

Bundeswettbewerb Mathematik 2006

–

Stufe 1

Peter Patzt

27. Februar 2006

Aufgabe 1

Sei

$$n = \underbrace{11 \dots 1}_{2005} \underbrace{99 \dots 9}_{223}$$

Dann ist

$$n + 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{2004} \underbrace{200 \dots 0}_{223}$$

Die Quersummen von n und $n + 1$ sind also durch 2006 teilbar:

$$\begin{aligned} Q(n) &= 2005 \cdot 1 + 223 \cdot 9 = 4012 = 2 \cdot 2006 \\ Q(n + 1) &= 2004 \cdot 1 + 2 = 2006 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir wollen zunächst ein paar Termumformungen durchführen:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 4 \cdot (x^2y + xy^2 + 1) \\x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= 7 \cdot (x^2y + xy^2) + 4 \\(x + y)^3 &= 7xy(x + y) + 4\end{aligned}\tag{1}$$

Es sei nun $s := x + y$. Nun ist die linke Seite von (1) durch s teilbar. Also muss dies auch für die rechte Seite gelten:

$$\begin{aligned}7xy(x + y) + 4 = 7xy \cdot s + 4 &\equiv 0 \pmod{s} \\4 &\equiv 0 \pmod{s}\end{aligned}\tag{2}$$

Aus der Gleichung (2) erkennen wir, dass s ein Teiler von 4 sein muss. Wir können also nur von $s \in \{1; 2; 4; -1; -2; -4\}$ ausgehen. Nach einsetzen der einzelnen s in (1) kommen wir durch Subtraktion von 4 und Multiplikation von s auf 6 Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}7xy &= -3 \\7xy &= 2 \\7xy &= 15\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ll}7xy &= 5 \\7xy &= 6 \\7xy &= 17\end{array}$$

Alle diese Gleichungen sind offensichtlich für $x, y \in \mathbb{Z}$ nicht lösbar, da keine der rechten Seiten den Faktor 7 enthält. Es gibt also keine $x, y \in \mathbb{Z}$, die die gegebene Gleichung erfüllen.

Aufgabe 3

Wir wollen diesen Beweis indirekt führen. Wir nehmen also zunächst $a \leq c$ an und führen diese Aussage zu einem Widerspruch. Der Beweis kann analog mit $b \leq c$ geführt werden. Somit gilt dann die zu beweisende Aussage.

$$\begin{aligned} c &\geq a \\ c^2 &\geq a^2 \\ c^2 + b^2 &\geq a^2 + b^2 > 5c^2 \\ b^2 &> 4c^2 \\ b &> 2c \geq a + c \\ b &> a + c \end{aligned}$$

Hier ist unser Widerspruch, denn nach der Dreiecksungleichung gilt für jedes Dreieck $b < a + c$ bzw. $b \leq a + c$, wenn auch entartete Dreiecke einbezogen werden.

Aufgabe 4

Der Wert eines Teils sei durch die Anzahl der Ecken minus 3 definiert. Der Wert des Tisches sei die Summe der Werte aller Teile.

Es gibt 3 Möglichkeiten ein Teil zu schneiden.

1. Der Schnitt geht durch zwei Ecken. Es entstehen 2 neue Ecken und ein neues Teil. Der Wert des Tisches steigt um $2 - 3 = -1$ bzw. sinkt um 1.
2. Der Schnitt geht durch eine Ecke und eine Seite. Es entstehen 3 neue Ecken und ein neues Teil. Der Wert des Tisches ändert sich nicht. ($3 - 3 = 0$)
3. Der Schnitt geht durch zwei Seiten. Es entstehen 4 neue Ecken und ein neues Teil. Der Wert des Tisches steigt um $4 - 3 = 1$ an.

Pro Schritt kann sich der Wert des Tisches also höchstens um 1 vergrößern. Am Anfang hat der Tisch den Wert 1. Am Ende müssen der Tisch aber mindestens den Wert

$$(20 - 3) \cdot 100 = 1700$$

haben. Das heißt es werden mindestens $1700 - 1 = 1699$ Schritte benötigt.

Einen solchen Fall gibt es auch. Man teile zunächst das Quadrat in 100 Vierecke. Aus einem Viereck können in einem Schritt 2 Vierecke gemacht werden. Schneidet man an einem n -Eck eine Ecke ab, so erhält man ein Dreieck und ein $(n + 1)$ -Eck. Aus einem Viereck können also in $20 - 4 = 16$ Schritten ein Zwanzigeck machen. Man kann also in

$$99 + 16 \cdot 100 = 1699$$

Schritten 100 Zwanzigecken entstehen lassen.

Demnach ist 1699 die kleinste Anzahl an Schritten in denen man erreicht, dass 100 Zwanzigecke auf dem Tisch liegen.