

Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 2. Runde, Aufgabe 4

Man beweise, daß es unendlich viele Paare $(x; y)$ verschiedener positiver rationaler Zahlen gibt, für die sowohl die Zahl $\sqrt{x^2 + y^3}$ als auch die Zahl $\sqrt{x^3 + y^2}$ rational ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir nennen ein Zahlenpaar $(x; y)$ **nett**, wenn die beiden Zahlen x und y positiv, rational und voneinander verschieden sind, und wenn sowohl die Zahl $\sqrt{x^2 + y^3}$ als auch die Zahl $\sqrt{x^3 + y^2}$ rational ist. Dann müssen wir zeigen, daß es unendlich viele nette Zahlenpaare gibt.

Sei r eine beliebige rationale Zahl mit $r > 1$. Ferner definieren wir

$$u = \frac{2(r-1)}{r^3-1}; \quad x = u(u+2r); \quad y = rx.$$

Dann ist $u > 0$ (denn in dem Bruch $\frac{2(r-1)}{r^3-1}$ sind Zähler und Nenner beide positiv, da ja $r > 1$ ist). Außerdem ist $x > 0$ (denn $x = u(u+2r)$ mit $u > 0$ und $r > 0$) und $y > 0$ (denn $y = rx$ bei $r > 0$ und $x > 0$). Ferner ist $y \neq x$ (denn wegen $x > 0$ folgt aus der Ungleichung $r > 1$ auch $rx > x$, also $y > x$ und damit $y \neq x$). Schließlich sind die Zahlen u , x und y rational, da sie durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division rationaler Zahlen entstehen (die Zahl r ist ja definitionsgemäß rational).

Außerdem ist

$$\begin{aligned} (r^3-1)u &= (r^3-1) \frac{2(r-1)}{r^3-1} = 2(r-1), & \text{also} \\ r^3u - u &= 2(r-1), & \text{und} \quad r^3u = 2(r-1) + u = 2r - 2 + u. \end{aligned}$$

Folglich ist $1 + r^3u = 1 + (2r - 2 + u) = u + 2r - 1$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} (1 + r^3u)^2 &= (1 + r^3u) \cdot (1 + r^3u) = (1 + r^3u) + r^3u \cdot (1 + r^3u) \\ &= (1 + r^3u) + r^3u \cdot (u + 2r - 1) = (1 + r^3u) + r^3u \cdot (u + 2r) - r^3u \\ &= 1 + r^3u \cdot (u + 2r) = 1 + r^3 \cdot u(u + 2r) = 1 + r^3x. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$x^2 + y^3 = x^2 + (rx)^3 = x^2 + r^3x^3 = x^2(1 + r^3x) = x^2(1 + r^3u)^2 = (x(1 + r^3u))^2.$$

Wegen $x > 0$, $r > 0$ und $u > 0$ ist $x(1 + r^3u) > 0$; also ergibt sich $\sqrt{x^2 + y^3} = x(1 + r^3u) \in \mathbb{Q}$.

Ferner ist

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 &= x^3 + (rx)^2 = x^3 + r^2x^2 = x^2(x + r^2) = x^2(u(u+2r) + r^2) = x^2(u^2 + u \cdot 2r + r^2) \\ &= x^2(u^2 + 2ur + r^2) = x^2(u+r)^2 = (x(u+r))^2. \end{aligned}$$

Wegen $x > 0$, $u > 0$ und $r > 0$ ist $x(u+r) > 0$; also folgt hieraus $\sqrt{x^3+y^2} = x(u+r) \in \mathbb{Q}$.

Also erfüllt das Zahlenpaar $(x; y)$ alle Bedingungen, die ein nettes Zahlenpaar kennzeichnen: Die Zahlen x und y sind positiv, rational und voneinander verschieden, und die zwei Zahlen $\sqrt{x^2+y^3}$ und $\sqrt{x^3+y^2}$ sind beide rational. Somit ist das Zahlenpaar $(x; y)$ nett. Bezeichnen wir dieses Zahlenpaar mit n_r , wobei r unsere eingangs willkürlich gewählte rationale Zahl > 1 ist. Sind jetzt nun r_1 und r_2 zwei verschiedene rationale Zahlen größer als 1, dann sind die zwei dazugehörigen Zahlenpaare n_{r_1} und n_{r_2} voneinander verschieden. (*Beweis:* Wären diese Zahlenpaare gleich, dann könnten wir sie mit $(x; y)$ bezeichnen, und würden einerseits $y = r_1x$, andererseits aber $y = r_2x$ erhalten. Da die Zahlen x und y positiv sein müssen - das ist eine Voraussetzung für ein nettes Zahlenpaar -, könnten wir dann durch x teilen, und erhielten $r_1 = \frac{y}{x}$ und $r_2 = \frac{y}{x}$, also $r_1 = r_2$, was im Widerspruch steht zu der Annahme, daß die Zahlen r_1 und r_2 verschieden sind.) Also entspricht jeder rationalen Zahl $r > 1$ ein nettes Zahlenpaar n_r , und alle auf diese Weise erhaltenen Zahlenpaare sind paarweise verschieden. Damit haben wir die Existenz unendlich vieler netter Zahlenpaare bewiesen.

Anhang:

Die Frage, ob es unendlich viele nette Zahlenpaare $(x; y)$ mit *natürlichen* Zahlen x und y gibt, bleibt für mich offen. Einige solche Zahlenpaare sind $(13; 78)$, $(21; 42)$, $(45; 90)$, $(57; 76)$ und $(112; 336)$ (und natürlich die Paare, die aus diesen 5 Paaren durch Vertauschen von x und y entstehen).