

Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 2. Runde, Aufgabe 3

Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 , die sich in den beiden verschiedenen Punkten A und B schneiden. Die Tangente an den Kreis k_2 in dem Punkt A schneide den Kreis k_1 außer in A in einem Punkt C_1 ; entsprechend schneide die Tangente an den Kreis k_1 in dem Punkt A den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkt C_2 . Die Gerade C_1C_2 schließlich schneide den Kreis k_1 in einem von C_1 und B verschiedenen Punkt D . Man beweise, daß die Gerade BD die Sehne AC_2 halbiert.

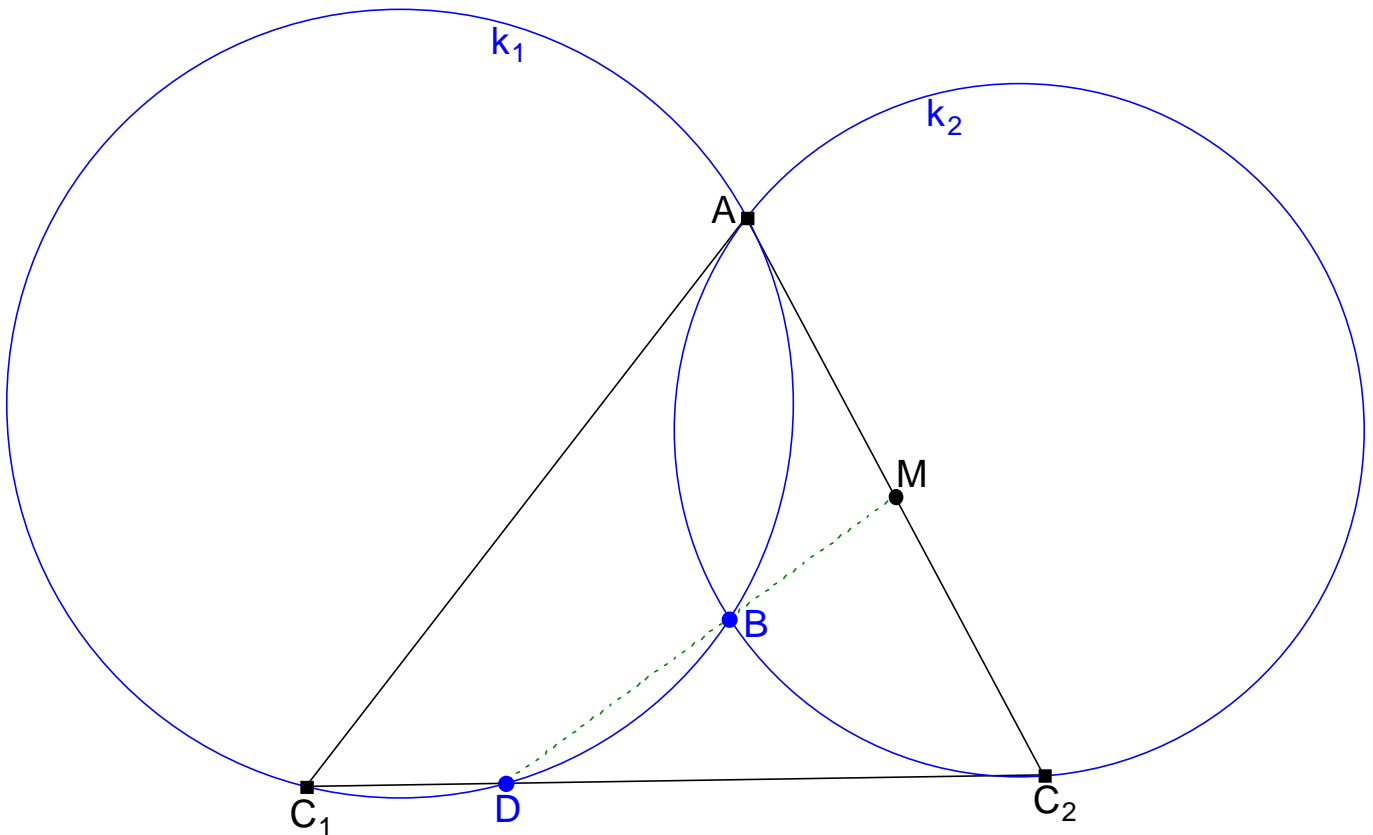


Fig. 1

Lösung von Darij Grinberg:

1. Einleitung; orientierte Winkel modulo 180° (Kreuze)

Wir werden im folgenden Kreuze, d. h. orientierte Winkel modulo 180° (auch "Kreiswinkel" genannt) benutzen. Der Vorteil in der Benutzung von Kreuzen besteht darin, daß sie uns Anordnungsüberlegungen und entsprechende Fallunterscheidungen ersparen, weil die Überlegungen nicht mehr von den Anordnungsbeziehungen auf der jeweiligen Figur abhängig sind. Dadurch können Beweise wesentlich kürzer und klarer dargestellt werden.

Die einfachste Definition eines Kreuzes ist die folgende: Sind g und h zwei Geraden, dann betrachten wir alle gerichteten Winkel φ , für die gilt, daß die Gerade g bei einer

Drehung um den Winkel φ in eine zu h parallele Gerade überführt wird.¹ Alle solchen gerichteten Winkel φ bilden eine Menge $M_{g;h}$; ist φ_0 ein Element dieser Menge $M_{g;h}$, dann sieht man leicht ein, daß die Menge $M_{g;h}$ übereinstimmt mit der Menge aller Winkel ψ , die sich von dem Winkel φ_0 um ein Vielfaches von 180° unterscheiden (d. h. für die der Winkel $\varphi_0 - \psi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 180° ist).² Also teilen die Mengen $M_{g;h}$ die Menge aller gerichteten Winkel in Äquivalenzklassen ein. Eine solche Äquivalenzklasse $M_{g;h}$ wird im folgenden als **Kreuz zwischen den Geraden g und h** bezeichnet; dieses Kreuz bezeichnen wir mit $\angle(g; h)$, und statt **Kreuz** sagen wir auch **orientierter Winkel modulo 180°** oder einfach **Kreiswinkel**.

Momentan ist für uns also ein Kreuz $\angle(g; h)$ nur eine Klasse von gerichteten Winkeln. Wir werden aber im folgenden mit Kreuzen rechnen; dabei werden wir jedesmal, wenn wir eine Winkelgröße in Grad angeben, nicht den gerichteten Winkel selber, sondern die ihn enthaltende Klasse meinen. Das heißt, wenn wir 55° schreiben, meinen wir die Klasse aller gerichteten Winkel, die sich von 55° um ein Vielfaches von 180° unterscheiden. Auch $180^\circ + 55^\circ = 235^\circ$ gehört zu dieser Klasse; deshalb wird sowohl 55° , als auch 235° dieselbe Klasse bedeuten, nämlich die Klasse aller gerichteten Winkel, die sich von 55° um ein Vielfaches von 180° unterscheiden. Entsprechend meinen wir im folgenden mit 0° die Klasse aller gerichteten Winkel, die sich von 0° um ein Vielfaches von 180° unterscheiden, d. h. die selber Vielfache von 180° sind. Aus diesen Festlegungen ergeben sich natürlich die Identitäten

$$\dots = -540^\circ = -360^\circ = -180^\circ = 0^\circ = 180^\circ = 360^\circ = 540^\circ = \dots$$

und generell

$$\dots = -540^\circ + \alpha = -360^\circ + \alpha = -180^\circ + \alpha = \alpha = 180^\circ + \alpha = 360^\circ + \alpha = 540^\circ + \alpha = \dots,$$

wobei α ein beliebiges Kreuz (also eine Klasse gerichteter Winkel) ist.

Wenn im folgenden α und β zwei Kreuze sind, dann definieren wir das Kreuz $\alpha + \beta$ wie folgt: Beide Kreuze α und β sind Klassen gerichteter Winkel. Nehmen wir einen beliebigen Repräsentanten der Klasse α und einen beliebigen Repräsentanten der Klasse β , und addieren diese beiden Repräsentanten, dann erhalten wir einen gerichteten Winkel. Je nachdem, welche Repräsentanten der Klassen α und β wir jeweils auswählen, erhalten wir als Summe verschiedene gerichtete Winkel, doch alle diese gerichteten Winkel gehören wiederum einer und derselben Klasse an. Diese Klasse bezeichnen wir als Kreuz $\alpha + \beta$. Damit haben wir eine Addition für Kreuze erklärt. Analog definieren wir eine Subtraktion für Kreuze; schließlich definieren wir für ein beliebiges Kreuz α der Ausdruck $-\alpha$ als $0^\circ - \alpha$, und für eine beliebige natürliche Zahl n sei

$$n\alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{n \text{ mal}}, \quad \text{und} \quad -n\alpha = -(n\alpha).$$

¹Dabei soll die Drehung gegen den Uhrzeigersinn stattfinden, wenn φ positiv ist, und im Uhrzeigersinn, wenn φ negativ ist. Im Falle von $\varphi = 0^\circ$ ist die Drehung um φ als Identität zu verstehen.

²Dies folgt leicht daraus, daß eine Drehung um 180° eine Gerade in eine zu ihr parallele Gerade überführt, und umgekehrt eine Drehung, die eine Gerade in eine zu ihr parallele Gerade überführt, einen Drehwinkel haben muß, der ein Vielfaches von 180° ist.

Wir haben bislang Kreuze in der Form $\angle(g; h)$ betrachtet, wobei g und h zwei Geraden sind. Man kann Kreuze auch in der Form $\angle XYZ$ schreiben, wobei X , Y und Z drei beliebige Punkte sind. Und zwar bedeutet $\angle XYZ$ das Kreuz zwischen den Geraden XY und YZ , also

$$\angle XYZ = \angle(XY; YZ).$$

Dies hat eine interessante Tatsache zur Folge (Fig. 2): Seien g und h zwei Geraden, die einander in einem Punkt S schneiden, und sei $\alpha = \angle(g; h)$ das Kreuz zwischen den Geraden g und h (also die Äquivalenzklasse aller gerichteten Winkel, um die man die Gerade g drehen muß, damit das Bild eine zu h parallele Gerade ist). Seien ferner A und A' zwei Punkte auf der Geraden g , und B und B' zwei Punkte auf der Geraden h , für die gilt, daß der Punkt S sowohl im Inneren der Strecke AA' als auch im Inneren der Strecke BB' liegt. Dann sind die Kreuze $\angle ASB$, $\angle A'SB$, $\angle A'SB'$ und $\angle ASB'$ alle gleich $\alpha = \angle(g; h)$, während die Kreuze $\angle BSA$, $\angle BSA'$, $\angle B'SA'$ und $\angle B'SA$ alle gleich $-\alpha = \angle(h; g)$ sind. Man muß also bei Kreuzen am Schnittpunkt zweier Geraden nicht zwischen Scheitelwinkeln und Nebenwinkeln unterscheiden, sondern nur beachten, welcher der Schenkel mit welcher der zwei Geraden zusammenfällt (d. h. die Reihenfolge spielt eine Rolle, im Allgemeinen ist $\angle(g; h) = \alpha \neq -\alpha = \angle(h; g)$).

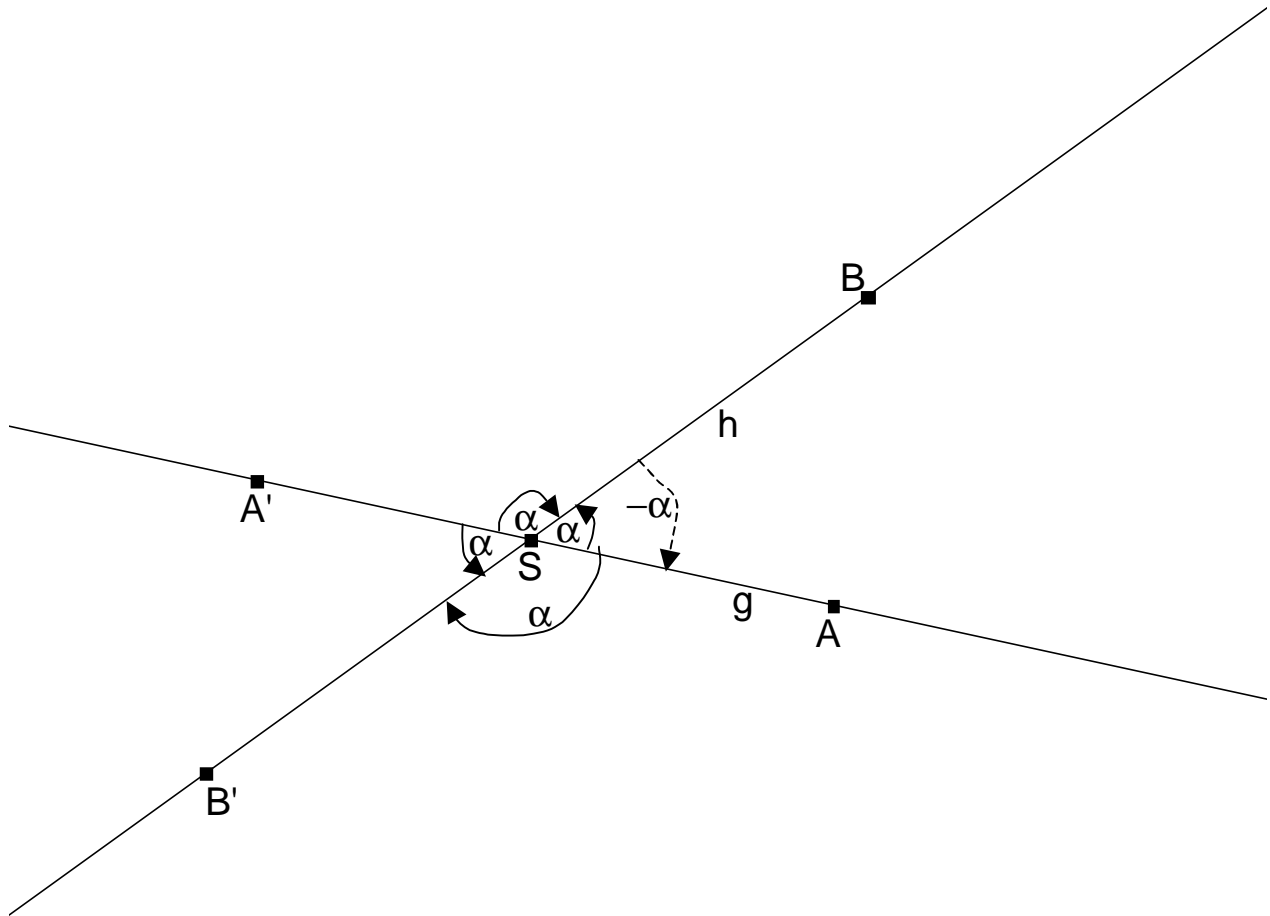


Fig. 2

Im folgenden stelle ich einige wichtige Eigenschaften von Kreuzen zusammen, meist ohne Beweis:

- Für zwei Geraden g und h gilt genau dann $\angle(g; h) = 0^\circ$, wenn diese Geraden g und h zueinander parallel sind.
- Für zwei beliebige Geraden g und h gilt stets $\angle(g; h) = -\angle(h; g)$.
- Kreuze sind **additiv**. Das heißt: Für drei beliebige Geraden g_1, g_2 und g_3 gilt: $\angle(g_1; g_2) + \angle(g_2; g_3) = \angle(g_1; g_3)$.
- Ferner gilt der **Stufenwinkelsatz**: Sind g und g' zwei parallele Geraden, und h eine andere Gerade, dann gilt $\angle(h; g) = \angle(h; g')$. Denn $\angle(h; g') = \angle(h; g) + \angle(g; g') = \angle(h; g)$, weil $\angle(g; g') = 0^\circ$ ist (denn die Geraden g und g' sind ja zueinander parallel). (Siehe Fig. 3.)

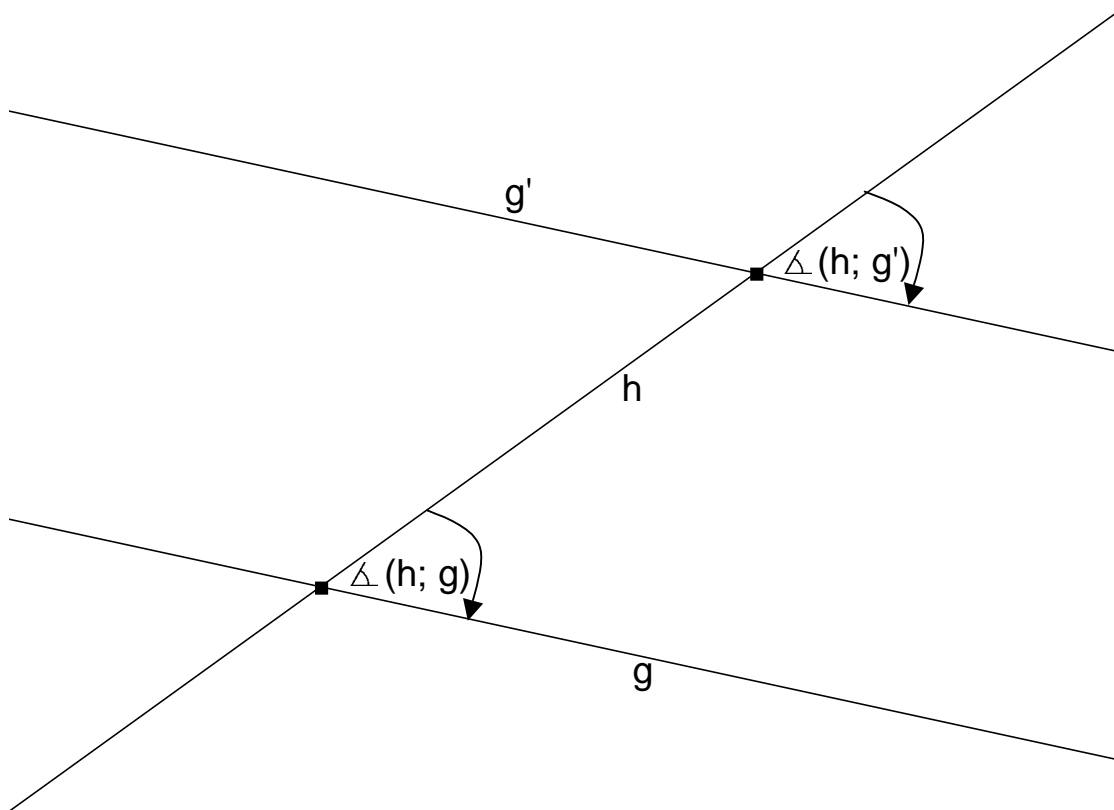


Fig. 3

- Seien X, Y und Z drei beliebige Punkte, und P ein weiterer Punkt in der Ebene. Dann gilt genau dann $\angle PXY = \angle PXZ$, wenn die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden liegen.
- Die wichtigste Eigenschaft von Kreuzen ist der **Umfangswinkelsatz**: Ist $\alpha \neq 0^\circ$ ein beliebiges Kreuz, und sind A und B zwei beliebige Punkte, dann ist der geometrische Ort aller Punkte P , für die $\angle APB = \alpha$ gilt, ein Kreis (mit Ausnahme der Punkte A und B .) (Siehe Fig. 4.)

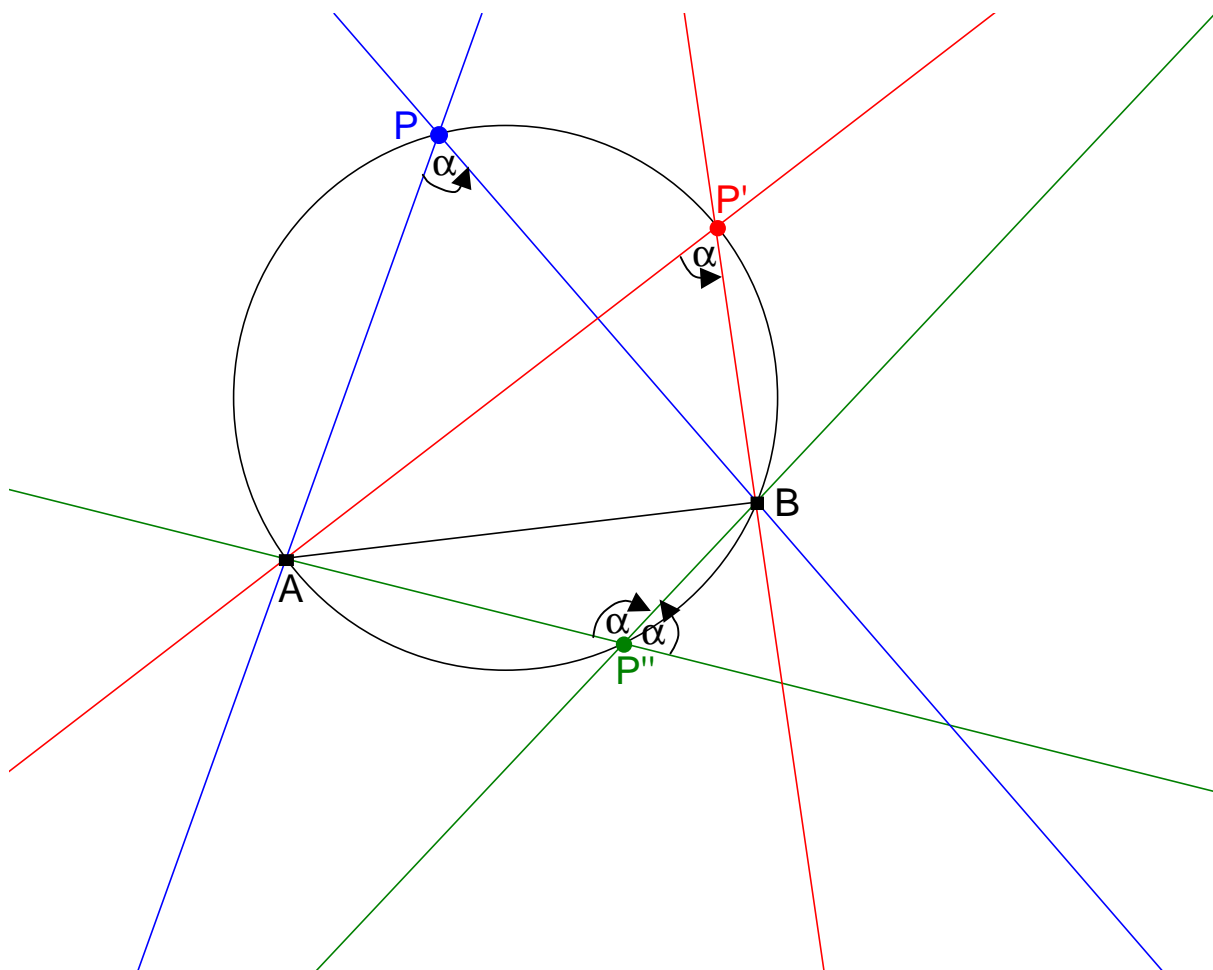


Fig. 4

Mit anderen Worten: Vier verschiedene Punkte X , Y , Z und W liegen genau dann auf einem Kreis, wenn $\angle XZY = \angle XWY$ ist. Hierbei ist es vollkommen unwesentlich, ob die Punkte Z und W in einer Halbebene bezüglich der Geraden XY liegen oder in verschiedenen Halbebenen!

- Es gilt auch ein **Sehnentangentenwinkelsatz**: Sind X , Y und Z drei Punkte auf einem Kreis, und ist x die Tangente an diesen Kreis im Punkt X , dann haben wir $\angle(XZ; x) = \angle ZYX$.
- Schließlich gilt der sogenannte **gleichsinnige WW-Ähnlichkeitssatz**:
Teil 1: Sind $\triangle XYZ$ und $\triangle X'Y'Z'$ zwei gleichsinnig ähnliche Dreiecke, dann gilt $\angle ZXY = \angle Z'X'Y'$, $\angle XYZ = \angle X'Y'Z'$ und $\angle YZX = \angle Y'Z'X'$.³
Teil 2: Sind $\triangle XYZ$ und $\triangle X'Y'Z'$ zwei Dreiecke, für die $\angle XYZ = \angle X'Y'Z'$ und $\angle XZY = \angle X'Z'Y'$ gilt, dann sind die Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$ gleichsinnig ähnlich.⁴

³*Beweis:* Da die Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$ gleichsinnig ähnlich sind, gibt es eine gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung, die das Dreieck XYZ in das Dreieck $X'Y'Z'$ überführt. Und da gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen orientierte Winkel invariant lassen, gilt somit $\angle ZXY = \angle Z'X'Y'$, $\angle XYZ = \angle X'Y'Z'$ und $\angle YZX = \angle Y'Z'X'$.

⁴*Beweis:* Man betrachte die gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung, die die Punkte Y und Z in die Punkte Y' bzw. Z' überführt. Diese Ähnlichkeitsabbildung überführe den Punkt X in einen Punkt X_1 . Da gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen orientierte Winkel invariant lassen, gilt dann $\angle X_1Y'Z' =$

Mit Kreuzen haben wir nun eine Winkelart eingeführt, die es uns ermöglicht, bei vielen Problemen auf Anordnungsüberlegungen bzw. Fallunterscheidungen bezüglich der verschiedenen Anordnungsfälle zu verzichten, weil alle Gleichungen mit Kreuzen unabhängig von den jeweiligen Anordnungsbeziehungen der Punkte und Geraden, in voller Allgemeinheit gelten. Natürlich muß man bei der Anwendung orientierter Winkel aufpassen, daß man die Orientierung nicht unabsichtlich umkehrt, oder daß man solche Winkel nicht ohne weiteres halbieren kann, und daß man keinen Sinus oder Kosinus von einem Kreuz definieren kann (wohl aber einen Tangens!). Nicht jedes Argument, das mit "gewöhnlichen" (Euklidischen) Winkeln funktioniert, geht auch mit orientierten Winkeln! Trotzdem sind Kreuze, also orientierte Winkel modulo 180° oftmals eine Hilfe, weil sie Überlegungen von der Figur unabhängig führen lassen und unselten auch langwierige Winkelrechnungen rein schreibtechnisch verkürzen und dadurch Klarheit verschaffen.

Schließlich möchte ich auf einige Quellen verweisen, in denen der Begriff des Kreuzes behandelt wird. Ausgiebige Erklärungen zu Kreuzen findet man in [1] und [2]; etwas kürzer gefaßt ist die Erklärung in [3], und in [4] treten Kreuze als "Winkelart 4" auf. Auch das Standardwerk [5] soll eine Definition von Kreuzen enthalten; ich habe das Buch allerdings noch niemals zu Gesicht bekommen, sondern nur Verweise darauf gesehen.

2. Lösung der Aufgabe

Kommen wir nun zur eigentlichen Lösung der Aufgabe:

(Wir betrachten Fig. 5.) Seien N und M die Mittelpunkte der Strecken AC_1 bzw. AC_2 . Wir wollen erstmals zeigen, daß die Punkte A , B , N und M auf einem Kreis liegen.

Die Gerade AC_2 ist die Tangente an den Kreis k_1 in dem Punkt A . Nach dem Sehnentangentenwinkelsatz gilt daher $\angle(AB; AC_2) = \angle BC_1A$. Das heißt, $\angle BAC_2 = \angle BC_1A$. Analog ist $\angle BAC_1 = \angle BC_2A$; damit können wir schreiben: $\angle BAC_2 = \angle BC_1A$ und $\angle BC_2A = \angle BAC_1$. Daraus folgt nach dem gleichsinnigen WW-Ähnlichkeitssatz (Teil 2), daß die Dreiecke BAC_2 und BC_1A zueinander gleichsinnig ähnlich sind. Nun werden ähnliche Dreiecke von entsprechenden Punkten stets in ähnliche Teildreiecke zerlegt. So sind in unseren zwei gleichsinnig ähnlichen Dreiecken BAC_2 und BC_1A die Punkte M und N entsprechende Punkte, weil M der Mittelpunkt der Seite AC_2 des ersten Dreiecks ist, während N der Mittelpunkt der Seite C_1A des zweiten Dreiecks ist. Somit zerlegen die Punkte M bzw. N die Dreiecke BAC_2 und BC_1A in ähnliche Teildreiecke. Also sind die Dreiecke BAM und BC_1N zueinander gleichsinnig ähnlich. Nach dem gleichsinnigen WW-Ähnlichkeitssatz (Teil 1) folgt daraus $\angle AMB = \angle C_1NB$. Doch $\angle C_1NB = \angle ANB$ (denn beide Kreuze $\angle C_1NB$ und $\angle ANB$ sind gleich dem Kreuz $\angle(AN; BN)$); also ist $\angle AMB = \angle ANB$. Nach dem Umfangswinkelsatz folgt daraus, daß die Punkte A , B , M und N auf einem Kreis liegen.

$\angle XYZ$ und $\angle X_1Z'Y' = \angle XZY$. Andererseits gilt nach unserer Annahme $\angle XYZ = \angle X'Y'Z'$ und $\angle XZY = \angle X'Z'Y'$. Also ist $\angle X_1Y'Z' = \angle X'Y'Z'$ und $\angle X_1Z'Y' = \angle X'Z'Y'$. Aus $\angle X_1Y'Z' = \angle X'Y'Z'$ folgt, daß der Punkt X_1 auf der Geraden $Y'X'$ liegt; aus $\angle X_1Z'Y' = \angle X'Z'Y'$ folgt, daß der Punkt X_1 auf der Geraden $Z'X'$ liegt. Somit liegt der Punkt X_1 auf den beiden Geraden $Y'X'$ und $Z'X'$, und fällt folglich mit dem Punkt X' zusammen. Also sind die Punkte X' , Y' und Z' die Bilder der Punkte X , Y bzw. Z bei unserer gleichsinnigen Ähnlichkeitsabbildung. Folglich sind die Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$ gleichsinnig ähnlich, was zu beweisen war.

Somit gilt wiederum nach dem Umfangswinkelsatz $\angle ABM = \angle ANM$.

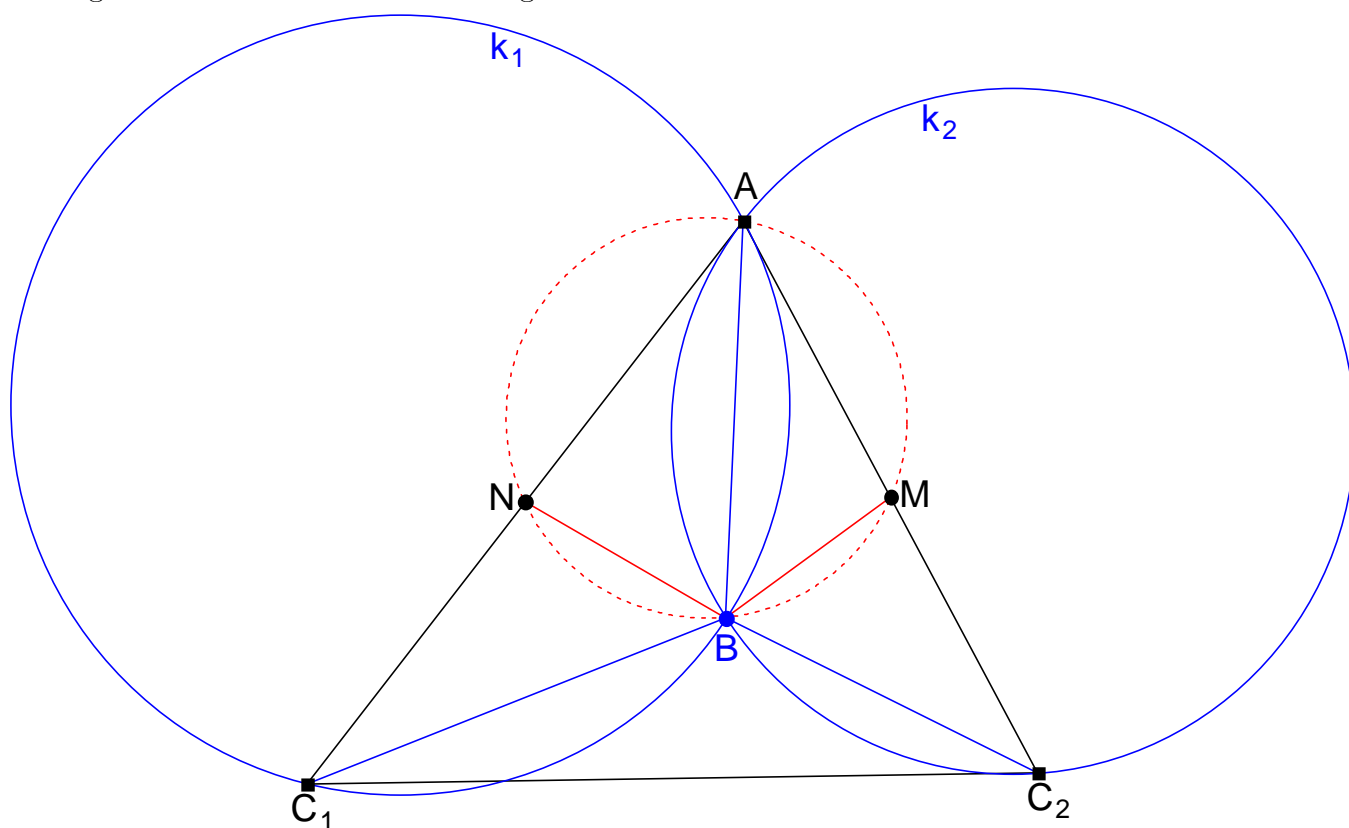


Fig. 5

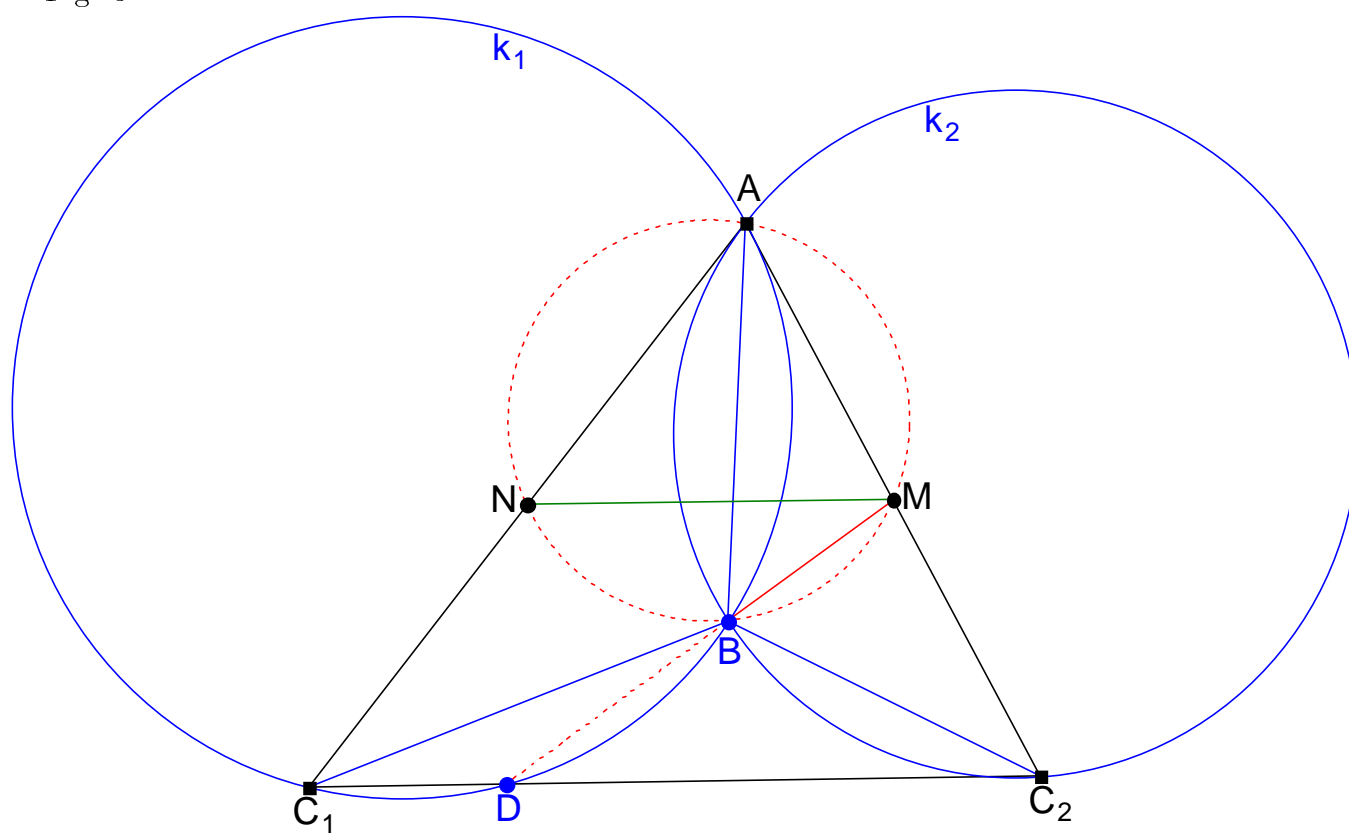


Fig. 6

(Siehe jetzt Fig. 6.) Da die Punkte N und M die Mittelpunkte der Seiten AC_1 bzw. AC_2 des Dreiecks AC_1C_2 sind, gilt nach dem Satz von der Mittelparallelen $NM \parallel C_1C_2$. Nach dem Stufenwinkelsatz ist somit $\angle (AN; NM) = \angle (AN; C_1C_2)$, also $\angle ANM = \angle AC_1C_2$. Zusammen mit $\angle ABM = \angle ANM$ ergibt dies jetzt $\angle ABM = \angle AC_1C_2$.

Andererseits liegen die Punkte A, B, D und C_1 alle auf dem Kreis k_1 ; nach dem Umfangswinkelsatz folgt daraus $\angle ABD = \angle AC_1D$. Wegen $\angle AC_1D = \angle (AC_1; C_1C_2) = \angle AC_1C_2$ ist also $\angle ABD = \angle AC_1C_2 = \angle ABM$. Also liegen die Punkte B, D und M auf einer Geraden, d. h. die Gerade BD geht durch den Mittelpunkt M der Strecke AC_2 . Das heißt, daß die Gerade BD die Strecke AC_2 halbiert. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Literaturhinweise

- [1] R. A. Johnson: *Directed angles in elementary geometry*, American Mathematical Monthly 24 (1917), S. 101-105.
- [2] Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo 180° und eine Lösung der $\sqrt{\text{WURZEL}}$ -Aufgabe κ 22 von Wilfried Haag*, eingereicht in der $\sqrt{\text{WURZEL}}$.
- [3] Jan van Yzeren: *Pairs of Points: Antigonal, Isogonal and Inverse*, Mathematics Magazine 1982, S. 339-347.
- [4] Eberhard M. Schröder: *Ein neuer Winkelbegriff für die Elementargeometrie?*, Praxis der Mathematik 9/1982, S. 257-269.
- [5] R. A. Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*, New York 1960.
- [6] Emil Donath: *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks*, Berlin 1976.

Anhang:

Die Behauptung der Aufgabe steht in einem Zusammenhang mit dem sogenannten zweiten Brocardschen Dreieck. Dieses Dreieck wird folgendermaßen definiert:

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Wir zeichnen einen Kreis, der durch die Ecken A und B geht, und die Seite CA in dem Punkt A berührt.⁵ Genauso zeichnen wir einen Kreis, der durch die Ecken C und A geht, und die Seite AB in dem Punkt A berührt. Diese beiden Kreise haben außer dem Punkt A noch einen gemeinsamen Punkt; bezeichnen wir diesen gemeinsamen Punkt mit A' . Analog konstruieren wir die Punkte B' und C' . Das Dreieck $A'B'C'$ wird dann als **zweites Brocardsches Dreieck** des Dreiecks ABC bezeichnet. Dieses Dreieck hat viele Eigenschaften; wir wollen hier nur seine eine Ecke A' untersuchen, da die Eigenschaften der beiden anderen Ecken B' und C' zu denen von A' analog sind.⁶

⁵Diesen Kreis konstruiert man wie folgt:

Sei O_1 der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke AB mit der Senkrechten zu der Geraden CA durch den Punkt A . Dann schlägt man um den Punkt O_1 einen Kreis mit dem Radius O_1A . Dieser Kreis geht dann durch den Punkt A , und berührt in diesem Punkt die Gerade CA (denn $O_1A \perp CA$); ferner geht dieser Kreis durch den Punkt B (denn da der Punkt O_1 auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt, gilt $O_1B = O_1A$). Damit haben wir den Kreis gefunden, der durch die Ecken A und B geht, und die Seite CA in dem Punkt A berührt.

⁶Es gibt auch einige Eigenschaften, die sich auf alle drei Ecken A', B' und C' zusammen beziehen, aber diese werden wir hier nicht betrachten; vergleiche bezüglich dieser Eigenschaften [6], Abschnitt V.12.

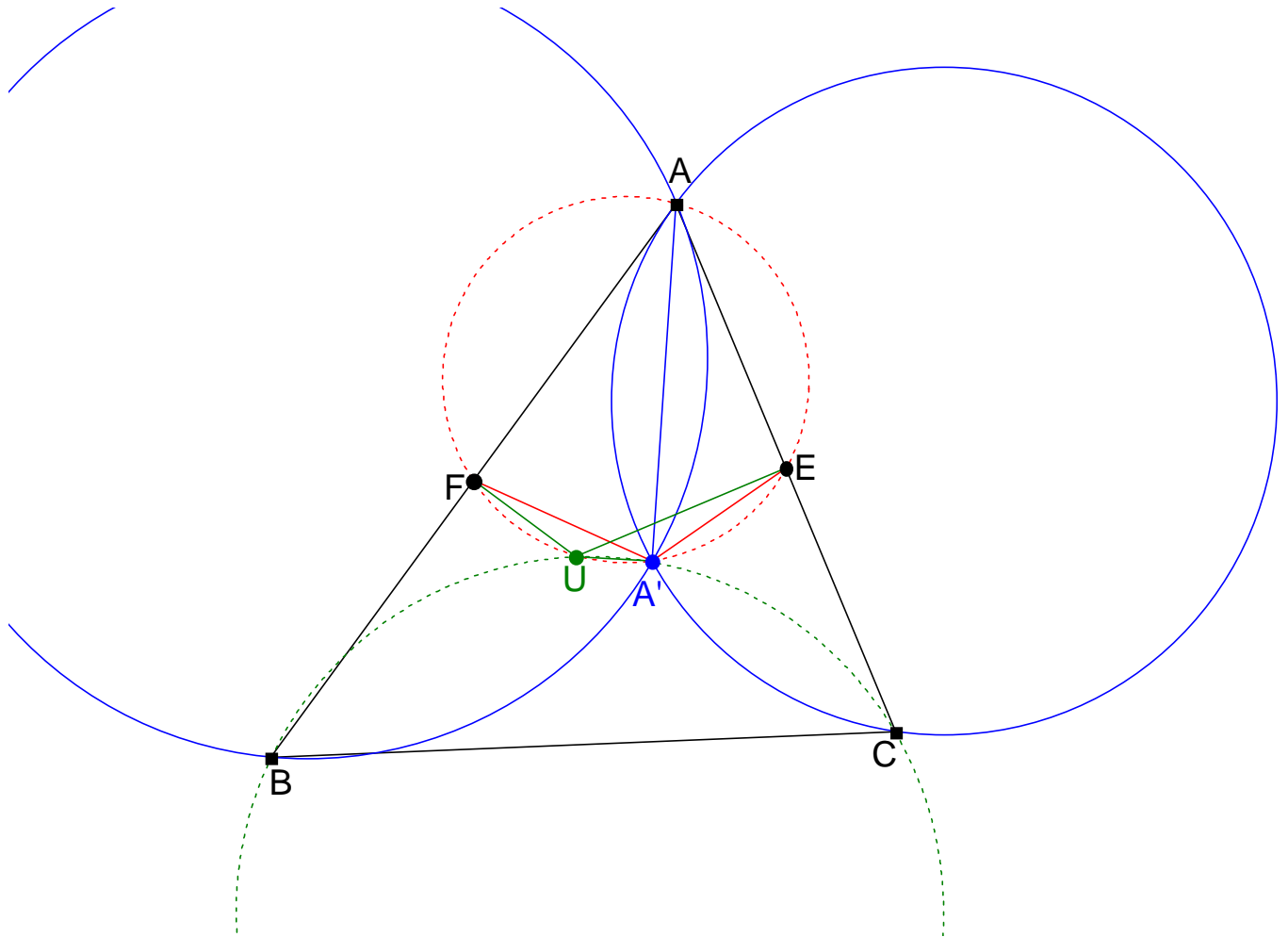


Fig. 7

Wir werden im folgenden beweisen:

Satz 1: Ist U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC , dann gilt:

- a) Der Punkt A' liegt auf dem Umkreis des Dreiecks BUC .
- b) Der Punkt A' liegt auf dem Thaleskreis über der Strecke AU . Dieser Thaleskreis geht auch durch die Mittelpunkte E und F der Seiten CA bzw. AB . (Siehe Fig. 7.)
- c) Ist X der Fußpunkt der von A ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC , dann liegt der Punkt A' auf den Umkreisen der Dreiecke BFX und CEX . (Siehe Fig. 8.)

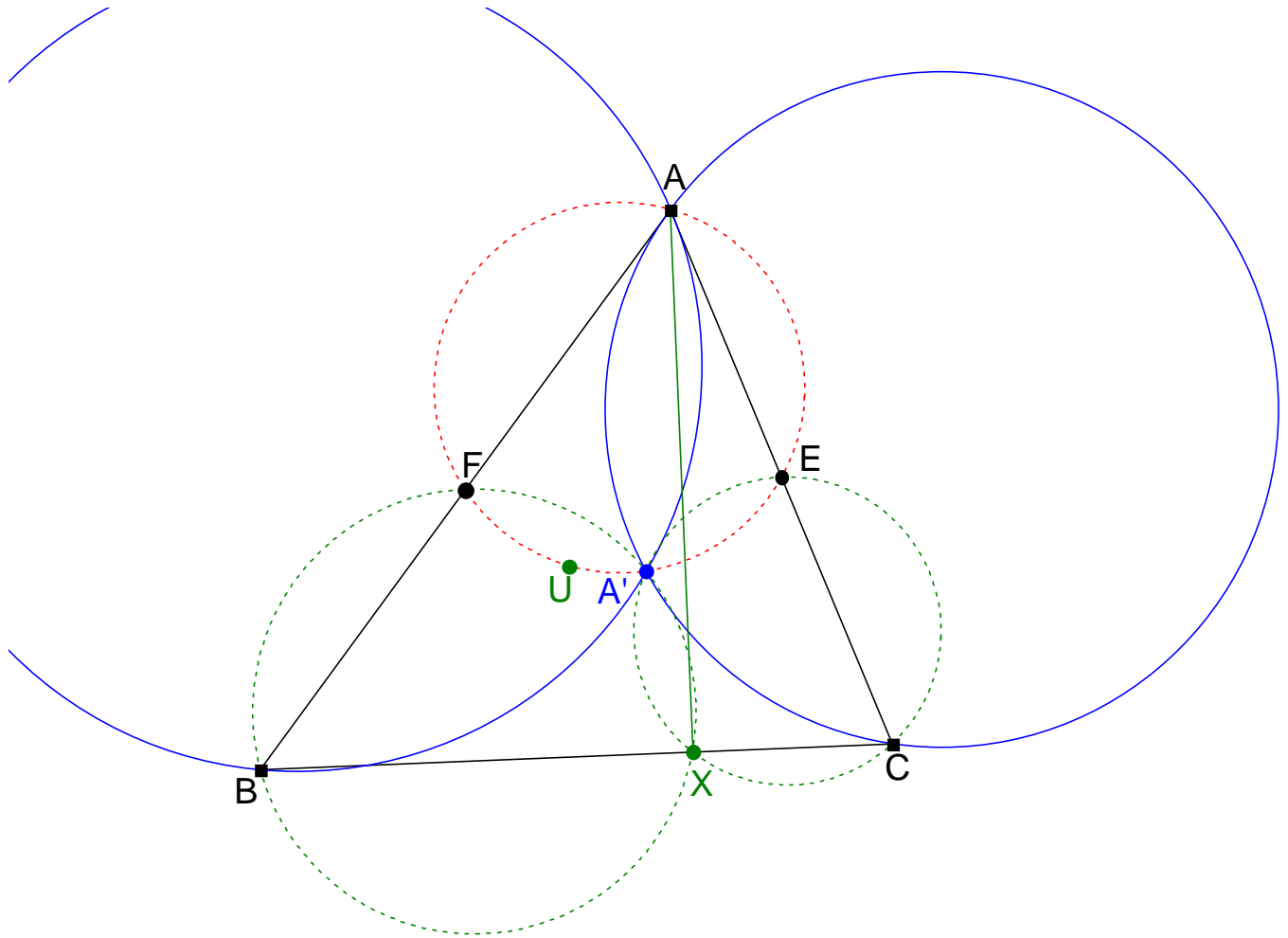


Fig. 8

d) Der Punkt A' liegt auf der von der Ecke A ausgehenden Symmediane des Dreiecks ABC .

Bemerkung: Unter einer **Symmediane** eines Dreiecks versteht man das Spiegelbild einer Seitenhalbierenden an der von derselben Dreiecksecke ausgehenden Winkelhalbierenden. Ein Dreieck hat also drei Symmedianen; von jeder Ecke geht eine aus.⁷ (Siehe Fig. 9.)

⁷Bekanntlich schneiden sich diese drei Symmedianen in einem Punkt, dem sogenannten **Lemoinepunkt** des Dreiecks. Wir gehen hier aber nicht so weit, und betrachten nur eine von den drei Symmedianen, nämlich die von der Ecke A aus.

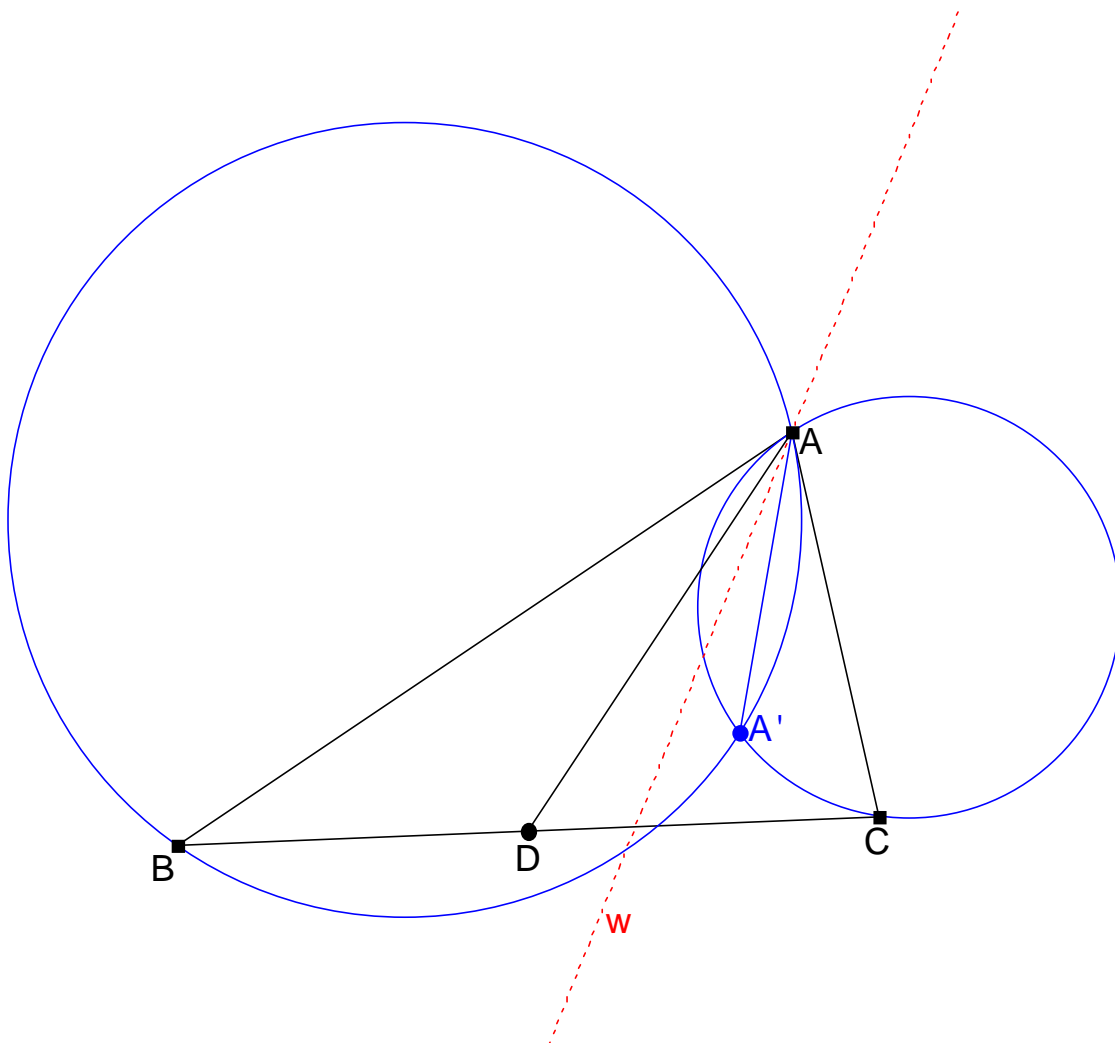


Fig. 9

Beweis: (Siehe Fig. 10.) Nach dem Sehnen tangentialenwinkelsatz ist $\angle (AB; CA) = \angle BA'A$, weil die Gerade CA den Kreis durch die Punkte B , A und A' in dem Punkt A berührt. In anderen Worten: $\angle BAC = \angle BA'A$. Analog ist $\angle CAB = \angle CA'A$. Damit haben wir

$$\angle BA'C = \angle BA'A - \angle CA'A = \angle BAC - \angle CAB = \angle BAC + \angle BAC = 2 \cdot \angle BAC.$$

Andererseits gilt für den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC nach dem Mittelpunktswinkelsatz⁸

$$\angle BUC = 2 \cdot \angle BAC,$$

weil die Punkte A , B und C auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt U ist. Damit haben wir $\angle BA'C = \angle BUC$; folglich liegen die Punkte B , C , A' und U auf einem Kreis, d. h. der Punkt A' liegt auf dem Umkreis des Dreiecks BUC . Damit ist Satz 1 a) bewiesen.

⁸Der Mittelpunktswinkelsatz für Kreiswinkel besagt:

Seien A , B und X drei Punkte auf einem Kreis und M der Mittelpunkt dieses Kreises. Dann ist $\angle AMB = 2 \cdot \angle AXB$, $\angle BAM = 90^\circ - \angle AXB$ und $\angle MBA = 90^\circ - \angle AXB$.

Nun haben wir $\angle AA'U = \angle BA'U - \angle BA'A$. Doch wir wissen, daß $\angle BA'A = \angle BAC$ ist; ferner ist $\angle BA'U = \angle BCU$, da der Punkt A' auf dem Umkreis des Dreiecks BCU liegt. Damit wird $\angle AA'U = \angle BCU - \angle BAC$. Nach dem Mittelpunktswinkelsatz ist $\angle BCU = 90^\circ - \angle CAB$ (da die Punkte A , B und C auf einem Kreis um U liegen). Damit ist

$$\angle AA'U = (90^\circ - \angle CAB) - \angle BAC = (90^\circ - \angle CAB) + \angle CAB = 90^\circ.$$

Also liegt der Punkt A' auf dem Thaleskreis über der Strecke AU . Dieser Thaleskreis geht auch durch die Punkte E und F , denn es gilt $\angle AEU = 90^\circ$ und $\angle AFU = 90^\circ$ (denn der Punkt U liegt als Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf den Mittelsenkrechten der Seiten CA und AB , woraus $UE \perp CA$ und $UF \perp AB$, also $\angle AEU = 90^\circ$ und $\angle AFU = 90^\circ$ folgt). Damit ist Satz 1 b) bewiesen.

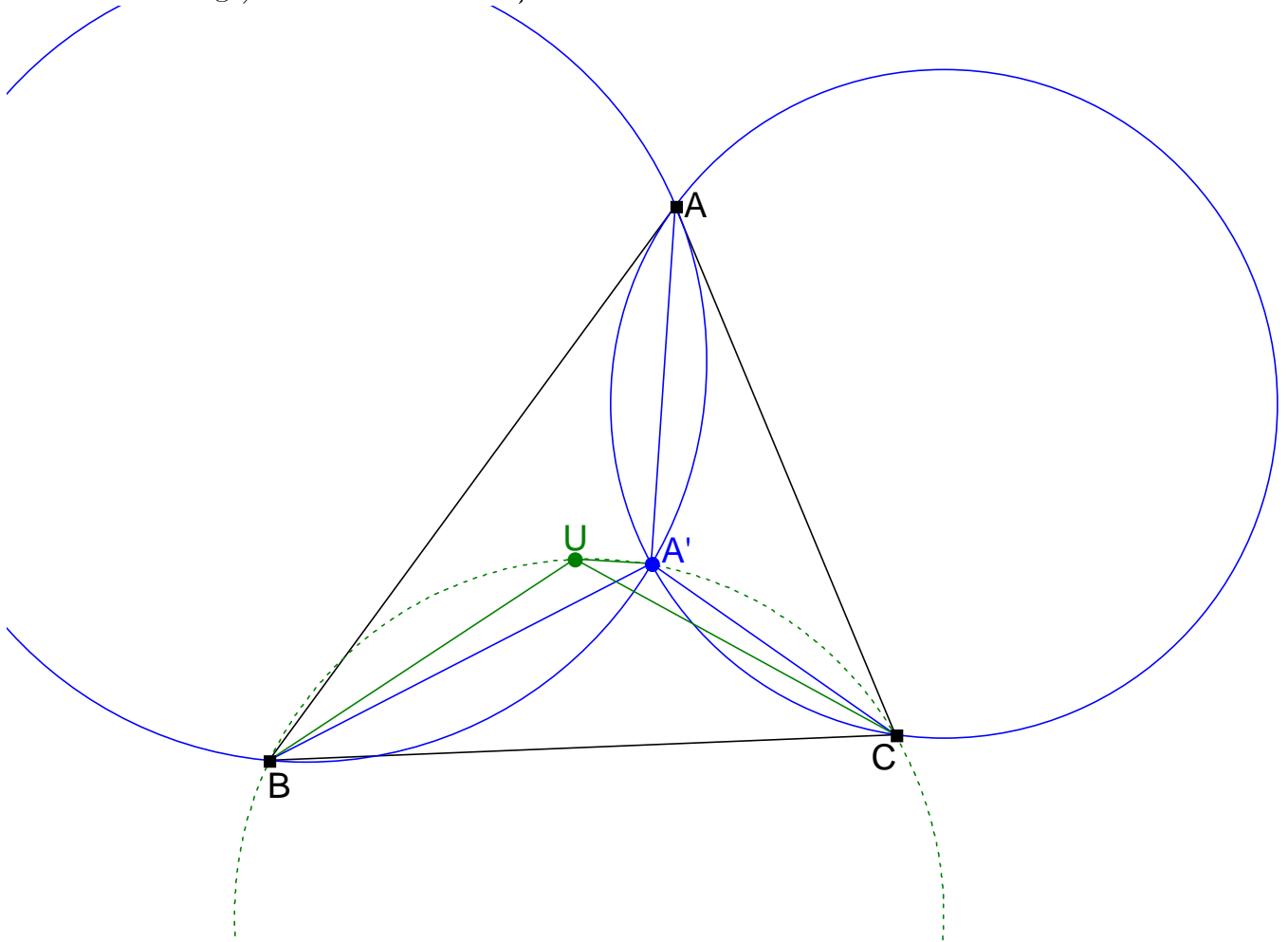


Fig. 10

(Siehe Fig. 11.) Wegen $\angle CXA = 90^\circ$ liegt der Punkt X auf dem Thaleskreis über der Strecke CA . Der Mittelpunkt dieses Thaleskreises ist der Mittelpunkt der Strecke CA , also der Punkt E , und der Radius des Thaleskreises ist EC . Damit ist $EX = EC$; somit ist das Dreieck XEC gleichschenkelig, d. h. wir haben $\angle EXC = \angle XCE$.

Wir haben $\angle EA'U = \angle EAU$, denn nach Satz 1 b) liegen die Punkte A' und E beide auf dem Thaleskreis über der Strecke AU . In anderen Worten: $\angle EA'U = \angle CAU$. Nach dem Mittelpunktswinkelsatz gilt aber $\angle CAU = 90^\circ - \angle ABC$ (da die Punkte A , B und C auf einem Kreis um den Punkt U liegen). Also erhalten wir $\angle EA'U = 90^\circ - \angle ABC$.

Ferner haben wir $\angle UA'C = \angle UBC$, weil der Punkt A' auf dem Umkreis des Dreiecks BUC liegt. Nach dem Mittelpunktswinkelsatz ist $\angle UBC = 90^\circ - \angle CAB$ (weil die Punkte A, B und C auf einem Kreis um U liegen). Somit ist $\angle UA'C = 90^\circ - \angle CAB$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\angle EA'C &= \angle EA'U + \angle UA'C = (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle CAB) \\ &= 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = -\angle ABC - \angle CAB \\ &= \angle BCA \quad (\text{denn nach der Winkelsumme ist } \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 0^\circ) \\ &= \angle XCE = \angle EXC.\end{aligned}$$

Folglich liegen die Punkte E, C, A' und X auf einem Kreis, d. h. der Punkt A' liegt auf dem Umkreis des Dreiecks CEX . Analog liegt der Punkt A' auf dem Umkreis des Dreiecks BFX . Somit haben wir Satz 1 c) bewiesen.

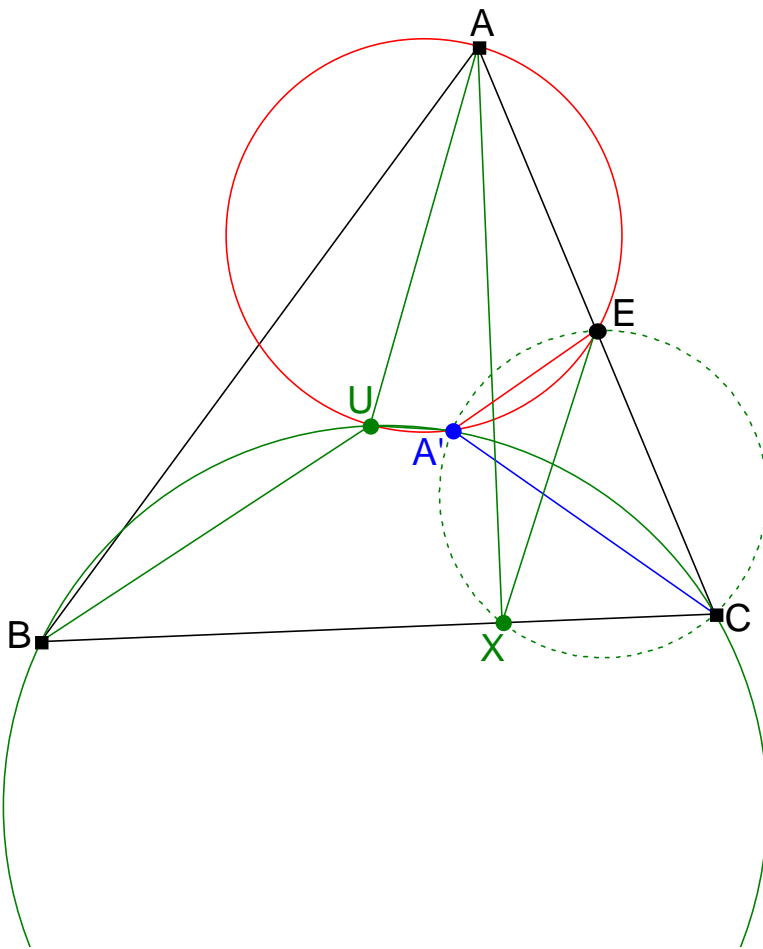


Fig. 11

Der Beweis von Satz 1 d) ist wesentlich schwieriger mit Kreuzen zu führen. Ein Beweis durch Bestimmung einiger Längenverhältnisse findet sich in [6], S. 73.

Nun will ich auf die bereits angekündigte Verbindung von Satz 1 mit der Aufgabe 3 eingehen.

Betrachten wir unser Dreieck AC_1C_2 aus der Aufgabenstellung. Der Kreis, der durch die Ecken A und C_1 geht, und die Seite C_2A in dem Punkt A berührt, ist der Kreis k_1 . Der Kreis, der durch die Ecken C_2 und A geht, und die Seite AC_1 in dem Punkt A berührt, ist der Kreis k_2 . Der von A verschiedene gemeinsame Punkt dieser

zwei Kreise ist B . Dann können wir Satz 1 anwenden und erhalten einige interessante Eigenschaften der Konfiguration von der Aufgabenstellung. Unter anderem folgt aus Satz 1 **b)**, daß der Punkt B auf dem Thaleskreis über der Strecke AU liegt, wobei U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AC_1C_2 ist, und daß dieser Thaleskreis auch durch die Mittelpunkte der Seiten C_2A und AC_1 dieses Dreiecks geht. Nun sind diese Mittelpunkte aber genau unsere zwei Punkte M und N ; also erhalten wir, daß unser Punkt B auf dem Thaleskreis über der Strecke AU liegt, und daß dieser Thaleskreis auch durch die Punkte M und N geht. Damit haben wir einen neuen Beweis gefunden für unser in der Lösung verwendetes Hilfsresultat, daß die Punkte A , B , N und M auf einem Kreis liegen.