

Aufgabe 1

Das Schachbrett sei im Folgenden wie in der Aufgabenstellung beschrieben orientiert.

Weiter werde das Brett in ein rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt. Dabei erhalte das Feld links unten die Koordinaten $(0, 0)$, das Feld rechts unten die Koordinaten $(99, 0)$, das Feld links oben die Koordinaten $(0, 99)$ und somit das Feld rechts oben die Koordinaten $(99, 99)$. Zwei benachbarte Felder unterscheiden sich also in genau einer Koordinate um ± 1 .

Es bezeichne a_n^x bzw. b_n^x die Rechts- und a_n^y bzw. b_n^y die Hochwerte der Spielsteine von A bzw. B nach n Zügen (das Spiel beginnt bei $n = 0$ Zügen, jeder Zug eines der Spieler wird als Zug im gesamten gesehen; oftmals wird auch der Terminus 'zum Zeitpunkt n ' anstatt 'nach dem n -ten Zug' verwendet).

Die möglichen Züge von A sind dann (falls nicht durch den Spielfeldrand begrenzt):

- a) nach rechts: $a_{n+1}^x = a_n^x + 1, a_{n+1}^y = a_n^y$
- b) nach oben: $a_{n+1}^x = a_n^x, a_{n+1}^y = a_n^y + 1$
- c) nach links: $a_{n+1}^x = a_n^x - 1, a_{n+1}^y = a_n^y$
- d) nach unten: $a_{n+1}^x = a_n^x, a_{n+1}^y = a_n^y - 1$

Analog lassen sich dann auch die Züge von B beschreiben.

Seien außerdem $T_n := -(b_n^x - a_n^x) + (b_n^y - a_n^y)$ und $T'_n := (b_n^x - a_n^x) + (b_n^y - a_n^y)$. Dann gibt T_n offensichtlich an, ob sich der Stein von B nach n Zügen über ($T_n > 0$), auf ($T_n = 0$) oder unter ($T_n < 0$) der durch den Stein von A gehenden Diagonalen von links unten nach rechts oben befindet. Analoges gilt dann für T'_n bezüglich der Diagonalen von links oben nach rechts unten.

Taktik. Der Spieler A soll nun nach folgender Taktik spielen:

1. Anfangs zieht er solange nach rechts, bis erstmals (zum Zeitpunkt n_0) nach einem seiner Züge $T_{n_0} = 0$ ist (das dies tatsächlich immer eintritt wird im Folgenden noch gezeigt).
2. Danach antwortet er bis zu seinem Sieg auf die Züge von B folgendermaßen:
 - (a) B zieht nach rechts $\Rightarrow A$ zieht nach rechts
 - (b) B zieht nach oben $\Rightarrow A$ zieht nach oben
 - (c) B zieht nach links $\Rightarrow A$ zieht nach oben
 - (d) B zieht nach unten $\Rightarrow A$ zieht nach rechts

Nun soll gezeigt werden, dass Spieler A diese Taktik anwenden kann und unter Benutzung dieser auch sicher gewinnt.

Lemma 1 Seien $m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n$. Es gibt es zu jedem ganzzahligen t zwischen T_m und T_n ein ganzzahliges $k, m \leq k \leq n$, mit $T_k = t$ (für die Randwerte $t = T_m$ und $t = T_n$ gilt dies trivialerweise). Ebenso gibt es zu jedem t zwischen T'_m und T'_n ein ganzzahliges $k, m \leq k \leq n$, mit $T'_k = t$. (ein Analogon zum bekannten Zwischenwertsatz aus der Analysis)

Beweis. Bei einem Zug egal welchen Spielers ändert sich der Wert von T beim Übergang von n nach $n + 1$ (wie man leicht durch Durchgehen aller 4 Zugmöglichkeiten pro Spieler nachprüft) immer um ± 1 (anders ausgedrückt: $|T_{n+1} - T_n| = 1$). Dies ergibt aber sofort die gewünschte Aussage, da eine ausgelassene Zahl zwischen T_m und T_n einen 'Sprung' vom Betrag ≥ 2 bedeuten würde, was ja nicht sein kann. Der Beweis für T' anstelle von T verläuft genau analog und soll deshalb hier nicht ausgeführt werden. ■

Lemma 2 T_n sowie T'_n sind nach einem Zug von Spieler A, also für ungerades n , (bzw. vor einem Zug von Spieler B) immer gerade, vor einem Zug von Spieler A, also für gerades n , (bzw. nach einem Zug von Spieler B) immer ungerade.

Beweis. Für T_n zeigt sich dies induktiv folgendermaßen:

Induktionsanfang:

Es ist $T_0 = -(99 - 0) + (0 - 0) = -99$ wie gesagt ungerade.

Induktionsschritt:

Wie schon beim Beweis von Lemma 1 gezeigt, ändert sich der Wert von T bei einem Zug (egal welchen Spielers) immer um genau ± 1 , ändert also mit jedem Zug eines Spielers seine Parität. Ist diese Parität zum Zeitpunkt n also ungerade, so ist sie zum Zeitpunkt $n + 1$ nun gerade und umgekehrt.

Das ist aber schon die genannte Aussage für T_n .

Analog erhält man das selbe Ergebnis für T'_n . ■

Lemma 3 Zieht A anfangs konsequent nach rechts, so ist zu irgendeinem Zeitpunkt n_0 nach einem Zug von A der in der Taktik genannte Zustand $T_{n_0} = 0$ erreicht.

Beweis. Angenommen, es tritt niemals nach einem Zug von A (nach rechts) der gewünschte Zustand ein, bis A schließlich am rechten Rand angelangt: Anfangs ist der Wert $T_0 = -(99 - 0) + (0 - 0) = -99 < 0$. Spieler A kann erst dann nicht mehr weiter nach rechts ziehen, wenn er (nach 99 seiner bzw. 197 der Gesamtzüge) das Feld $(99, 0)$ (das Startfeld von B) erreicht hat. Direkt nach Erreichen dieses Feldes ergäbe sich aufgrund des nach rechts und unten begrenzten Brettes aber

$$\begin{aligned} b_{197}^x &\leq a_{197}^x = 99, b_{197}^y \geq a_{197}^y = 0 \\ \Rightarrow T_{197} &= -(b_{197}^x - a_{197}^x) + (b_{197}^y - a_{197}^y) \geq 0 \end{aligned}$$

Also gab es nach Lemma 1 zwischenzeitlich einen Zeitpunkt k zu dem $T_k = 0$ war. Da dann aber $T_k = 0$ gerade war, muss dies nach Lemma 2 nach einem Zug von A gewesen sein. Dies steht aber im Widerspruch zur gemachten Annahme, dass dies nie eintreten sei, womit diese Annahme falsch war. Es gibt also immer ein n_0 der geforderten Art. ■

Sei im Folgenden mit n_0 immer der Zeitpunkt bezeichnet, an dem erstmals nach einem Zug von A der Zustand $T_{n_0} = 0$ erreicht wurde, also der Punkt an dem A seine Taktik umstellt.

Lemma 4 *Es ist $T'_{n_0} \geq 0$.*

Beweis. Es ist immer noch $a_{n_0}^y = 0$, da A bisher nur nach rechts gezogen ist, und somit $b_{n_0}^y \geq a_{n_0}^y = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} T'_{n_0} &= (b_{n_0}^x - a_{n_0}^x) + (b_{n_0}^y - a_{n_0}^y) = 2(b_{n_0}^y - a_{n_0}^y) - (b_{n_0}^y - a_{n_0}^y) + (b_{n_0}^x - a_{n_0}^x) = \\ &= 2(b_{n_0}^y - a_{n_0}^y) - T_{n_0} = 2(b_{n_0}^y - a_{n_0}^y) - 0 \geq 0 \end{aligned}$$

was ja zu zeigen war. ■

Lemma 5 *Zu jedem Zeitpunkt n ab n_0 nach einem Zug von A ist bei bisheriger Anwendung der Taktik (dass dies sogar konsequent möglich ist wird erst noch bewiesen) wieder $T_n = 0$.*

Beweis. Dies ergibt sich induktiv folgendermaßen:

Induktionsanfang:

Es ist natürlich $T_{n_0} = 0$ (nach Definition von n_0).

Induktionsschritt:

Ist dies nach einem Zug von A der Fall (Induktionsvoraussetzung), so ergibt eine Betrachtung aller vier (maximal) möglichen Züge von B und der (gewünschten) Antworten von A darauf, dass dies auch nach dem nächsten Zug der Fall sein wird. Damit ist das Lemma aber schon bewiesen. ■

Lemma 6 *A kann ab dem Zeitpunkt n_0 zumindest solange seine Taktik ausführen, bis erstmals nach einem seiner Züge $T'_n = 0$ ist.*

Beweis. Habe A bis zu einem Zeitpunkt n nach einem seiner Züge seine Taktik ausgeführt und sei $T'_n > 0$.

Dann ist nach Lemma 5 nun $-(b_n^x - a_n^x) + (b_n^y - a_n^y) = T_n = 0$ und es folgt unmittelbar $b_n^x - a_n^x = b_n^y - a_n^y$ und somit

$$b_n^x - a_n^x = b_n^y - a_n^y = \frac{(b_n^x - a_n^x) + (b_n^y - a_n^y)}{2} = \frac{T'_n}{2} > 0$$

Also befindet sich der Stein von B weiter rechts und weiter oben als der Stein von A , insbesondere kann A noch mindestens einmal nach rechts und nach oben ziehen. Aber andere Züge werden in der genannten Taktik gar nicht benutzt und A kann noch mindestens einmal ziehen.

Wird nun also irgendwann zu einem Zeitpunkt k trotz bisheriger Anwendung der Taktik ein Zustand erreicht, zu dem A nicht mehr ziehen kann, so muss $T'_k \leq 0$ sein. Aber es ist zum Zeitpunkt n_0 ja $T'_{n_0} \geq 0$ (Lemma 4) und nach Lemma 1 kann T' gar nicht negativ werden, ohne vorher $= 0$ gewesen zu sein. Nach Lemma 2 (da ja 0 gerade ist) muss dies nach einem Zug von A passiert sein. ■

Lemma 7 *Irgendwann tritt $T'_n = 0$ ein und dann hat A gewonnen.*

Beweis. Da A nicht endlos nach rechts oder oben ziehen kann, muss zu einem Zeitpunkt n nach einem Zug von A nach Lemma 6 nun $T'_n = 0$ eintreten (sonst könnte A ja endlos weiterziehen). Dann ist aber gleichzeitig (Lemma 5) auch $T_n = 0$ und somit

$$\begin{aligned} b_n^x - a_n^x &= -(b_n^y - a_n^y) \\ b_n^x - a_n^x &= b_n^y - a_n^y \end{aligned}$$

was nach trivialer Umformung unmittelbar

$$\begin{aligned} b_n^x &= a_n^x \\ b_n^y &= a_n^y \end{aligned}$$

ergibt. Letzteres bedeutet aber nichts anderes, als dass sich A nun auf dem selben Feld wie B befindet. Da dies nach einem Zug von A der Fall ist, ist A also gerade auf dieses Feld gezogen und hat somit gewonnen. ■

Aufgabe 2

Als rationale Zahl kann x als Bruch $x = \frac{r}{s}$ mit festen $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$ geschrieben werden (dabei müssen im Folgenden r und s nicht notwendig, wie ja oft zusätzlich gefordert, teilerfremd sein, dürfen es aber). Seien also nun solche r, s fixiert (denn x soll ja fest sein).

Da desweiteren nur noch ganze Zahlen betrachtet werden sollen, wird unter einer Zahl immer implizit eine ganze Zahl verstanden.

Nun gilt für ganze Zahlen a, b, c :

$$\begin{aligned} a \left(\frac{r}{s} \right)^2 + b \frac{r}{s} + c &= ax^2 + bx + c > 0 \\ \Leftrightarrow ar^2 + brs + cs^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow ar^2 + brs + cs^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

wobei die erste Äquivalenz durch Multiplikation (bzw. Division) mit $s^2 > 0$ (da $s \neq 0$) folgt. Die zweite Umformung rührt daher, dass $ar^2 + brs + cs^2$ eine ganze Zahl ist und eine solche genau dann positiv ist, wenn sie ≥ 1 ist (denn 1 ist die kleinste positive ganze Zahl).

Es ist also nach dem bisher gezeigten nachzuweisen, dass es nur endlich viele Tripel (a, b, c) ganzer Zahlen gibt, so dass die drei Bedingungen

$$ar^2 + brs + cs^2 \geq 1 \tag{1}$$

$$b^2 - 4ac = 5 \tag{2}$$

$$a < 0 \tag{3}$$

erfüllt sind. Ein Tripel ganzer Zahlen, welches alle drei Bedingungen erfüllt, heiße von nun an *Trupel* (bezüglich r, s , was aber im Folgenden weggelassen werden soll).

Lemma 1 *Zu festem $b \in \mathbb{Z}$ gibt es je nur endlich viele Trupel (a, b, c) .*

Beweis: Es gibt zu festem b sogar nur endlich viele a, c , die die Bedingung (2) erfüllen: Die Gleichung $x^2 - 5 = 0$ besitzt bekanntermaßen keine ganzzahlige Lösung, so dass auf jeden Fall $b^2 - 5 \neq 0$ ist. Wegen $(2) \Leftrightarrow 4ac = b^2 - 5$ ist sowohl a als auch c ein Teiler der festen ganzen Zahl $b^2 - 5 \neq 0$. Gleichzeitig hat eine von 0 verschiedene Zahl nur endlich viele Teiler, so dass nur endlich viele a und c überhaupt in Frage kommen und es somit nur endlich viele Tripel (a, b, c) geben kann.

Lemma 2 *Es gibt nur endlich viele Tripel (a, b, c) mit $c \geq 0$.*

Beweis: Unter Benutzung von (2) und (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & c \geq 0 \\ \Rightarrow & ac \leq 0 \\ \Rightarrow & b^2 - 5 = 4ac \leq 0 \\ \Rightarrow & |b| \leq \sqrt{5} \\ \Rightarrow & b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 1 gibt es zu jedem dieser fünf überhaupt noch in Frage kommenden b jeweils nur endlich viele Tripel (a, b, c) , folglich überhaupt nur endlich viele mit $c \geq 0$.

Lemma 3 *Für ein Tripel (a, b, c) mit $c < 0$ gilt*

$$0 < brs \tag{4}$$

$$brs \leq \frac{5r^2s^2 + 1}{2} \tag{5}$$

Beweis: Wegen $a, c < 0$ sowie $r^2, s^2 \geq 0$ und unter Zuhilfenahme von (1) zeigt sich:

$$\begin{aligned} & -a, -c, r^2, s^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & -ar^2, -cs^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & brs \geq 1 - ar^2 - cs^2 \geq 1 > 0 \end{aligned}$$

Damit ist (4) bereits gezeigt.

Angenommen, es wäre $brs > \frac{5r^2s^2 + 1}{2}$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} & 2brs > 5(rs)^2 + 1 \\ \Rightarrow & (brs)^2 - 5(rs)^2 > (brs)^2 - 2(brs) + 1 = (brs - 1)^2 \end{aligned}$$

Da, wie gerade gezeigt wurde, $-ar^2$ und $-cs^2$ nicht negativ sind, ergeben (2) und die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel (welche für $x, y \geq 0$ besagt: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$) nun

$$-ar^2 - cs^2 \geq 2\sqrt{(-a)(-c)r^2s^2} = \sqrt{(rs)^2 \cdot (4ac)} = \sqrt{(brs)^2 - 5(rs)^2}$$

Aus (1) erhält man aber zusammen mit $brs \geq 1$ (da brs nach (4) eine positive ganze Zahl ist) nun

$$\begin{aligned} brs &\geq 1 - ar^2 - cs^2 \geq 1 + \sqrt{(brs)^2 - 5(rs)^2} > \\ &> 1 + \sqrt{(brs - 1)^2} = 1 + |brs - 1| \geq brs \end{aligned}$$

oder kurz $brs > brs$, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Also war die Annahme falsch und es muss $brs \leq \frac{5r^2s^2+1}{2}$ sein.

Lemma 4 *Es gibt nur endlich viele Trupel (a, b, c) mit $c < 0$.*

Beweis: Ist $rs = 0$, so ist (4), welche ja dann zu $0 < 0 \cdot b = 0$ entartet, für kein b erfüllt. Insbesondere gibt es in diesem Fall gar kein Trupel mit $c < 0$.

Ist andernfalls $rs \neq 0$, so folgt aus (4) nun $brs = |brs|$. Setzt man dies in (5) ein, so ergibt sich:

$$|brs| \leq \frac{5r^2s^2 + 1}{2} \Leftrightarrow |b| \leq \frac{5r^2s^2 + 1}{2|rs|} = \text{const.}$$

Es gibt aber nur endlich viele ganze Zahlen mit beschränktem Betrag, also kommen nur endlich viele verschiedene Werte für b in Frage. Zu jedem dieser Werte für b gibt es aber nach Lemma 1 nur endlich viele Trupel (a, b, c) und somit schlussendlich überhaupt nur endlich viele Trupel mit $c < 0$.

Zusammenfassend gibt es also nur endlich viele Trupel mit $c \geq 0$ sowie mit $c < 0$, also überhaupt nur endlich viele Trupel.

q.e.tee.

Aufgabe 3

Im Folgenden wird angenommen, dass die in der Aufgabenstellung vorkommenden Dreiecke $\triangle ACD$ bzw. $\triangle AEF$ nicht entartet sind. Auch wird davon ausgegangen, dass die dort genannten Geraden durch B die Kreise in von B verschiedenen Punkten schneiden, also keine Tangenten sind. Ebenso wird davon ausgegangen, dass sich die beiden Kreise in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden, und somit schlussendlich A, B, C, D, E, F paarweise verschieden sind. Es ist aber auch in den genannten Grenzfällen nicht schwer, die in der Aufgabenstellung genannten Eigenschaften nachzuweisen.

Aber nun zum eigentlichen Beweis der Aufgabenstellung:

Lemma 1 *Die Punkte C und D liegen außerhalb des Kreises k_2 . Ebenso liegen E und F außerhalb von k_1*

Beweis. Es genügt nachzuweisen, dass C außerhalb von k_2 liegt, da sich dann alle anderen Aussagen analog (z.B. durch Vertauschen der Benennungen) ergeben. Angenommen, C läge innerhalb von k_2 . Dann muss C auf der Sehne $[BE]$ zwischen diesen Punkten liegen und somit B nicht zwischen C und E , was aber in der Aufgabenstellung verlangt wurde. ■

Die Punkte C und D liegen also auf dem selben Kreisbogen von k_1 über der Sehne $[AB]$, nämlich dem außerhalb von k_2 liegenden. Insbesondere sind die Punkte A, B, C, D entweder in der Reihenfolge $A - B - C - D$ oder $A - B - D - C$ auf k_1 angeordnet. Analog sind die Punkte A, B, E, F entweder in der Reihenfolge $B - A - E - F$ oder $B - A - F - E$ auf k_2 angeordnet. Da die Anordnungen $A - B - C - D$ und $A - B - D - C$ aber durch Vertauschen der Benennungen ($C \leftrightarrow D, E \leftrightarrow F$) ineinander übergeführt werden können, soll im Folgenden o.B.d.A. von der Anordnung $A - B - C - D$ auf k_1 ausgegangen werden. Aufgrund des Schnittes der Strecken $[CE]$ und $[DF]$ im Punkt B (welcher ja nach Aufgabenstellung auf diesen Strecken liegt) sind die Streckenzüge $C - B - D$ und $E - B - F$ gleich orientiert (siehe auch Skizze 1). Daraus folgt mit der gerade gemachten Annahme unmittelbar, dass die Punkte A, B, E, F auf k_2 in der Reihenfolge $B - A - E - F$ angeordnet sind und dabei die Streckenzüge $A - B - C - D$ und $B - A - E - F$ gleich orientiert sind.

Lemma 2 $\triangle ADC$ ist gleichsinnig ähnlich zu $\triangle AFE$.

Beweis. (siehe hierzu auch Skizze 2)

Der Peripheriewinkelsatz über den Sehnen $[AC]$ und $[EA]$ ergibt:

$$\begin{aligned}\angle ADC &= 180^\circ - \angle CBA \\ \angle ABE &= \angle AFE\end{aligned}$$

Nun sind aber $\angle ABC$ und $\angle ABE$ Nebenwinkel, so dass folgt:

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABE) = \angle ABE = \angle AFE$$

Analog ergibt sich auf die selbe Weise:

$$\angle DCA = \angle FEA$$

Aufgrund der Winkelsumme im Dreieck ist dann auch

$$\angle CAD = 180^\circ - \angle ADC - \angle DCA = 180^\circ - \angle AFE - \angle FEA = \angle EAF$$

Damit sind $\triangle ACD$ und $\triangle AEF$ aufgrund gleicher Winkel ähnlich und nach den bereits gezeigten Orientierungseigenschaften auch gleichsinnig ähnlich. ■

Lemma 3 $\triangle AMN$ ist zum Dreieck $\triangle ACD$ bzw. zum Dreieck $\triangle AEF$ (wie man leicht zeigt auch gleichsinnig) ähnlich.

Beweis. (siehe auch Skizze 3)

Unter Berücksichtigung der gegebenen Anordnung erhält man

$$\angle FAD = \angle FAC + \angle CAD = \angle FAC + \angle EAF = \angle EAC$$

Weiter ist aufgrund der gleichsinnigen Ähnlichkeit nun $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}}$ bzw. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ und somit $\triangle ACE$ gleichsinnig ähnlich zu $\triangle ADF$ (gleicher Winkel bei A , gleiches Seitenverhältnis der an A angrenzenden Seiten). Es gibt also eine (drehsinnerhaltende) Ähnlichkeitsabbildung, welche $\triangle ACE$ auf $\triangle ADF$ abbildet.

Da Ähnlichkeitsabbildungen strecken- und teilverhältnistreu sind, wird durch diese der Mittelpunkt M der Strecke $[CE]$ auf den Mittelpunkt N der Strecke $[DF]$ abgebildet. Dabei wird also das Dreieck $\triangle ACM$ auf das Dreieck $\triangle ADN$ abgebildet, so dass diese ähnlich sind. Insbesondere ist $\frac{AC}{AD} = \frac{AM}{AN}$ und $\angle MAC = \angle NAD$. Je nach gegenseitiger Lage (andere Lagen sind aufgrund der gegebenen Anordnung ausgeschlossen) von M, N, C, D gilt nun entweder

$$\angle CAD = \angle NAD - \angle NAC = \angle MAC - \angle NAC = \angle MAN$$

oder

$$\angle CAD = \angle NAD + \angle NAC = \angle MAC + \angle NAC = \angle MAN$$

(abhängig davon ob N innerhalb von $\triangle ADC$ liegt oder nicht)

Auf jeden Fall stimmen die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ANM$ in einem Winkel und dem Verhältnis der angrenzenden Seiten überein, sind also ähnlich. ■

Damit ist aber schon alles, was zu zeigen war, auch nachgewiesen.

q.e.ttee.

Aufgabe 4

Da in der Aufgabenstellung der Begriff des 'Schnittes' bzw. der 'Selbstüberschneidung' nicht genau eingeführt wurde, sei ein Schnitt definiert als zwei verschiedene Strecken mit einem gemeinsamen Punkt und eine Selbstüberschneidung definiert als zwei verschiedene und nicht benachbarte Strecken, welche einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Anmerkung: dies bedeutet, dass drei paarweise verschiedene und nicht benachbarte Strecken, welche sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden, drei Selbstüberschneidungen ergeben.

Wenn im Folgenden von Strecken die Rede ist, so ist damit immer eine Strecke des betrachteten Streckenzuges gemeint.

Eine Strecke (des Streckenzuges) heiße im weiteren 'primär', wenn sie mit allen Strecken je einen gemeinsamen Punkt besitzt (eine Strecke besitzt natürlich mit sich selbst und ihren Nachbarstrecken immer einen gemeinsamen Punkt).

a) Sei n ungerade und ein geschlossener Streckenzug der Länge n gegeben. Es ist insbesondere $n = 2m + 1$ mit einem $m \in \mathbb{N}$ (da $n \geq 3$ und ungerade).

Lemma 1 *Es ist $A(n) \leq \frac{n(n-3)}{2}$.*

Beweis. Jede Strecke ist an höchstens $n - 3$ Selbstüberschneidung des Streckenzuges beteiligt, da es nur $n - 3$ von ihr und ihren beiden Nachbarn verschiedene Strecken gibt. Addiert man diese Maximalzahl pro Strecke auf, so erhält man höchstens $n(n - 3)$. Dabei wurde aber jeder Schnitt zweimal gezählt, so dass es also höchstens $\frac{n(n-3)}{2}$ Selbstüberschneidungen geben kann. ■

Lemma 2 *Es gibt einen Streckenzug mit $\frac{n(n-3)}{2}$ Selbstüberschneidungen.*

Beweis. Man wähle n Punkte in gleichmäßigem Abstand auf einem Kreis (so dass diese also ein regelmäßiges n -eck bilden) und weise diesen Punkten (mit beliebigem 'Startpunkt') im Uhrzeigersinn von $\bar{0}$ bis $\overline{n-1}$ die Restklassen $\text{mod } n$ zu. Man verbinde nun jeweils den Punkt mit der Restklasse $a \text{ mod } n$ mit dem Punkt der zur Restklasse $(a+m) \text{ mod } n$ gehört (mit anderen Worten: man verbindet jeden Punkt mit dem um m weiter im Uhrzeigersinn liegenden Punkt). Angefangen von der Restklasse $\bar{0}$ 'erreicht' man also sukzessive die Restklassen $\bar{0}, \bar{m}, \bar{2m}, \bar{3m}, \dots$, also alle der Form \bar{am} . Nun ist $\text{ggT}(n, m) = \text{ggT}(2m+1, m) = \text{ggT}(1, m) = 1$ bzw. m teilerfremd zu n , so dass bekanntermaßen \bar{am} alle n Restklassen einmal durchläuft wenn a von 0 bis $n-1$ läuft. Es wird also jeder der n Punkte genau einmal erreicht. Man kommt aber wegen $mn \equiv 0 \text{ mod } n$ nach n Strecken wieder bei $\bar{0}$ an. Insofern ergibt dies einen geschlossenen Streckenzug von n Strecken. Nimmt man nun eine beliebige dieser Strecken, o.B.d.A. (man tausche sonst die Punkte zyklisch durch) die Strecke s von $\bar{0}$ nach \bar{m} . Die von den m Punkten aus $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ ausgehenden Strecken ($2m-2 = n-3$ an der Zahl) haben dann alle ihren anderen Endpunkt in $\{\overline{m+1}, \overline{m+2}, \dots, \overline{2m}\}$ (diese liegen ja um m Punkte weiter im oder gegen den Uhrzeigersinn), sind also paarweise verschieden und haben je einen Punkt mit s gemeinsam (da zwei Sehnen $[AB], [CD]$ einen gemeinsamen Punkt haben, falls C und D auf verschiedenen Seiten von AB liegen), sind aber nicht zu s benachbart (geschweige denn identisch mit s). Also ist s und damit jede beliebige der Strecken an mindestens $n-3$ Selbstüberschneidungen beteiligt. Aufsummiert ergeben sich dann (mindestens) $n(n-3)$, wobei abermals alle Überschneidungen doppelt gezählt wurden. Also hat dieser Streckenzug mindestens und nach Lemma 1 dann sogar genau $\frac{n(n-3)}{2}$ Selbstüberschneidungen. ■

Zusammenfassend ist also $A(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

q.e.tee.

b) Sei nun $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) gerade.

Sei nun ein beliebiger Streckenzug der Länge n gegeben.

Ist nun α ein Teilbereich der Ebene, so bezeichne $\hat{\alpha}$ die Anzahl der in α liegenden Eckpunkte des Streckenzuges. Auch wird im Weiteren oft mit α auch direkt die Menge dieser Eckpunkte bezeichnet.

Im Folgenden wird auch oft von durch Geraden erzeugten 'Hälften' und 'Teilen' der Ebene gesprochen. Diese sollen dann keinen Punkt der Strecke/Gerade selbst enthalten.

Lemma 3 *Zwei primäre Strecken können nicht benachbart sein.*

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei benachbarte primäre Strecken $[XY], [YZ]$. Diese unterteilen die Ebene in vier Teile, welche wie in Skizze 4 mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden sollen.

Sei der Streckenzug also $XYZQ_1Q_2\dots Q_{n-3}(X)$. Dann ist $n-3 > 0$ und es gibt also von X, Y, Z verschiedene Punkte des Streckenzuges. Dann liegt aber Q_1 in β , da sonst $[ZQ_1]$ nicht mit beiden Strecken einen gemeinsamen Punkt hätte. Nun hat man noch

Hilfssatz 1 *Es gilt für $1 \leq i \leq n - 4$:*

$$a) Q_i \in \beta \Rightarrow Q_{i+1} \in \delta$$

$$b) Q_i \in \delta \Rightarrow Q_{i+1} \in \beta$$

Denn eine von β ausgehende Strecke muss (um mit den primären Strecken gemeinsame Punkte zu haben), in δ oder Z enden, wobei letztes ja nicht möglich ist. Das ist aber schon Teil a) und b) zeigt man analog.

Nun liegt Q_i für $1 \leq i \leq n - 3$ genau dann in β , wenn i ungerade ist und ansonsten in δ . Denn dies gilt schon für $i = 1$. Gilt die Aussage aber für ein i mit $1 \leq i \leq n - 4$, so gilt sie nach dem Hilfssatz auch für $i + 1$ (i ändert ja bei Erhöhung um 1 seine Parität), so dass induktiv das Gewünschte folgt. Nun liegt, da $n - 3$ ungerade ist, also Q_{n-3} in β , aber dann hat $[Q_{n-3}X]$ mit $[YZ]$ keinen gemeinsamen Punkt, was aber sein müsste. Man erhält also einen Widerspruch, so dass es keine zwei benachbarten primären Strecken geben kann. ■

Lemma 4 *Seien $[UV]$ und $[XY]$ zwei verschiedene primäre, aber nach Lemma 3 nicht benachbarte, Strecken. Dann schneiden sich diese nach Definition. Bezeichnet man die durch die Geraden UV, XY gegebenen Teilbereiche wie in Skizze 5 mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so ist $\hat{\alpha} = 0 = \hat{\gamma}$ oder $\hat{\beta} = 0 = \hat{\delta}$ (es kann natürlich auch beides gelten).*

Beweis. O.B.d.A. sollen (nach Umbenennung) die Punkte U, V, X, Y in eben dieser Reihenfolge im Streckenzug vorkommen. Sei s die Zahl der Strecken zwischen V und X (wenn man also den Streckenzug von V nach X entlanggeht, ohne an U bzw. Y vorbeizukommen) und analog t die Zahl der Strecken zwischen Y und U . Dann ist natürlich $s + t + 2 = n$. Nun gilt:

1. (a) ist s gerade, so gibt es auf dem Streckenzug zwischen V und X keinen Punkt in β und δ .
 (b) ist s ungerade, so gibt es auf dem Streckenzug zwischen V und X keinen Eckpunkt in α und γ .
2. (a) ist t gerade, so gibt es auf dem Streckenzug zwischen Y und U keinen Punkt in β und δ .
 (b) ist t ungerade, so gibt es auf dem Streckenzug zwischen Y und U keinen Eckpunkt in α und γ .

Falls $s = 1$ bzw. $t = 1$ ist die gewünschte Aussage banal, so dass ab sofort $s, t > 1$ gelten soll.

Sei nun $VQ_1Q_2\dots Q_{s-1}X$ der Streckenzugteil von V nach X , der nicht U und Y enthält.

Hilfssatz 2 *Es gilt für $1 \leq i \leq s - 2$:*

$$a) Q_i \in \alpha \Rightarrow Q_{i+1} \in \gamma$$

$$b) Q_i \in \beta \Rightarrow Q_{i+1} \in \delta$$

$$c) Q_i \in \gamma \Rightarrow Q_{i+1} \in \alpha$$

d) $Q_i \in \delta \Rightarrow Q_{i+1} \in \beta$

Ist nämlich $Q_i \in \alpha$, so liegt Q_{i+1} in γ , da $[Q_i Q_{i+1}]$ beide primären Geraden schneiden muss (und nicht in Y oder U endet). Analog ergeben sich auch die anderen Aussagen.

Es kann Q_1 nur in β oder γ liegen, da $[VQ_1]$ mit beiden primären Strecken einen gemeinsamen Punkt haben muss. Analog kann Q_{s-1} nur in γ oder δ liegen.

1. Fall $Q_1 \in \beta$:

Dann liegt Q_i für $1 \leq i \leq s-1$ genau dann in β , wenn i ungerade ist und ansonsten in δ . Denn dies gilt schon für $i=1$. Gilt die Aussage aber für ein i mit $1 \leq i \leq s-2$, so gilt sie nach dem Hilfssatz auch für $i+1$ (i ändert bei Erhöhung um 1 ja die Parität), so dass induktiv das Gewünschte folgt. Nun kann Q_{s-1} aber nicht in β liegen und es muss also $s-1$ geradzahlig sein.

2. Fall $Q_1 \in \gamma$:

Analog wie im 1. Fall liegt Q_i für $1 \leq i \leq s-1$ genau dann in γ , wenn i ungerade ist und ansonsten in α . Nun kann Q_{s-1} aber nicht in α liegen und es muss also $s-1$ ungeradzahlig sein.

Ist also s gerade (und somit $s-1$ ungerade), so muss zwangsläufig der Fall 2 eintreten, es liegen also alle Punkte in α und γ , was aber sofort Teilaussage a) ergibt. Analog folgt für ungerades s Teilaussage b).

Auch analog ergeben sich die Aussagen bezüglich t .

Nun ist $n = s + t + 2$ gerade, somit auch $s + t$. Also besitzen s und t die selbe Parität. Sind also beide gerade, so gibt es nach dem bereits gezeigten keinen Eckpunkt in β und δ , sind beide ungerade gibt es keinen in α und γ . Dies ist aber schon die zu beweisende Aussage. ■

Lemma 5 *Es kann keine drei primären Strecken geben.*

Beweis. Für $n=4$ findet man unter 3 Strecken immer zwei benachbarte, so dass es nach Lemma 3 gar nicht mehr als zwei primäre Strecken geben kann. Sei also im Folgenden $n \geq 6$. Angenommen, man hätte drei primäre Strecken $[UV]$, $[WX]$, $[YZ]$, welche nach Lemma 3 nicht benachbart sind und sich somit gegenseitig echt schneiden. O.B.d.A. hat man (nach Vertauschen der Benennungen) die in Skizze 6 gezeigte Anordnung und es sollen die verschiedenen Bereiche der Ebene wie dort gezeigt benannt sein (der Bereich ζ kann bis zu seinem Verschwinden entarten, wenn sich die drei Geraden in einem Punkt schneiden, was nicht weiter stören soll; da die nachfolgenden Schlüsse auch für diesen Fall gelten und dort sowieso $\hat{\zeta} = 0$ geschlussfolgert wird, soll dies nicht weiter stören). Betrachtet man die durch UV und WX gegebene Teilung der Ebene (in α , $\beta \cup \gamma \cup \{Y\}$, $\delta \cup \zeta$ und $\epsilon \cup \varphi \cup \{Z\}$), so liegen in zwei der dadurch gebildeten Teilbereiche sicher die Eckpunkte Y bzw. Z . Da nach Lemma 4 aber zwei (gegenüberliegende) dieser Bereiche keinen Eckpunkt enthalten, muss dies für die beiden restlichen gelten. Dies führt unmittelbar zu $\hat{\alpha} = 0$ und $\hat{\delta} + \hat{\zeta} = 0$, wobei aus Letzterem wegen $\hat{\delta}, \hat{\zeta} \geq 0$ auch $\hat{\delta} = \hat{\zeta} = 0$ folgt. Analog ergibt sich nun reihum $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = \hat{\epsilon} = \hat{\varphi} = \hat{\zeta} = 0$. Es gibt also gar keine von U, V, W, X, Y, Z verschiedenen Eckpunkte, insbesondere kann wenn überhaupt nur $n=6$ sein. In

diesem letzten verbleibenden Fall macht man sich durch Durchgehen aller (sinnvollen) direkten Verbindungen dieser sechs Punkte auch sofort klar, dass niemals alle drei gegebenen Geraden primär sein können. ■

Lemma 6 *Ein Streckenzug mit n Strecken hat höchstens $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ Selbstüberschneidungen.*

Beweis. Höchstens 2 der Strecken sind primär und sind deshalb an $n - 3$ Selbstüberschneidungen beteiligt. Alle anderen $n - 2$ Strecken sind aber jeweils nur an höchstens $n - 4$ Selbstüberschneidungen beteiligt. Also erhält man durch Aufsummieren nun maximal $2(n - 3) + (n - 2)(n - 4) = 2 + n(n - 4)$, wobei aber jeder Schnitt zweimal gezählt wurde. Somit gibt es höchstens $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ Selbstüberschneidungen. ■

Lemma 7 *Es gibt einen Streckenzug mit $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ Selbstüberschneidungen.*

Beweis. Man erhält einen solchen Streckenzug folgendermaßen: Man wähle n Punkte gleichen Abstandes auf einem Kreis (so dass diese also Eckpunkte eines regelmäßigen n -eck sind) und nummeriere diese im Uhrzeigersinn mit $1_a, 2_a, 3_a, \dots, m_a, 1_b, 2_b, 3_b, \dots, m_b$ durch. Anschließend verbinde man 1_a mit 1_b sowie m_a mit m_b und weiter für beliebiges $k \in \{1; 2; 3; \dots; m - 1\}$ noch k_a mit $(k + 1)_b$ sowie k_b mit $(k + 1)_a$ (bzw. was gleichbedeutend ist: k_a mit $(k - 1)_b$ sowie k_b mit $(k - 1)_a$ für $2 \leq k \leq m$). Man erhält so einen geschlossenen Streckenzug der Länge n (man erreicht ja von 1_a aus erst 2_b , dann 3_a usw. bis man schließlich nach $m - 1$ Schritten bei einem der beiden m , also m_a oder m_b , ankommt; das andere m erreicht man aber gleichwegs von 1_b aus, so dass insgesamt ein geschlossener Streckenzug mit $2(m - 1) + 2 = n$ Strecken vorliegt).

Sei nun s für beliebiges k mit $1 \leq k \leq m$ eine Strecke der Form $s = [k_a(k + 1)_b]$ (für Strecken der Form $[k_b(k + 1)_a]$ verläuft die Argumentation analog). Dann haben die $2(m - 2) = n - 4$ Strecken mit einem Endpunkt in $\{(k + 2)_b, (k + 3)_b, \dots, m_b, 1_a, 2_a, \dots, (k - 1)_a\}$ ihren anderen Endpunkt jeweils in $\{(k + 1)_a, (k + 2)_a, \dots, m_a, 1_b, 2_b, \dots, k_b\}$. Letztere Punkte liegen aber auf der anderen Seite der Sehne s , die Strecken schneiden diese somit und sind auch paarweise verschieden, sind aber nicht zu s benachbart. Also sind s und andere Strecken dieser Form an je mindestens $n - 4$ Selbstüberschneidungen beteiligt. Die verbleibenden Strecken $[1_a 1_b]$ und $[m_a m_b]$ sind nach Wahl der Punkte nun Durchmesser und schneiden sich. Nun trennt jede dieser beiden Strecken die Punkte mit Index a von denjenigen mit Index b , so dass sie mit allen vorkommenden Strecken je gemeinsame Punkte haben. Somit sind sie primär und an je $n - 3$ Selbstüberschneidungen beteiligt.

Auch hier wurden wieder alle Schnitte doppelt gezählt. Insgesamt hat dieser Streckenzug also mindestens $\frac{2(n-3)+(n-2)(n-4)}{2} = \frac{n(n-4)}{2} + 1$ Selbstüberschneidungen und nach Lemma 5 also genau so viele. ■

Zusammenfassend ist also $A(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1$.

q.e.tee.

Skizzen zu Aufgabe 3

Skizze 1

Skizze 2

Skizze 3

Skizzen zu Aufgabe 4

Skizze 4

Skizze 5

Skizze 6