Zum Satz von Brianchon ∼ Darij Grinberg

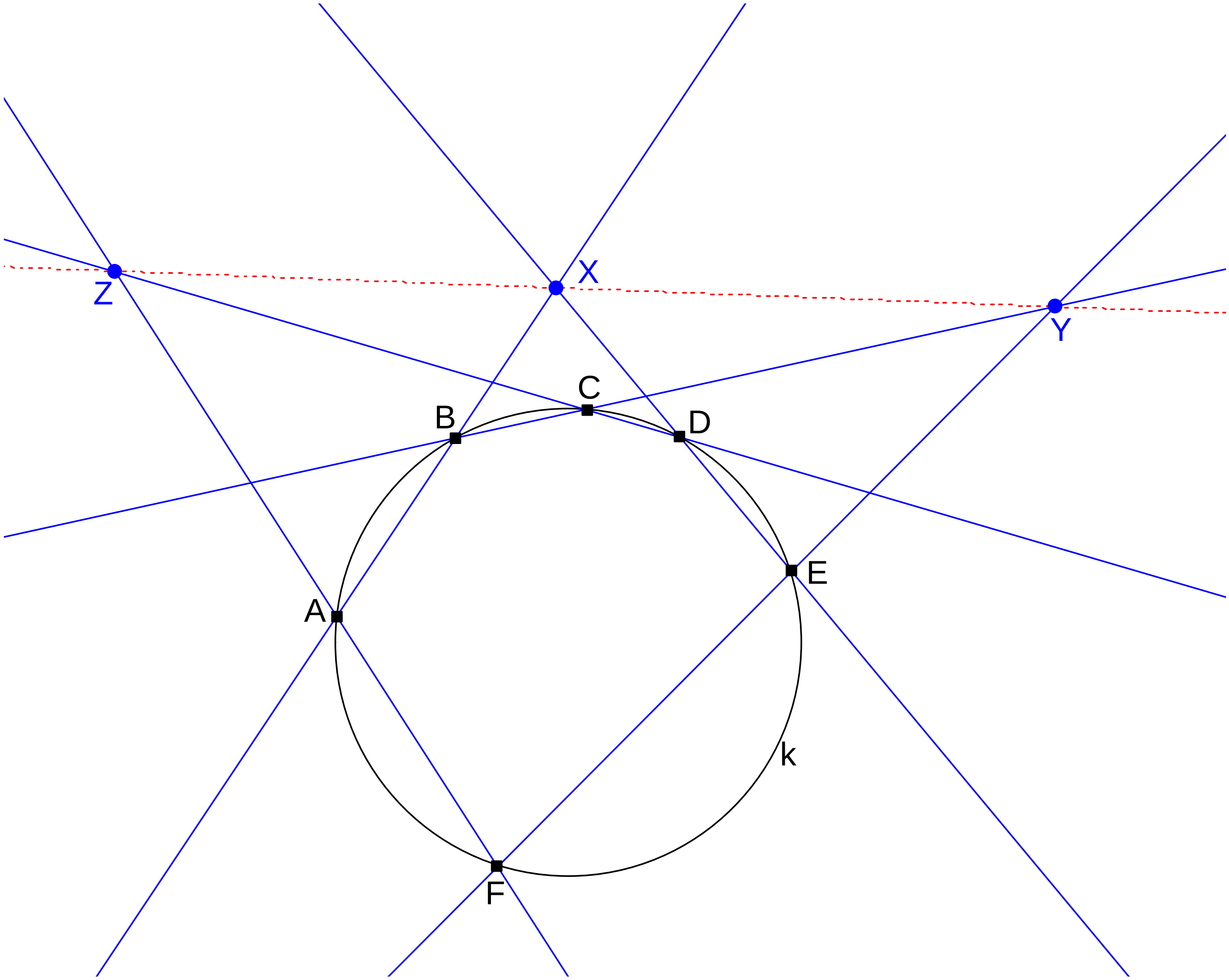

Fig. 1

Im folgenden werden wir den Schnittpunkt zweier Geraden g und h kurz mit $g \cap h$ bezeichnen.

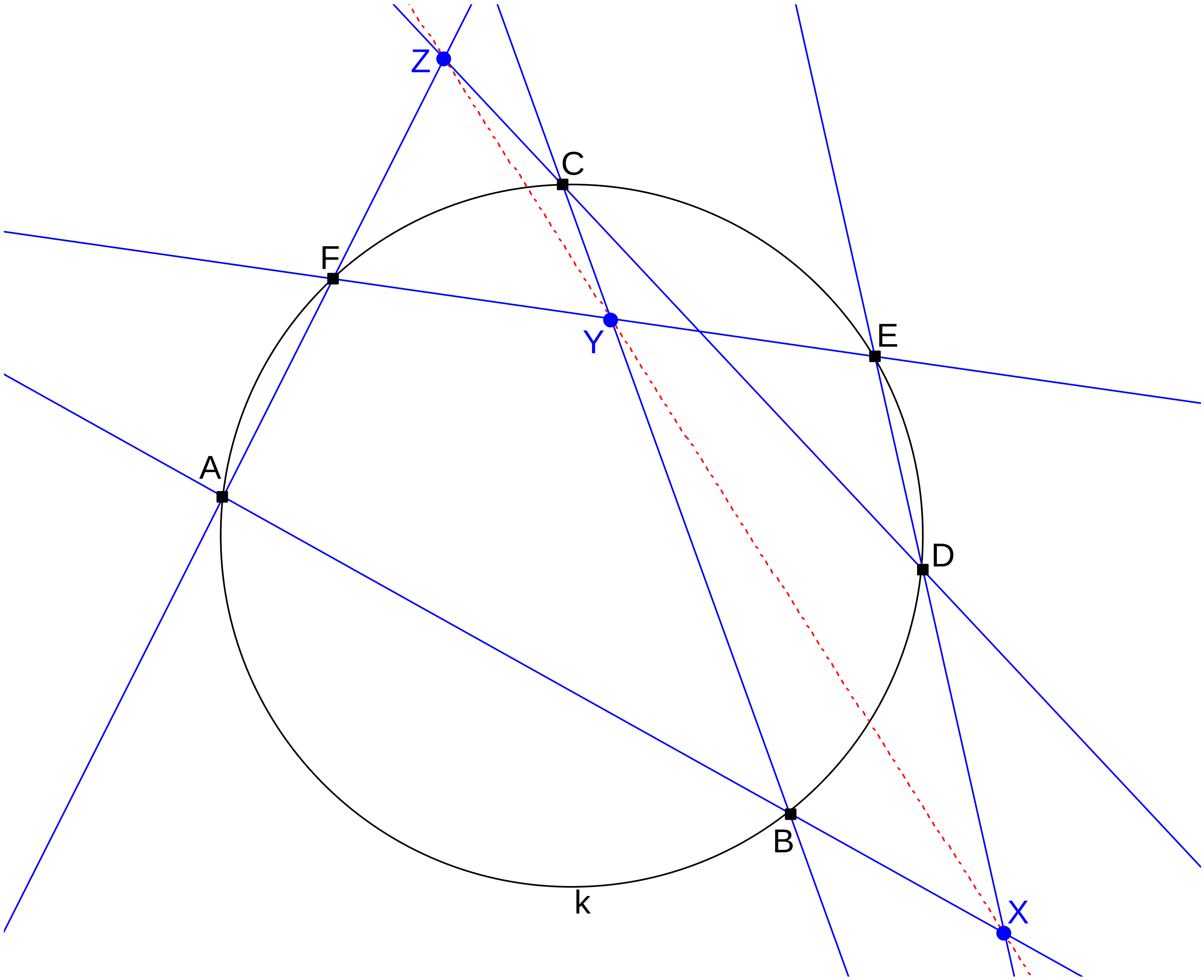

Fig. 2

Der berühmte **Satz von Pascal** lautet:

Satz 1, der Satz von Pascal: Seien A, B, C, D, E und F sechs Punkte auf einem Kreis k. Seien ferner $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ und $Z = CD \cap FA$. Dann liegen die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden.

Auf Fig. 1 und Fig. 2 sind zwei mögliche Anordnungen der Punkte A, B, C, D, E und F dargestellt. Die Punkte können natürlich auch anders angeordnet sein. Satz 1 gilt unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Punkte A, B, C, D, E und F auf der Kreisperipherie liegen; es können sogar zwei oder mehrere von den Punkten A, B, C, D, E und F zusammenfallen, wobei aber zu beachten ist, daß wenn zwei "benachbarte Punkte" zusammenfallen, also beispielsweise die Punkte A und B, dann die Gerade AB nicht einfach als eine beliebige Gerade durch den Punkt $A = B$ zu verstehen ist, sondern als die *Tangente* an den Kreis k in dem Punkt $A = B$. Diesen Fall zeigt Fig. 3.

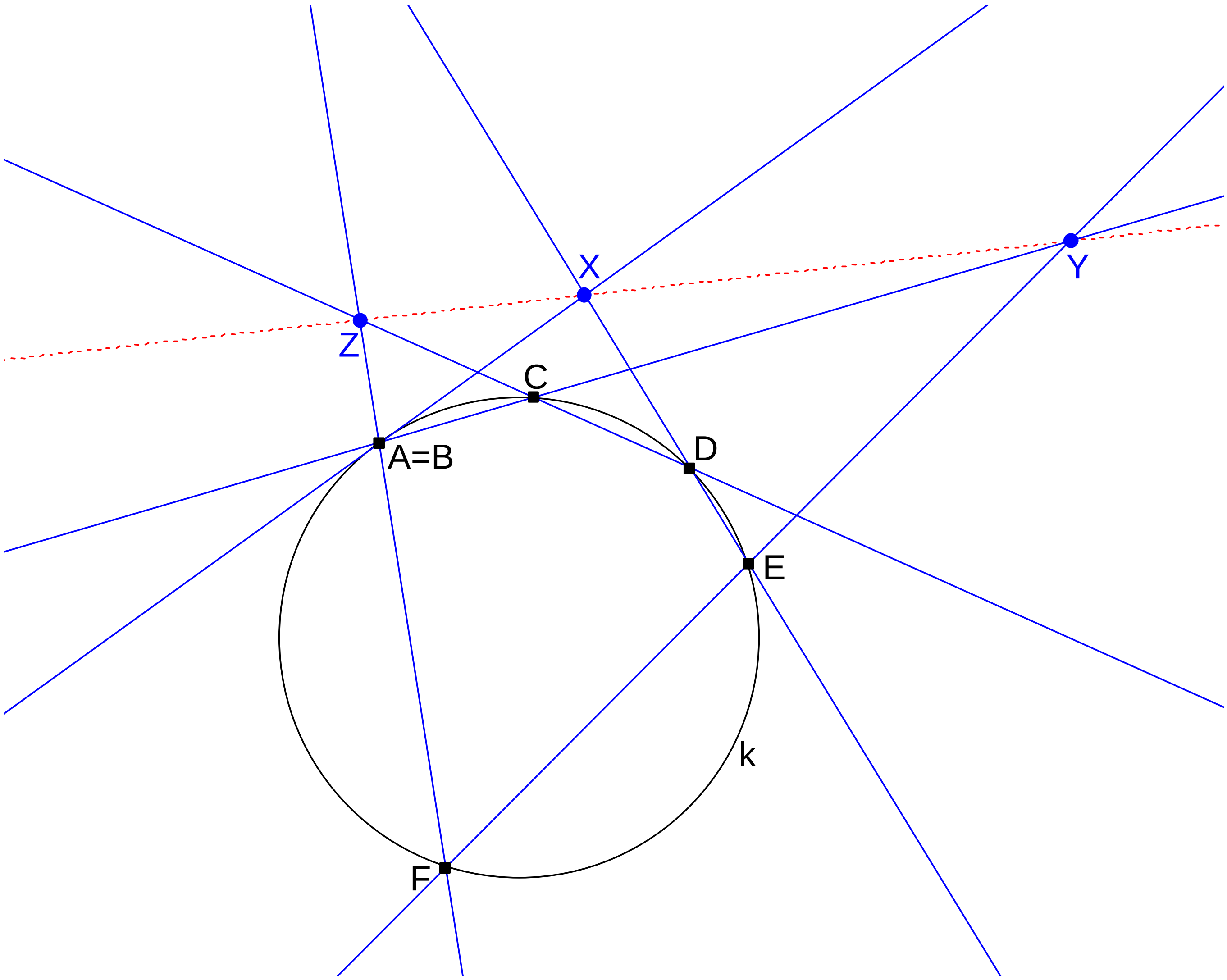

Fig. 3

Man findet Satz 1 mit Beweis in [1], Kapitel 3, §8, Satz 3.81; [2], Aufgabe 129; [3], Aufgabe 149; [4], problem 6.92; [5], chapter XV.1; [6], Aufgabe 34.

Der **Satz von Brianchon** in der Form, in der er am besten bekannt ist, lautet:

Satz 2, der Satz von Brianchon in der speziellen Form: Sei $A'B'C'D'E'F'$ ein Sechseck, das einen Inkreis hat. Das heißt, es gibt einen Kreis k, der die Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ und $F'A'$ (die Seiten in ihrem Inneren, nicht ihre Verlängerungen) berührt. Dann schneiden sich die Geraden $A'D'$, $B'E'$ und $C'F'$ in einem Punkt. (Siehe Fig. 4.)

In dieser Form ist der Satz von Brianchon in [1], Kapitel 3, §9, Satz 3.91; [2], Aufgabe 130; [3], Aufgabe 150 anzufinden.

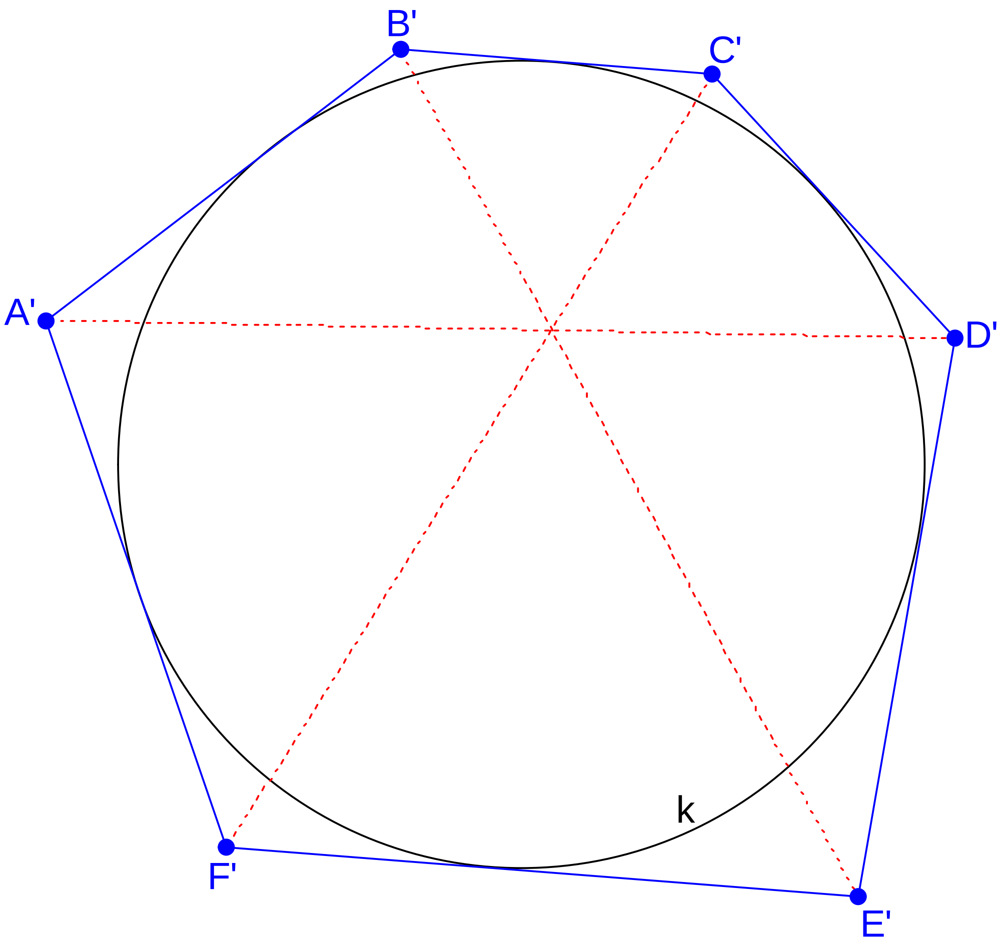

Fig. 4

Diesem Satz stellen wir den folgenden Satz gegenüber:

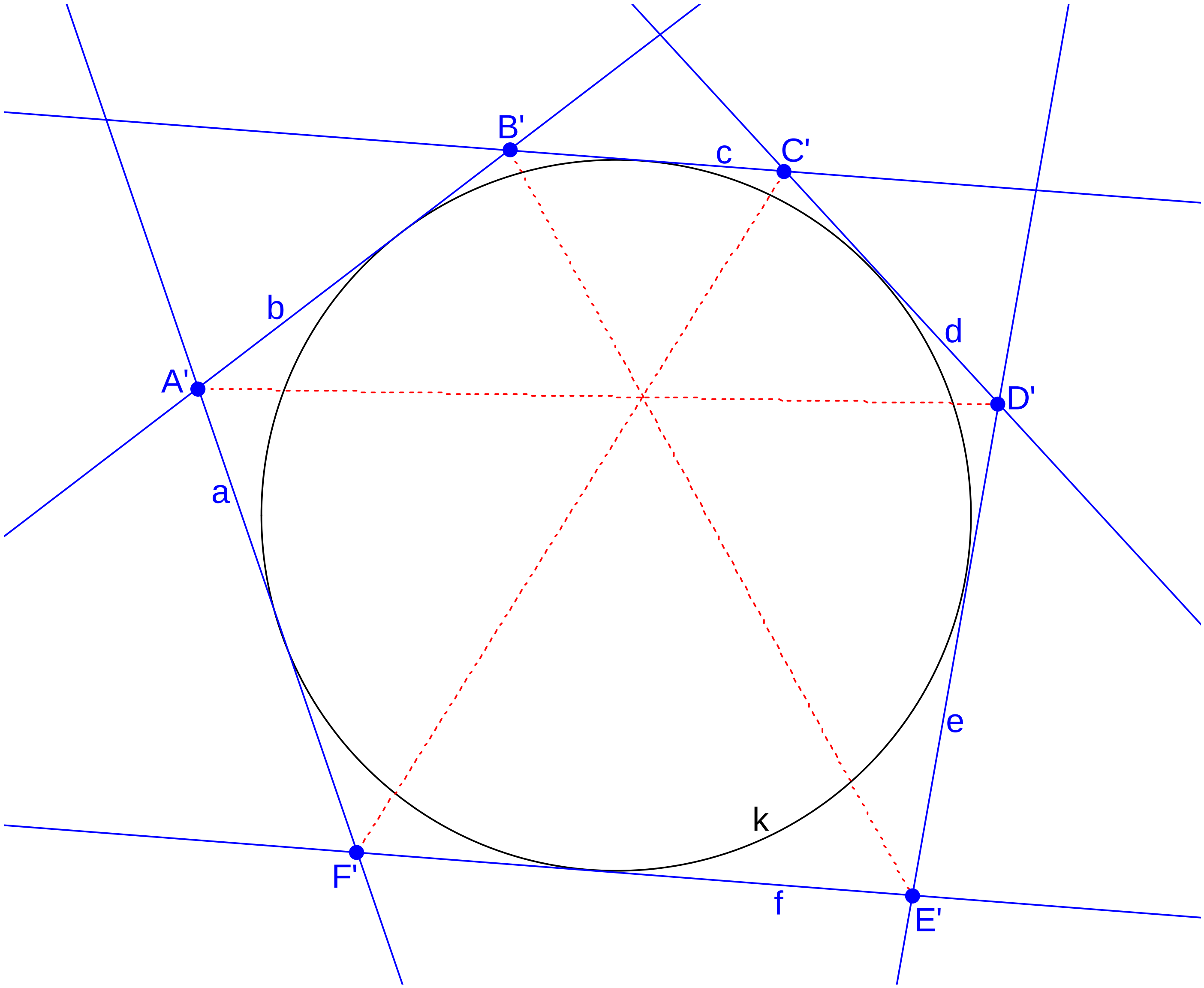

Fig. 5

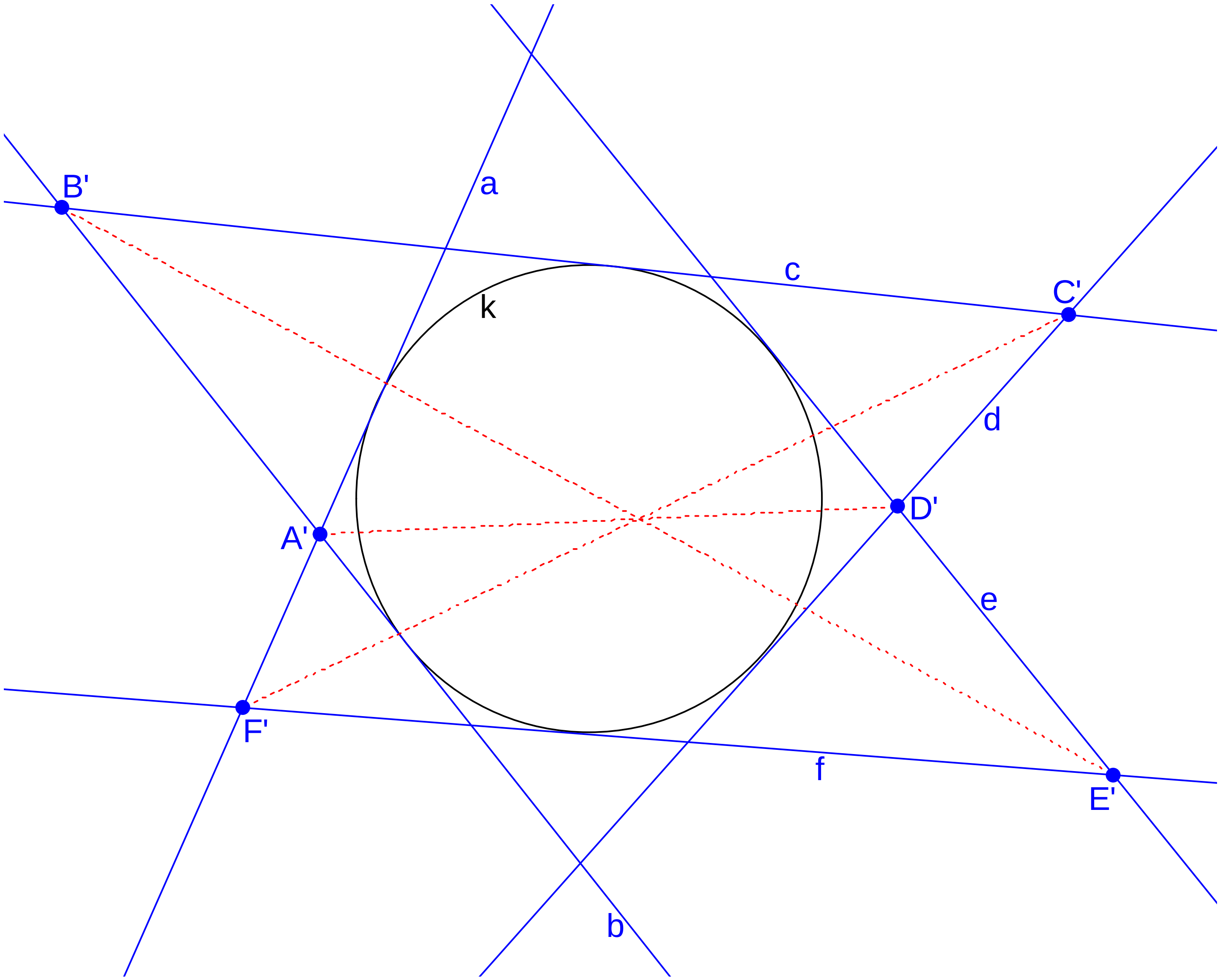

Fig. 6

Satz 3, der Satz von Brianchon in der allgemeinen Form: Seien a, b, c, d, e und f sechs Tangenten an einen Kreis k. Sei ferner $A' = a \cap b$, $B' = b \cap c$, $C' = c \cap d$, $D' = d \cap e$, $E' = e \cap f$ und $F' = f \cap a$. Dann schneiden sich die Geraden $A'D'$, $B'E'$ und $C'F'$ in einem Punkt.

Dabei können die Punkte, in denen die Tangenten a, b, c, d, e und f den Kreis k berühren, auf der Kreisperipherie beliebig angeordnet sein. Fig. 5 und Fig. 6 zeigen zwei mögliche Anordungsfälle. Es können sogar einige der Tangenten a, b, c, d, e und f zusammenfallen; dann ist aber zu beachten, daß wenn zwei "benachbarte" Tangenten zusammenfallen, also beispielsweise die Tangenten a und b, dann der Schnittpunkt $A' = a \cap b$ nicht als ein willkürlicher Punkt auf der Geraden $a = b$ zu verstehen ist, sondern als der Punkt, in dem die Tangente $a = b$ den Kreis k berührt. Die Zeichnung Fig. 7 illustriert diesen Fall.

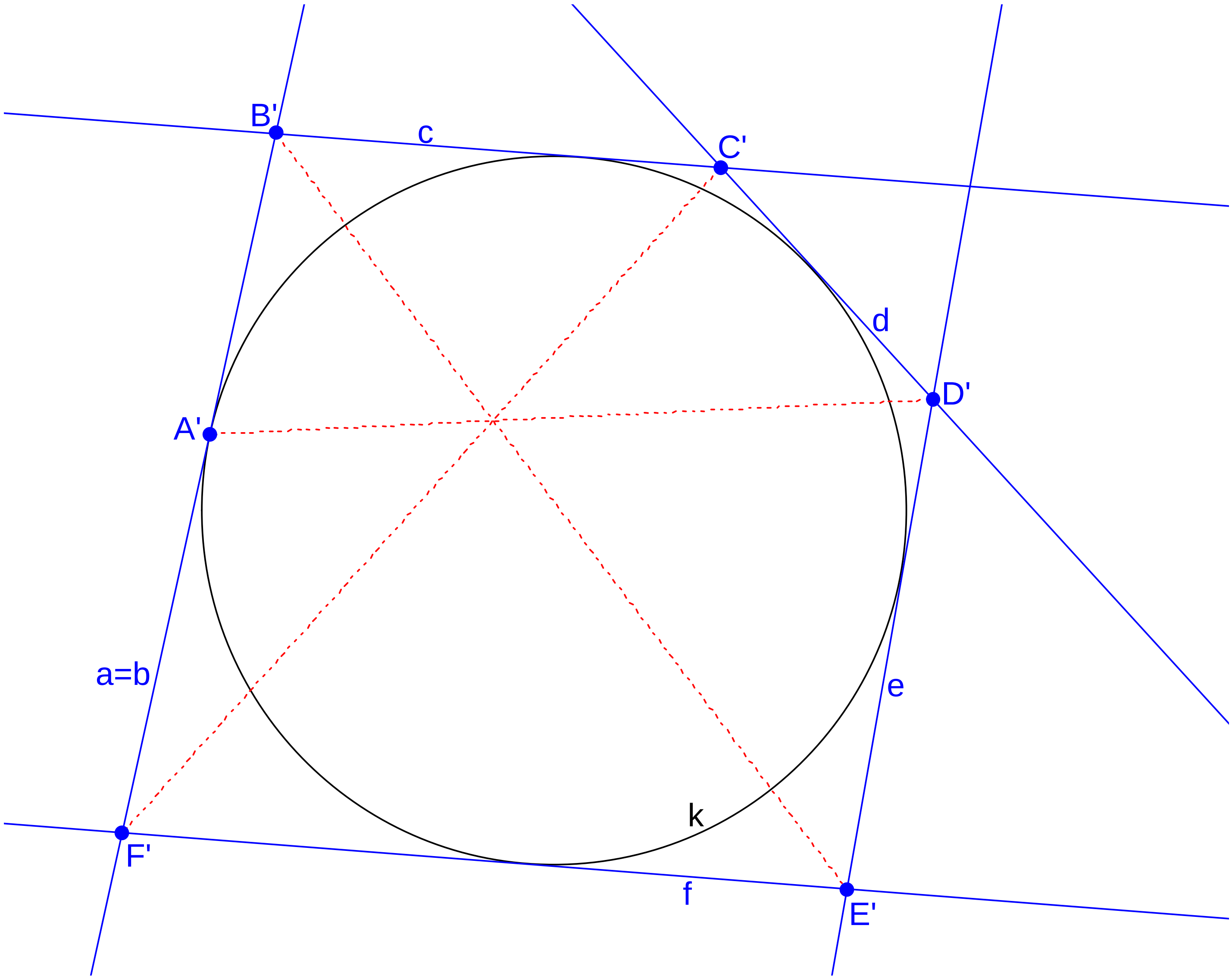

Fig. 7

Der Satz 2 ist ein Spezialfall des Satzes 3 (denn in der Konfiguration von Satz 2 muß man nur die Geraden $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ und $F'A'$, die ja den Kreis k berühren, als Tangenten a, b, c, d, e bzw. f nehmen, und schon ist klar, daß die Behauptung von Satz 2 aus Satz 3 folgt). Andererseits gibt es aber auch Fälle, auf die Satz 3 anwendbar ist, Satz 2 aber nicht: In der Konfiguration von Fig. 6 beispielsweise folgt aus Satz 3, daß die Geraden $A'D'$, $B'E'$ und $C'F'$ sich in einem Punkt schneiden, während man den Satz 2 auf diese Konfiguration überhaupt nicht anwenden kann, weil der Kreis k nicht die Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ und $F'A'$ berührt, sondern nur ihre Verlängerungen (bis auf die Seiten $B'C'$ und $E'F'$, die der Kreis k im Inneren berührt). Damit sehen wir, daß Satz 3 eine Verallgemeinerung von Satz 2 ist. Deshalb bezeichnet man Satz 3 auch als **Satz von Brianchon in der allgemeinen Form**. Wir werden zeigen, daß der Satz von Brianchon in dieser allgemeinen Form (Satz 3) oftmals besser geeignet für geometrische Anwendungen ist, als der Satz von Brianchon in der speziellen Form (Satz 2).

Es ist wichtig anzumerken, daß Satz 3 ein projektiver Satz ist. Es kann also vorkommen, daß einer oder mehrere von den Punkten A', B', C', D', E' und F' uneigentliche

Punkte sind, weil einige von den Geraden a, b, c, d, e und f zueinander parallel sind. Auch in solchen Fällen bleibt Satz 3 gültig.

Nun geben wir einen *Beweis von Satz 3:*

[Der besseren Verständlichkeit dieses Beweises dient eine Zeichnung, Fig. 8. Auf dieser Zeichnung ist natürlich nur einer der möglichen Anordnungsfälle dargestellt, und zur besseren Übersichtlichkeit sind nicht die ganzen Geraden a, b, c, d, e und f eingezeichnet, sondern nur die Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ und $F'A'$; dies soll aber nicht den Eindruck erwecken, der Beweis sei nur für den Fall gültig, wenn der Kreis k die Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ und $F'A'$ in ihrem Inneren berührt. Der Beweis ist vielmehr für *alle* Fälle gültig und unabhängig von der Zeichnung.]

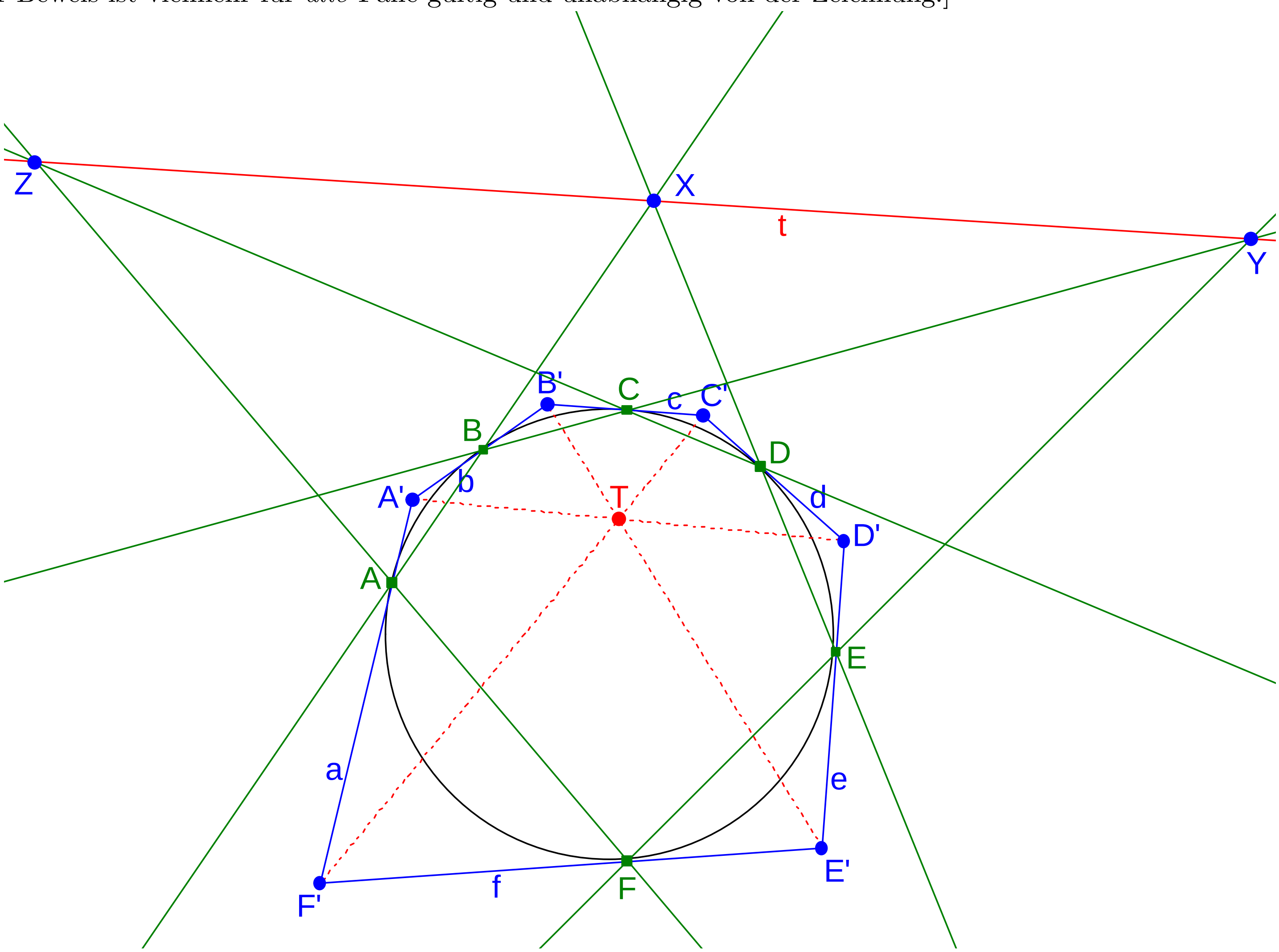

Fig. 8

Die Tangenten a, b, c, d, e und f berühren den Kreis k in den Punkten A, B, C, D, E bzw. F. Ferner definieren wir die Punkte $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ und $Z = CD \cap FA$. Da die Punkte A, B, C, D, E und F alle auf dem Kreis k liegen, folgt aus Satz 1, daß die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden liegen. Sei t diese Gerade, und sei T der Pol dieser Geraden t in bezug auf den Kreis k.

Da die Punkte A und B auf dem Kreis k liegen, ist der Pol der Geraden AB in bezug auf den Kreis k der Schnittpunkt der in den Punkten A und B gelegten Tangenten an den Kreis k. Doch diese in den Punkten A und B gelegten Tangenten an den Kreis k

sind die Geraden a und b; folglich ist der Pol der Geraden AB in bezug auf den Kreis k der Schnittpunkt der Geraden a und b, also der Punkt A'. [1]

Wir haben also gezeigt, daß der Punkt A' der Pol der Geraden AB in bezug auf den Kreis k ist. Analog ist der Punkt D' der Pol der Geraden DE in bezug auf den Kreis k. Somit ist die Gerade $A'D'$, also die Verbindungsgerade der Punkte A' und D', die Polare des Schnittpunktes der Geraden AB und DE in bezug auf den Kreis k. Doch der Schnittpunkt der Geraden AB und DE ist der Punkt X; folglich ist die Gerade $A'D'$ die Polare des Punktes X in bezug auf den Kreis k. Da jedoch der Punkt X auf der Geraden t liegt, geht die Polare des Punktes X in bezug auf den Kreis k durch den Pol der Geraden t in bezug auf den Kreis k. Mit anderen Worten: Die Gerade $A'D'$ geht durch den Punkt T. Analog gehen die Geraden $B'E'$ und $C'F'$ durch den Punkt T. Somit ist gezeigt, daß die Geraden $A'D'$, $B'E'$ und $C'F'$ sich in einem Punkt schneiden (nämlich im Punkt T); also ist Satz 3 bewiesen.

[1] Diese Überlegung versagt natürlich, wenn die Punkte A und B zusammenfallen. Doch wenn die Punkte A und B zusammenfallen, ist sowieso klar, warum der Punkt A' der Pol der Geraden AB in bezug auf den Kreis k ist: Denn der Punkt A' ist dann (laut Definition!) als Punkt $A = B$ zu verstehen, und die Gerade AB ist (ebenfalls laut Definition) als Tangente an den Kreis k in dem Punkt $A = B$ zu verstehen, und es bleibt nur noch zu bemerken, daß jeder Punkt auf dem Kreis k der Pol der in diesem Punkt gelegten Tangente an den Kreis k in bezug auf den Kreis k ist.

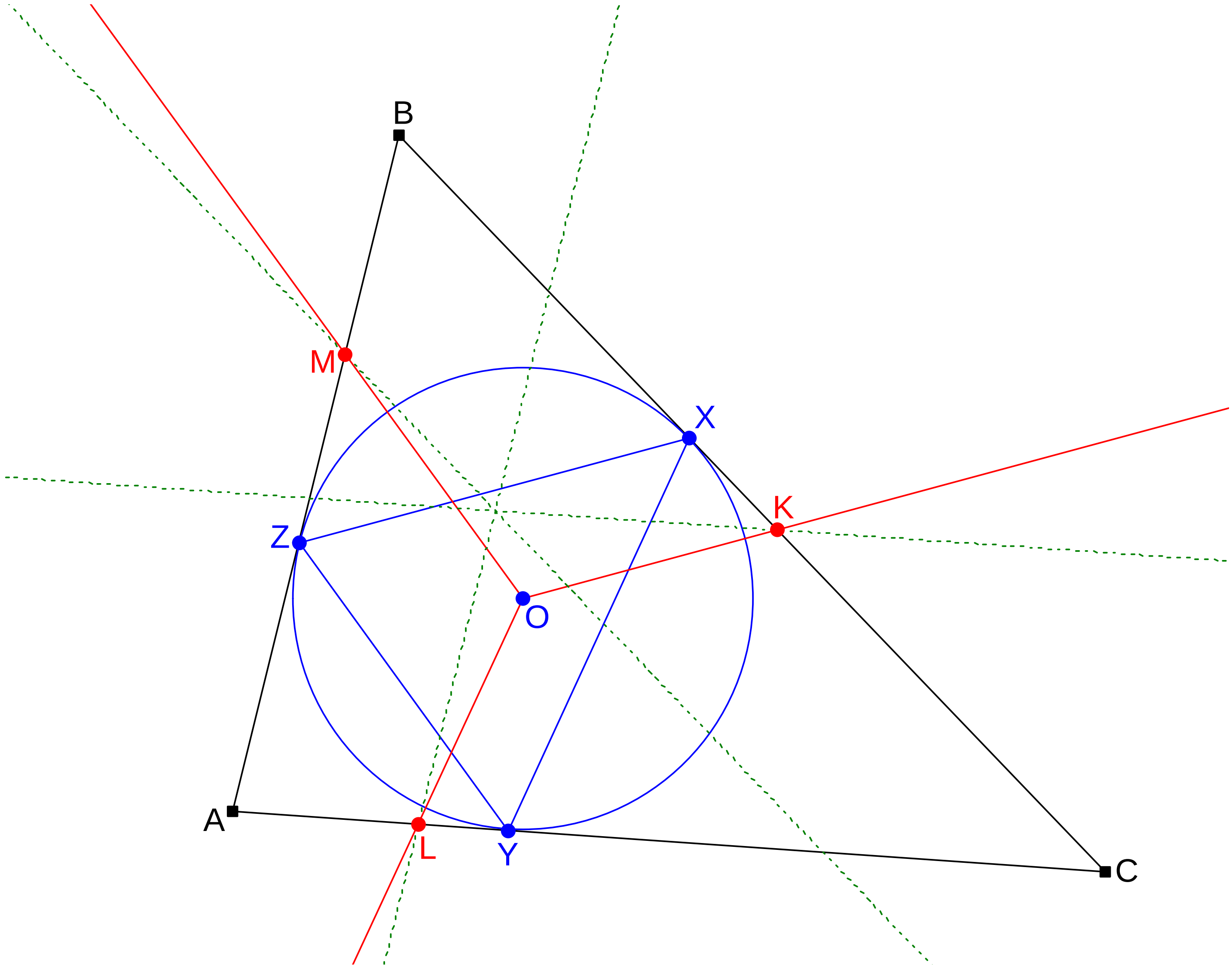

Fig. 9

Als Anwendung von Satz 3 werden wir folgenden Satz aus der Dreiecksgeometrie beweisen (Fig. 9):

Satz 4: Der Inkreis eines Dreiecks ABC habe den Mittelpunkt O und berühre die Dreiecksseiten BC, CA und AB in den Punkten X, Y bzw. Z. Die Parallelen zu den Geraden ZX, XY und YZ durch den Punkt O schneiden die Geraden BC, CA bzw. AB in den Punkten K, L bzw. M. Dann schneiden sich die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M in einem Punkt.

Beweis: Seien A_∞, B_∞ und C_∞ die Punkte, in denen die Geraden BC, CA bzw. AB die Ferngerade schneiden.

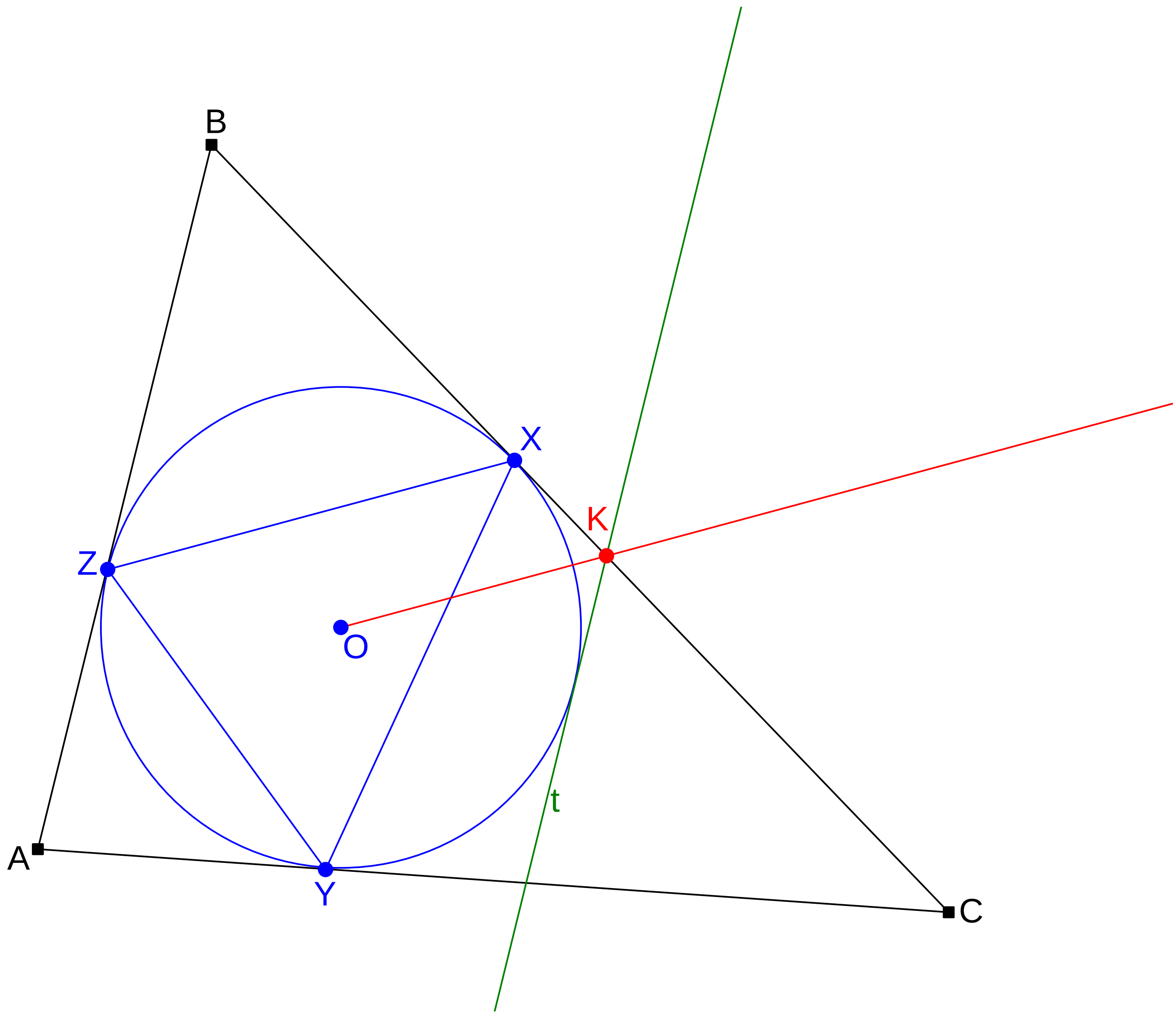

Fig. 10

(Siehe Fig. 10.) Wir bezeichnen mit t das Spiegelbild der Geraden BC an der Geraden OK. Bei der Spiegelung an der Geraden OK geht der Inkreis des Dreiecks ABC in sich selbst über (denn der Mittelpunkt O dieses Inkreises liegt auf der Spiegelachse OK); da die Gerade BC diesen Inkreis berührt, muß also auch ihr Spiegelbild an der Geraden OK diesen Inkreis berühren. Wir haben also gezeigt, daß die Gerade t den Inkreis des Dreiecks ABC berührt.

Da die Geraden BC und OK beide durch den Punkt K gehen, geht offensichtlich auch die Gerade t, die ja das Spiegelbild der Geraden BC an der Geraden OK ist, durch den Punkt K.

Wir benutzen im folgenden orientierte Winkel modulo 180°. Da die Gerade t das Spiegelbild der Geraden BC an der Geraden OK ist, gilt $\measuredangle(OK;\ t) = -\measuredangle(OK;\ BC)$. Wegen $OK \parallel ZX$ ist aber $\measuredangle(OK;\ t) = \measuredangle(ZX;\ t)$ und $\measuredangle(OK;\ BC) = \measuredangle(ZX;\ BC)$; also ist $\measuredangle(ZX;\ t) = -\measuredangle(ZX;\ BC)$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\measuredangle(AB;\ t) &= \measuredangle(AB;\ ZX) + \measuredangle(ZX;\ t) = \measuredangle(AB;\ ZX) + (-\measuredangle(ZX;\ BC)) \\ &= \measuredangle(AB;\ ZX) + \measuredangle(BC;\ ZX).\end{aligned}$$

Doch der Winkel $\measuredangle(AB;\ ZX)$ ist als Sehnentangentenwinkel der Sehne ZX im Inkreis des Dreiecks ABC gleich dem Umfangswinkel $\measuredangle ZYX$ dieser Sehne. Analog ist $\measuredangle(BC;\ ZX) = \measuredangle XYZ$. Damit wird

$$\measuredangle(AB;\ t) = \measuredangle(AB;\ ZX) + \measuredangle(BC;\ ZX) = \measuredangle ZYX + \measuredangle XYZ = 0°.$$

Folglich ist die Gerade t parallel zu der Geraden AB. Das heißt, die Geraden t und AB schneiden sich auf der Ferngeraden. Mit anderen Worten: Die Gerade t geht durch den Schnittpunkt der Geraden AB mit der Ferngeraden, also durch den Punkt C_∞. Somit können wir die Gerade t als die Gerade KC_∞ ansehen. Da die Gerade t den Inkreis des Dreiecks ABC berührt, können wir hiermit behaupten: Die Gerade KC_∞ berührt den Inkreis des Dreiecks ABC. Analog berühren die Geraden LA_∞ und MB_∞ den Inkreis des Dreiecks ABC.

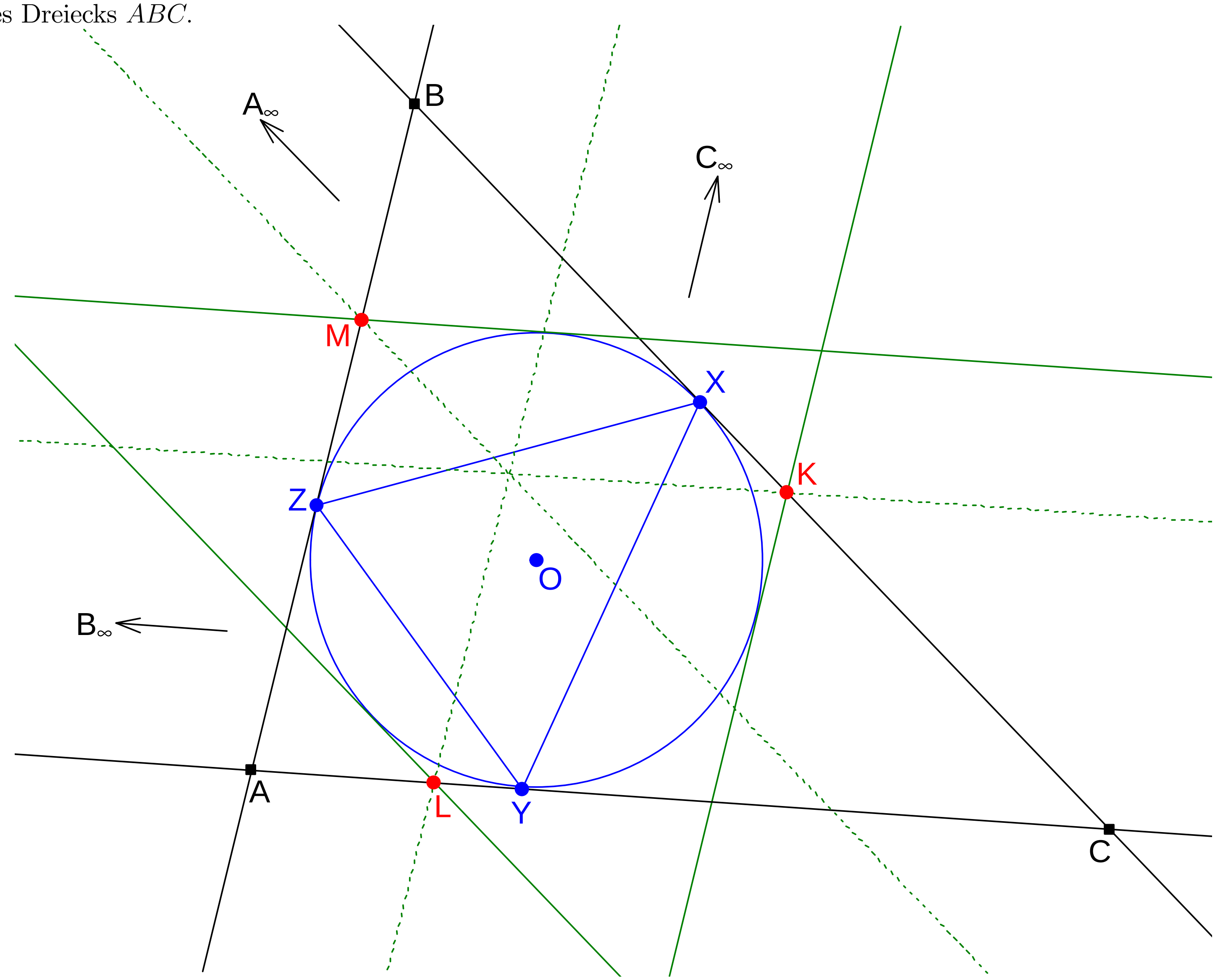

Fig. 11

Betrachten wir nun die Geraden MB_∞, CA, LA_∞, BC, KC_∞ und AB. Diese Geraden berühren alle den Inkreis des Dreiecks ABC, sind also Tangenten an den Inkreis. Ferner haben wir $B_\infty = MB_\infty \cap CA$, $L = CA \cap LA_\infty$, $A_\infty = LA_\infty \cap BC$, $K = BC \cap KC_\infty$, $C_\infty = KC_\infty \cap AB$ und $M = AB \cap MB_\infty$. Nach Satz 3 folgt also, daß die Geraden $B_\infty K$, LC_∞ und $A_\infty M$ sich in einem Punkt schneiden. Mit anderen Worten: Die Geraden $B_\infty K$, $C_\infty L$ und $A_\infty M$ schneiden sich in einem Punkt.

Doch die Gerade $B_\infty K$ ist parallel zu der Geraden CA (denn sie schneidet die Gerade CA in einem uneigentlichen Punkt - nämlich in dem Punkt B_∞); wir können also sagen, die Gerade $B_\infty K$ ist die Parallele zu der Geraden CA durch den Punkt K. Analog ist die Gerade $C_\infty L$ die Parallele zu der Geraden AB durch den Punkt L, und genauso ist die Gerade $A_\infty M$ die Parallele zu der Geraden BC durch den Punkt M. Unser Resultat, daß die Geraden $B_\infty K$, $C_\infty L$ und $A_\infty M$ sich in einem Punkt schneiden, können wir also wie folgt umformulieren: Die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M schneiden sich in einem Punkt. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Es gibt auch einen *alternativen Beweis von Satz 4*, der ohne Verwendung des Satzes von Brianchon auskommt:

(Siehe Fig. 12.) Die Berührpunkte Z und X des Inkreises des Dreiecks ABC mit den Seiten AB bzw. BC liegen zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels ABC, also bezüglich der Geraden BO. Somit ist die Gerade ZX orthogonal zu der Geraden BO. Andererseits ist (laut der Definition des Punktes K) die Gerade OK parallel zu der Geraden ZX. Daher ist die Gerade OK orthogonal zu der Geraden BO. Somit ist $\measuredangle BOK = 90^\circ$, und das Dreieck BOK ist rechtwinklig. Folglich ist

$$BK = \frac{BO}{\cos \measuredangle OBK} = \frac{BO}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Da aber andererseits eine Kreistangente stets senkrecht auf dem entsprechenden Berührradius steht, gilt $BC \perp OX$, also $\measuredangle OXB = 90^\circ$. Somit ist das Dreieck OXB rechtwinklig, und es ergibt sich

$$BO = \frac{OX}{\sin \measuredangle OBX} = \frac{OX}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Doch da der Punkt X auf dem Inkreis des Dreiecks ABC liegt, ist die Strecke OX gleich dem Inkreisradius ρ des Dreiecks ABC. Wir haben also

$$BO = \frac{\rho}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Damit ist

$$BK = \frac{BO}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\left(\frac{\rho}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\rho}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2\rho}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2\rho}{\sin \beta}.$$

Daraus folgt

$$\frac{BK}{BC} = \frac{BK}{a} = \frac{\left(\frac{2\rho}{\sin \beta} \right)}{a} = \frac{2\rho}{a \sin \beta}.$$

Sei nun F die Fläche des Dreiecks ABC. Dann ist einerseits bekanntlich $F = \rho s$, wobei $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ der halbe Umfang des Dreiecks ABC ist; andererseits gilt aber die bekannte Formel $F = \frac{1}{2} ca \sin\beta$. Somit ist $\rho s = \frac{1}{2} ca \sin\beta$, und damit $2\rho s = ca \sin\beta$. Wir können damit weiterrechnen:

$$\frac{BK}{BC} = \frac{2\rho}{a\sin\beta} = \frac{2\rho c}{ca\sin\beta} = \frac{2\rho c}{2\rho s} = \frac{c}{s}.$$

Analog finden wir $\frac{CL}{CA} = \frac{a}{s}$ und $\frac{AM}{AB} = \frac{b}{s}$. Damit ist

$$\frac{BK}{BC} + \frac{CL}{CA} + \frac{AM}{AB} = \frac{c}{s} + \frac{a}{s} + \frac{b}{s} = \frac{a+b+c}{s}.$$

Doch wegen $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist $a+b+c = 2s$, also $\frac{a+b+c}{s} = 2$. Damit erhalten wir

$$\frac{BK}{BC} + \frac{CL}{CA} + \frac{AM}{AB} = 2.$$

Doch aus dieser Gleichung folgt gemäß dem Satz 3 aus [7], daß die Parallelen zu den Geraden CA, AB und BC durch die Punkte K, L bzw. M sich in einem Punkt schneiden. Damit ist Satz 4 erneut bewiesen.

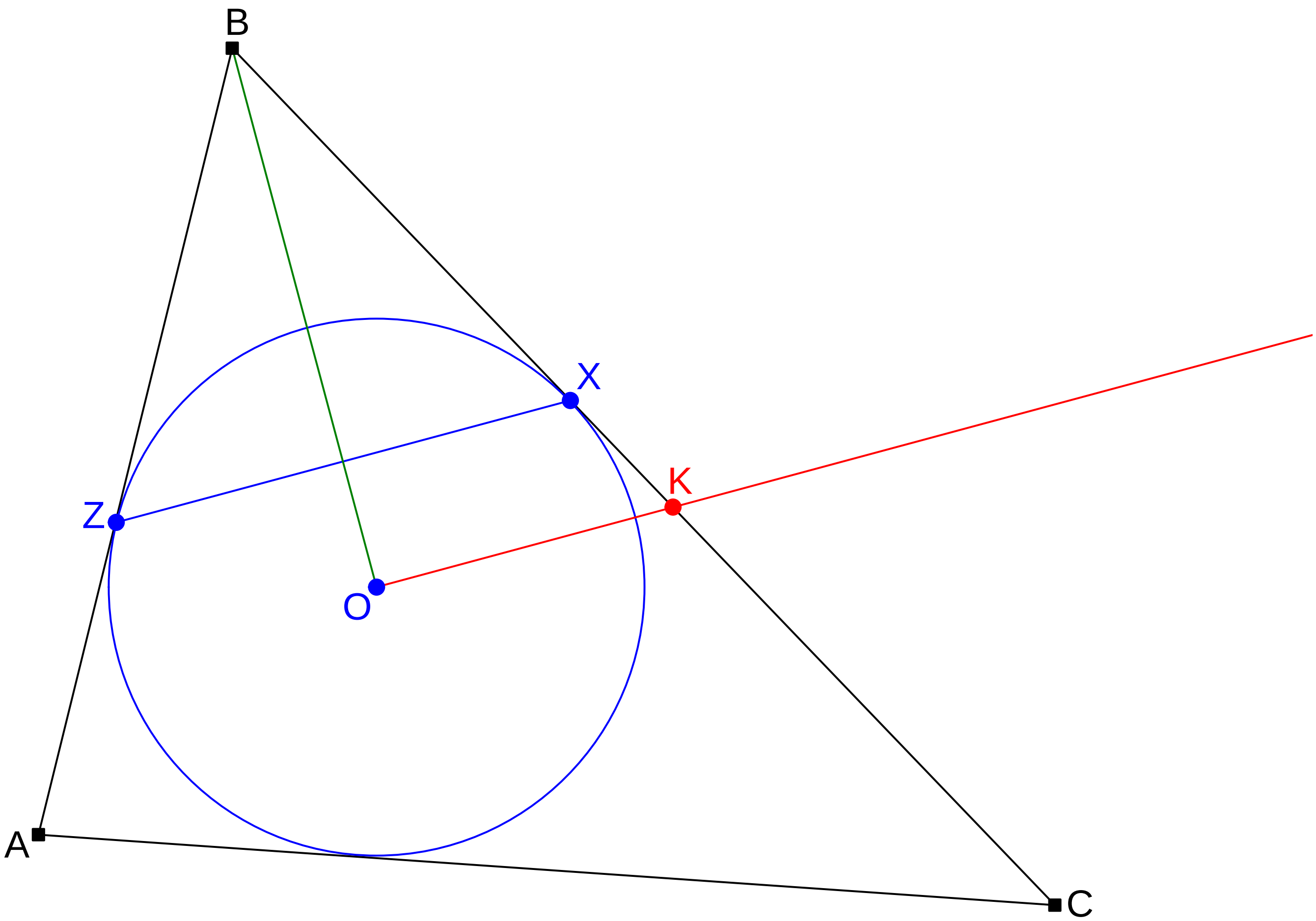

Fig. 12

Literaturhinweise

[1] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*, Stuttgart 1983.

[2] D. O. Shkljarskij, N. N. Chenzov, I. M. Jaglom: *Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoj matematiki: Chastj 2 (Planimetrija)*, Moskau 1952.

[3] D. O. Shkljarskij, N. N. Chenzov, I. M. Jaglom: *Izbrannye zadachi i teoremy planimetrii*, Moskau 1967.

[4] V. Prasolov: *Plane Geometry - Part 1*, translated from the Russian by D. Leites.
http://www.math.su.se/~mleites/book.html#trans

[5] John Wellesley Russell: *An Elementary Treatise on Pure Geometry*, Oxford 1893.
http://www.archive.org/details/elementarytreati00russuoft

[6] Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo* $180°$ *und eine Lösung der* $\sqrt{WURZEL}$*-Aufgabe* κ *22 von Wilfried Haag*.

[7] Darij Grinberg: *Über Parallelen zu Dreiecksseiten*.