Aufgabe: Spiegelung an den Dreiecksseiten und Anti-Steinersche Punkte ∼ Darij Grinberg

Eine durch den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks ABC gehende Gerade g werde an den Dreiecksseiten BC, CA und AB gespiegelt; die Spiegelbilder heißen a', b' bzw. c'. Man beweise (Fig. 1):

Die Geraden a', b' und c' schneiden sich in einem Punkt, und dieser Punkt liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

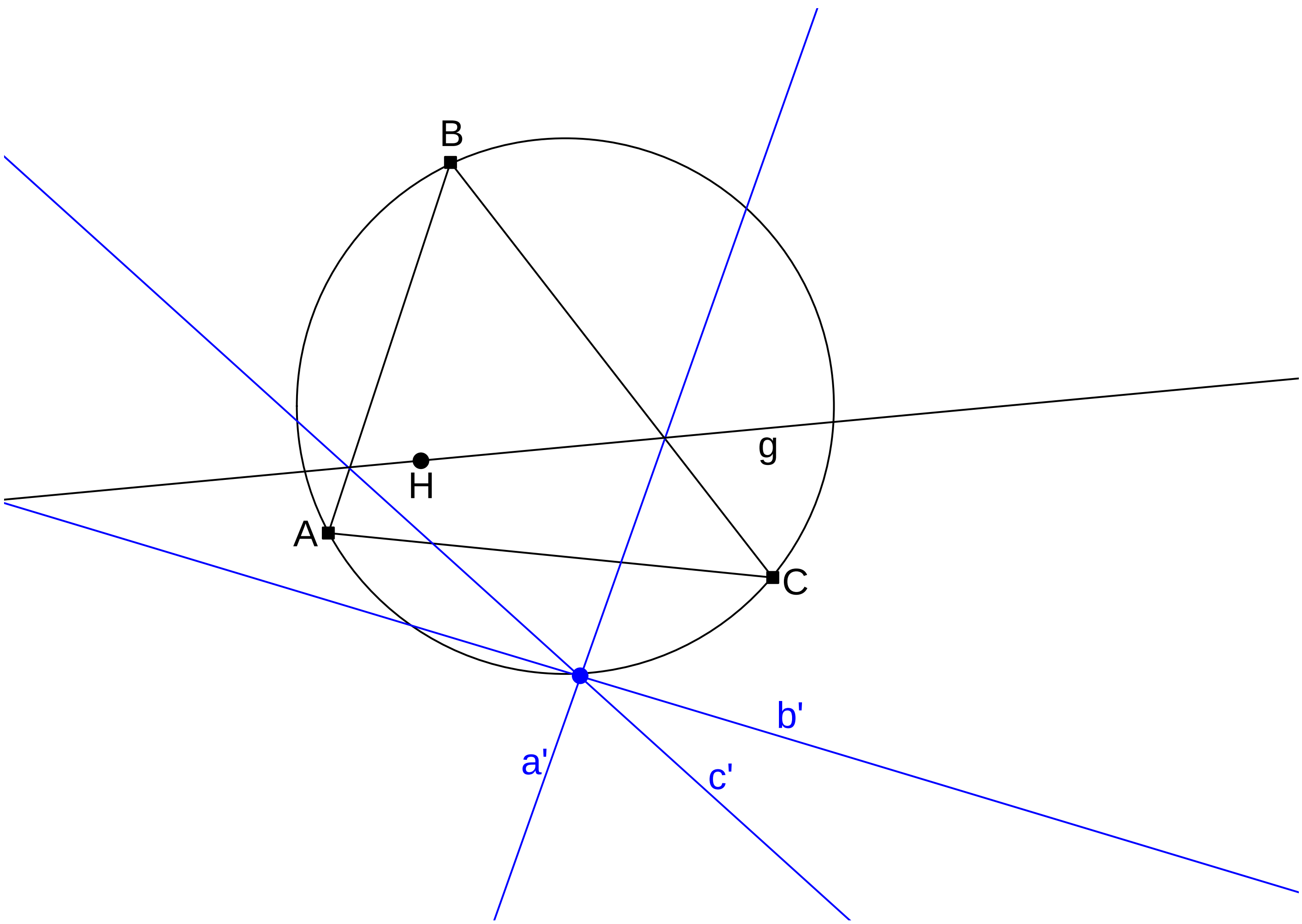

Fig. 1

Lösung: Sei P ein beliebiger, von H verschiedener Punkt auf der Geraden g, und seien X, Y und Z die Bilder von P bei der Spiegelung an den Seiten BC, CA bzw. AB. Da der Punkt P auf der Geraden g liegt, liegt dann der Punkt X auf der Geraden a', der Punkt Y auf der Geraden b', und der Punkt Z auf der Geraden c'.

Ferner seien A', B' und C' die Bilder des Höhenschnittpunktes H bei der Spiegelung an den Seiten BC, CA bzw. AB. Da der Punkt H auf der Geraden g liegt, liegt dann der Punkt A' auf der Geraden a', der Punkt B' auf der Geraden b', und der Punkt C' auf der Geraden c'.

Daher sind unsere Geraden a', b' und c' als $a' = XA'$, $b' = YB'$ und $c' = ZC'$ bestimmt.

Im folgenden arbeiten wir mit Kreiswinkeln, die nach dem Artikel [1] mit Orientation versehen werden. Es werden also auch die Kenntnisse aus [1] vorausgesetzt, darunter die Formel $\measuredangle(g_1;\ g_2) + \measuredangle(g_2;\ g_3) + ... + \measuredangle(g_{n-1};\ g_n) = \measuredangle(g_1;\ g_n)$, die durch mehrfache Anwendung aus der Formel $\measuredangle(g;\ h) + \measuredangle(h;\ k) = \measuredangle(g;\ k)$ folgt.

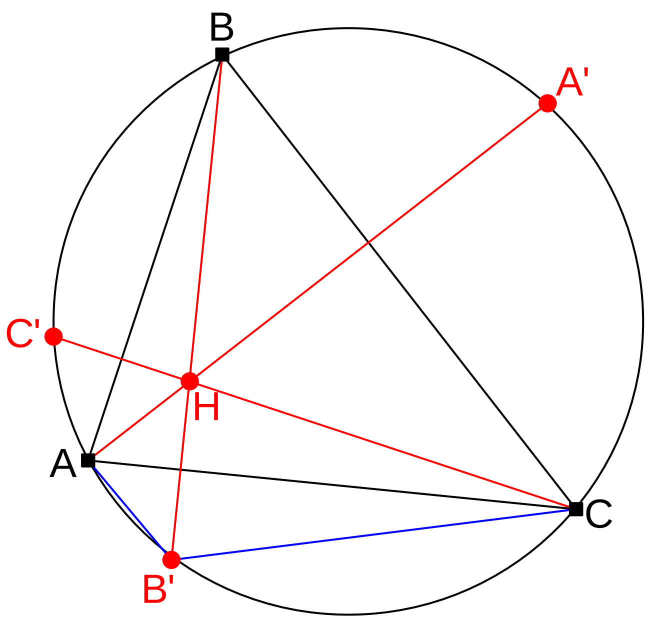

Fig. 2

Wir wollen zuerst den folgenden Hilfssatz zeigen:

Hilfssatz 1: Die Punkte A', B' und C' liegen auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Dies ist ein ziemlich bekannter Satz. Ein *Beweis* mit Kreiswinkeln geht folgendermaßen: Die Geraden AA', BB' und CC' sind die Höhen des Dreiecks ABC. Wir haben

$$\measuredangle(AA';\ CC') = \measuredangle(BC;\ AB), \tag{1}$$

denn

$$\begin{aligned} \measuredangle(AA';\ CC') &= \measuredangle(AA';\ BC) + \measuredangle(BC;\ AB) + \measuredangle(AB;\ CC') \\ &= 90^\circ + \measuredangle(BC;\ AB) + 90^\circ = 180^\circ + \measuredangle(BC;\ AB) = \measuredangle(BC;\ AB). \end{aligned}$$

Da nun der Punkt B' das Spiegelbild des Punktes H an der Geraden CA ist, ist die Gerade AB' das Spiegelbild der Geraden AH an der Geraden CA, und die Gerade $B'C$ das Spiegelbild der Geraden HC an der Geraden CA. Da bei einer Geradenspiegelung Winkel nur das Vorzeichen ändern, folgt daraus

$$\measuredangle(AB';\ B'C) = -\measuredangle(AH;\ HC) = -(AA';\ CC') = -\measuredangle(BC;\ AB) \qquad \text{(nach (1))},$$

also $\measuredangle(AB';\ B'C) = \measuredangle(AB;\ BC)$. Dies bedeutet, daß die Punkte A, B, C und B' auf einem Kreis liegen, d. h. der Punkt B' liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. Analog zeigt man, daß die Punkte C' und A' auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen, und der Hilfssatz 1 ist bewiesen.

Wir haben

$$\measuredangle\,(B'A;\ AA') = \measuredangle\,(AB';\ AA') = \measuredangle\,(AB';\ CA) + \measuredangle\,(CA;\ AA')\,.$$

Da die Gerade AB' das Spiegelbild der Geraden AH an der Geraden CA ist, gilt $\measuredangle\,(AB';\ CA) = -\measuredangle\,(AH;\ CA) = \measuredangle\,(CA;\ AH) = \measuredangle\,(CA;\ AA')$; also ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle\,(B'A;\ AA') &= \measuredangle\,(CA;\ AA') + \measuredangle\,(CA;\ AA') = 2\cdot\measuredangle\,(CA;\ AA') \\
&= 2\cdot(\measuredangle\,(CA;\ BC) + \measuredangle\,(BC;\ AA')) = 2\cdot\measuredangle\,(CA;\ BC) + 2\cdot\measuredangle\,(BC;\ AA') \\
&= 2\cdot\measuredangle\,(CA;\ BC) + 2\cdot 90^\circ = 2\cdot\measuredangle\,(CA;\ BC) + 180^\circ = 2\cdot\measuredangle\,(CA;\ BC)\,,
\end{aligned}$$

also

$$\measuredangle\,(B'A;\ AA') = 2\cdot\measuredangle ACB. \tag{2}$$

Kommen wir nun zur Lösung der Aufgabe (Fig. 3). Unser Plan ist folgender: Wir wollen zeigen, daß sich die Geraden $a' = XA'$, $b' = YB'$ und $c' = ZC'$ in einem Punkt auf dem Umkreis des ΔABC schneiden. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir erstmals den Schnittpunkt der Geraden a' und b' mit Φ. Wenn wir zeigen werden, daß der Punkt Φ auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt, dann werden wir den Punkt Φ als zweiten Schnittpunkt der Geraden a' mit dem Umkreis identifizieren können (der erste Schnittpunkt sei dabei A'), d. h. wir werden folgendes Ergebnis bekommen: Der zweite Schnittpunkt der Geraden a' mit dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt auf der Geraden b'. Analog werden wir dann zeigen können, daß derselbe zweite Schnittpunkt der Geraden a' mit dem Umkreis des Dreiecks ABC auf der Geraden c' liegt; daraus werden wir dann erhalten, daß sich die Geraden a', b' und c' in einem Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

Jetzt der Beweis selber ausführlich: Für den Schnittpunkt Φ der Geraden a' und b' gilt

$$\measuredangle\,(B'\Phi;\ \Phi A') = \measuredangle\,(b';\ a') = \measuredangle\,(b';\ CA) + \measuredangle\,(CA;\ g) + \measuredangle\,(g;\ BC) + \measuredangle\,(BC;\ a')\,.$$

Diese Summe läßt sich vereinfachen: Da die Gerade b' das Spiegelbild der Geraden g an der Geraden CA ist, gilt $\measuredangle\,(b';\ CA) = -\measuredangle\,(g;\ CA) = \measuredangle\,(CA;\ g)$, und da die Gerade a' das Spiegelbild der Geraden g an der Geraden BC ist, gilt $\measuredangle\,(a';\ BC) = -\measuredangle\,(g;\ BC)$, also $\measuredangle\,(BC;\ a') = -\measuredangle\,(a';\ BC) = \measuredangle\,(g;\ BC)$. Damit wird

$$\begin{aligned}
\measuredangle\,(B'\Phi;\ \Phi A') &= \measuredangle\,(CA;\ g) + \measuredangle\,(CA;\ g) + \measuredangle\,(g;\ BC) + \measuredangle\,(g;\ BC) \\
&= 2\cdot(\measuredangle\,(CA;\ g) + \measuredangle\,(g;\ BC)) = 2\cdot\measuredangle\,(CA;\ BC) = 2\cdot\measuredangle ACB,
\end{aligned}$$

und nach (2) folgt daraus

$$\measuredangle\,(B'\Phi;\ \Phi A') = \measuredangle\,(B'A;\ AA')\,.$$

Diese Gleichung bedeutet aber, daß die Punkte B', A, A' und Φ auf einem Kreis liegen. Da (nach Hilfssatz 1) die Punkte A' und B' auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen, ist dieser Kreis der Umkreis des Dreiecks ABC, d. h. wir haben gezeigt, daß der Punkt Φ auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.

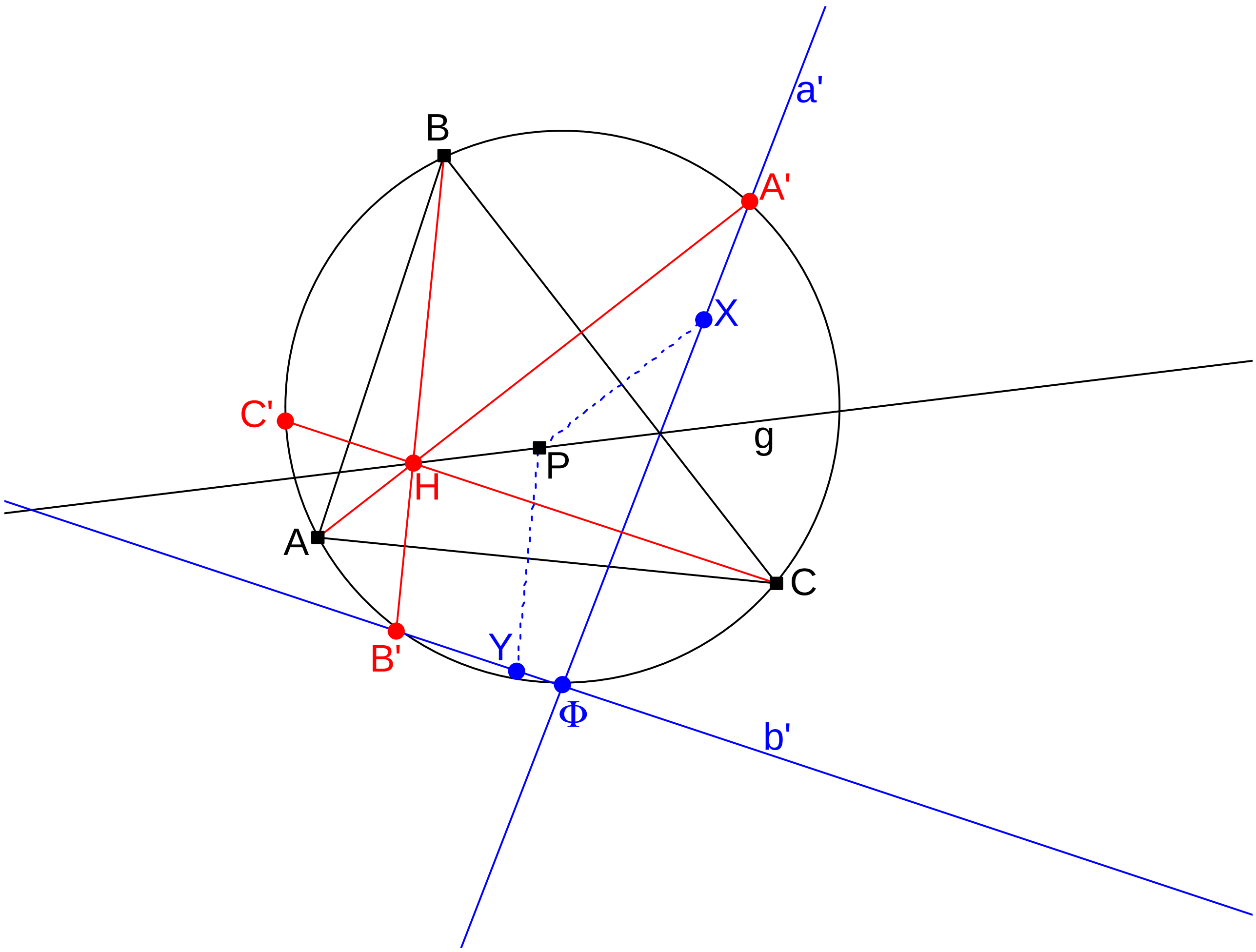

Fig. 3

Da $\Phi = a' \cap b'$ ist, können wir dieses Ergebnis folgendermaßen fassen: Der zweite Schnittpunkt Φ der Geraden a' mit dem Umkreis des Dreiecks ABC (der erste Schnittpunkt sei A') liegt auf der Geraden b'. Analog beweist man, daß derselbe zweite Schnittpunkt von a' mit dem Umkreis des Dreiecks ABC auf der Geraden c' liegt. Also liegt dieser Punkt Φ auf den Geraden a', b' und c' und auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, d. h. die Geraden a', b' und c' schneiden sich in einem Punkt, und dieser Punkt liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, was zu beweisen war.

Bemerkungen:

1. Den Schnittpunkt Φ der Geraden a', b' und c' nenne ich **Anti-Steinerscher Punkt** der Geraden g in bezug auf das Dreieck ABC. Der Grund dafür ist der folgende: Bekanntlich liegen die Spiegelbilder eines beliebigen auf dem Umkreis eines Dreiecks ABC liegenden Punktes R an den Dreiecksseiten BC, CA und AB auf einer Geraden, und diese Gerade geht durch den Höhenschnittpunkt H des DreiecksABC. Diese Gerade heißt die **Steinersche Gerade** des Punktes R in bezug auf das Dreieck ABC. Nun gilt:

Folgerung 2: In unserer Konfiguration ist g die Steinersche Gerade des Punktes Φ.

Beweis: Man betrachte Fig. 4. Da der Punkt Φ auf der Geraden a' liegt, liegt das Spiegelbild des Punktes Φ an der Seite BC auf dem Spiegelbild der Geraden a' an der Seite BC. Da das Spiegelbild der Geraden a' an BC unsere ursprüngliche Gerade g ist, erhalten wir, daß das Spiegelbild des Punktes Φ an der Seite BC auf der Geraden g liegt. Analog liegen die Spiegelbilder des Punktes Φ an den Seiten CA und AB auf der Geraden g. Da die Gerade, die diese drei Spiegelbilder verbindet, nach Definition die Steinersche Gerade des Punktes Φ ist, ist also g die Steinersche Gerade des Punktes Φ, was zu beweisen war.

Deshalb ist die Bezeichnung Anti-Steinerscher Punkt gerechtfertigt.

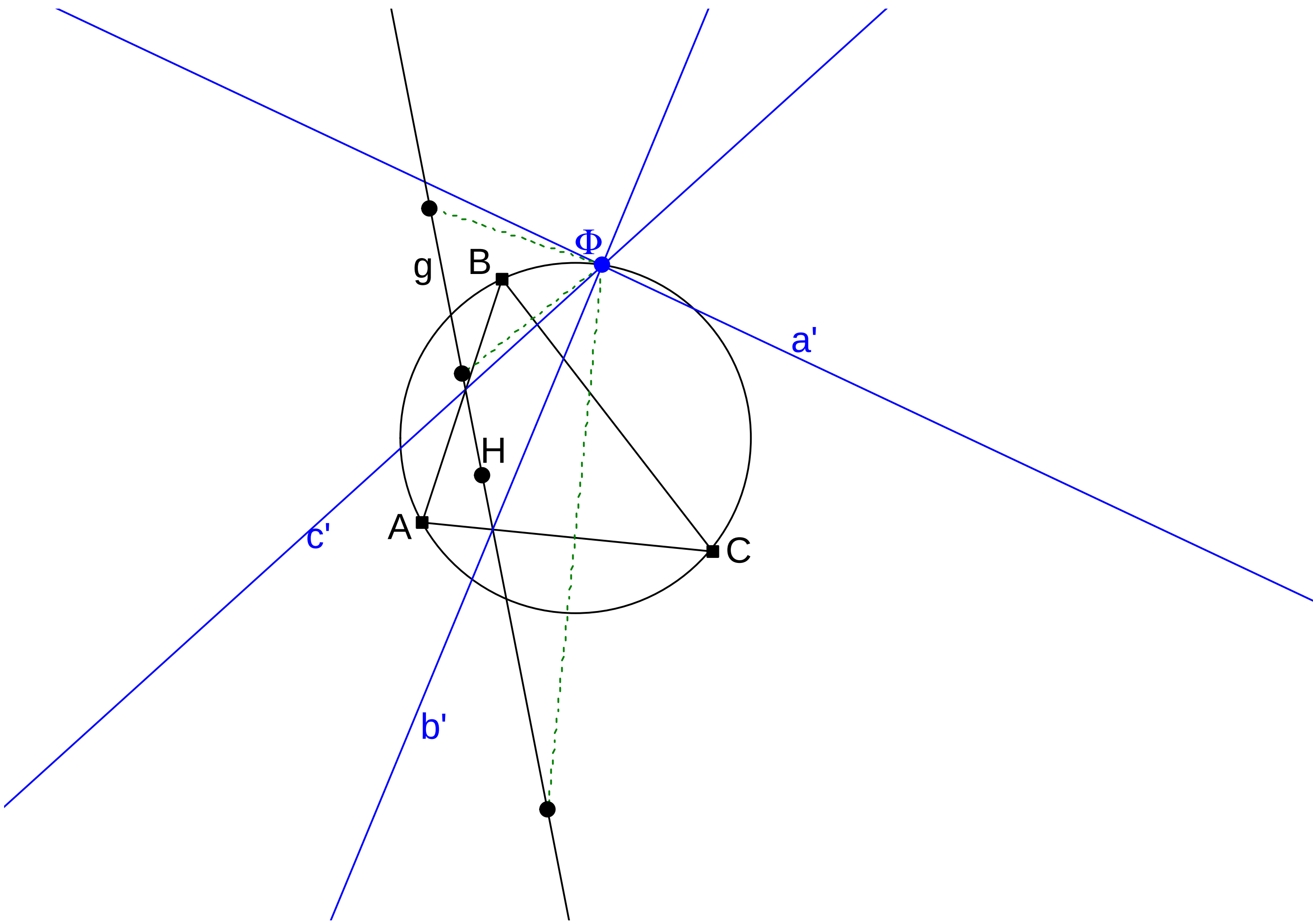

Fig. 4

2. Wir können noch eine sehr interessante Folgerung finden:

Folgerung 3: Der Anti-Steinersche Punkt Φ einer durch den Höhenschnittpunkt H gehenden Geraden g liegt auf den Umkreisen der Dreiecke AYZ, BZX und CXY, wobei X, Y und Z die Spiegelbilder eines beliebigen auf g liegenden Punktes P an den Dreiecksseiten BC, CA bzw. AB sind.

Beweis: Ist P der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC, dann ist $X = A'$, $Y = B'$ und $Z = C'$, und da (nach Hilfssatz 1) die Punkte A', B' und C' auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen, stimmen die Umkreise der Dreiecke AYZ, BZX und CXY überein mit dem Umkreis des Dreiecks ABC. Wir wissen, daß Φ auf diesem Umkreis liegt.

Damit ist der Fall $P = H$ abgehandelt; betrachten wir jetzt den Fall, daß der Punkt P ein von H verschiedener Punkt auf der Geraden g ist. In der Lösung der Aufgabe hatten wir herausgefunden, daß $\measuredangle(B'\Phi;\ \Phi A') = 2 \cdot \measuredangle ACB$ ist, also $\measuredangle Y\Phi X = 2 \cdot \measuredangle ACB$. Da aber der Punkt Y das Spiegelbild des Punktes P an der Geraden CA ist, ist die Gerade CY das Spiegelbild der Geraden CP an der Geraden CA, und es gilt $\measuredangle(CY;\, CA) = -\measuredangle(CP;\, CA)$, also $\measuredangle YCA = -\measuredangle PCA = \measuredangle ACP$. Da der Punkt X das Spiegelbild des Punktes P an der Geraden BC ist, ist die Gerade CX das Spiegelbild der Geraden CP an der Geraden BC, und es folgt $\measuredangle(CX;\, BC) = -\measuredangle(CP;\, BC)$, also $\measuredangle XCB = -\measuredangle PCB$, und $\measuredangle BCX = -\measuredangle XCB = \measuredangle PCB$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\measuredangle YCX &= \measuredangle YCA + \measuredangle ACP + \measuredangle PCB + \measuredangle BCX \\
&= \measuredangle ACP + \measuredangle ACP + \measuredangle PCB + \measuredangle PCB \\
&= 2 \cdot (\measuredangle ACP + \measuredangle PCB) = 2 \cdot \measuredangle ACB.
\end{aligned}$$

Damit haben wir $\measuredangle Y\Phi X = \measuredangle YCX$. Folglich liegen die Punkte Y, X, Φ und C auf einem Kreis, d. h. der Punkt Φ liegt auf dem Umkreis des Dreiecks CXY. Analog zeigt man, daß der Punkt Φ auch auf den Umkreisen der Dreiecke AYZ und BZX liegt. Damit ist Folgerung 3 bewiesen.

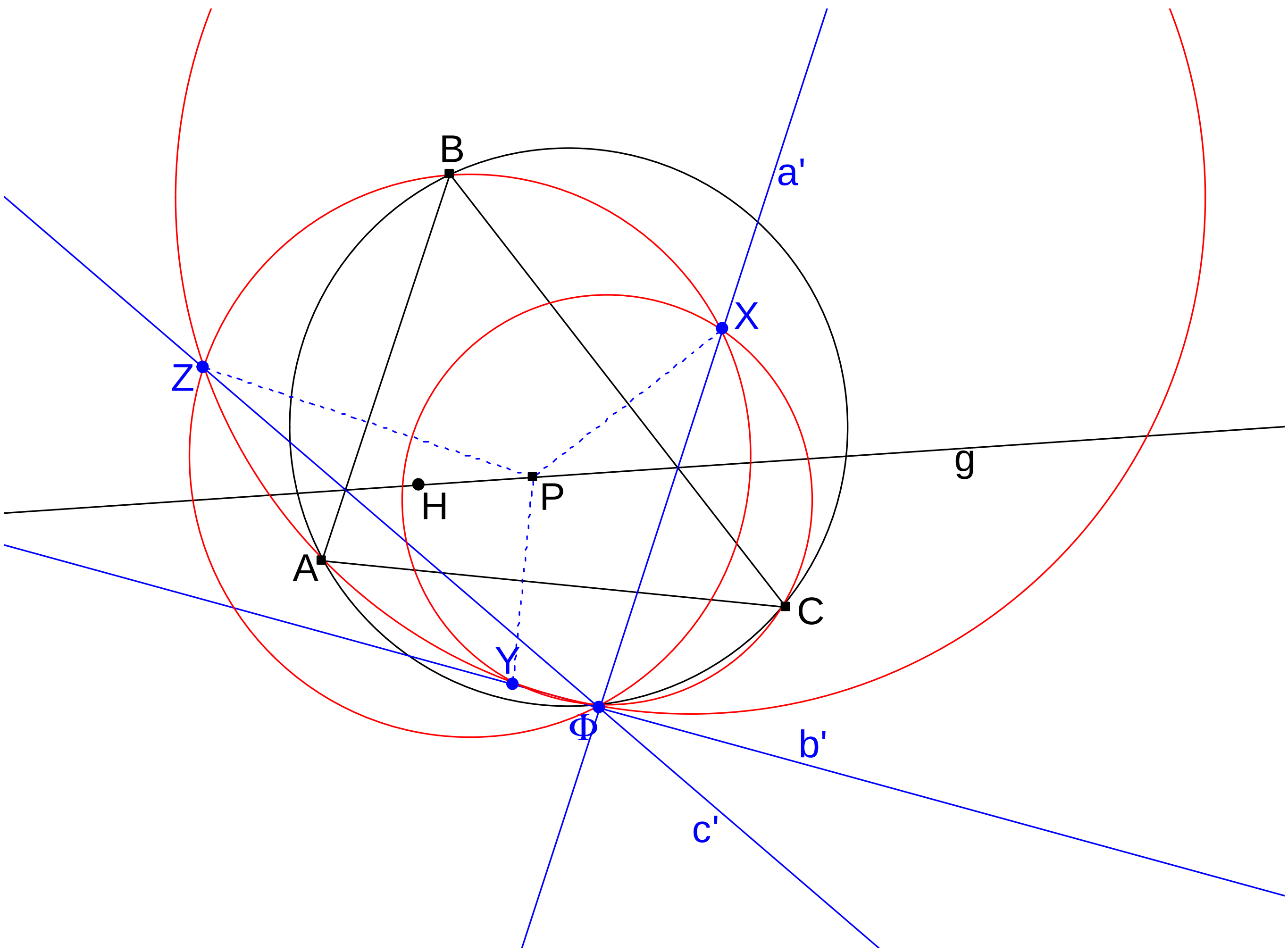

Fig. 5

3. Jede durch den Höhenschnittpunkt H gehende Gerade hat einen Anti-Steinerschen Punkt. Da von allen durch H gehenden Geraden die von A, B bzw. C ausgehenden Höhen

h_a, h_b und h_c und die Eulergerade e des Dreiecks ABC am bekanntesten sind, will ich deren Anti-Steinersche Punkte finden.

- Der Anti-Steinersche Punkt der Höhe h_a ist die Ecke A, denn die Gerade $g = h_a$ geht durch A, und deshalb schneiden sich die Spiegelbilder b' und c' dieser Geraden an CA bzw. AB auch in A, d. h. der Anti-Steinersche Punkt von g ist A. Analog ist der Anti-Steinersche Punkt der Höhe h_b die Ecke B, und der Anti-Steinersche Punkt der Höhe h_c die Ecke C.

- Der Anti-Steinersche Punkt der Eulergeraden e des Dreiecks ABC ist ein interessanter merkwürdiger Punkt des Dreiecks. In Clark Kimberlings Liste der merkwürdigen Punkte ist es der Punkt X_{110}, und man kann beweisen, daß er die homogenen trilinearen Koordinaten

  $$X_{110}\left(\frac{a}{b^2-c^2} : \frac{b}{c^2-a^2} : \frac{c}{a^2-b^2}\right) = X_{110}\left(\csc(\beta-\gamma) : \csc(\gamma-\alpha) : \csc(\alpha-\beta)\right)$$

  hat. Dieser Punkt X_{110} wird manchmal als **Eulerspiegelpunkt** des Dreiecks ABC bezeichnet.
  Wir haben also folgenden Spezialfall der Aufgabe erhalten:
  Satz vom Eulerspiegelpunkt: Die Spiegelbilder der Eulergeraden eines Dreiecks an den Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt liegt auf dem Umkreis des Dreiecks und ist der Anti-Steinersche Punkt der Eulergeraden. Er heißt der **Eulerspiegelpunkt** des Dreiecks.
  Wenden wir nun die Folgerung 3 an für den Fall, daß g die Eulergerade e des Dreiecks ABC ist, und P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist (er liegt ja auf der Eulergeraden), dann erhalten wir folgendes:
  Sind X, Y und Z die Spiegelbilder des Umkreismittelpunktes des Dreiecks ABC an den Seiten BC, CA bzw. AB, dann liegt der Eulerspiegelpunkt des ΔABC auf den Umkreisen der Dreiecke AYZ, BZX und CXY.

4. Der folgende Satz von Bernard Gibert (Fig. 6) kann mithilfe des Satzes vom Eulerspiegelpunkt bewiesen werden:

Satz 4: Seien D, E und F die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB und U der Umkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks ABC. Die Mittelsenkrechten der Strecken UD, UE und UF schneiden die Eulergerade des Dreiecks ABC in den Punkten K, L bzw. M.

Dann schneiden sich die Geraden DK, EL und FM in einem Punkt.

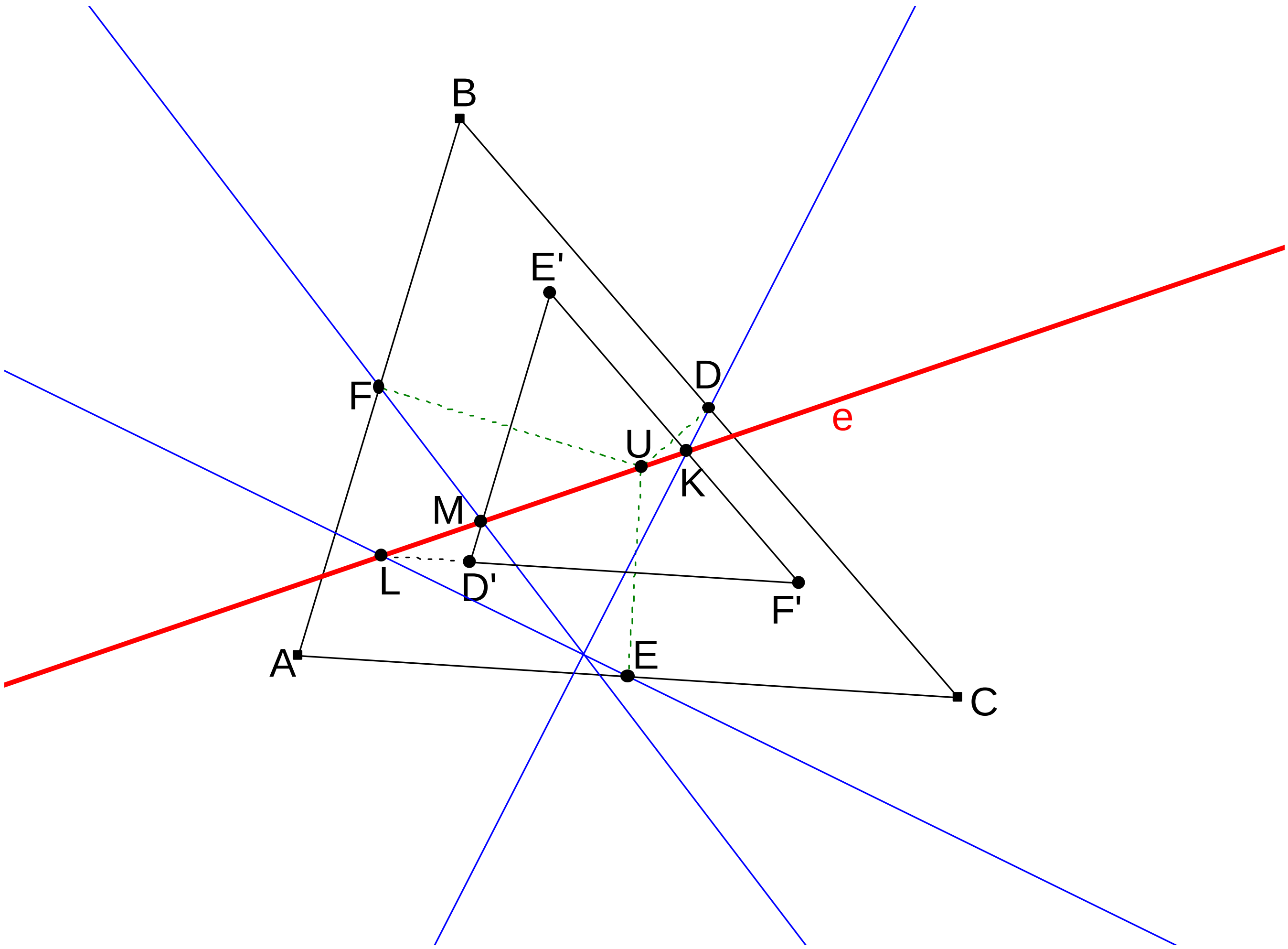

Fig. 6

Beweis: Wir bezeichnen das von den Mittelsenkrechten der Strecken UD, UE und UF umschlossene Dreieck mit $\Delta D'E'F'$, wobei D' der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken UE und UF ist, usw. zyklisch; ferner sei e die Eulergerade des ΔABC. Dann haben wir die Punkte $K = E'F' \cap e$, $L = F'D' \cap e$ und $M = D'E' \cap e$.

Wir wollen jetzt beweisen, daß e nicht nur die Eulergerade des ΔABC, sondern auch die Eulergerade des $\Delta D'E'F'$ ist. Zum Beweis bemerken wir zuerst, daß nach Konstruktion die Geraden $E'F'$, $F'D'$ und $D'E'$ die Mittelsenkrechten der Strecken UD, UE bzw. UF sind; also ist $E'F' \perp UD$, $F'D' \perp UE$ und $D'E' \perp UF$. Andererseits ist $UD \perp BC$, $UE \perp CA$ und $UF \perp AB$. Also haben wir $E'F' \parallel BC$, $F'D' \parallel CA$ und $D'E' \parallel AB$; ferner sind die Abstände von dem Punkt U zu den Geraden $E'F'$, $F'D'$ und $D'E'$ jeweils halb so groß wie die Abstände von dem Punkt U zu den Geraden BC, CA bzw. AB (denn $E'F'$, $F'D'$ und $D'E'$ sind Mittelsenkrechten).

Also sind die Geraden $E'F'$, $F'D'$ und $D'E'$ parallel zu den Geraden BC, CA bzw. AB, und entstehen aus letzteren durch zentrische Streckung mit dem Zentrum U und dem Faktor $1/2$. Das bedeutet, daß das Dreieck $D'E'F'$ aus dem Dreieck ABC durch zentrische Streckung mit dem Zentrum U und dem Faktor $1/2$ entsteht.

Die Eulergerade des Dreiecks $D'E'F'$ ist folglich das Bild der Eulergeraden e des ΔABC bei dieser zentrischen Streckung; da aber die Eulergerade e durch das Streckungszentrum U

verläuft, wird sie auf sich selbst abgebildet, d. h. die Gerade e ist auch die Eulergerade des Dreiecks $D'E'F'$.

Da die Gerade $D'E'$ die Mittelsenkrechte der Strecke UF ist, ist der Punkt F das Spiegelbild des Punktes U an der Geraden $D'E'$. Also ist die Gerade FM das Spiegelbild der Geraden UM (also der Geraden e) an der Seite $D'E'$ des Dreiecks $D'E'F'$. Analoges gilt für DK und EL, d. h. wir erhalten:

Die Geraden DK, EL und FM sind die Spiegelbilder der Geraden e an den Seiten des Dreiecks $D'E'F'$.

Da aber, wie wir schon bewiesen haben, e die Eulergerade dieses Dreiecks $D'E'F'$ ist, folgt daraus (nach dem Satz vom Eulerspiegelpunkt), daß sich die Geraden DK, EL und FM in einem Punkt schneiden, was zu beweisen war. Daraus folgt auch, daß dieser Schnittpunkt der Eulerspiegelpunkt des $\Delta D'E'F'$ ist.

Folgerung 5: Der Schnittpunkt der Geraden DK, EL und FM liegt auch auf den Umkreisen der Dreiecke $D'EF$, $E'FD$ und $F'DE$.

Beweis: Erinnern wir uns daran, daß das Dreieck $D'E'F'$ das Bild des Dreiecks ABC bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum U und dem Faktor $1/2$ ist. Daher ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $D'E'F'$ das Bild des Umkreismittelpunktes U des Dreiecks ABC bei dieser Streckung. Da aber U das Streckungszentrum ist, wird es auf sich selbst abgebildet. Also ist U auch der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $D'E'F'$. Da die Geraden $E'F'$, $F'D'$ und $D'E'$ die Mittelsenkrechten der Strecken UD, UE bzw. UF sind, sind die Punkte D, E und F die Spiegelbilder des Punktes U an den Geraden $E'F'$, $F'D'$ und $D'E'$.

Das heißt: Die Punkte D, E und F sind die Spiegelbilder des Umkreismittelpunktes U des Dreiecks $D'E'F'$ an seinen Seiten $E'F'$, $F'D'$ bzw. $D'E'$. Aus Folgerung 3 (angewandt auf das Dreieck $D'E'F'$) folgt also, daß der Eulerspiegelpunkt des Dreiecks $D'E'F'$ auf den Umkreisen der Dreiecke $D'EF$, $E'FD$ und $F'DE$ liegt. Aber wir wissen, daß der Eulerspiegelpunkt des Dreiecks $D'E'F'$ der Schnittpunkt der Geraden DK, EL und FM ist. Also liegt der Schnittpunkt der Geraden DK, EL und FM auf den Umkreisen der Dreiecke $D'EF$, $E'FD$ und $F'DE$, was zu beweisen war.

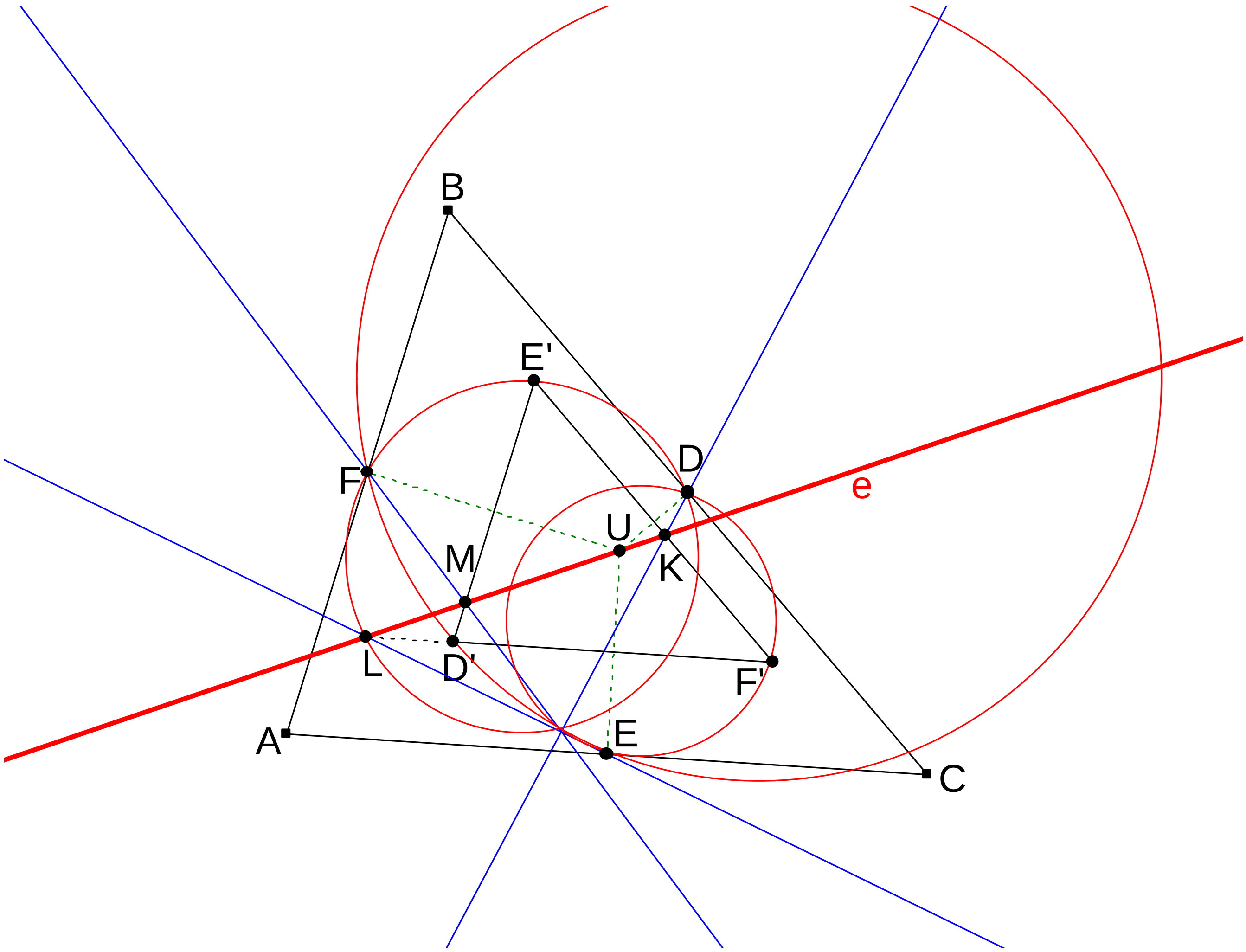

Fig. 7

Literaturhinweise

[1] Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo* 180° *und eine Lösung der* $\sqrt{\text{WURZEL}}$-*Aufgabe* κ *22 von Wilfried Haag.*