

## Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 2. Runde, Aufgabe 1

Es sei  $k$  eine positive ganze Zahl. Eine natürliche Zahl heiße  **$k$ -typisch**, wenn jeder ihrer Teiler bei Division durch  $k$  den Rest 1 läßt.

Man beweise:

**a)** Wenn die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl  $n$  (einschließlich der Teiler 1 und  $n$ )  $k$ -typisch ist, dann ist  $n$  die  $k$ -te Potenz einer ganzen Zahl.

**b)** Die Umkehrung der Aussage **a)** ist falsch, wenn  $k$  größer als 2 ist.

### Lösung von Darij Grinberg:

Wir beginnen mit dem folgenden Satz:

**Satz 1:** Ist  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$  die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl  $n$  (wobei  $p_1, p_2, \dots, p_t$  Primzahlen sind, und  $a_1, a_2, \dots, a_t$  natürliche Exponenten), dann ist die Anzahl aller Teiler der Zahl  $n$  (einschließlich der Teiler 1 und  $n$ ) gleich

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1).$$

*Beweis:* Ist  $k$  ein Teiler von  $n$ , dann kann  $k$  nicht durch eine Primzahl teilbar sein, die nicht in der Menge  $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$  enthalten ist.<sup>1</sup> Also gehören alle Primteiler der Zahl  $k$  zu der Menge  $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$ . Damit kann man die Primfaktorzerlegung der Zahl  $k$  in der Form  $k = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$  schreiben, wobei auch einige der Exponenten  $b_1, b_2, \dots, b_t$  Null sein können. Man sieht leicht, daß für jedes natürliche  $i$  mit  $1 \leq i \leq t$  stets  $0 \leq b_i \leq a_i$  gelten muß.<sup>2</sup> Damit kann man jeden Teiler der Zahl  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$  in der Form  $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$  schreiben mit ganzen  $b_i$ , die die Ungleichung  $0 \leq b_i \leq a_i$  für jedes  $i$  erfüllen. Umgekehrt gilt: Ist  $s$  eine Zahl der Form  $s = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$ , wobei die Zahlen  $b_i$

---

<sup>1</sup>*Beweis:* Wäre  $k$  durch eine Primzahl  $p'$  teilbar, die nicht in der Menge  $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$  enthalten ist, müßte, da  $k$  ein Teiler von  $n$  ist, die Zahl  $n$  auch durch diese Primzahl  $p'$  teilbar sein; würde man jetzt die Zahl  $\frac{n}{p'}$  in Primfaktoren zerlegen, und die entstandene Primfaktorzerlegung mit  $p'$  multiplizieren, erhielte man eine Primfaktorzerlegung für  $n$ , in der die Primzahl  $p'$  vorkommt. Aber wir haben bereits eine Primfaktorzerlegung für  $n$ , in der die Primzahl  $p'$  nicht vorkommt (und zwar die Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ ). Damit hat die Zahl  $n$  zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen; dies ist ein Widerspruch. Also kann die Zahl  $k$  nicht durch eine Primzahl teilbar sein, die nicht in der Menge  $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$  enthalten ist.

<sup>2</sup>*Beweis:* Da die Zahl  $k$  ein Teiler von  $n$  ist, ist die Zahl  $\frac{n}{k}$  natürlich und ebenfalls ein Teiler von  $n$ . Nach dem vorhergesagten müssen die Primfaktorzerlegungen der Zahlen  $k$  und  $\frac{n}{k}$  sich als  $k = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$  bzw.  $\frac{n}{k} = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_t^{c_t}$  schreiben lassen. Damit ist

$$n = k \cdot \frac{n}{k} = \left( p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t} \right) \cdot \left( p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_t^{c_t} \right) = p_1^{b_1+c_1} p_2^{b_2+c_2} \dots p_t^{b_t+c_t}.$$

Damit haben wir eine Primfaktorzerlegung für die Zahl  $n$  gefunden. Wir kennen aber bereits die Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ . Da die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist, müssen die beiden Primfaktorzerlegungen  $n = p_1^{b_1+c_1} p_2^{b_2+c_2} \dots p_t^{b_t+c_t}$  und  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$  völlig übereinstimmen, d. h. es muß  $b_i + c_i = a_i$  für jedes  $i$  sein. Da nun  $c_i \geq 0$  ist, ist  $b_i + c_i \geq b_i$ , also  $a_i \geq b_i$ , und damit  $b_i \leq a_i$ . Daß  $0 \leq b_i$  ist, ist trivial (Primfaktorzerlegungen enthalten keine negativen Potenzen).

ganz sind und die Ungleichung  $0 \leq b_i \leq a_i$  für jedes  $i$  erfüllen, dann ist die Zahl  $s$  ein Teiler der Zahl  $n$ ; denn es gilt

$$\frac{n}{s} = \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}}{p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}} = p_1^{a_1-b_1} p_2^{a_2-b_2} \dots p_t^{a_t-b_t} \in \mathbb{N},$$

weil aus  $b_i \leq a_i$  für jedes  $i$  die Ungleichung  $a_i - b_i \geq 0$  folgt, und damit  $p_i^{a_i-b_i} \in \mathbb{N}$  ist.

Also ist eine Zahl  $k$  genau dann ein Teiler der Zahl  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ , wenn sie sich in der Form  $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$  schreiben läßt mit ganzen  $b_i$ , die die Ungleichung  $0 \leq b_i \leq a_i$  für jedes  $i$  erfüllen. Damit ist jedem Teiler der Zahl  $n$  genau ein  $t$ -Tupel  $(b_1; b_2; \dots; b_t)$  zugeordnet, dessen Elemente alle ganze Zahlen sind und die Ungleichung  $0 \leq b_i \leq a_i$  für jedes  $i$  erfüllen.<sup>3</sup> Umgekehrt entspricht jedem solchen  $t$ -Tupel  $(b_1; b_2; \dots; b_t)$  genau ein Teiler der Zahl  $n$ . Somit ist die Anzahl der Teiler der Zahl  $n$  gleich der Anzahl von  $t$ -Tupeln  $(b_1; b_2; \dots; b_t)$ , deren Elemente alle ganze Zahlen sind und die Ungleichung  $0 \leq b_i \leq a_i$  für jedes  $i$  erfüllen. Nach der Produktregel ist aber die Anzahl solcher Tupel gleich  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$  (denn es bestehen  $a_1 + 1$  Möglichkeiten für die Wahl des ersten Elements  $b_1$ , dann  $a_2 + 1$  Möglichkeiten für die Wahl des zweiten Elements  $b_2$ , usw., schließlich  $a_t + 1$  Möglichkeiten für die Wahl des letzten Elements  $b_t$ ). Also ist auch die Anzahl der Teiler der Zahl  $n$  gleich  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$ . Somit ist Satz 1 bewiesen.

Kommen wir jetzt zur Lösung von Aufgabe **a)**:

Angenommen, die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl  $n$  sei  $k$ -typisch. Nach Satz 1 bedeutet dies: Wenn  $n$  die Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$  hat, dann ist die Zahl  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$  eine  $k$ -typische Zahl. Das heißt, jeder Teiler dieser Zahl  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$  muß bei Division durch  $k$  den Rest 1 lassen. Unter anderem lassen also die Teiler  $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_t + 1$  jeweils bei Division durch  $k$  den Rest 1. Das heißt, die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_t$  sind alle durch  $k$  teilbar. Sei  $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \dots, a_t = kb_t$ ; dabei sind  $b_1, b_2, \dots, b_t$  nichtnegative ganze Zahlen. Dann ist

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} = p_1^{kb_1} p_2^{kb_2} \dots p_t^{kb_t} = (p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t})^k.$$

Die Zahl  $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$  ist ganz; also ist  $n$  die  $k$ -te Potenz einer ganzen Zahl, was zu beweisen war.

Jetzt werden wir Aufgabe **b)** lösen. Diese Aufgabe ist etwas mißverständlich formuliert: Die Aussage der Aufgabe **a)** (strenggenommen handelt es sich dabei um eine Aussageform mit  $k$  als Parameter) lautet:

”Wenn die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl  $n$  (einschließlich der Teiler 1 und  $n$ )  $k$ -typisch ist, dann ist  $n$  die  $k$ -te Potenz einer ganzen Zahl.”

Nicht klar ist nun, ob man zeigen muß, daß *nicht für jedes*  $k > 2$  die Umkehrung dieser Aussage gilt, oder ob man zeigen muß, daß *für jedes*  $k > 2$  die Umkehrung dieser Aussage *nicht gilt*. Wir werden im folgenden die stärkere dieser beiden Behauptungen beweisen, nämlich die Behauptung, daß *für jedes*  $k > 2$  die Umkehrung dieser Aussage *nicht gilt*.

---

<sup>3</sup>Einem Teiler von  $n$  können nicht zwei verschiedene solche  $t$ -Tupel zugeordnet sein, denn jedes  $t$ -Tupel gibt eineindeutig die Exponenten in der Primfaktorzerlegung des Teilers an, und eine Zahl kann nicht zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen haben.

Und zwar betrachten wir für jedes  $k > 2$  die Zahl  $n = (2^{k-2})^k$ . Diese Zahl  $n$  ist die  $k$ -te Potenz einer ganzen Zahl; wir wollen zeigen, daß sie *nicht*  $k$ -typisch ist. Dazu rechnen wir  $n = (2^{k-2})^k = 2^{(k-2)k}$ . Dies ist die Primfaktorzerlegung der Zahl  $n$ . Nach Satz 1 ist also die Anzahl der Teiler von  $n$  gleich  $\delta = (k-2)k + 1$ . Wir wollen zeigen, daß diese Zahl  $\delta$  nicht  $k$ -typisch ist. Dazu müssen wir einen Teiler von  $\delta$  finden, der bei Division durch  $k$  nicht den Rest 1 läßt. Und zwar ist  $\delta = (k-2)k + 1 = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$ ; also ist die Zahl  $\delta$  teilbar durch  $k-1$ . Doch die Zahl  $k-1$  läßt bei Division durch  $k$  sicher nicht den Rest 1 (sie ist ihr eigener Rest bei Division durch  $k$ , da sie kleiner als  $k$  ist, und sie ist nicht gleich 1, weil  $k > 2$  ist). Damit ist die Zahl  $n$  nicht  $k$ -typisch, und folglich haben wir die Umkehrung der Aussage **a)** für jedes  $k > 2$  widerlegt.