Konkurrente Kreise durch drei von sechs Punkten

Darij Grinberg

1. Ein Satz über sechs Punkte

Eine Zeichnung wie Fig. 1 läßt nicht vermuten, daß ein ziemlich einfach zu formulierender und fundamentaler Satz dahinter steckt. Es wimmelt nur so von Kreisen, und man erkennt nur mit einiger Mühe Gesetzmäßigkeiten. Umso überraschender ist es, daß diese Figur den folgenden Satz veranschaulicht:

Satz 1: Seien A, B, C, A', B' und C' sechs Punkte einer Ebene. Die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ haben genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt haben.

Eine kurze *Bemerkung* zur Schreibweise: Der "Kreis XYZ" ist der Kreis durch drei gegebene Punkte X, Y und Z.

Auf Fig. 1 sind die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ blau und die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ rot dargestellt.

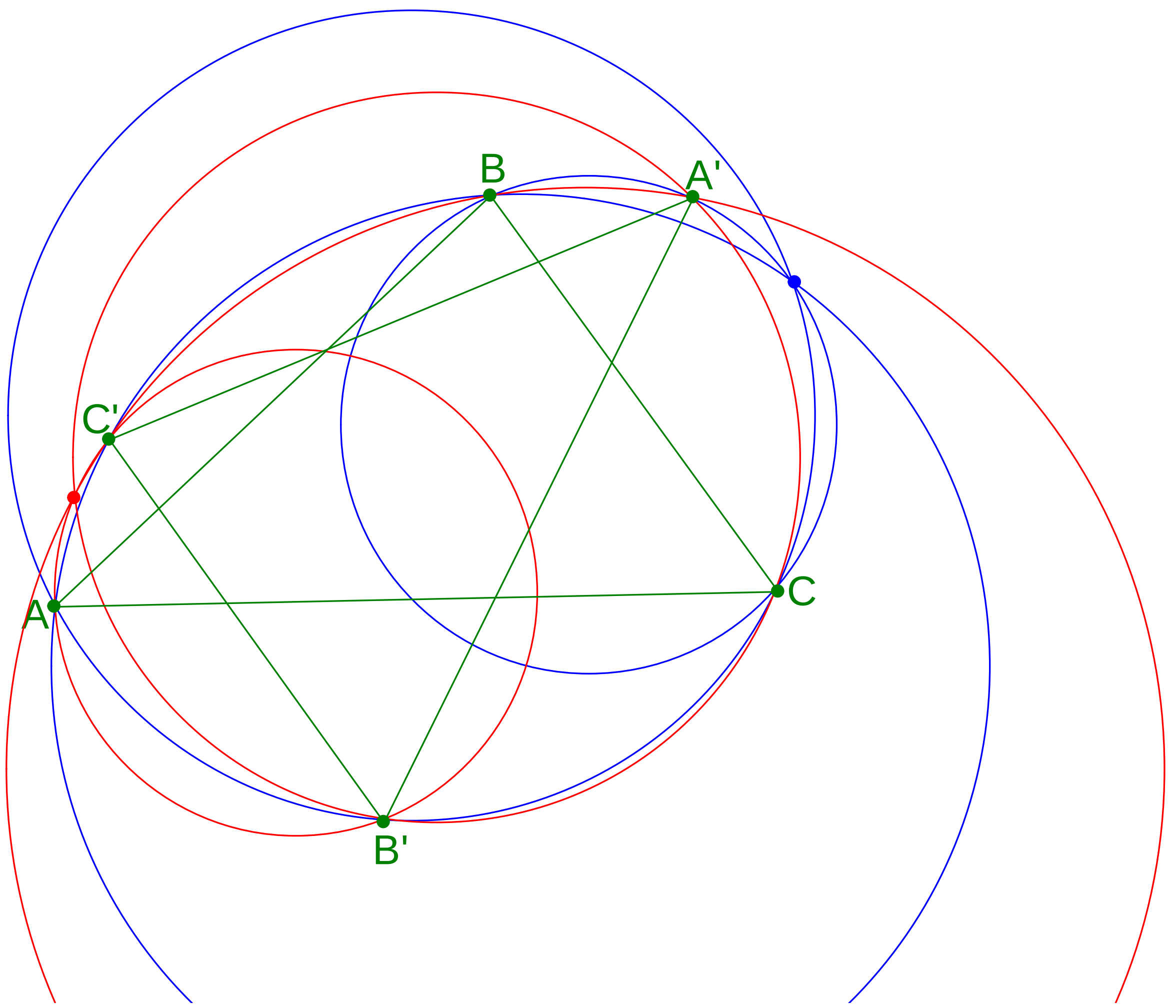

Fig. 1

Eine andere (übersichtlichere) Anordnung zu demselben Satz ist auf Fig. 2 dargestellt.

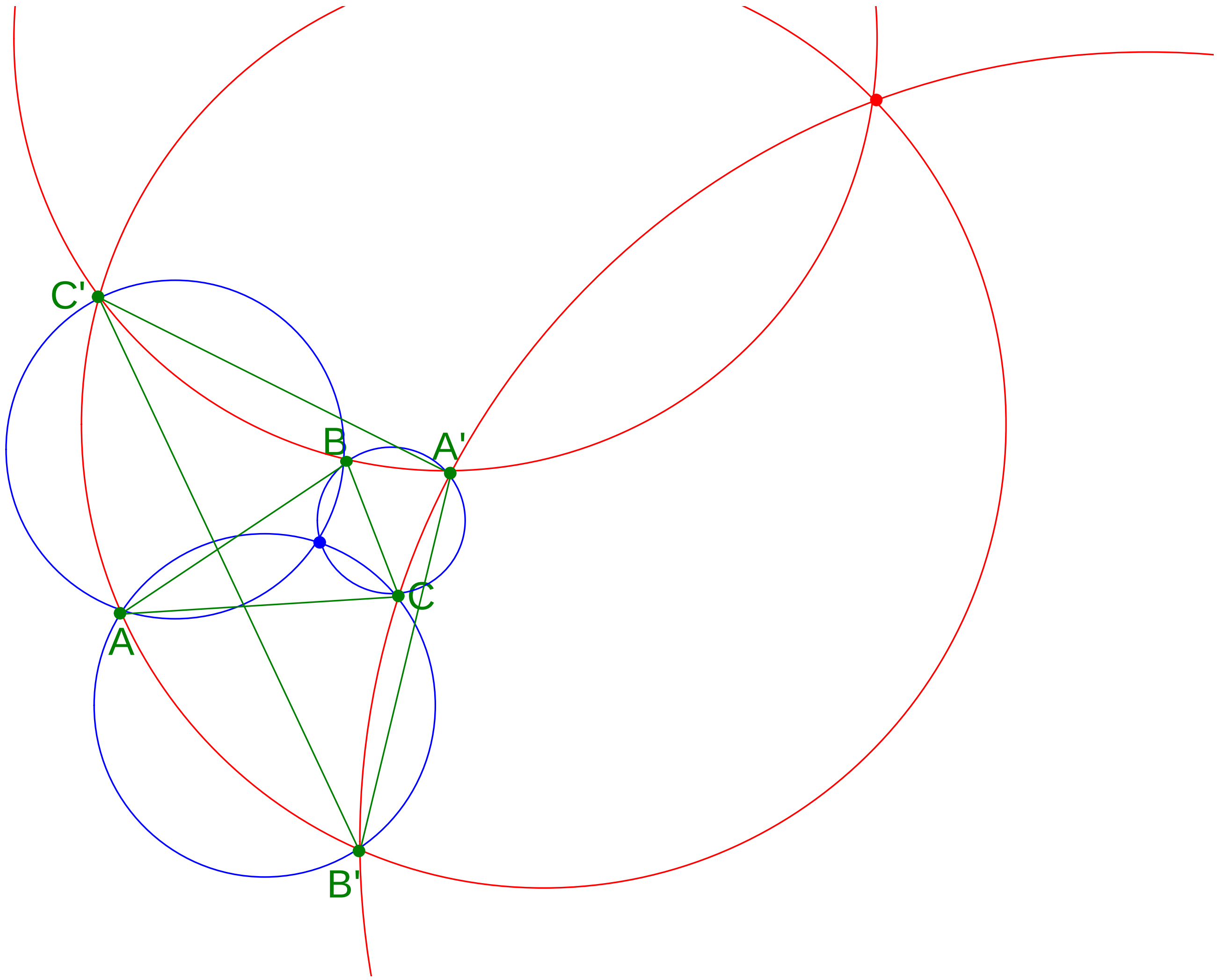

Fig. 2

Wenn man die Punktelagen variiert, kommt man mit etwas Glück auf eine Zeichnung wie Fig. 3, die sehr stark an die Konfiguration des Satzes von Miquel ([1], [2]) erinnert. Nämlich erweist sich Satz 1 als äquivalent zum Satz von Miquel!

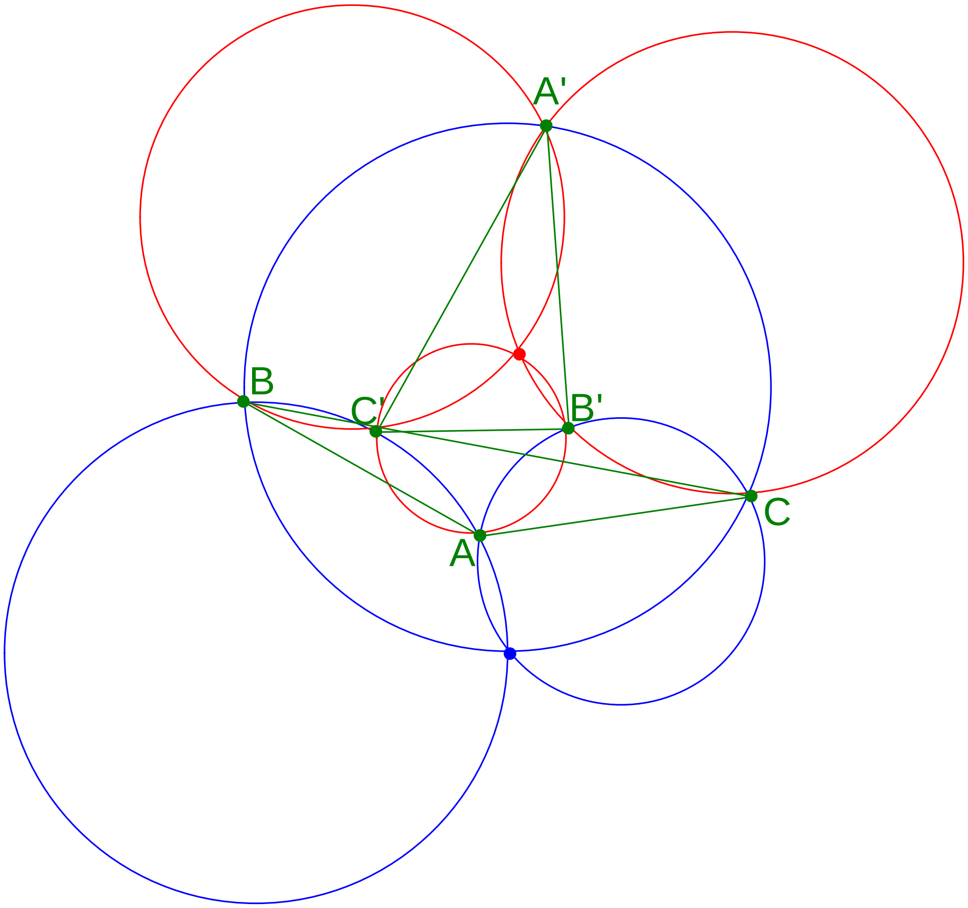

Fig. 3

Darauf bauen wir unseren *ersten Beweis* von Satz 1 auf:

Nehmen wir an, die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ haben einen gemeinsamen Punkt. Wir wollen beweisen, daß auch die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt haben. (Die Umkehrung folgt ganz einfach durch Vertauschung von A mit A', von B mit B' und von C mit C'.)

Ein Punktequadrupel heißt **konzyklisch**, wenn seine Elemente (d. h. die vier Punkte, die es enthält) auf einem Kreis liegen.

Jetzt zitieren wir den Satz von Miquel in der Fassung von [1], 1.2.1 (ich habe Punkte umbenannt):

Wenn die Punktequadrupel $(P;\ Q;\ K;\ L)$, $(P;\ S;\ K;\ N)$, $(Q;\ R;\ L;\ M)$, $(R;\ S;\ M;\ N)$ und $(P;\ Q;\ R;\ S)$ jeweils konzyklisch sind, dann gilt dies auch für das Quadrupel $(K;\ L;\ M;\ N)$.

Nun setzen wir für die Punkte K, Q, S, R, N und L aus dem Satz von Miquel jeweils die Punkte A, B, C, A', B' bzw. C' aus unserer Zeichnung ein. Als Punkt P nehmen wir den Schnittpunkt der Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$, und als Punkt M nehmen wir den von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $BC'A'$ und $CA'B'$.

Die Punktequadrupel $(P;\ B;\ A;\ C')$, $(P;\ C;\ A;\ B')$, $(B;\ A';\ C';\ M)$, $(A';\ C;\ M;\ B')$ und $(P;\ B;\ A';\ C)$ sind jeweils konzyklisch. Nach dem Satz von Miquel ist also auch das Punktequadrupel $(A;\ C';\ M;\ B')$ konzyklisch, d. h. der Punkt M liegt auf dem

Kreis $AB'C'$. Also haben die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt M, was zu beweisen war.

2. Zwei weitere Beweise von Satz 1

Wir wollen nun zwei andere eher elementare Beweise von Satz 1 vorstellen. Bei beiden Beweisen und überall in dem folgenden Text werden wir mit *Kreiswinkeln* rechnen; dies ist ein spezieller Winkeltyp, der besonders in der Kreisgeometrie hilfreich ist. Eine ausführliche Behandlung von diesem Winkeltyp findet man in [5].

Beidesmal werden wir annehmen, daß die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ einen gemeinsamen Punkt haben, und daraus ableiten, daß die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ auch einen gemeinsamen Punkt haben. Wie schon gesagt, ergibt sich dann die Umkehrung durch Namensvertauschung.

Der *erste elementare Beweis von Satz 1* benutzt die Inversion: Sei P der Schnittpunkt der Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$. Wir führen eine Inversion an einem Kreis mit dem Mittelpunkt P durch, und bezeichnen die Bilder der Punkte A, B, C, A', B' und C' jeweils mit a, b, c, a', b' bzw. c'. Die durch P gehenden Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ werden in Geraden abgebildet. Daraus folgt, daß die Punkte a', b und c auf einer Geraden liegen, daß die Punkte b', c und a auf einer Geraden liegen, und daß die Punkte c', a und b auf einer Geraden liegen. Diese interessante Konfiguration veranschaulicht Fig. 4.

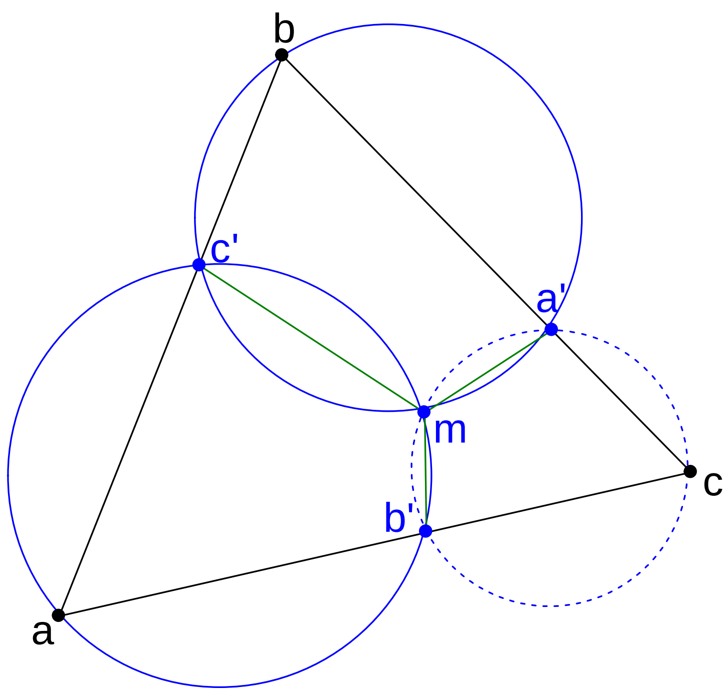

Fig. 4

Im folgenden werden wir nun zeigen, daß die Kreise $ab'c'$, $bc'a'$ und $ca'b'$ einen gemeinsamen Punkt haben.

Wir rechnen mit Kreiswinkeln.

Sei m der von c' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $ab'c'$ und $bc'a'$.

Da der Punkt m auf dem Kreis $ab'c'$ liegt, gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle b'mc' = \measuredangle b'ac'$, also $\measuredangle b'mc' = \measuredangle\,(ca;\; ab)$.

Da der Punkt m auf dem Kreis $bc'a'$ liegt, gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle c'ma' = \measuredangle c'ba'$, also $\measuredangle c'ma' = \measuredangle\,(ab;\; bc)$.

Daraus folgt

$$\measuredangle b'ma' = \measuredangle b'mc' + \measuredangle c'ma' = \measuredangle\,(ca;\; ab) + \measuredangle\,(ab;\; bc) = \measuredangle\,(ca;\; bc)\,,$$

also $\measuredangle b'ma' = \measuredangle b'ca'$. Folglich liegen die Punkte a', m, b' und c auf einem Kreis. Das heißt, der Punkt m liegt auf dem Kreis $ca'b'$. Da wir aber den Punkt m als Schnittpunkt der Kreise $ab'c'$ und $bc'a'$ definiert haben, haben die Kreise $ab'c'$, $bc'a'$ und $ca'b'$ einen gemeinsamen Punkt. Durch Rückinversion erhalten wir, daß die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt haben. Damit ist der Beweis fertig.

Der *zweite elementare Beweis von Satz 1* verzichtet auf die Verwendung der Inversion und benutzt stattdessen den folgenden wichtigen Hilfssatz:

Satz 2: Seien A, B, C, A', B' und C' sechs Punkte einer Ebene. Die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ haben genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn

$$\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0°$$

gilt (mit Kreiswinkeln natürlich).

Beweis:

a) Angenommen, die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ haben einen gemeinsamen Punkt P. Wir wollen zeigen, daß dann $\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0°$ gilt.

Nach dem Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel gilt $\measuredangle BA'C = \measuredangle BPC$, $\measuredangle CB'A = \measuredangle CPA$ und $\measuredangle AC'B = \measuredangle APB$. Folglich ist

$$\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = \measuredangle BPC + \measuredangle CPA + \measuredangle APB = 0°,$$

was zu beweisen war.

b) Angenommen, es gilt $\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0°$. Wir wollen zeigen, daß dann die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ einen gemeinsamen Punkt haben.

Sei P der von A verschiedene Schnittpunkt der Kreise $B'CA$ und $C'AB$. (Falls sich diese beiden Kreise berühren, sei $P = A$.) Dann gilt nach dem Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel $\measuredangle CB'A = \measuredangle CPA$ und $\measuredangle AC'B = \measuredangle APB$. Aber wegen $\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0°$ ist

$$\measuredangle BA'C = -\,(\measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B) = -\,(\measuredangle CPA + \measuredangle APB) = -\measuredangle CPB = \measuredangle BPC.$$

Also liegt der Punkt P auch auf dem Kreis $A'BC$. Das bedeutet, daß die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ einen gemeinsamen Punkt haben (und zwar P), was zu beweisen war.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir wollen aber Satz 1 beweisen. Wir nehmen an, daß die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ einen gemeinsamen Punkt haben, und wollen daraus ableiten, daß die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ auch einen gemeinsamen Punkt haben.

Da die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ einen gemeinsamen Punkt haben, folgt aus Satz 2 die Gleichung

$$\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 0°. \tag{1}$$

Um zu zeigen, daß die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt haben, müssen wir die Gleichung

$$\measuredangle B'AC' + \measuredangle C'BA' + \measuredangle A'CB' = 0^\circ \tag{2}$$

nachprüfen.

Wir haben

$$\begin{aligned} & \measuredangle B'AC' + \measuredangle C'BA' + \measuredangle A'CB' \\ = \; & (\measuredangle B'AC + \measuredangle CAB + \measuredangle BAC') + (\measuredangle C'BA + \measuredangle ABC + \measuredangle CBA') \\ & + (\measuredangle A'CB + \measuredangle BCA + \measuredangle ACB') \\ = \; & (\measuredangle B'AC + \measuredangle ACB') + (\measuredangle C'BA + \measuredangle BAC') + (\measuredangle A'CB + \measuredangle CBA') \\ & + (\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA) \,. \end{aligned}$$

Aber in jedem Dreieck ist die Summe der Winkel gleich 0° (denn für jedes Dreieck XYZ gilt $\measuredangle ZXY + \measuredangle XYZ + \measuredangle YZX = \measuredangle (ZX;\ XY) + \measuredangle (XY;\ YZ) + \measuredangle (YZ;\ ZX) = 0^\circ$). Also haben wir

$$\begin{array}{rcllr} \measuredangle B'AC + \measuredangle ACB' + \measuredangle CB'A & = & 0^\circ, & \text{also} & \measuredangle B'AC + \measuredangle ACB' = -\measuredangle CB'A; \\ \measuredangle C'BA + \measuredangle BAC' + \measuredangle AC'B & = & 0^\circ, & \text{also} & \measuredangle C'BA + \measuredangle BAC' = -\measuredangle AC'B; \\ \measuredangle A'CB + \measuredangle CBA' + \measuredangle BA'C & = & 0^\circ, & \text{also} & \measuredangle A'CB + \measuredangle CBA' = -\measuredangle BA'C; \\ \measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA & = & 0^\circ. & & \end{array}$$

Damit vereinfacht sich die obige Rechnung zu

$$\begin{aligned} & \measuredangle B'AC' + \measuredangle C'BA' + \measuredangle A'CB' \\ = \; & (-\measuredangle CB'A) + (-\measuredangle AC'B) + (-\measuredangle BA'C) + 0^\circ \\ = \; & -(\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B) \\ = \; & -0^\circ \qquad \text{(nach (1))} \\ = \; & 0^\circ. \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung (2) nachgeprüft. Damit ist Satz 1 wieder bewiesen.

3. Ein weiterer allgemeiner Satz

Betrachten wir Satz 1 "in eine Richtung": Wenn die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ einen gemeinsamen Punkt haben, dann haben auch die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt.

Variieren wir ein wenig: Wir verschärfen die Voraussetzung; und zwar soll der Schnittpunkt der Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ auch noch auf dem Kreis $A'B'C'$ liegen, d. h. die *vier* Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ sollen einen gemeinsamen Punkt haben. Da die Voraussetzung nun strenger ist, versuchen wir, auch mehr Behauptungen zu bekommen.

Wir können Satz 1 nicht nur auf die Punkte A, B, C, A', B' und C' anwenden, sondern auch auf die Punkte A, B', C', A', B und C.

Wenden wir Satz 1 auf die Punkte A, B, C, A', B' und C' an:

Da die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ einen gemeinsamen Punkt haben, haben auch die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ einen gemeinsamen Punkt. Nennen wir diesen Punkt Q. Bemerken wir, daß dieser Punkt Q der von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $BC'A'$ und $CA'B'$ ist (oder $Q = A'$, falls sich diese beiden Kreise berühren).

Wenden wir nun Satz 1 auf die Punkte A, B', C', A', B und C an:

Da die Kreise $A'B'C'$, $BC'A$ und CAB' einen gemeinsamen Punkt haben, haben auch die Kreise ABC, $B'CA'$ und $C'A'B$ einen gemeinsamen Punkt. Nennen wir diesen Punkt Q'. Bemerken wir diesmal, daß dieser Punkt Q' der von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $B'CA'$ und $C'A'B$ ist (oder $Q' = A'$, falls sich diese beiden Kreise berühren).

Doch die Kreise $B'CA'$ und $C'A'B$ sind genau die Kreise $CA'B'$ und $BC'A'$. Diese zwei Kreise haben nur einen von A' verschiedenen Schnittpunkt; also ist $Q' = Q$. Folglich liegt Q auf allen vier Kreisen $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und $A'B'C'$. Diese vier Kreise haben also einen gemeinsamen Punkt.

Wir haben damit bewiesen: Seien A, B, C, A', B' und C' sechs Punkte einer Ebene. Wenn die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ einen gemeinsamen Punkt haben, dann haben auch die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC einen gemeinsamen Punkt.

Die Umkehrung dieses Sachverhaltes folgt einfach durch Vertauschung von A mit A', von B mit B' und von C mit C'.

Wir haben damit bewiesen:

Satz 3: Seien A, B, C, A', B' und C' sechs Punkte einer Ebene. Die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ haben genau dann einen gemeinsamen Punkt, wenn die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC einen gemeinsamen Punkt haben.

(Siehe Fig. 5.)

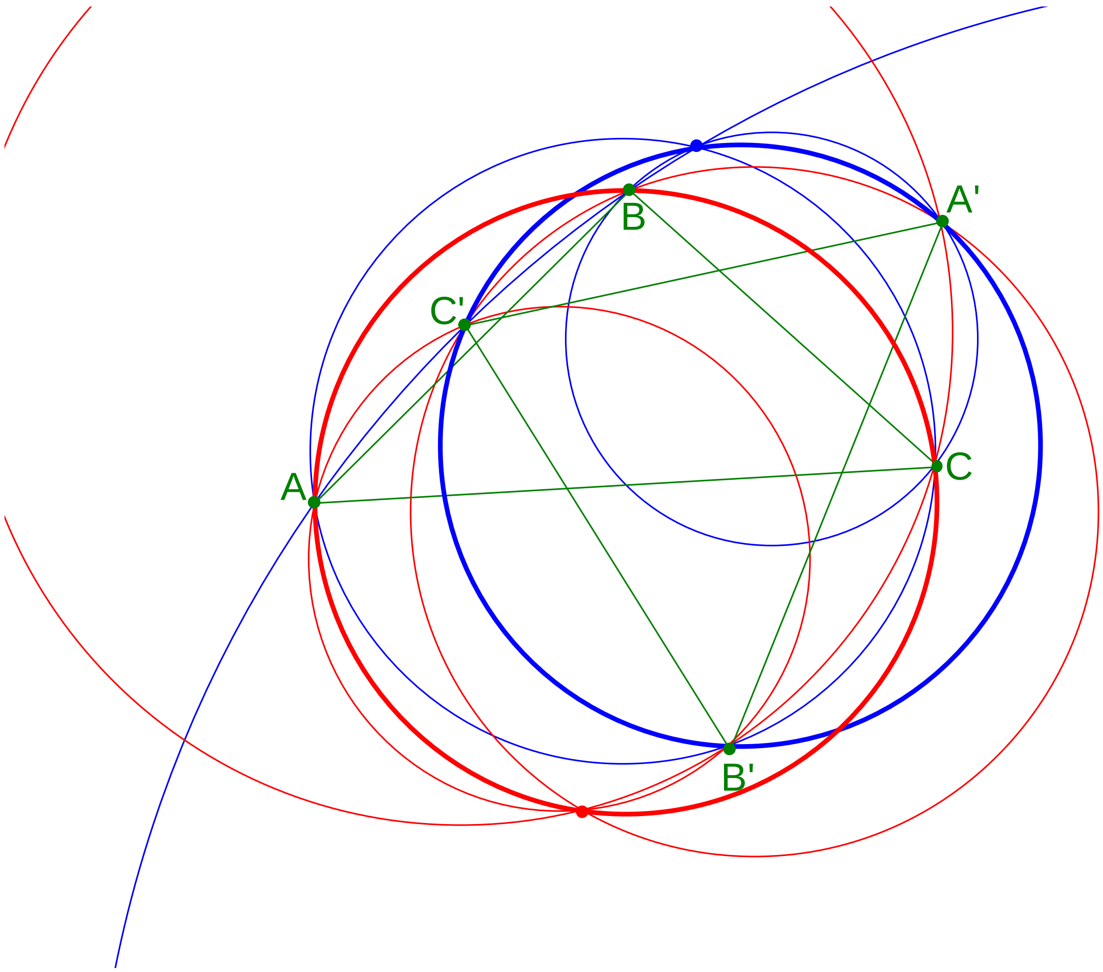

Fig. 5

4. Beispiele

Satz 1, Satz 2 und Satz 3 waren sehr wichtige Eigenschaften konkurrenter Kreise. (Mehrere Geraden oder Kreise oder beliebige Punktmengen heißen konkurrent, wenn sie einen gemeinsamen Punkt haben.)

Jetzt werden wir einige Beispiele aufführen, wo wir solchen konkurrenten Kreisen begegnen und wo wir Satz 1, Satz 2 und Satz 3 anwenden können.

5. Spiegelbilder eines Punktes an den Dreiecksseiten

Unser erstes Beispiel wird das folgende sein:

Satz 4: Sei ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt. Seien A', B' und C' die Spiegelbilder des Punktes P an den Dreiecksseiten BC, CA bzw. AB. Dann gilt:

a) Die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 6.)

b) Die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 7.)

Zwar sind die Behauptungen **a)** und **b)** wegen Satz 3 äquivalent, doch wir wollen hier beide unabhängig voneinander beweisen. (Es gibt sehr viele verschiedene Beweise für diese Sätze.)

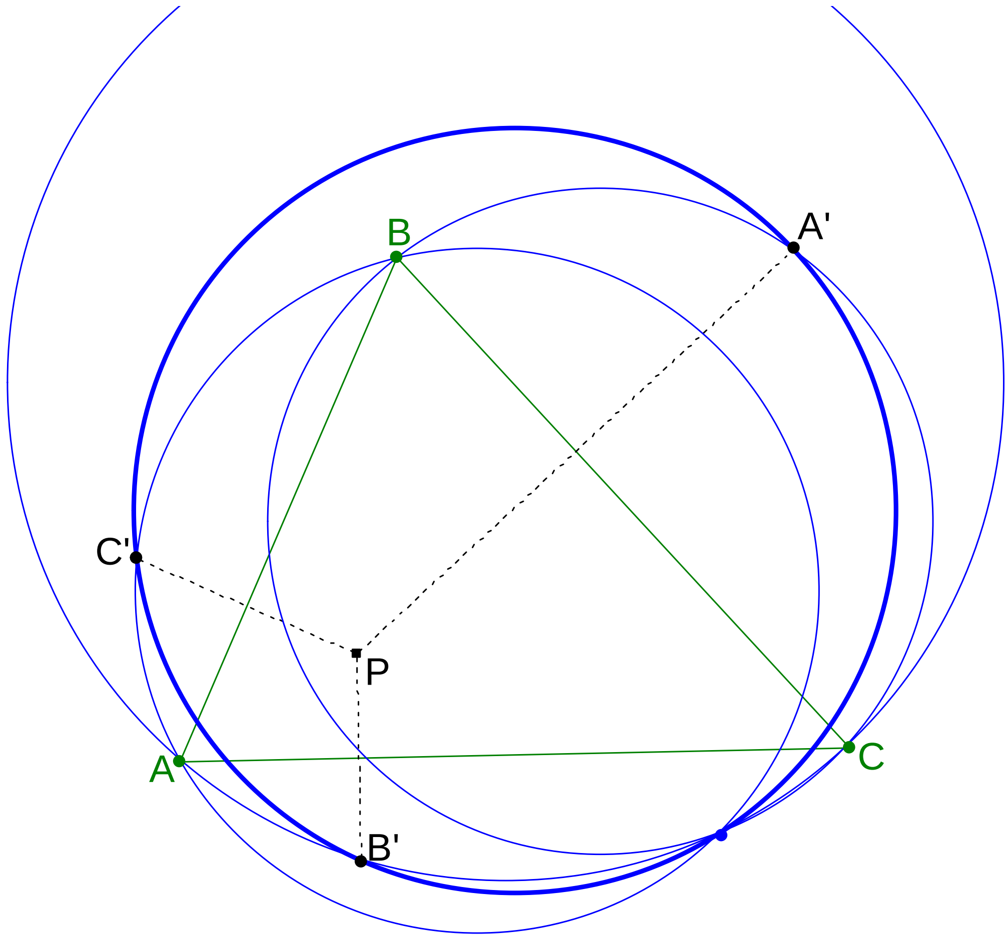

Fig. 6

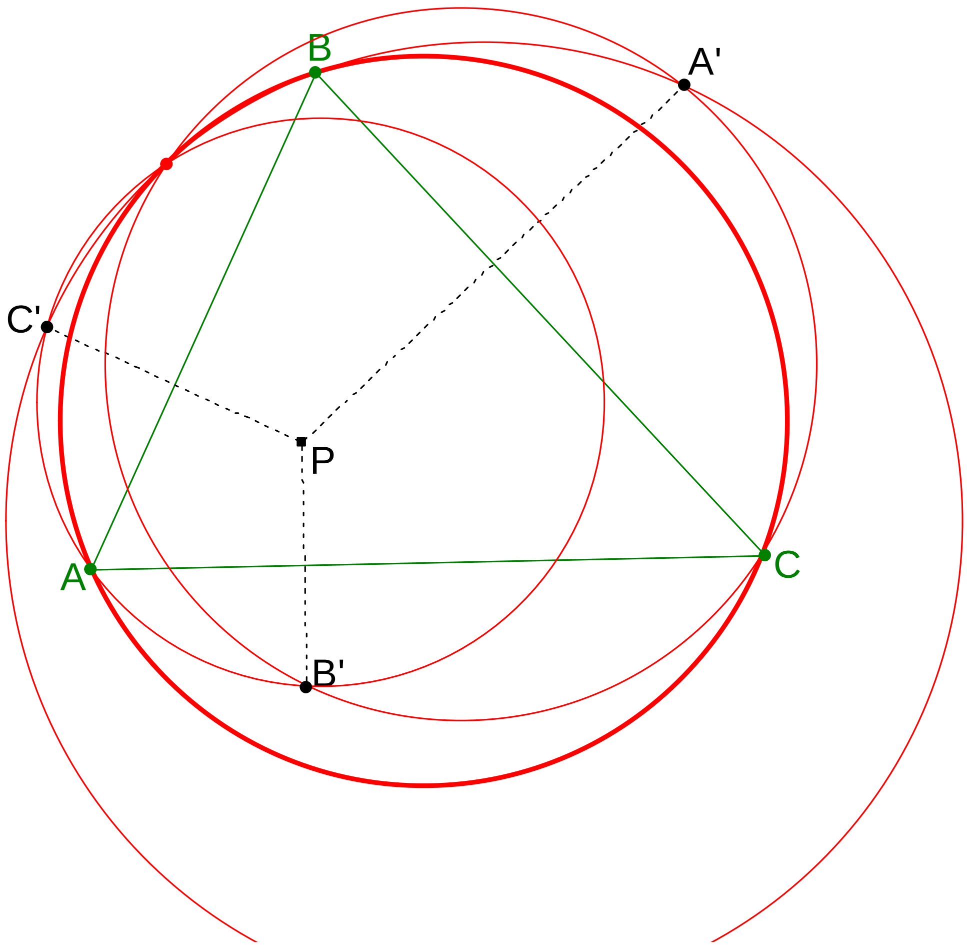

Fig. 7

Beweis zu Satz 4 ***a):*** Da A', B' und C' die Spiegelbilder von P an BC, CA bzw. AB sind, sind die Mittelpunkte A'', B'' und C'' der Strecken PA', PB' bzw. PC' die Fußpunkte der Lote von P auf BC, CA bzw. AB. (Siehe Fig. 8.)

Sei Q der von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $A'BC$ und $A'B'C'$. Dann gilt nach dem Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel $\measuredangle BQA' = \measuredangle BCA'$ und $\measuredangle A'QC' = \measuredangle A'B'C'$. Es ist also

$$\measuredangle BQC' = \measuredangle BQA' + \measuredangle A'QC' = \measuredangle BCA' + \measuredangle A'B'C'.$$

Da A' das Spiegelbild von P an BC ist, haben wir $\measuredangle BCA' = -\measuredangle BCP$, also $\measuredangle BCA' = -\measuredangle A''CP$. Da die Punkte A'' und B'' auf dem Thaleskreis über der Strecke CP liegen (denn $\measuredangle CA''P = 90^\circ$ und $\measuredangle CB''P = 90^\circ$), liegen die Punkte C, A'', P und B'' auf einem Kreis, und es ergibt sich $\measuredangle A''CP = \measuredangle A''B''P$. Also ist $\measuredangle BCA' = -\measuredangle A''B''P = \measuredangle PB''A''$.

Andererseits ist $A''B''$ Mittelparallele im Dreieck $A'PB'$; es gilt also $A''B'' \parallel A'B'$. Analog ist $B''C'' \parallel B'C'$. Daher ist $\measuredangle A'B'C' = \measuredangle (A'B';\ B'C') = \measuredangle (A''B'';\ B''C'') = \measuredangle A''B''C''$. Damit ist

$$\measuredangle BQC' = \measuredangle BCA' + \measuredangle A'B'C' = \measuredangle PB''A'' + \measuredangle A''B''C'' = \measuredangle PB''C''.$$

Da die Punkte B'' und C'' auf dem Thaleskreis über der Strecke AP liegen (denn $\measuredangle AB''P = 90°$ und $\measuredangle AC''P = 90°$), liegen die Punkte A, B'', P und C'' auf einem Kreis, und es folgt $\measuredangle PB''C'' = \measuredangle PAC''$, also $\measuredangle PB''C'' = \measuredangle PAB$. Da C' das Spiegelbild von P an AB ist, gilt $\measuredangle C'AB = -\measuredangle PAB$. Also ist $\measuredangle PB''C'' = \measuredangle PAB = -\measuredangle C'AB = \measuredangle BAC'$. Wir haben also $\measuredangle BQC' = \measuredangle BAC'$. Folglich liegen die Punkte A, B, C' und Q auf einem Kreis, d. h. der Punkt Q liegt auf dem Kreis $C'AB$. Analog zeigt man, daß der Punkt Q auf dem Kreis $B'CA$ liegt. Also ist der Punkt Q ein gemeinsamer Punkt der Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$. Damit ist Satz 4 **a)** bewiesen.

Bemerkung: Die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ sind die Spiegelbilder der Kreise PBC, PCA bzw. PAB an den Geraden BC, CA bzw. AB (denn A', B' und C' sind die Spiegelbilder des Punktes P an BC, CA bzw. AB). Also können wir Satz 4 **a)** umformulieren als:

Sei ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt. Dann gilt: Die Spiegelbilder der Kreise PBC, PCA und PAB an den Dreiecksseiten BC, CA bzw. AB, und der Kreis durch die Spiegelbilder des Punktes P an diesen Dreiecksseiten haben einen gemeinsamen Punkt.

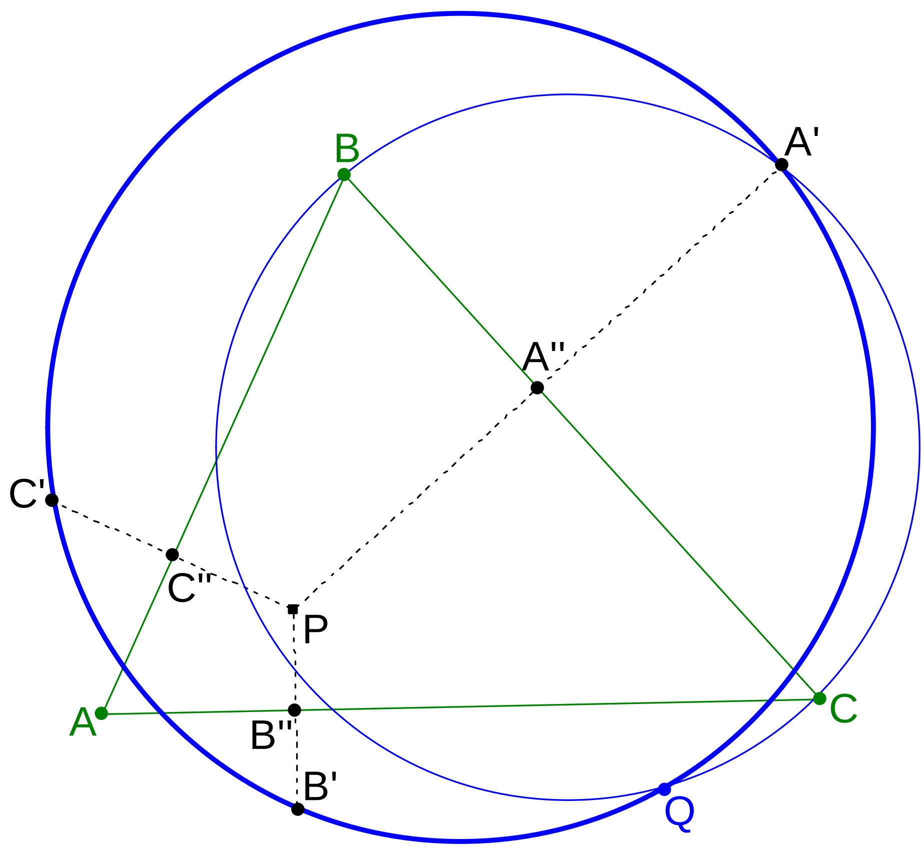

Fig. 8

Erster Beweis zu Satz 4 ***b):*** Wir verwenden wieder die Punkte A'', B'' und C'' von dem vorigen Beweis (Fig. 9). Sei R der von A verschiedene Schnittpunkt der Kreise $AB'C'$ und ABC. Dann gilt nach dem Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel $\measuredangle B'RA =$

$\measuredangle B'C'A$ und $\measuredangle ARC = \measuredangle ABC$. Nun haben wir

$$\begin{aligned}
& \measuredangle B'RC - \measuredangle B'A'C \\
= \; & (\measuredangle B'RA + \measuredangle ARC) - \measuredangle B'A'C \\
= \; & (\measuredangle B'C'A + \measuredangle ABC) - \measuredangle B'A'C \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle B'C'A - \measuredangle B'A'C \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle\,(B'C';\; AC') - \measuredangle\,(A'B';\; CA') \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle\,(B'C';\; AC') + \measuredangle\,(CA';\; A'B') \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle\,(B'C';\; AB) + \measuredangle\,(AB;\; AC') + \measuredangle\,(CA';\; BC) + \measuredangle\,(BC;\; A'B') \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle\,(B'C';\; AB) + \measuredangle BAC' + \measuredangle A'CB + \measuredangle\,(BC;\; A'B')\,.
\end{aligned}$$

Im Beweis zu Satz 4 **b)** hatten wir festgestellt, daß $A''B'' \parallel A'B'$ und $B''C'' \parallel B'C'$ ist. Also hat man

$$\begin{aligned}
& \measuredangle B'RC - \measuredangle B'A'C \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle\,(B''C'';\; AB) + \measuredangle BAC' + \measuredangle A'CB + \measuredangle\,(BC;\; A''B'') \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle B''C''A + \measuredangle BAC' + \measuredangle A'CB + \measuredangle CA''B''.
\end{aligned}$$

Da A' und C' die Spiegelbilder von P an BC bzw. AB sind, gilt $\measuredangle BAC' = -\measuredangle BAP$ und $\measuredangle A'CB = -\measuredangle PCB$, also

$$\begin{aligned}
& \measuredangle B'RC - \measuredangle B'A'C \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle B''C''A - \measuredangle BAP - \measuredangle PCB + \measuredangle CA''B''.
\end{aligned}$$

Die Punkte B'' und C'' liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke AP (denn $\measuredangle AB''P = 90^\circ$ und $\measuredangle AC''P = 90^\circ$); also liegen die Punkte A, B'', P und C'' auf einem Kreis, und $\measuredangle B''C''A = \measuredangle B''PA$, also

$$\measuredangle B''C''A = \measuredangle\,(B''P;\; PA) = \measuredangle\,(B''P;\; CA) + \measuredangle\,(CA;\; PA) = 90^\circ + \measuredangle CAP.$$

Die Punkte A'' und B'' liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke CP (denn $\measuredangle CA''P = 90^\circ$ und $\measuredangle CB''P = 90^\circ$); also liegen die Punkte C, A'', P und B'' auf einem Kreis, und $\measuredangle CA''B'' = \measuredangle CPB''$, also

$$\measuredangle CA''B'' = \measuredangle\,(CP;\; PB'') = \measuredangle\,(CP;\; CA) + \measuredangle\,(CA;\; PB'') = \measuredangle PCA + 90^\circ.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
& \measuredangle B'RC - \measuredangle B'A'C \\
= \; & \measuredangle ABC + (90^\circ + \measuredangle CAP) - \measuredangle BAP - \measuredangle PCB + (\measuredangle PCA + 90^\circ) \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle CAP - \measuredangle BAP - \measuredangle PCB + \measuredangle PCA + 180^\circ \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle CAP - \measuredangle BAP - \measuredangle PCB + \measuredangle PCA \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle CAP + \measuredangle PAB + \measuredangle BCP + \measuredangle PCA \\
= \; & \measuredangle ABC + \measuredangle CAB + \measuredangle BCA = 0^\circ
\end{aligned}$$

(als Winkelsumme). Daraus ergibt sich $\measuredangle B'RC = \measuredangle B'A'C$. Also liegen die Punkte B', A', C und R auf einem Kreis, d. h. der Punkt R liegt auf dem Kreis $CA'B'$. Analog beweist man, daß der Punkt R auf dem Kreis $BC'A'$ liegt. Also ist R ein gemeinsamer Punkt der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC. Damit ist Satz 4 **b)** bewiesen.

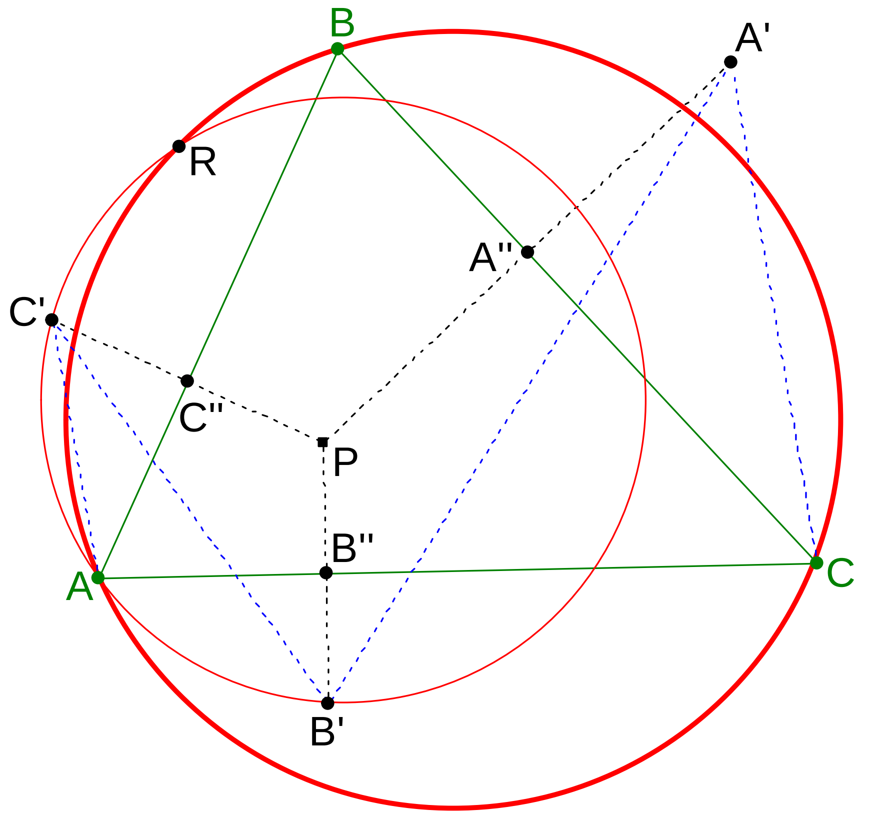

Fig. 9

Zweiter Beweis zu Satz 4 ***b):*** Ein anderer Beweis von Satz 4 **b)** wurde in [4] gegeben. Und zwar wurde in der Folgerung 3 von [4] gezeigt, daß (mit unseren Bezeichnungen) der Anti-Steinersche Punkt der Geraden HP, wobei H der Höhenschnittpunkt des ΔABC ist, auf den Kreisen $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ liegt; ferner liegt er (wie alle Anti-Steinerschen Punkte) auf dem Umkreis des ΔABC, d. h. auf dem Kreis ABC. Also ist der Anti-Steinersche Punkt der Geraden HP ein gemeinsamer Punkt der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC.

6. Umkreismittelpunkte zweier Dreiecksecken und eines Punktes

Ein anderes Beispiel ist das folgende:

Satz 5: Sei ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt. Seien A', B' und C' die Umkreismittelpunkte der Dreiecke PBC, PCA bzw. PAB. Dann gilt:

a) Die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 10.)

b) Die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 11.)

Wieder sind die Behauptungen **a)** und **b)** wegen Satz 3 äquivalent.

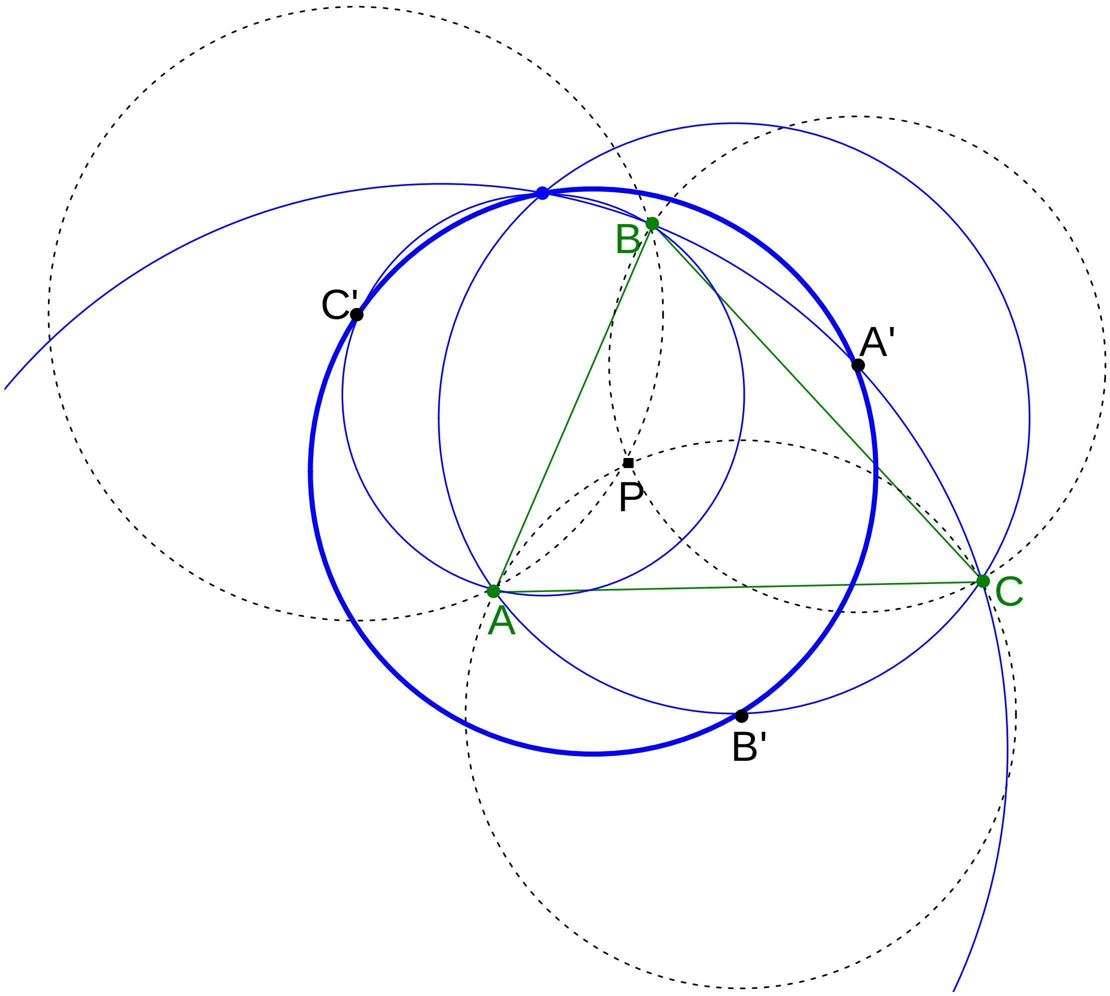

Fig. 10

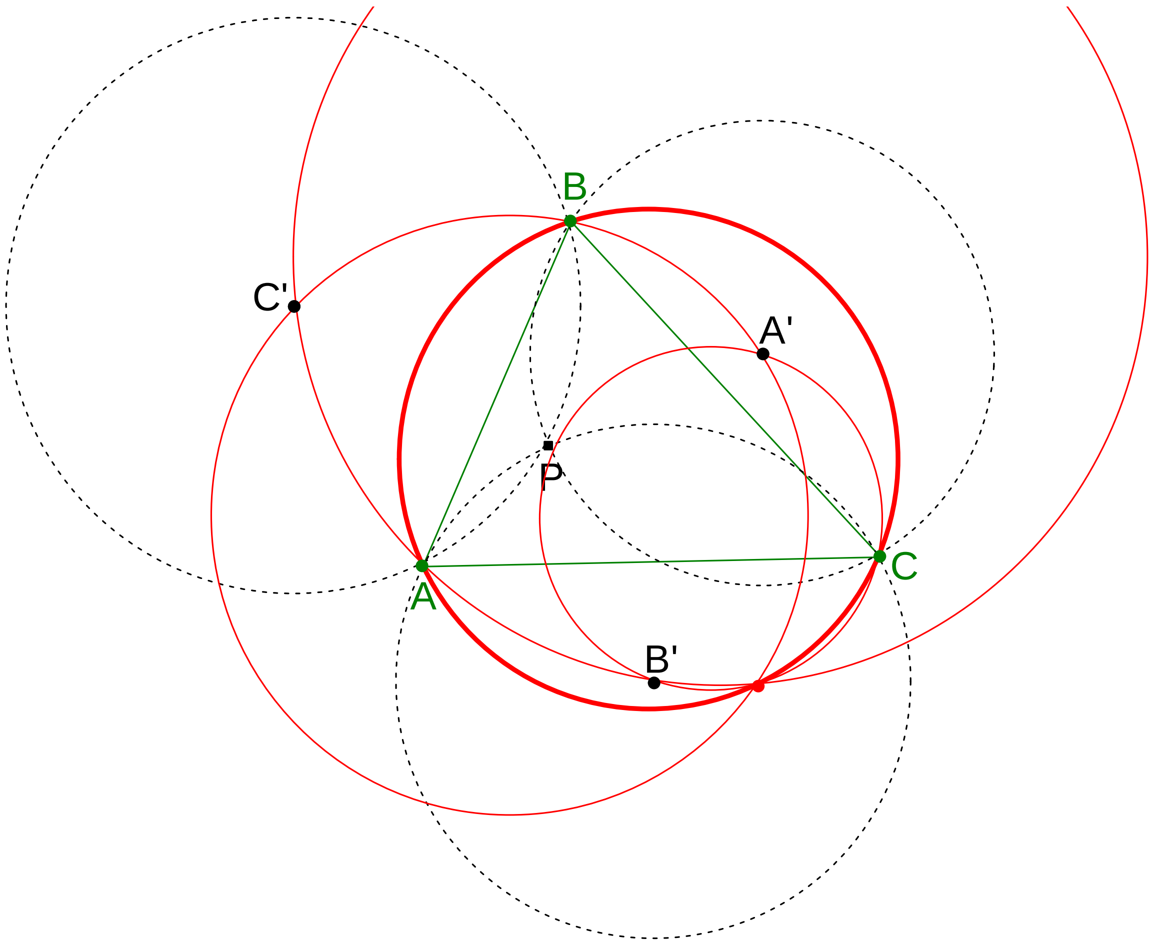

Fig. 11

Es zeigt sich allerdings eine viel elementarere Äquivalenz (Fig. 12): Der Punkt A' ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PBC; also liegt er auf der Mittelsenkrechten der Strecke PC. Aus demselben Grund liegt B' auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke. Also ist $A'B'$ die Mittelsenkrechte der Strecke PC. Das heißt, C ist das Spiegelbild von P an $A'B'$. Analog ist A das Spiegelbild von P an $B'C'$, und B das Spiegelbild von P an $C'A'$. Daher sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ genau dieselben Dreiecke wie in Satz 4, nur "mit vertauschten Rollen"! Aus Satz 4 **a)** folgt nun Satz 5 **b)**, und aus Satz 4 **b)** folgt Satz 5 **a)**.

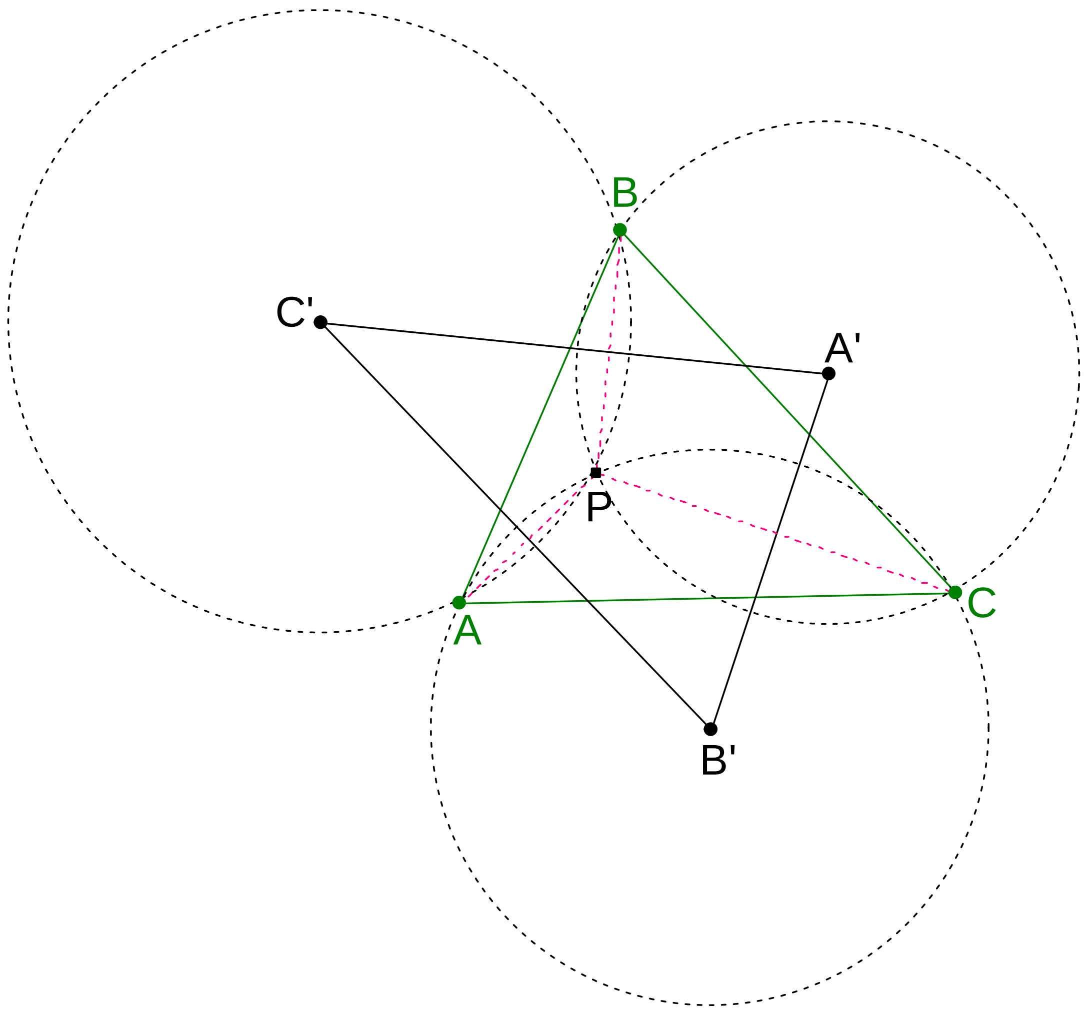

Fig. 12

Damit ist Satz 5 bewiesen. Einen anderen Beweis findet man in [3].

7. Spiegelbilder der Dreiecksecken an einem Punkt

Kommen wir zu einem weiteren Beispiel, dem **Satz von Collings**:

Satz 6: Sei ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt. Seien A', B' und C' die Spiegelbilder der Punkte A, B bzw. C an dem Punkt P.

a) Die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 13.)

b) Die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 14.)

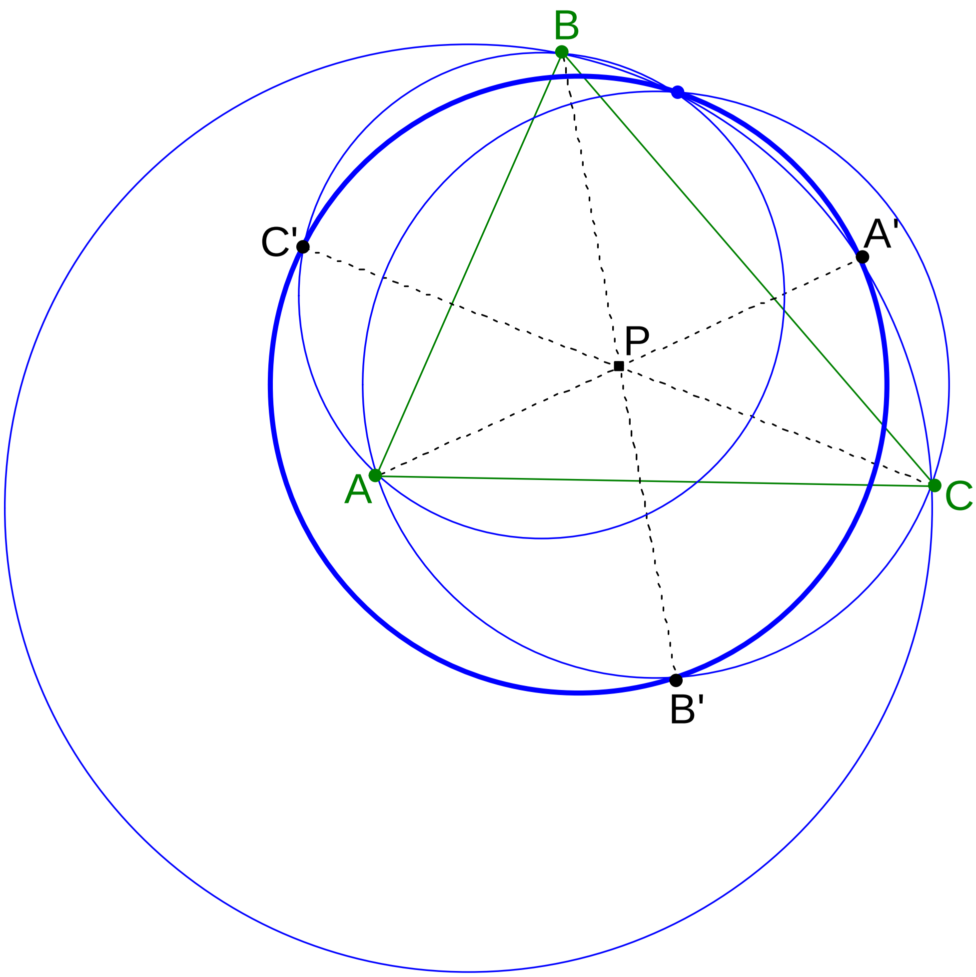

Fig. 13

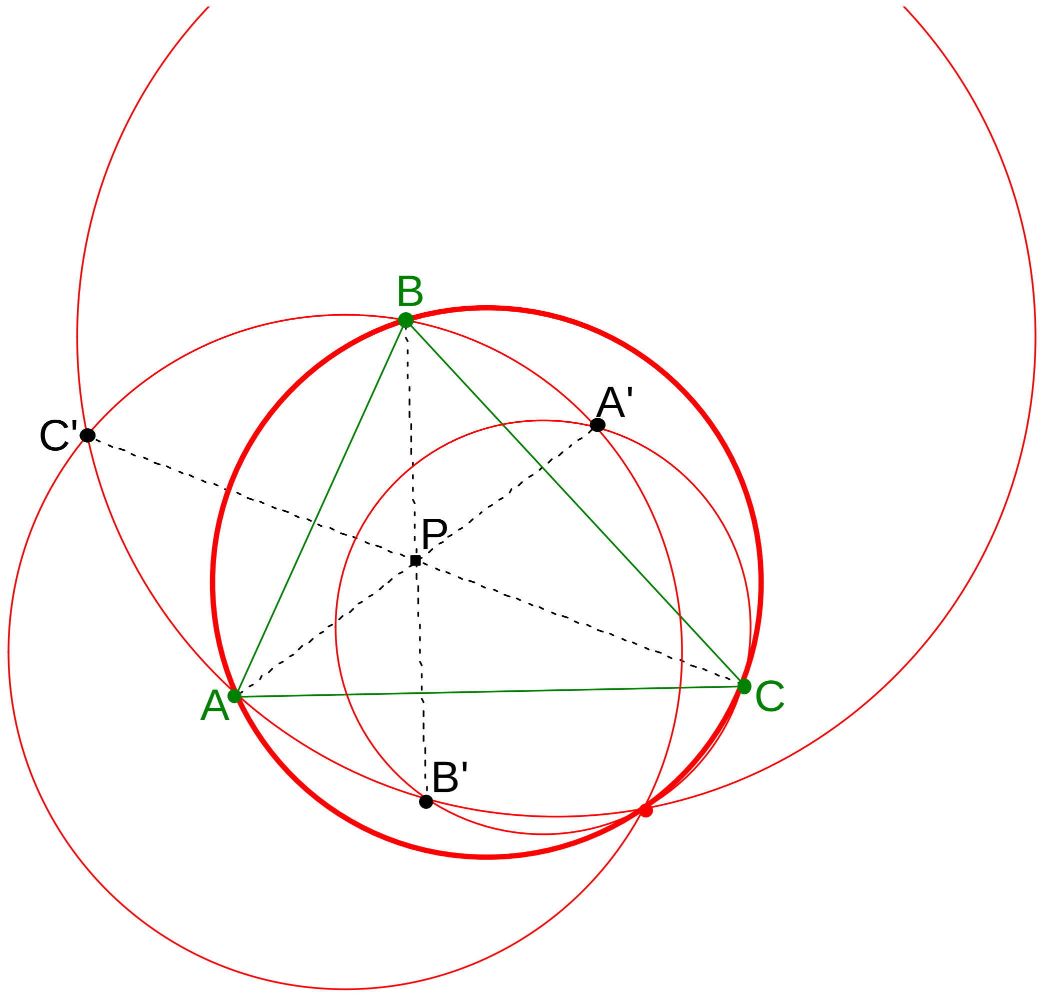

Fig. 14

Wieder sind die Behauptungen **a)** und **b)** wegen Satz 3 äquivalent. Diesmal aber ist die Äquivalenz auch ohne Rückgriff auf Satz 3 nahezu trivial: Die Punkte A', B' und C' sind die Spiegelbilder der Punkte A, B bzw. C an P; also sind auch die Punkte A, B und C die Spiegelbilder der Punkte A', B' bzw. C' an P. Folglich sind die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ die Spiegelbilder der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ bzw. ABC an P. Wenn wir z. B. bewiesen haben, daß die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC einen gemeinsamen Punkt haben, dann erhalten wir sofort als Folgerung, daß die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ einen gemeinsamen Punkt haben, nämlich das Spiegelbild des gemeinsamen Punktes der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC an P.

Wir werden im Folgenden also nur die Behauptung **b)** beweisen.

Beweis zu Satz 6 ***b)****:* (Siehe Fig. 15.) Es ist

$$\begin{aligned}\measuredangle BA'C' - \measuredangle AB'C' &= (\measuredangle BA'B' - \measuredangle C'A'B') - (\measuredangle AB'A' - \measuredangle C'B'A') \\ &= \measuredangle BA'B' - \measuredangle C'A'B' - \measuredangle AB'A' + \measuredangle C'B'A' \\ &= \measuredangle BA'B' + \measuredangle B'A'C' - \measuredangle AB'A' + \measuredangle C'B'A'.\end{aligned}$$

Wir wissen, daß die Punkte A, B, C, A', B' und C' bei der Spiegelung an P in die

Punkte A', B', C', A, B bzw. C übergehen. Da bei einer Spiegelung jede Gerade in eine zu ihr parallele Gerade übergeht, gilt $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$, $A'B \parallel AB'$, $B'C \parallel BC'$ und $C'A \parallel CA'$.

Aus $A'B \parallel AB'$ folgt $\measuredangle\,(A'B;\ A'B') = \measuredangle\,(AB';\ A'B')$, also $\measuredangle BA'B' = \measuredangle AB'A'$. Wir haben damit

$$\begin{aligned}\measuredangle BA'C' - \measuredangle AB'C' &= \measuredangle AB'A' + \measuredangle B'A'C' - \measuredangle AB'A' + \measuredangle C'B'A' \\ &= \measuredangle B'A'C' + \measuredangle C'B'A'.\end{aligned}$$

Nach der Winkelsumme im $\Delta A'B'C'$ ist $\measuredangle B'A'C' + \measuredangle C'B'A' + \measuredangle A'C'B' = 0°$, also $\measuredangle B'A'C' + \measuredangle C'B'A' = -\measuredangle A'C'B' = \measuredangle B'C'A'$. Aus $B'C' \parallel BC$ und $C'A' \parallel CA$ folgt $\measuredangle\,(B'C';\ C'A') = \measuredangle\,(BC;\ CA)$, also $\measuredangle B'C'A' = \measuredangle BCA$. Daher ist $\measuredangle B'A'C' + \measuredangle C'B'A' = \measuredangle B'C'A' = \measuredangle BCA$, und

$$\measuredangle BA'C' - \measuredangle AB'C' = \measuredangle BCA,$$

also $\measuredangle BCA + \measuredangle AB'C' = \measuredangle BA'C'$.

Sei nun R der von A verschiedene Schnittpunkt der Kreise $AB'C'$ und ABC. Dann gilt nach dem Umfangswinkelsatz für Kreiswinkel $\measuredangle ARC' = \measuredangle AB'C'$ und $\measuredangle BRA = \measuredangle BCA$. Daraus folgt

$$\measuredangle BRC' = \measuredangle BRA + \measuredangle ARC' = \measuredangle BCA + \measuredangle AB'C' = \measuredangle BA'C'.$$

Also liegen die Punkte B, C', A' und R auf einem Kreis, d. h. der Punkt R liegt auf dem Kreis $BC'A'$. Analog beweist man, daß der Punkt R auf dem Kreis $CA'B'$ liegt. Also ist R ein gemeinsamer Punkt der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC. Damit ist Satz 6 **b)** bewiesen.

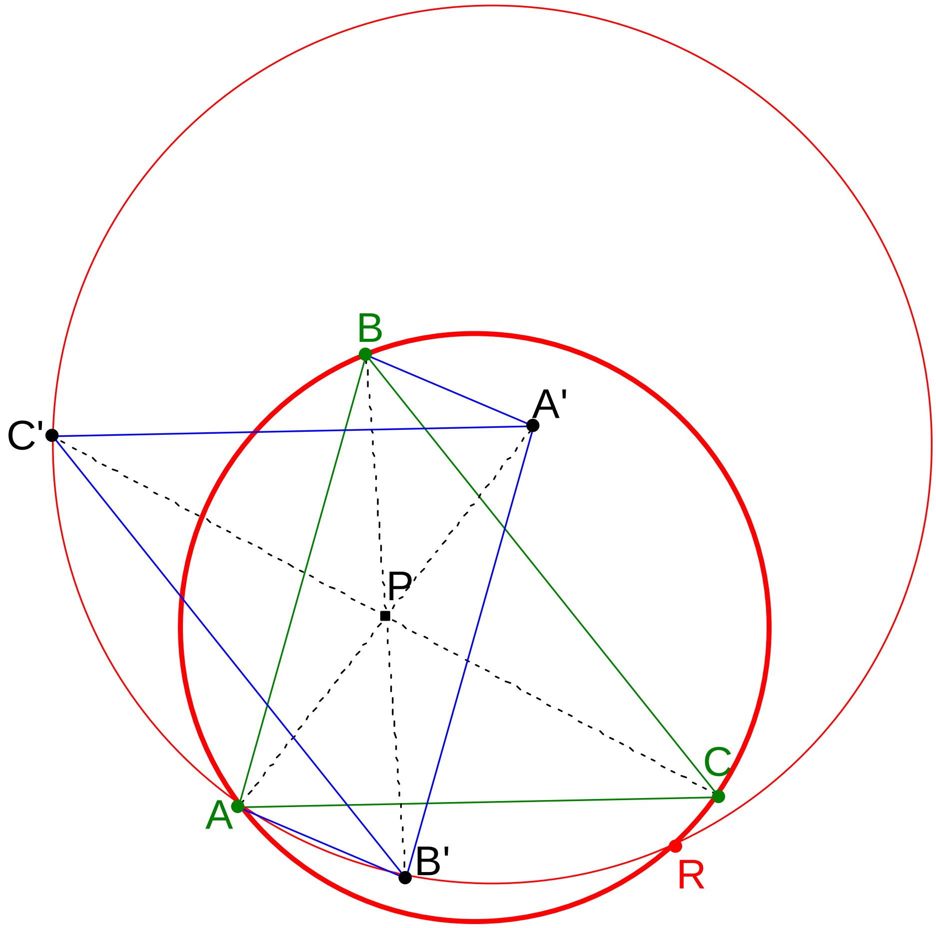

Fig. 15

8. Feuerbachkreise der Dreiecke eines Vierecks

Jetzt werden wir noch ein Beispiel für vier konkurrente Kreise betrachten:

Satz 7: Seien X, Y, Z und W vier Punkte auf einer Ebene. Die Feuerbachkreise der Dreiecke XYZ, YZW, ZWX und WXY haben einen gemeinsamen Punkt.

Beweis: Dieser Satz kann direkt mithilfe von Winkelrechnung bewiesen werden. Wir werden hier aber einen anderen Weg einschlagen: Und zwar wollen wir Satz 7 auf Satz 6 zurückführen.

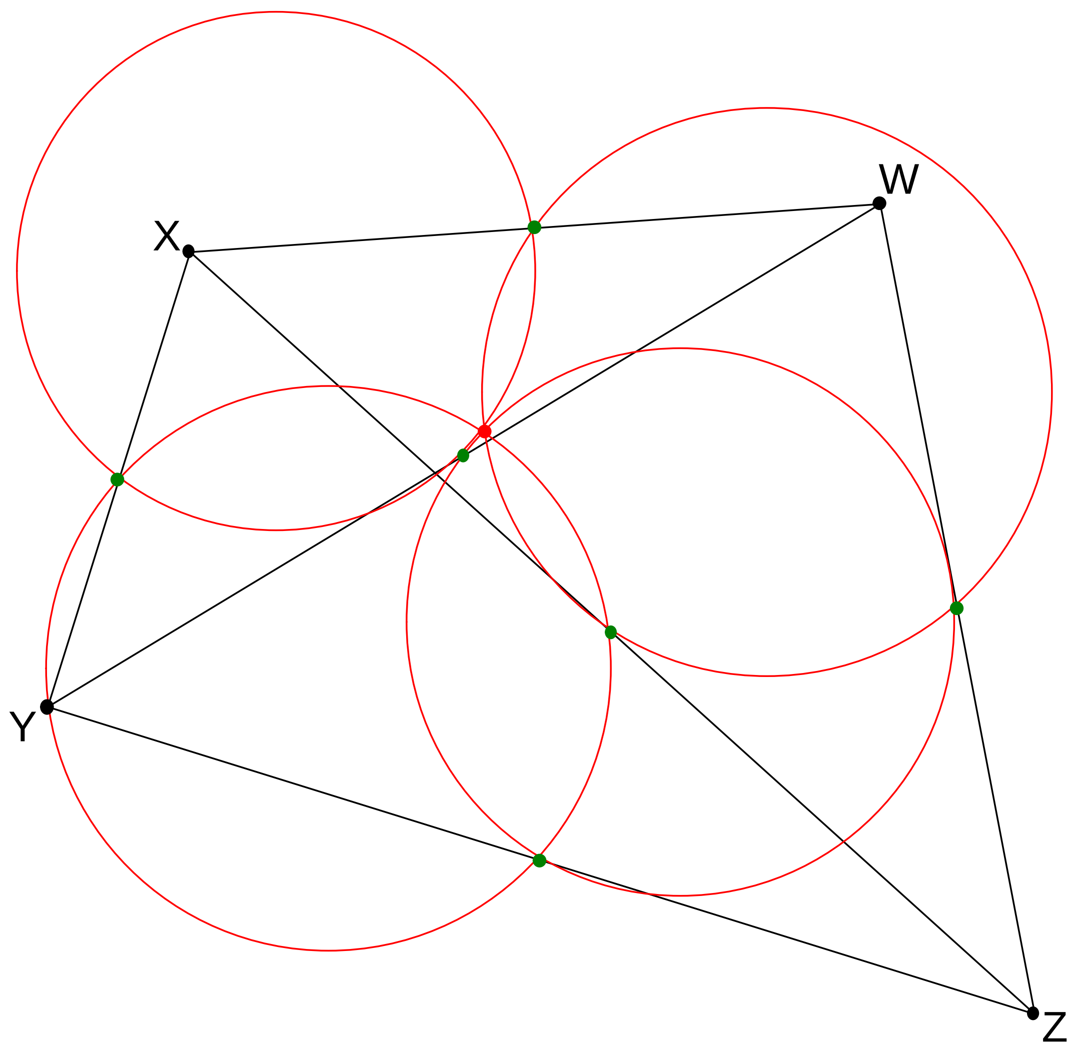

Fig. 16

Seien A, B, C, A', B' und C' die Mittelpunkte der Strecken XY, YW, WX, WZ, XZ bzw. YZ. Wir wollen einen Punkt P finden, für den gilt, daß die Punkte A', B' und C' die Spiegelbilder der Punkte A, B bzw. C an P sind. Wenn wir so einen Punkt gefunden haben, dann können wir Satz 6 **b)** anwenden, der besagt, daß die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC einen gemeinsamen Punkt haben. Diese vier Kreise sind die Feuerbachkreise der Dreiecke XYZ, YZW, ZWX und WXY (denn sie gehen durch die Seitenmitten dieser Dreiecke).

Als Mittelparalle im ΔXYW ist AC parallel zu YW; als Mittelparallele im ΔZYW ist $C'A'$ parallel zu YW. Also ist $AC \parallel C'A'$. Analog ist $AC' \parallel CA'$. Also ist $ACA'C'$ ein Parallelogramm; folglich halbieren sich seine Diagonalen. Das heißt, der Mittelpunkt P der Diagonale AA' ist gleichzeitig Mittelpunkt der Diagonale CC'. Analog ist P der Mittelpunkt der Strecke BB'.

Fassen wir zusammen: Der Punkt P ist gleichzeitig Mittelpunkt der drei Strecken AA', BB' und CC'. Das heißt, die Punkte A', B' und C' sind die Spiegelbilder der Punkte A, B bzw. C an dem Punkt P.

Jetzt können wir Satz 6 **b)** anwenden, und erhalten, daß die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$,

$CA'B'$ und ABC einen gemeinsamen Punkt haben. Das heißt: Die Feuerbachkreise der Dreiecke XYZ, YZW, ZWX und WXY haben einen gemeinsamen Punkt. Damit ist Satz 7 bewiesen.

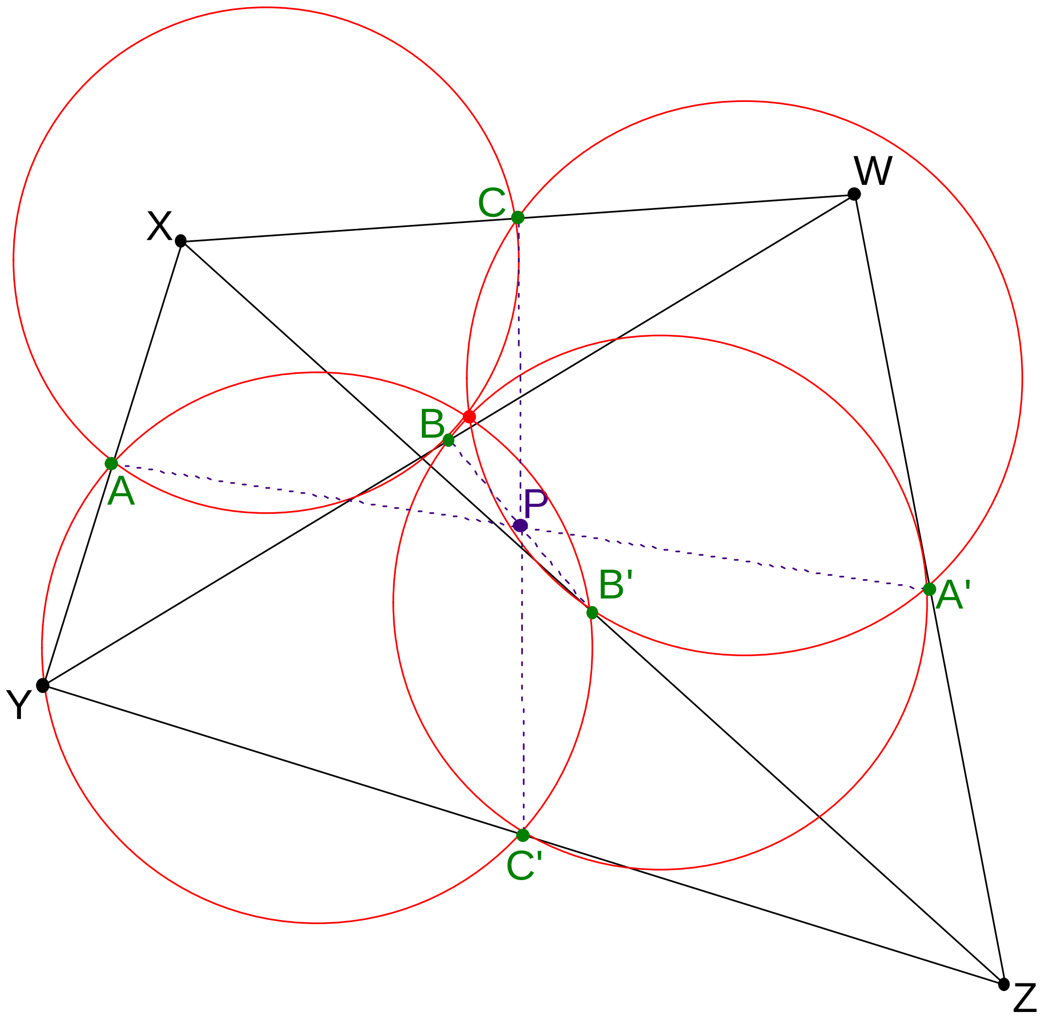

Fig. 17

9. Spiegelbilder der Dreiecksecken an den gegenüberliegenden Seiten

Das folgende ist ein Beispiel für die Anwendung von Satz 1.

Satz 8: Sei ABC ein Dreieck. Seien A', B' und C' die Spiegelbilder der Dreiecksecken A, B bzw. C an den Seiten BC, CA bzw. AB.

a) Die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ gehen durch den Höhenschnittpunkt des ΔABC. (Siehe Fig. 18.)

b) Die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 19.)

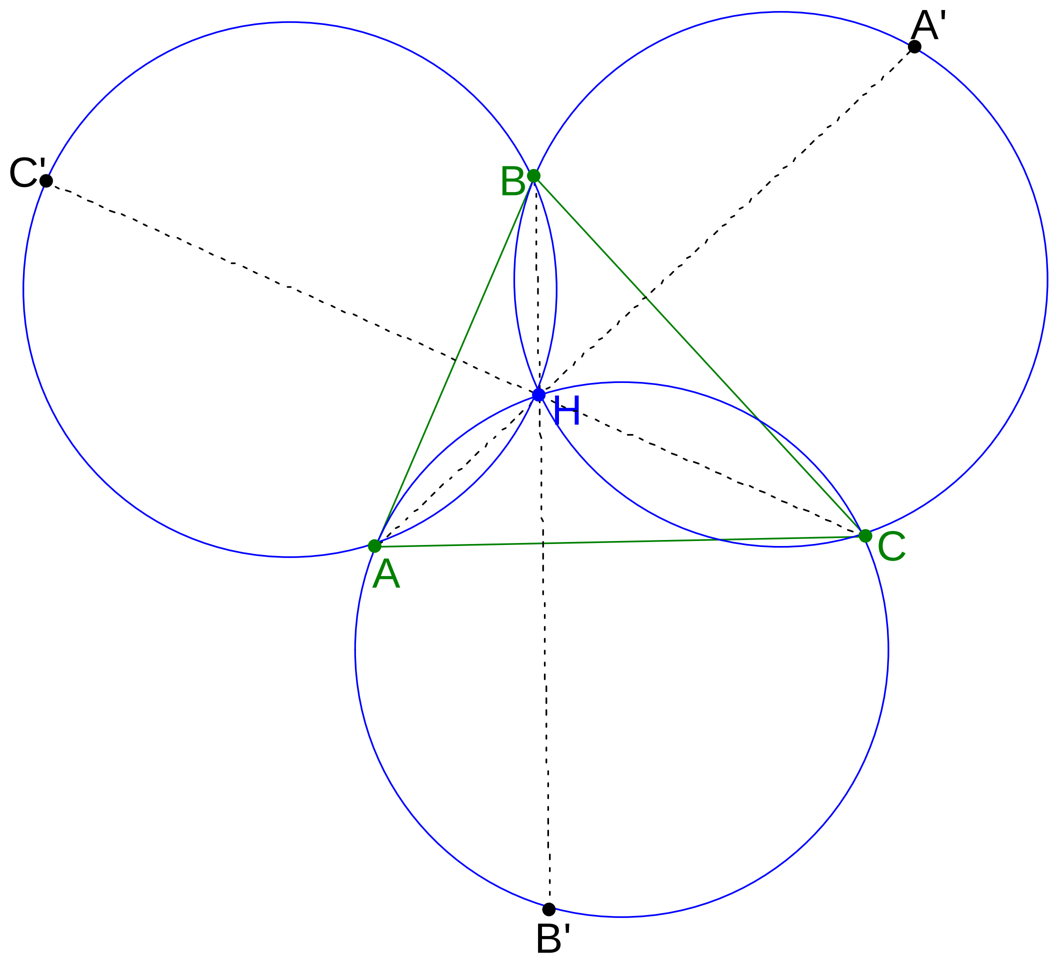

Fig. 18

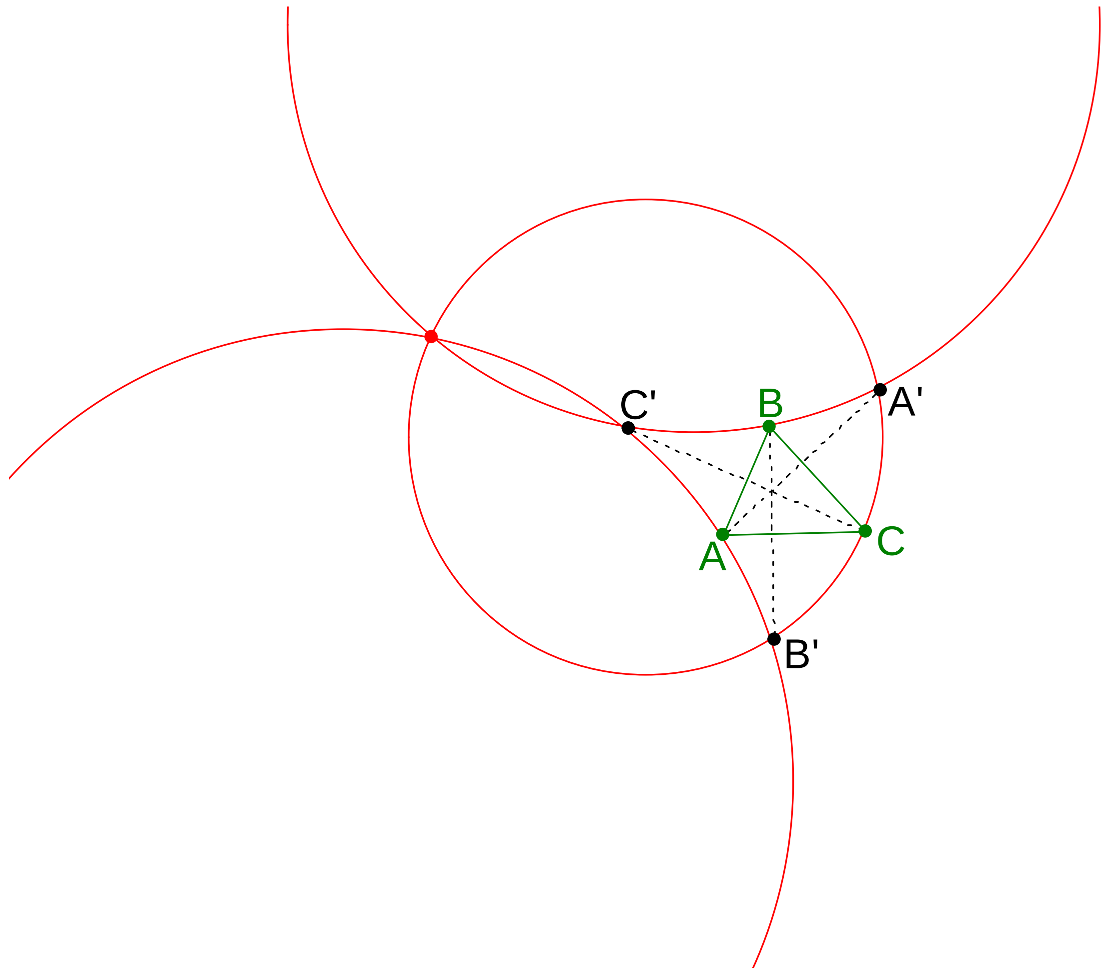

Fig. 19

Beweis zu Satz 8 ***a):*** Ist H der Höhenschnittpunkt des ΔABC, dann gilt

$$\measuredangle BHC = \measuredangle\,(BH;\ HC) = \measuredangle\,(BH;\ CA) + \measuredangle\,(CA;\ AB) + \measuredangle\,(AB;\ HC)\,.$$

Da BH und CH Höhen im Dreieck ABC sind, gilt $\measuredangle\,(BH;\ CA) = 90^\circ$ und $\measuredangle\,(AB;\ HC) = 90^\circ$, also

$$\measuredangle BHC = 90^\circ + \measuredangle\,(CA;\ AB) + 90^\circ = 180^\circ + \measuredangle\,(CA;\ AB) = \measuredangle\,(CA;\ AB) = \measuredangle CAB.$$

Da A' das Spiegelbild von A an BC ist, haben wir aber $\measuredangle BA'C = -\measuredangle BAC$, also $\measuredangle BA'C = \measuredangle CAB$. Daher ist $\measuredangle BHC = \measuredangle BA'C$. Folglich liegt der Punkt H auf dem Kreis $A'BC$. Analog beweist man, daß H auf den Kreisen $B'CA$ und $C'AB$ liegt. Damit ist Satz 8 **a)** bewiesen.

Nun folgt Satz 8 **b)** aus Satz 8 **a)** nach Satz 1.

Außerdem kann man zeigen, daß der gemeinsame Punkt der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ das Bild des Kosnitapunktes des ΔABC bei der Inversion am Umkreis des ΔABC ist. Wir wollen hier aber nicht näher darauf eingehen.

10. Das Fermatdreieck

Das nächste Beispiel ist:

Satz 9: Auf den Seiten BC, CA und AB eines Dreiecks ABC werden gleichseitige Dreiecke $BA'C$, $CB'A$ und $AC'B$ nach außen aufgesetzt.

a) Die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 20.)

b) Die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 21.)

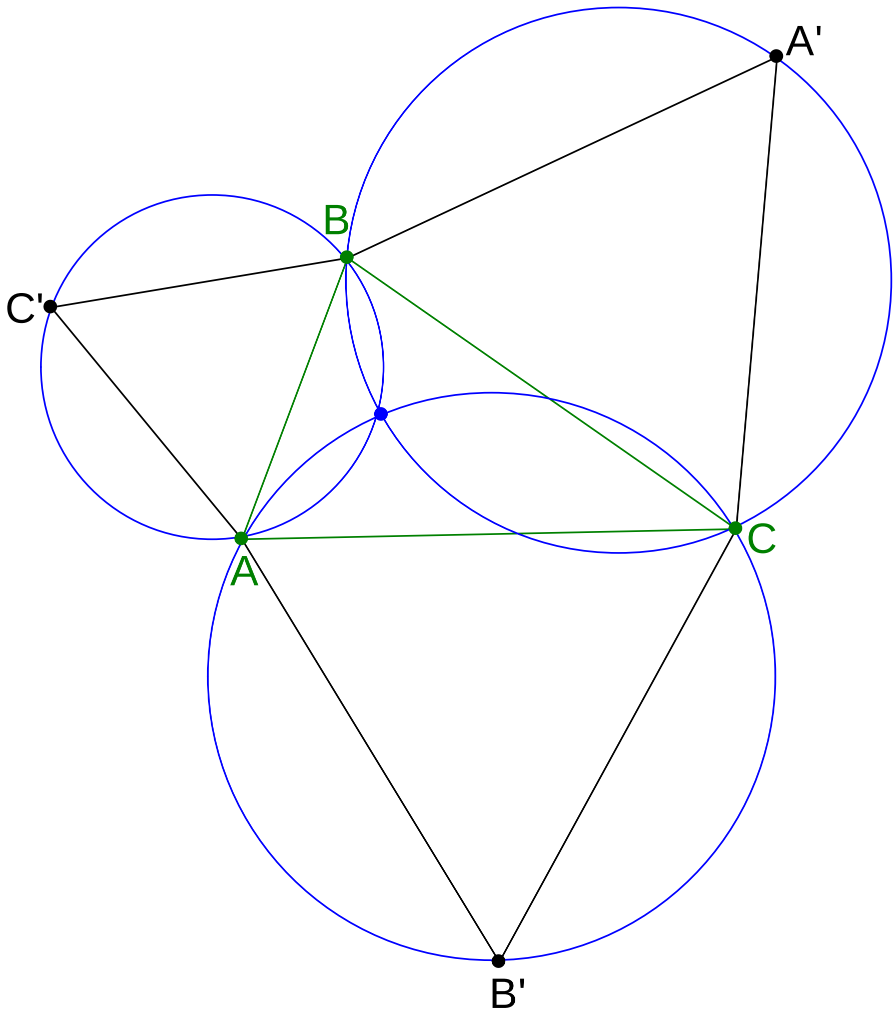

Fig. 20

Bemerkung: Das Dreieck $A'B'C'$ heißt **Fermatdreieck** des Dreiecks ABC.

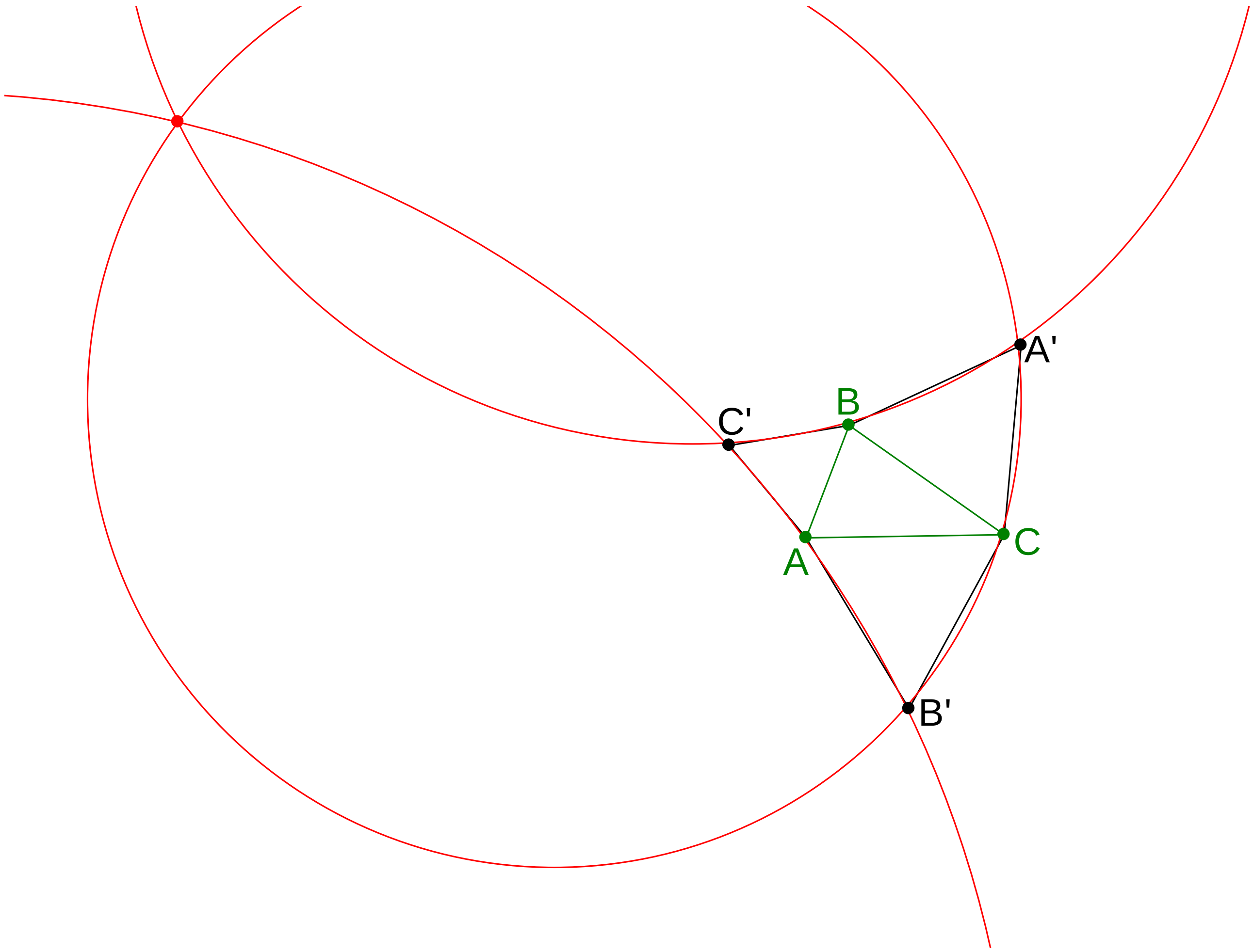

Fig. 21

*Beweis zu Satz 9 **a)**:* Da die Dreiecke $BA'C$, $CB'A$ und $AC'B$ gleichseitig sind, gilt $\measuredangle BA'C = 60°$, $\measuredangle CB'A = 60°$ und $\measuredangle AC'B = 60°$, also

$$\measuredangle BA'C + \measuredangle CB'A + \measuredangle AC'B = 60° + 60° + 60° = 180° = 0°.$$

Nach Satz 2 haben die Kreise $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ also einen gemeinsamen Punkt, was zu beweisen war.

Bemerkung: Bekanntlich ist dieser gemeinsame Punkt der Fermatpunkt des Dreiecks ABC. Bezeichnen wir ihn mit F, dann gilt $\measuredangle BFC = \measuredangle BA'C$, $\measuredangle CFA = \measuredangle CB'A$ und $\measuredangle AFB = \measuredangle AC'B$ (weil F auf den Kreisen $A'BC$, $B'CA$ und $C'AB$ liegt), also $\measuredangle BFC = \measuredangle CFA = \measuredangle AFB = 60°$. Das heißt, von dem Fermatpunkt F aus sieht man die Dreiecksseiten BC, CA und AB unter gleichen Winkeln.

Satz 9 **b)** folgt aus Satz 9 **a)** nach Satz 1. Der gemeinsame Punkt der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$ und $CA'B'$ heißt **Wernaupunkt** des Dreiecks ABC.

11. Das Napoleondreieck

Schließlich noch ein Fall von konkurrenten Kreisen. In Satz 9 waren A', B' und C' die *Spitzen* der auf den Seiten BC, CA und AB aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke; im folgenden sollen A', B' und C' die *Mittelpunkte* dieser gleichseitigen Dreiecke sein:

Satz 10: Auf den Seiten BC, CA und AB eines Dreiecks ABC werden gleichseitige Dreiecke $BA''C$, $CB''A$ und $AC''B$ nach außen aufgesetzt; die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke seien A', B' bzw. C'.

a) Die Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$ haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 22.)

b) Die Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC haben einen gemeinsamen Punkt. (Siehe Fig. 23.)

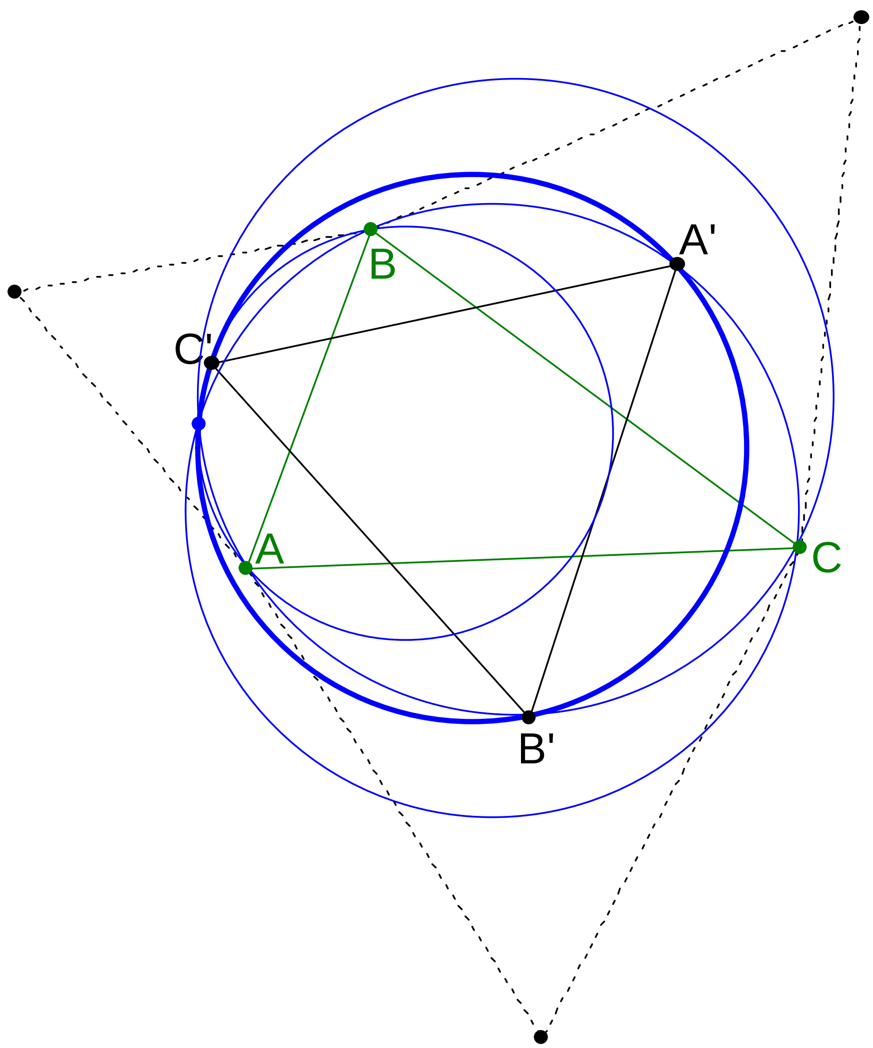

Fig. 22

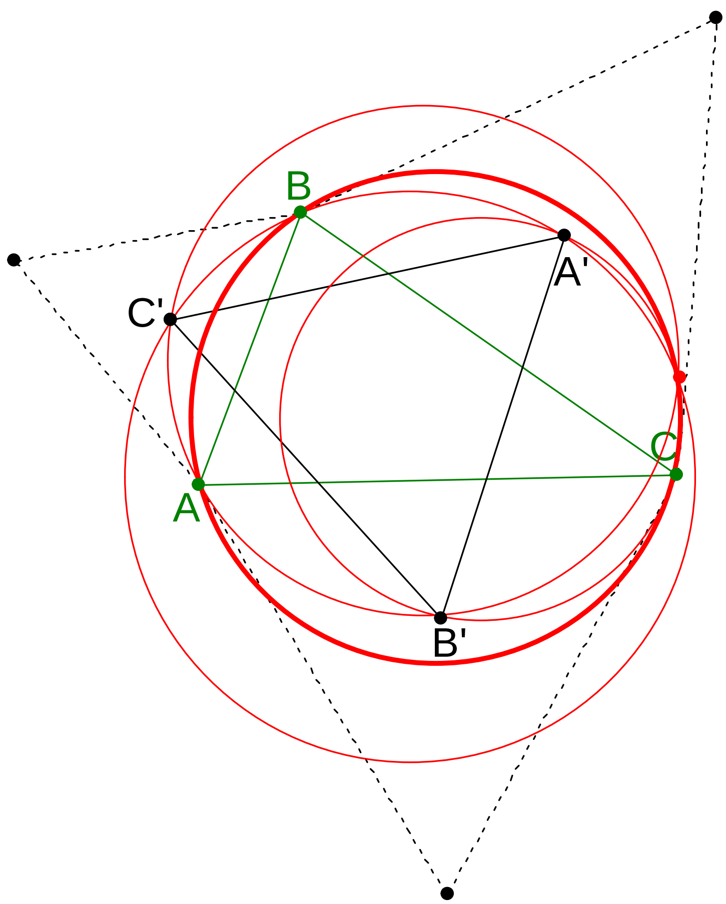

Fig. 23

Bemerkung (und Vorbereitung für den Beweis): Das Dreieck $A'B'C'$ heißt **Napoleondreieck** des Dreiecks ABC. Es ist gleichseitig, was man folgendermaßen sehen kann:

Sei F der gemeinsame Punkt der Kreise $A''BC$, $B''CA$ und $C''AB$ (nach Satz 9 **a)** haben diese Kreise einen gemeinsamen Punkt). Die Punkte B' und C' sind die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke $B''CA$ bzw. $C''AB$, also auch die Mittelpunkte der Kreise $B''CA$ bzw. $C''AB$. Da die gemeinsame Sehne zweier Kreise stets orthogonal zu ihrer Zentralen ist, gilt $AF \perp B'C'$. Analog ist $BF \perp C'A'$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \measuredangle B'C'A' &= \measuredangle\left(B'C';\ C'A'\right) = \measuredangle\left(B'C';\ AF\right) + \measuredangle\left(AF;\ BF\right) + \measuredangle\left(BF;\ C'A'\right) \\ &= 90^\circ + \measuredangle AFB + 90^\circ = 180^\circ + \measuredangle AFB = \measuredangle AFB. \end{aligned}$$

Aber wir wissen, daß $\measuredangle AFB = 60^\circ$ ist (siehe den letzten Abschnitt); also ist $\measuredangle B'C'A' = 60^\circ$. Analog findet man $\measuredangle C'A'B' = 60^\circ$ und $\measuredangle A'B'C' = 60^\circ$; deshalb ist das Dreieck $A'B'C'$ tatsächlich gleichseitig.

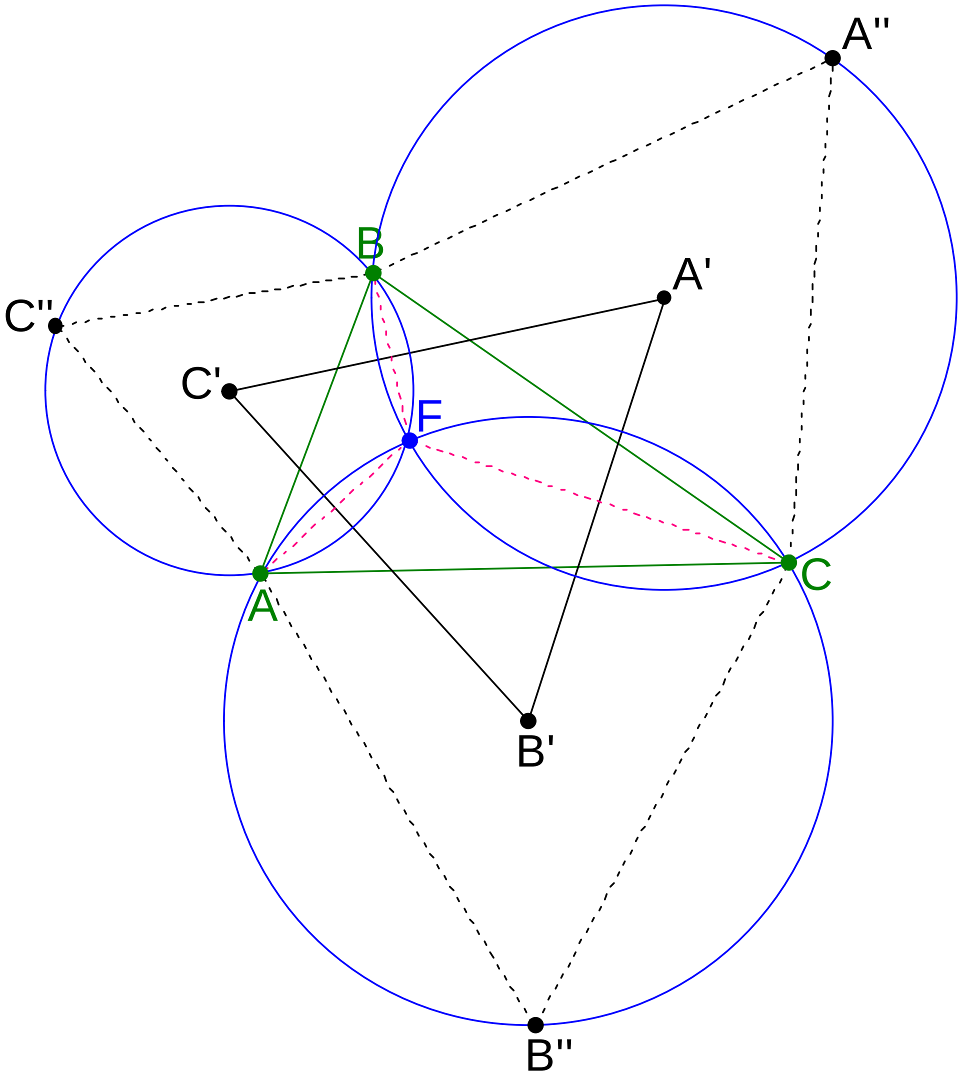

Fig. 24

Wegen der Symmetrien in einem gleichseitigen Dreieck gilt $\measuredangle CBA' = 30°$, also $\measuredangle A'BC = -30°$. Aus demselben Grunde gilt $\measuredangle B'AC = 30°$. Jetzt können wir mit dem Beweis von Satz 10 anfangen.

Beweis zu Satz 10 ***a)****:* Sei Q der von A' verschiedene Schnittpunkt der Kreise $A'BC$ und $A'B'C'$. Dann gilt $\measuredangle B'QA' = \measuredangle B'C'A'$ und $\measuredangle A'QC = \measuredangle A'BC$, also $\measuredangle B'QA' = 60°$ und $\measuredangle A'QC = -30°$. Folglich ist

$$\measuredangle B'QC = \measuredangle B'QA' + \measuredangle A'QC = 60° + (-30°) = 30° = \measuredangle B'AC.$$

Also liegt der Punkt Q auf dem Kreis $B'CA$. Analog zeigt man, daß der Punkt Q auf dem Kreis $C'AB$ liegt. Also ist Q ein gemeinsamer Punkt der Kreise $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ und $A'B'C'$. Damit ist Satz 10 **a)** bewiesen.

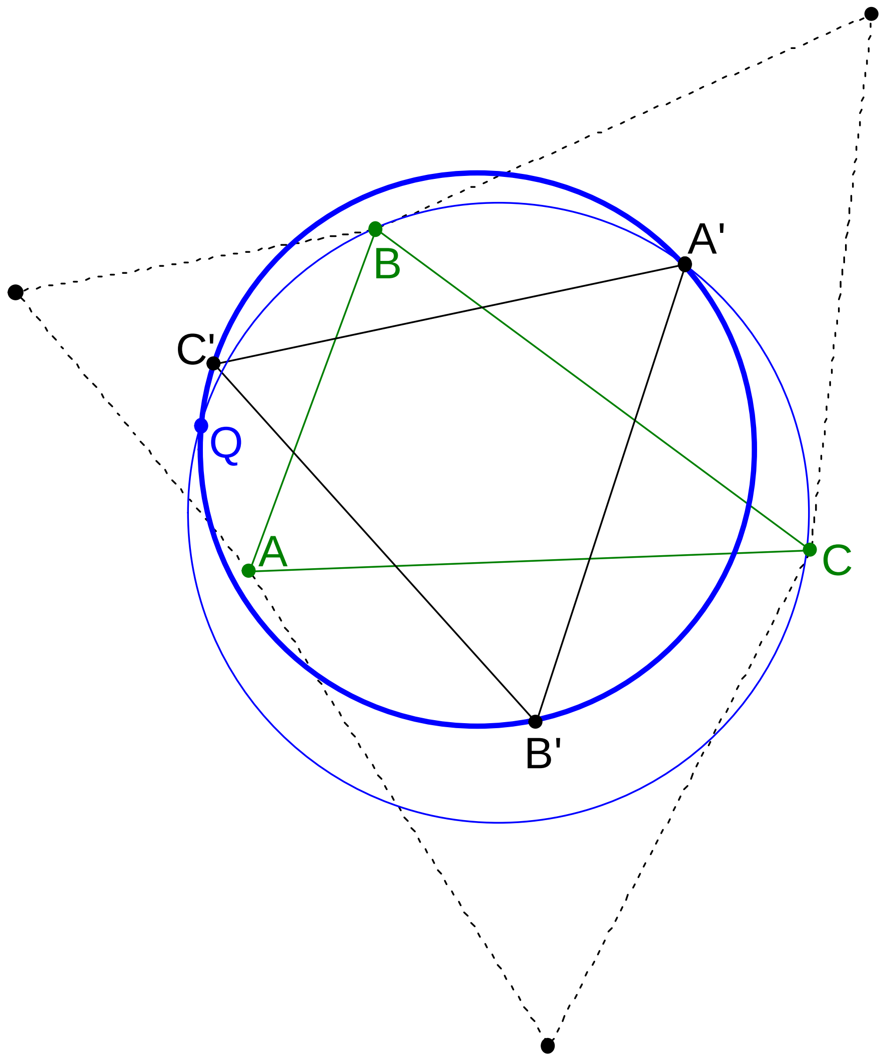

Fig. 25

Satz 10 **b)** folgt aus Satz 10 **a)** nach Satz 3.

Bemerkung: Man kann beweisen, daß der gemeinsame Punkt der Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und ABC mit dem in [4] definierten *Eulerspiegelpunkt* des ΔABC übereinstimmt.

Literaturhinweise

[1] Herbert Zeitler: *Kreisgeometrie*, Didaktik der Mathematik 4/1973, S. 288-308.

[2] Herbert Zeitler: *Kreisgeometrie in Schule und Wissenschaft oder: klassische und moderne Kreisgeometrie*, Didaktik der Mathematik 3/1983, S. 169-201.

[3] Darij Grinberg: *Aufgabe: Umkreismittelpunkte und Kreise*.

[4] Darij Grinberg: *Aufgabe: Spiegelung an den Dreiecksseiten und Anti-Steinersche Punkte*.

[5] $\sqrt{WURZEL}$*-Aufgabe* κ *22 von Wilfried Haag* und *Lösung von Darij Grinberg*.