp BC$. Analog gilt $OY \perp CA$ und $OZ \perp AB$.

Sei T der zu dem Punkt Y diametral gegenüberliegende Punkt auf dem Inkreis des Dreiecks ABC , also das Spiegelbild des Punktes Y am Mittelpunkt O dieses Inkreises. Dann ist die Strecke YT ein Durchmesser des Inkreises des Dreiecks ABC . Nach dem Satz von Thales gilt also $\angle YY'T = 90^\circ$. Also ist $Y'T \perp BY$, und daher $\angle BY'T = 90^\circ$.

Wir bezeichnen den Inkreis des Dreiecks ABC mit x . Dann liegen (unter anderem) die Punkte Z , X , Y' und T auf diesem Kreis x .

Da der Punkt T das Spiegelbild des Punktes Y am Punkt O ist, liegt dieser Punkt T natürlich auf der Geraden OY .

Die Parallele zur Geraden CA durch den Punkt B schneide die Gerade OY in einem Punkt S . Dann ist $BS \parallel CA$. Somit wird $OY \perp CA$ zu $OY \perp BS$. Da die Punkte S und T auf der Geraden OY liegen, führt dies auf $\angle BST = 90^\circ$. Zusammen mit $\angle BY'T = 90^\circ$ folgt hieraus, daß die Punkte S und Y' auf dem Thaleskreis über der Strecke BT liegen. Natürlich liegen auch die Punkte B und T auf diesem Thaleskreis. Bezeichnen wir den Thaleskreis über der Strecke BT mit y , dann liegen somit die Punkte S , Y' , B und T auf dem Kreis y .

Wir haben $\angle BZO = 90^\circ$ (denn $OZ \perp AB$), ferner $\angle BXO = 90^\circ$ (denn $OX \perp BC$), und schließlich $\angle BSO = 90^\circ$ (denn $OY \perp BS$, und der Punkt S liegt auf der Geraden

OY). Somit liegen die Punkte Z , X und S auf dem Thaleskreis über der Strecke BO . Natürlich liegt auch der Punkt B auf diesem Thaleskreis. Bezeichnen wir den Thaleskreis über der Strecke BO mit z , dann liegen also die Punkte Z , X , S und B auf dem Kreis z .

Die Gerade BS ist die Parallele zur Geraden CA durch den Punkt B (denn $BS \parallel CA$). Da der Punkt U auf der Parallelen zur Geraden CA durch den Punkt B liegt, erhalten wir also: Der Punkt U liegt auf der Geraden BS . Da der Punkt U auch auf der Geraden ZX liegt, folgt hieraus, daß der Punkt U der Schnittpunkt der Geraden BS und ZX ist.

Betrachten wir nun die drei Kreise x , y und z . Diese Kreise schneiden sich paarweise, und zwar wie folgt:

Die Schnittpunkte der Kreise y und z sind B und S .

Die Schnittpunkte der Kreise z und x sind Z und X .

Die Schnittpunkte der Kreise x und y sind Y' und T .

Nach Satz G4.1 schneiden sich also die Geraden BS , ZX und $Y'T$ in einem Punkt. Das heißt, der Schnittpunkt der Geraden BS und ZX liegt auf der Geraden $Y'T$. Doch der Schnittpunkt der Geraden BS und ZX ist der Punkt U . Somit liegt der Punkt U auf der Geraden $Y'T$. Aus $Y'T \perp BY$ folgt somit $Y'U \perp BY$. Damit ist die Aufgabe G4 gelöst.

Bemerkung: Die Aufgabe G4 wurde auf dem MathLinks-Forum diskutiert im Topic

<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=111468>

sowie kollateral in

<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=113152>

Die obige Lösung von Aufgabe G4 ist von Yettis Nachricht im zweiten dieser beiden Topics inspiriert.